ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.987.1

Манита Оксана Анатольевна

Нелинейные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для мер

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Богачев Владимир Игоревич**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Белопольская Яна Исаевна, профессор кафедры математики
Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета,

доктор физико-математических наук, доцент
Федоровский Константин Юрьевич, профессор кафедры прикладной математики
Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

Ведущая организация:

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 11 марта 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова» по адресу Москва, Ломоносовский проспект, 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета:
`http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi`

Автореферат разослан января 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ, доктор физико-математических наук, профессор **Власов Виктор Валентинович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика диссертационной работы находится на стыке функционального анализа и теории меры с теорией уравнений с частными производными и теорией диффузионных процессов и посвящена применениям конструкций, связанных с метриками и топологиями на пространствах мер и с теоремами о неподвижных точках в таких пространствах, к качественному анализу уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (далее ФПК) относительно конечных мер. Уравнения ФПК, т. е. параболические уравнения для вероятностных мер вида (с суммированием по повторяющимся индексам)

$$\partial_t \mu_t = \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu \tag{1}$$

являются одними из самых часто используемых уравнений в теории случайных процессов и статистической механике и физике. В частности, они появляются в теории среднего поля и смежных вопросах. Традиционно матрица (a^{ij}) называется матрицей диффузии и предполагается симметричной и неотрицательно определенной, векторное поле $b = (b^i)$ называется сносом. Подобные уравнения относительно плотностей мер появились уже в начале XX века в работах А. Фоккера[1], М. Планка[2] и А.Н. Колмогорова[3]. В последующие десятилетия исследования подобных задач продолжили многие другие видные ученые, в том числе М. Смолуховский, С. Чэпмен, И.Г. Петровский, У. Феллер, Дж. Нэш, Ю. Мозер, Л. Хёрмандер, О.А. Ладыженская, О.А. Олейник, А. Фридман. Нелинейные уравнения такого вида впервые введены А.А. Власовым[4]. Исследованиями линейных и нелинейных уравнений ФПК и близкими проблемами занимаются многие известные российские исследователи, назовем лишь Н.Н. Уральцеву, В.А. Солонникова, Е.В. Радкевича, Н.В. Крылова, Я.И. Белопольскую, А.Ю. Веретенникова, Ю.Е. Гликлиха, В.Н. Денисова, А.И. Назарова, А.А. Арсеньева, А.К. Гущина, В.В. Жикова, А.В. Фурсикова, В.В. Козлова, С.В. Шапошникова. Подробную библиографию можно найти в недавней книге Богачева, Крылова, Рёкнера, Шапошникова[5].

Уравнения ФПК описывают эволюцию начальной меры ν под действием потока, задаваемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений или системой стохастических дифференциальных уравнений и обобщают сразу несколько важных для приложений классов уравнений: транспортное уравнение[6,7], уравнение Власова (уравнения движения в самосогласованном силовом поле[8,9] и его обобщения[10,11]), линейное уравнение Фоккера – Планка (обратное уравнение Колмогорова для распределений марковского процесса) и задача Коши

[1]Fokker A. *Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld*. Ann. Phys., 1914, v. 348, №5, p. 810–820.

[2]Planck M. *Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie*. Sitzungberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1917, S. 324–341.

[3]Колмогоров А.Н. *Об аналитических методах в теории вероятностей*. Успехи мат. наук, 1938, т. V, с. 5–41.

[4]Власов А. А. *О вибрационных свойствах электронного газа*. ЖЭТФ, 1938, т. 8, №3, с. 291.

[5]Богачев В.И., Крылов Н.В., Рёкнер М., Шапошников С.В. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. М. – Ижевск, 2013.

[6]Ambrosio L. *Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields*. Lecture Notes in Math., 2008, v. 1927, p. 2–41.

[7]Maniglia S. *Probabilistic representation and uniqueness results for measure-valued solutions of transport equation*. J. Math. Pures Appl., 2007, v. 87. p. 601–626.

[8]Козлов В.В. *Обобщенное кинетическое уравнение Власова*. Успехи мат. наук, 2008, т. 63, №4, с. 93—130.

[9]Добрушин Р.Л. *Уравнения Власова*. Функц. анал. и его прил., 1979, т. 13, № 2. С. 48–58.

[10]Carrillo J.A., McCann R.J., Villani C. *Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy, dissipation and mass transportation estimates*. Rev. Math. Iberoamericana, 2003, v. 19, p. 971–1018.

[11]Carrillo J.A., Difrancesco M., Figalli A., Laurent T., Slepcev D. *Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for non-local interaction equations*. Duke Math. J., 2011, v. 156, № 2, p. 229–271.

для распределений решения уравнения МакКина – Власова[12,13], т. е. стохастического дифференциального уравнения для нелинейных марковских процессов. Заметим, что в естественных и важных примерах коэффициенты в уравнениях ФПК негладкие или неограниченные.

В последние десятилетия значительное внимание уделяется исследованию уравнений со сносом, являющимся сверткой меры с градиентом выпуклой функции. Выявляются все новые связи этих уравнений с различными областями математики, а также изучается внутренняя структура этих уравнений (например, представление уравнения через градиентный поток[14] и связи с теорией больших уклонений[15]).

В случае негладких и вырожденных коэффициентов более продуктивным оказывается изучение уравнений ФПК относительно мер, а не их плотностей (которых может и не быть). В частности, в ряде моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа Власова, плотность решения исчезает в конечный момент времени[11]. Кроме того, подход к уравнениям ФПК как к уравнениям относительно мер позволяет анализировать уравнения в бесконечномерных пространствах и распространять на них конечномерные результаты. Во всех этих ситуациях основную роль играют топологии и метрики на пространствах вероятностных мер типа метрики Канторовича[16,17], что весьма характерно и для данной работы.

Несмотря на обширную литературу, посвященную данной тематике, практически нет общих результатов существования и единственности в случае нелипшицевых и быстро растущих коэффициентов. Стоит отметить работу[18], в которой для уравнения с коэффициентами общего вида установлено существование глобального решения уравнения с помощью изучения соответствующей мартингальной задачи. В работах[10,19] нелинейные транспортные уравнения с коэффициентами типа сверток также исследуются в пространстве мер с подходящей метрикой Канторовича, причем решения уравнения рассматриваются как геодезические. Однако такой подход сильно использует специфический вид коэффициентов.

В первой главе диссертации изучается разрешимость нелинейных уравнений ФПК относительно мер в конечномерных пространствах без использования конкретной структуры коэффициентов. Тем не менее полученные результаты покрывают многие типичные примеры. Главное отличие полученных в диссертации результатов от известных ранее состоит в том, что не накладывается явных ограничений на рост коэффициентов уравнения, а предполагается только существование функции Ляпунова. Также получены оценки времени существования решений. Важным достижением является то, что рассмотрен сложный случай вырождающейся матрицы диффузии и для него получены достаточные условия существования и единственности решений.

---

[12]McKean H.P. *Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations*. Lecture Series in Differential Equations, Catholic Univ. 1967, session 7, p. 177–194.

McKean H.P. *A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1966, v. 56, p. 1907–1911.

[13]Veretennikov A.Yu. *On ergodic measures for McKean–Vlasov stochastic equations*. In: “Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004”, 2006, p. 471–486.

[14]Jordan R., Kinderlehrer D., Otto F. *The variational formulation of the Fokker–Planck equation*. SIAM J. Math. Anal, 1999, v. 29, p. 1–17.

[15]Adams S., Dirr N., Peletier M.A., Zimmer J. *Large deviations and gradient flows*. Phil. Trans. Royal Society A., 2013, v. 371, 20120341.

[16]Богачев В.И. *Основы теории меры*. Т. 2. М. – Ижевск, 2006.

[17]Богачев В.И., Колесников А.В. *Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы*. Успехи мат. наук, 2012, т. 67, №5, с. 3–110.

[18]Funaki T. *A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations*. Z. Wahr. theor. verw. Geb., 1984, B. 67, № 3, S. 331–348.

[19]Lorenz T. Mutational analysis: a joint framework for Cauchy problems in and beyond vector spaces. Lecture Notes in Math., v. 1996, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

Традиционно уравнения ФПК рассматриваются для вероятностных мер, заданных на всем пространстве. Однако для приложений часто полезно решать уравнения для мер, заданных на открытых множествах. Это позволяет, в частности, сводить вопросы разрешимости уравнений с сингулярными коэффициентами к уравнениям относительно мер на меньшем множестве, но с более регулярными коэффициентами. В этой связи стоит отметить работу[20], в которой исследуются диффузионные процессы на областях.

Во второй главе диссертации изучается разрешимость линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым на открытых множествах в конечномерном пространстве. Получены достаточные условия существования и единственности решений подобных уравнений, а также условия, при которых решение оказывается вероятностным. Полученные условия и результаты покрывают большое число конкретных примеров из ряда смежных областей математики.

Уравнения для мер и естественные вопросы существования, единственности и качественных свойств решений имеют смысл не только для мер, заданных на конечномерных, но и на бесконечномерных пространствах. Связь со случайными процессами и переходными вероятностями решений стохастических уравнений с частными производными здесь особенно важна, поскольку в бесконечномерном случае теряются многие физические аналогии и описания (например, уравнение среднего поля теряет наглядную физическую интерпретацию). Тем не менее, несмотря на растущий в последние годы интерес к стохастическим уравнениям с частными производными, изучению бесконечномерных уравнений для мер пока было уделено значительно меньше внимания. Обзор современного состояния исследований дан в работе[21] и книге[5]. Однако практически не было известно результатов, касающихся существования и единственности вероятностных решений для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах. В статье[22] рассмотрен вопрос существования решений для нелинейных уравнений переноса при ограничениях на рост коэффициентов на бесконечности.

В третьей главе диссертации получены достаточные условия существования и единственности вероятностных решений для нелинейных уравнений ФПК для мер в гильбертовых пространствах. Эти результаты обобщают известные результаты для уравнений общего вида.

Цель работы. Разработать основанные на конструкциях теории меры функционально-аналитические методы исследования задачи Коши для уравнений ФПК относительно мер. Исследовать существование и единственность решений нелинейных уравнений ФПК общего вида с неограниченными коэффициентами для вероятностных мер в конечномерных пространствах, изучить свойства решений и получить оценки расстояний между различными решениями. Изучить разрешимость линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым на открытых множествах в конечномерном пространстве и указать условия, при которых решение оказывается вероятностным. Получить достаточные условия существования и единственности решений уравнений ФПК для вероятностных мер в гильбертовом пространстве.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем. Разработан функционально-аналитический подход к исследованию нелинейных уравнений ФПК общего вида для мер, включающий новые условия слабой компактности некоторых классов вероятностных мер, на основе которого

[20] Gyöngy I., Krylov N.V. *Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations*. Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 105, p. 143–158

[21] Bogachev V.I., Da Prato G., Röckner M., Shaposhnikov S.V. *An analytic approach to infinite-dimensional continuity and Fokker–Planck–Kolmogorov equations*. Annali Scuola Norm. Pisa, 2015, v. 14, p. 983–1023.

[22] Bogachev V.I.,Da Prato G., Röckner M., Shaposhnikov S.V. *Nonlinear evolution equations for measures on infinite dimensional spaces*. In: “Stochastic Partial Differential Equations and Applications”. Quaderni di Matematica, 2010, v. 25. p. 51–64.

1. Найдены достаточные условия существования локальных решений нелинейных уравнений ФПК относительно мер с неограниченными коэффициентами; получены оценки времени существования решений в рассматриваемых классах мер.

2. Получены достаточные условия единственности вероятностного решения нелинейного уравнения ФПК с неограниченными коэффициентами в случаях невырожденной матрицы диффузии и возможно вырождающейся матрицы диффузии. Получены оценки в метрике Канторовича между решениями нелинейных уравнений ФПК с различными начальными данными.

3. Для линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым для мер на открытых множествах получены достаточные условия существования и достаточные условия единственности субвероятностного решения; найдены условия, при которых это решение вероятностное.

4. Изучена разрешимость задач Коши для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах, соответствующих нелинейным стохастическим уравнениям с частными производными; получены достаточные условия существования вероятностного решения; исследована единственность вероятностного решения для строго положительных диффузионных операторов и для возможно вырождающихся диффузионных операторов. Получены оценки расстояния Канторовича и расстояния полной вариации между решениями нелинейных уравнений с различными начальными данными.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, особенно слабые топологии на пространствах мер и метрики типа Канторовича, методы функционального анализа, уравнений в частных производных и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, уравнений с частными производными, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Дальневосточном федеральном университете, Техническом университете им. Н.Э. Баумана, Высшей школе экономики.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева, С.В. Шапошникова (2012–2015 г.) в МГУ им. М.В. Ломоносова, международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2012–2014 г.), научно-исследовательском семинаре «Динамические системы и статистическая физика» под руководством Б.М. Гуревича, В.И. Оселедца, С.А. Пирогова (2013 г.) в МГУ им. М.В. Ломоносова, на научно-исследовательском семинаре «Probability, stochastic modelling and financial mathematics seminar» в университете Лидса (Великобритания, 2014 г.), международной конференции «Microscopic descriptions and mean-field equations in physics and social sciences» в университете Бата (Великобритания, 2014 г.), международной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной 100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014 г.), британско-японской школе по стохастическому анализу в университете Уорика (Великобритания, 2014 г.), научно-исследовательском семинаре по бесконечномерному стохастическому анализу в университете Билефельда (Германия, 2014 г.), научно-исследовательском семинаре им. В.И. Смирнова по математической физике в ПОМИ (Санкт-Петербург, 2015 г.), научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством О.Г. Смолянова и Е.Т. Шавгулидзе в МГУ им. М.В. Ломоносова (2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора, в том числе в 5 работах [1 – 5], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка обозначений и списка литературы из 80 наименований. Общий объем диссертации 96 страниц.

Краткое содержание диссертации

Дадим общее определение, которое будет использоваться во всех главах. Будем говорить, что конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^d \times [0,\tau])$ задана семейством борелевских мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ на $\mathbb{R}^d$ (и писать $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ или $\mu = \mu_t\,dt$), если отображение $t \mapsto \mu_t(B)$ измеримо по Борелю на $[0,\tau]$ для каждого борелевского множества B и для каждой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\tau))$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d\times[0,\tau]} u(x,t)\,\mu(dxdt) = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\,\mu_t(dx)\,dt.$$

Очевидно, что последнее равенство распространяется также на все функции вида fu, где u такая же, как и выше, а f локально интегрируема по мере μ. Аналогичные определения имеют место для мер μ на $D \times [0,\tau]$, где $D \subset \mathbb{R}^d$ и для мер μ на $H \times [0,\tau]$, где H есть некоторое сепарабельное гильбертово пространство.

В первой главе диссертации исследуется разрешимость следующей задачи Коши для конечных мер на пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$\partial_t\mu_t = \partial^2_{x_ix_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{2}$$

где ν – борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. По уравнению (2) зададим дифференциальный оператор L_μ формулой

$$L_\mu u(x,t) = a^{ij}(x,t,\mu)\partial^2_{x_ix_j}u(x,t) + b^i(x,t,\mu)\partial_{x_i}u(x,t).$$

Будем говорить, что $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ является решением задачи Коши (2), если все меры μ_t вероятностные, все отображения $a^{ij}(x,t,\mu)$ и $b^i(x,t,\mu)$ борелевские на $\mathbb{R}^d$ при $1 \le i,j \le d$, причем $a^{ij}, b^i \in L^1(U \times [0,\tau], d\mu)$ для каждого замкнутого шара $U \subset \mathbb{R}^d$, а также

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu\varphi d\mu_s ds \tag{3}$$

для всех $t \in [0,\tau]$ и всех пробных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Первый раздел посвящен вопросу существования вероятностного решения, а также условиям, при которых глобального вероятностного решения не существует.

Пусть заданы некоторое фиксированное положительное число T и строго положительная функция V. Для всякой положительной непрерывной функции α на $[0,T]$ и всякого $\tau \in (0,T]$ через $M_{\tau,\alpha}(V)$ и $M_\tau(V)$ обозначим множества неотрицательных конечных борелевских мер μ на $\mathbb{R}^d \times [0,\tau]$, заданных потоками вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$, таких, что для всех $t \in [0,\tau]$ выполняется неравенство

$$\int V\,d\mu_t \le \alpha(t) \quad \text{или} \quad \sup_{t\in[0,\tau]} \int V\,d\mu_t < +\infty$$

соответственно. Будем говорить, что меры $\mu^n = (\mu_t^n)_{t\in[0,\tau]}$ из множества $M_{\tau,\alpha}$ сходятся V-слабо к мере $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ из $M_{\tau,\alpha}$, если для всех $t \in [0,\tau]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int F\,d\mu_t^n = \int F\,d\mu_t$$

для всякой непрерывной на $\mathbb{R}^d$ функции F такой, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} F(x)/V(x) = 0$.

Сначала сформулируем основной результат о существовании локального решения уравнения (2). Пусть выполнены следующие условия.

(H1) Задана функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой $V(x) > 0$, $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$, и отображения Λ_1 и Λ_2 пространства положительных непрерывных функций на $[0,T]$ в себя такие, что для всякого $\tau \in (0,T]$ и всякой положительной непрерывной функции α на $[0,T]$ для каждой меры μ из $M_{\tau,\alpha} = M_{\tau,\alpha}(V)$ даны функции $(x,t) \mapsto a^{ij}(x,t,\mu)$ и $(x,t) \mapsto b^i(x,t,\mu)$, причем для всех μ из $M_{\tau,\alpha}$ и всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ выполнено неравенство

$$L_\mu V(x,t) \le \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x).$$

Такую функцию V будем называть *функцией Ляпунова* для оператора L_μ.

(H2) Для всяких $\tau \in (0,T]$, положительной непрерывной функции α на $[0,T]$, $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $x \in \mathbb{R}^d$ отображения $t \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$, $t \mapsto b^i(x,t,\sigma)$ измеримы по Борелю на $[0,\tau]$; для всякого замкнутого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ отображения $x \mapsto b^i(x,t,\sigma)$, $x \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$ равномерно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ ограничены на U и равностепенно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ непрерывны на U. Кроме того, если последовательность $\mu^n \in M_{\tau,\alpha}$ сходится V-слабо к $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, то для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ требуются равенства

$$\lim_{n\to\infty} a^{ij}(x,t,\mu^n) = a^{ij}(x,t,\mu), \qquad \lim_{n\to\infty} b^i(x,t,\mu^n) = b^i(x,t,\mu).$$

(H3) Для всяких числа $\tau \in (0,T]$, положительной непрерывной функции α на $[0,T]$ и меры $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ матрица $A(x,t,\sigma) = (a^{ij}(x,t,\sigma))_{1\le i,j\le d}$ является симметричной и неотрицательно определенной, т. е. $a^{ij} = a^{ji}$ и для всякого $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполнено неравенство $\langle A\xi,\xi\rangle \ge 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (H1)–(H3) *и начальное условие ν таково, что $V \in L^1(\nu)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существует $\tau \in (0,T]$ такое, что задача Коши* (2) *имеет решение μ на $[0,\tau]$, заданное вероятностными мерами $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$.*

(ii) *Если $\Lambda_1[\alpha] = 0$ и $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$, где G – строго возрастающая непрерывная положительная функция на $[0,+\infty)$, то задача Коши* (2) *имеет решение на всяком отрезке $[0,\tau]$, где $\tau \in (0,T]$, $\tau < \tau_0$ и*

$$\tau_0 := \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{uG(u)}\,du, \quad u_0 := \int V\,d\nu.$$

Кроме того, во всех пунктах для решения $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \int V\,d\mu_t < \infty.$$

Оказывается, что приведенная оценка времени существования решения из пункта (ii) теоремы 1 является точной в следующем смысле: существует класс уравнений, для которых не существует решения в классе $M_\tau(V)$ с $\tau > \tau_0$.

Теорема 2. *Пусть* $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$. *Пусть также задана непрерывная положительная возрастающая функция* G *на* $[0, +\infty)$. *Предположим, что коэффициенты оператора* L_μ *определены на всяком множестве* $M_{\tau,\alpha}(V)$ *и для всех мер* $\mu \in M_{\tau,\alpha}(V)$ *и пар* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ *выполнено неравенство*

$$L_\mu V(x,t) \geq G\biggl(\int V\,d\mu_t\biggr)V(x).$$

Пусть также $|\sqrt{A(x,t,\mu)}\nabla V(x)|^2 \leq C_1 + C_2 V(x)$ *для некоторых констант* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$. *Положим* $u_0 = \displaystyle\int V\,d\nu > 0$ *и предположим, что*

$$\tau_0 := \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{uG(u)} < +\infty.$$

Тогда задача Коши (2) на отрезке $[0,\tau]$ *с* $\tau \geq \tau_0$ *не имеет решения в классе* $M_\tau(V)$.

Второй раздел посвящен вопросу единственности решения задачи Коши с матрицей диффузии, *не зависящей* от решения μ:

$$\partial_t \mu = \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t)\mu) - \partial_{x_i}(b^i(\mu,x,t)\mu), \quad \mu|_{t=0} = \nu. \tag{4}$$

Рассматриваются два принципиально различных случая – уравнения с невырожденной матрицей диффузии и уравнения с матрицей диффузии, которая может вырождаться.

Сначала рассмотрим случай невырожденной матрицы диффузии, т. е. $\det A > 0$. Далее будем рассматривать только решения из класса $M_T(V)$ для некоторой фиксированной функции $V \geq 1$ из класса $C(\mathbb{R}^d)$. Предположим, что выполнено условие

(NH1) Пусть $a^{ij} \in C(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ и существует положительная непрерывная функция λ на $\mathbb{R}^d$ такая, что

$$\langle A(x,t)\xi, \xi\rangle \geq \lambda(x)|\xi|^2$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, и пусть для каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ существуют постоянные $\gamma = \gamma(B) > 0$ и $\kappa = \kappa(B) \in (0,1]$ такие, что

$$|a^{ij}(x,t) - a^{ij}(y,t)| \leq \gamma|x-y|^\kappa \quad \text{для } x,y \in B,\ t \in [0,T].$$

Через $\|\mu\|_{TV}$ обозначим полную вариацию меры μ:

$$\|\mu\|_{TV} := \sup\Bigl\{\Bigl|\int f(x)\mu(dx)\Bigr|:\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ |f| \leq 1\Bigr\}.$$

Заметим, что если мера задана плотностью относительно меры Лебега, то полная вариация меры равна L^1-норме ее плотности. Для каждой положительной измеримой функции W положим $\|\mu\|_W := \|W\mu\|_{TV}$.

В дополнение к (NH1) предположим, что выполнены условия

(NH2) такая существует функция $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что $W > 0$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} W(x) = +\infty$, функция $W(x)V^{-1/2}(x)$ ограничена на $\mathbb{R}^d$ и для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_T(V)$ существует постоянная $\alpha(\mu) > 0$ такая, что

$$L_\mu W(x,t) \leq \alpha(\mu)W(x) \quad \text{для всех } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T];$$

(NH3) существует непрерывная возрастающая функция G на $[0,+\infty)$ с $G(0)=0$ и

$$\lambda(x)^{-1}\big|b(\mu,x,t)-b(\sigma,x,t)\big| \le \sqrt{V(x)}G(\|\mu_t-\sigma_t\|_W)$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]$ и $\mu,\sigma\in\mathcal{M}_T(V)$;

(NH4) существует такая функция $U\in C^2(\mathbb{R}^d)$, что $U>0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}U(x)=+\infty$, для каждой меры $\mu\in\mathcal{M}_T(V)$ существует число $\beta(\mu)>0$ со свойством

$$W^2(x)\lambda(x)^{-1}|b(\mu,x,t)|^2+\frac{|\sqrt{A(x,t)}\nabla U(x)|^2}{U^2(x)}+\frac{|L_\mu U(x,t)|}{U(x)}\le\beta(\mu)V(x)$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (NH1)*,* (NH2)*,* (NH3)*,* (NH4)*. Если*

$$\int_{0+}\frac{du}{G^2(\sqrt{u})}=+\infty,$$

то существует не более одного решения задачи Коши (4) *в классе* $\mathcal{M}_T(V)$.

Перейдем к случаю матрицы диффузии, которая может вырождаться.

Пусть $W\in C(\mathbb{R}^d)$ – некоторая выпуклая функция и $W\ge 1$. На пространстве вероятностных мер μ, для которых $|x|\sqrt{W(x)}\in L^1(\mu)$, введем новую метрику

$$w_W(\mu,\sigma)=\sup\Big\{\int f\,d(\mu-\sigma)\ :\ f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ |\nabla f(x)|\le\sqrt{W(x)}\Big\}.$$

В приложениях и примерах обычно $W(x)=(1+|x|)^p$ или $W(x)=e^{|x|^p}$. При $W=1$ эта метрика совпадает с классической метрикой Канторовича.

Как и выше, рассматриваются только решения из класса $\mathcal{M}_T(V)$ с $V\in C(\mathbb{R}^d)$ и $V\ge 1$. Сформулируем наши предположения о коэффициентах.

(DH1) Матрица $A=(a^{ij})$ симметрична, неотрицательно определена и ее элементы a^{ij} непрерывны по паре переменных (x,t). Через r^{ij} обозначим элементы матрицы $r=\sqrt{A}$. Предположим, что для каждого $t\in[0,T]$ функции $x\mapsto r^{ij}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x.

(DH2) Задана такая выпуклая функция $W\in C^2(\mathbb{R}^d)$, что функция $|x|\sqrt{W(x)}V(x)^{-1}$ ограничена на $\mathbb{R}^d$, $W\ge1$, для каждой меры $\mu\in\mathcal{M}_T(V)$ существуют функции $\theta_\mu,\Lambda_\mu\in C(\mathbb{R}^d)$ и постоянные $C_\mu>0$, $1>\delta_\mu>0$ такие, что

$$\langle b(\mu,x+y,t)-b(\mu,x,t),y\rangle\le\theta_\mu(x)|y|^2,\quad L_\mu W(x,t)\le(C_\mu-\Lambda_\mu(x))W(x),$$

$$2\theta_\mu(x)+\delta_\mu(1+|x|^2)^{-1}|b(\mu,x,t)|^2+\delta_\mu(1+|x|^2)^{-2}|\mathrm{tr}A(x,t)|^2+4\sum_{i,j,k\le d}\big|\partial_{x_k}r^{ij}(x,t)\big|^2\le\Lambda_\mu(x)$$

для всех $(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[0,T]$.

(DH3) Для каждого шара $B\subset\mathbb{R}^d$ функции b^i на $B\times[0,T]$ непрерывны по x равномерно по t и существует такая возрастающая непрерывная функция G на $[0,+\infty)$, что $G(0)=0$ и

$$|b(\mu,x,t)-b(\sigma,x,t)|\le\frac{V(x)}{\sqrt{W(x)}}G(w_W(\mu_t,\sigma_t))\quad \text{для всех } (x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T] \text{ и } \mu,\sigma\in\mathcal{M}_T(V).$$

(DH4) Для некоторой строго положительной функции $U\in C^2(\mathbb{R}^d)$ с $\lim\limits_{|x|\to+\infty} U(x)=+\infty$ и для каждой меры $\mu\in\mathcal{M}_T(V)$ существует постоянная $\beta(\mu)$ такая, что

$$\frac{|A(x,t)\nabla U(x)|\sqrt{W(x)}}{U(x)}+\frac{|\sqrt{A(x,t)}\nabla U(x)|^2}{U^2(x)}+\frac{|L_\mu U(x,t)|}{U(x)}\le\beta(\mu)V(x)$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (DH1)*,* (DH2)*,* (DH3)*,* (DH4)*. Если*

$$\int_{0+}\frac{du}{G(u)}=+\infty,$$

то существует не более одного решения задачи Коши (4) *из класса* $\mathcal{M}_T(V)$*.*

При некоторых дополнительных условиях можно получить не просто утверждение о единственности решения задачи Коши (4), но и оценку расстояния между решениями с различными начальными условиями.

Предположим, что в условиях (DH2) и (DH4) теоремы 4 константы δ_μ, C_μ и $\beta(\mu)$ можно выбрать независимо от μ для всех мер из некоторого класса $M_{T,\alpha}(V)$. Пусть вероятностные меры ν_1 и ν_2 на $\mathbb{R}^d$ таковы, что $V\in L^1(\nu_1+\nu_2)$. Пусть $\sqrt{W}$ – выпуклая функция. Предположим, что $\mu^1=\mu^1_t\,dt$ и $\mu^2=\mu^2_t\,dt$ – решения задачи Коши (4) из класса $M_{T,\alpha}(V)$ с начальными условиями ν_1 и ν_2 соответственно. Пусть выполняются условия (DH1)–(DH4) теоремы 4. Тогда

$$w_W(\mu^1_t,\mu^2_t)\le F^{-1}\Big(F(e^{t/2}\cdot w_W(\nu_1,\nu_2))-Ct\Big),$$

где $F(v)=\displaystyle\int_v^1\frac{du}{G(u)}$ и F^{-1} есть обратная к F функция. Аналогичная оценка верна и в условиях теоремы 3 для выпуклой функции $\sqrt{W}$ для расстояния $\|\cdot\|_W$.

В третьем разделе первой главы представлен альтернативный метод изучения разрешимости нелинейных уравнений ФПК

$$\partial_t\rho_t=\Delta\rho_t-\mathrm{div}(B(\rho,x,t)\rho_t),\quad \rho|_{t=0}=\rho_0 \tag{5}$$

с монотонным сносом B через устойчивость, а именно с помощью оценок расстояний между решениями линейных уравнений с различными коэффициентами сноса

$$\begin{aligned}\partial_t\mu^1_t &= \Delta\mu^1_t-\mathrm{div}(B_1(x,t)\mu^1_t), &\qquad \mu^1|_{t=0}=\mu^1_0\\ \partial_t\mu^2_t &= \Delta\mu^2_t-\mathrm{div}(B_2(x,t)\mu^2_t), &\qquad \mu^2|_{t=0}=\mu^2_0.\end{aligned} \tag{6}$$

Для заданной монотонной неотрицательной непрерывной функции h на вещественной прямой с $h(0)=0$ определим h-расстояние Канторовича между вероятностными мерами μ и σ как

$$C_h(\mu,\sigma):=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\sigma)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}h(|x-y|)d\pi(x,y),$$

где $\Pi(\mu,\sigma)$ есть множество вероятностных мер на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ с проекциями μ и σ, т.е. $\pi\in\Pi(\mu,\sigma)$ тогда и только тогда, когда π есть вероятностная мера на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ и $\pi(E\times\mathbb{R}^d)=\mu(E)$, $\pi(\mathbb{R}^d\times E)=\sigma(E)$ для каждого борелевского множества $E\subset\mathbb{R}^d$. Далее будем считать, что функция стоимости h монотонно возрастает, непрерывна, ограничена и $h(0)=0$.

Теорема 5. *Пусть* $(\mu_t^1)_{t\in[0,T]}$ *и* $(\mu_t^2)_{t\in[0,T]}$ *– решения задач* (6) *с начальными данными* μ_0^1 *и* μ_0^2 *соответственно. Предположим, что снос* B_1 λ*-монотонен по* x *для некоторого* $\lambda\in\mathbb{R}^1$*, т.е.*

$$\langle B_1(x,t)-B_1(y,t),x-y\rangle\le\lambda|x-y|^2$$

для всех $(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[0,T]$*. Пусть*

$$B_1(x,t)-\lambda x,\ B_2(x,t)-\lambda x\in L^2(\mathbb{R}^d\times[0,T],(\mu_s^1+\mu_s^2)ds)$$

Пусть также $\sup_{t\in[0,T]}|B_1(x,t)|<+\infty$ *для каждого* $x\in\mathbb{R}^d$*. Тогда*

$$C_{h_{\lambda t}}\big(\mu_t^1,\mu_t^2\big)\le C_h(\mu_0^1,\mu_0^2)+\|h\|_\infty\sqrt{\int_0^t\int|B_1-B_2|^2d\mu_s^2ds}\cdot\sqrt{1+\int_0^t\int|B_1-B_2|^2d\mu_s^2ds},\quad(7)$$

для всех $t\in[0,T]$*, где* $h_s(r):=h(re^{-s})$*.*

Как следствия этой теоремы получены следующие результаты о разрешимости нелинейных уравнений. Предположим, что выполнены условия

(B1) Коэффициент сноса B является λ-монотонным по x, т.е.

$$\langle B(\mu,x,t)-B(\mu,y,t),x-y\rangle_{\mathbb{R}^d}\le\lambda|x-y|^2$$

для каждой меры $\mu\in M_T(V)$, для всех $x,y\in\mathbb{R}^d$ и всех $t\in[0,T]$.

(B2) Коэффициент сноса $B(\mu)$ ограничен на всех цилиндрах $U\times[0,T]$ для всех $\mu\in M_T(V)$, где U есть шар в $\mathbb{R}^d$; для всех мер μ и σ из $M_T(V)$ имеем

$$B(\mu,x,t)-\lambda x\ \in L^2(\mathbb{R}^d\times[0,T],(\mu_s+\sigma_s)ds).\quad(8)$$

Для неотрицательной неубывающей функции G положим

$$F_G(r)\equiv F(r):=\int_r^1\frac{du}{G^2(\sqrt{u})}.$$

Теорема 6. *Пусть* $V\in L^1(\mu_0)\cap L^1(\sigma_0)$*. Предположим, что коэффициент сноса* B *в уравнении* (5) *удовлетворяет условиям* (B1) *и* (B2)*, причем для всяких двух решений* $\mu=(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ *и* $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ *из* $M_T(V)$ *мы имеем*

$$|B(\mu,x,t)-B(\sigma,x,t)|\le\sqrt{V(x)}G(C_h(\mu_s,\sigma_s))$$

для некоторой неотрицательной неубывающей функции G *с* $F_G(0)=+\infty$*. Тогда для всяких двух решений* $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ *и* $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ *задачи* (5) *из класса* $M_T(V)$ *с начальным условиями* μ_0 *и* σ_0 *соответственно выполнено неравенство*

$$C_{h_{\lambda t}}\le(F^{-1}\Big(F(2(C_h(\mu_0,\sigma_0))^2)-ct\Big))^{1/2}$$

для всех $t\in[0,T]$*, где* F^{-1} *– обратная к* F *функция и* $c>0$*. В частности, решение задачи* (5) *из класса* $M_T(V)$ *с начальным условиями* μ_0 *единственно.*

Пусть $h(r)=\min\{|r|^p,1\}$ для некоторого $p\ge1$. В этом случае оценка (7) позволяет установить существование решения нелинейного уравнения (5).

Теорема 7. *Предположим, что коэффициент сноса B удовлетворяет условиям* (B1) *и* (B2). *Предположим, что $B(\sigma^n) \to B(\sigma)$ в $L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T], d\sigma_s ds)$ при $n \to \infty$, если меры $\sigma^n(dx\,dt) = \sigma_t^n(dx)dt$ слабо сходятся к мере $\sigma(dx\,dt) = \sigma_t(dx)dt$ на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Предположим, что существуют функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ с $V \geq 1$ и постоянная $C > 0$ такие, что $L_\mu V \leq C(1+V)$ для каждой меры $\mu \in M_T(V)$. Тогда для каждой вероятностной меры μ_0 со свойством $V \in L^1(\mu_0)$ существует вероятностное решение $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$ задачи* (5) *в классе $M_T(V)$.*

Во второй главе изучается задача Коши для уравнения ФПК вида

$$\partial_t \mu_t = \partial^2_{x_i x_j}\big(a^{ij}(x,t)\mu_t\big) - \partial_{x_i}\big(b^i(x,t)\mu_t\big) + c(x,t)\mu_t, \quad \mu_t|_{t=0} = \nu \tag{9}$$

для конечных мер на $D \times [0,T]$ для некоторого открытого множества $D \subset \mathbb{R}^d$ (в дальнейшем называемого областью), необязательно ограниченного; граничное условие не налагается. Здесь ν – вероятностная мера на D, а c – неположительная функция. Подобные результаты могут применяться для анализа уравнений для мер на всем пространстве с сингулярными коэффициентами, если рассматривать их как уравнения на меньших множествах, но с более регулярными коэффициентами. Функция c называется потенциалом. Положим

$$L\varphi = a^{ij}\partial^2_{x_i x_j}\varphi + b^i\partial_{x_i}\varphi + c\varphi.$$

Матрица $A = (a^{ij})$ предполагается симметричной неотрицательно определенной.

Предположим, что вместе с D задана возрастающая последовательность открытых множеств D_k такая, что для каждого k замыкание $\overline{D_k}$ множества D_k лежит в D_{k+1} и $\bigcup_{k=1}^\infty D_k = D$.

Будем говорить, что мера $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,T)}$ является решением задачи Коши (9), если a^{ij}, b^i и c интегрируемы относительно меры $|\mu|$ на $\overline{D_k} \times J$ для каждого множества D_k и каждого интервала $J \subset (0,T)$, причем для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ выполнено равенство

$$\int_D \varphi d\mu_t - \int_D \varphi d\nu = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^t \int_D L\varphi d\mu_s ds \tag{10}$$

для п.в. $t \in (0,T)$. Если функция $t \mapsto \displaystyle\int_D \varphi\, d\mu_t$ непрерывна на $(0,T)$, то тождество (10) выполнено для всех $t \in [0,T)$. Если $L\varphi \in L^1(D \times [0,T])$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^t \int_D L\varphi d\mu_s ds = \int_0^t \int_D L\varphi d\mu_s ds.$$

Заметим, что решения уравнения (9) не сохраняют полную меру пространства. Мы будем рассматривать только решения $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,T)}$ задачи (9), для которых для п.в. $t \in (0,T)$ выполнено неравенство

$$\mu_t(D) \leq \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\,\mu_s(dx)\,ds. \tag{11}$$

Этот класс является естественным обобщением класса вероятносных мер.

Основной результат **первого раздела** второй главы состоит в следующих теоремах существования решения. Первая касается уравнений с невырожденной матрицей диффузии, а вторая – уравнений с возможно вырожденной матрицей диффузии. Через $W^{1,p}_{loc}(D)$ обозначим локальный класс Соболева для области D, состоящий из функций на D, вместе с обобщенным градиентом локально интегрируемых в степени p.

Теорема 8. *Пусть $p > d+2$ и $c \le 0$. Предположим, что $a^{ij}(\,\cdot\,,t) \in W^{1,p}_{loc}(D_k)$ для каждого k,*

$$\sup_{t\in(0,T)} \|a^{ij}(\,\cdot\,,t)\|_{W^{1,p}(D_k)} < \infty$$

и $\langle A(x,t)y,y\rangle \ge m_k|y|^2$ для всех $(x,t)\in D_k\times[0,T]$, $y\in\mathbb{R}^d$ и некоторых $m_k>0$. Предположим также, что $b\in L^p(D_k\times[0,T])$ и $c\in L^{p/2}(D_k\times[0,T])$ для каждого индекса k. Тогда для любой начальной вероятностной меры ν на D существует решение задачи (9) *с условием* (11).

Теорема 9. *Предположим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c непрерывны по x, измеримы по t и ограничены на $D_k\times[0,T]$ для каждого k. Пусть матрица диффузии A симметрична и $\langle A(x,t)y,y\rangle \ge 0$ для всех $(x,t)\in D\times[0,T]$ и $y\in\mathbb{R}^d$. Тогда для любой начальной вероятностной меры ν существует решение задачи* (9) *с условием* (11).

Возникает интересный вопрос: при каких условиях в неравенстве (11) достигается равенство? В частности, если $c=0$, то при каких условиях μ_t являются вероятностными? Простой ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 10. *Пусть $\mu=(\mu_t)_{0<t<T}$ – решение задачи* (9) *с условием* (11) *и $c\le 0$. Предположим, что есть такая функция V, что $V\in C^{2,1}(D\times(0,T))\bigcap C(D\times[0,T])$, для каждого интервала $[\alpha,\beta]\in(0,T)$ выполнено равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{D_k\setminus D_{k-1}\times[\alpha,\beta]} V(x,t) = +\infty$$

и для некоторых функций $K,H\in L^1((0,T))$ с $H\ge 0$ имеет место оценка

$$\partial_t V(x,t) + LV(x,t) \le K(t) + H(t)V(x,t).$$

Предположим также, что $V(\,\cdot\,,0)\in L^1(\nu)$. Тогда для п.в. $t\in(0,T)$ имеем

$$\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\,d\mu_s\,ds.$$

Второй раздел второй главы посвящен единственности решений задачи (9). Оказывается, что существование функции Ляпунова, не зависящей от времени, является также достаточным условием единственности решения, если матрица диффузии невырождена. Точнее, верно следующее утверждение.

Теорема 11. *Предположим, что для каждого k существуют строго положительные числа m_k и M_k такие, что $m_k|y|^2 \le \langle A(x,t)y,y\rangle \le M_k|y|^2$ для всех $y\in\mathbb{R}^d$ и всех $(x,t)\in D\times(0,T)$. Пусть также для каждого индекса k существует константа $\Lambda_k>0$ такая, что*

$$|a^{ij}(x,t) - a^{ij}(y,t)| \le \Lambda_k|x-y|$$

для всех $x,y\in D_k$ и $t\in[0,T]$, а также $b\in L^p_{loc}(D\times(0,T))$, $c\in L^{p/2}_{loc}(D\times(0,T))$ для некоторого показателя $p>d+2$. Предположим, что существует функция V такая, что $V\in C^2(D)$ и

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{D_k\setminus D_{k-1}} V(x) = +\infty.$$

Пусть еще для некоторого числа $K>0$ и всех $(x,t)\in D\times(0,T)$ верно неравенство

$$LV(x,t) \le K + KV(x).$$

Тогда для всякой начальной вероятностной меры ν существует единственное решение задачи (9) *с условием* (11)*. Более того, для п.в. t выполнено тождество*

$$\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\, d\mu_s\, ds.$$

В частности, если $c = 0$, меры μ_t вероятностные для п.в. t.

В третьей главе рассматриваются уравнения для вероятностных мер в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, имеющие вид

$$\partial_t \mu_t = \beta^j \partial^2_{e_j} \mu_t - \partial_{e_j}(b^j(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_t|_{t=0} = \mu_0 \tag{12}$$

с некоторыми постоянными $\beta_j \geq 0$ (см. определение решения ниже). Будем предполагать, что снос имеет следующую структуру:

$$b^i(\mu,x,t) = -\lambda_i x_i + \Phi_i(\mu,x,t), \quad \lambda_i \geq 0. \tag{13}$$

Хорошо известно, что распределения решений стохастического уравнения с частными производными

$$dX_t = \sqrt{2}dw_t + \Big(\Lambda X_t + \Phi(\mu, X_t, t)\Big)dt,$$

являются решениями линейного уравнения ФПК (12). Здесь w_t есть винеровский процесс в H вида $w_t = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\beta_j}\zeta_t^j e_j$, где $\{\zeta_t^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ есть независимые одномерные стандартные винеровские процессы, а ряд сходится в среднеквадратичном. Через Λ обозначен некоторый самосопряженный отрицательный оператор с собственным ортонормированным базисом $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и собственными значениями $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Для простоты мы считаем, что собственные базисы Λ и w_t совпадают. Однако уравнения для мер можно рассматривать с чисто аналитической точки зрения. Более того, решения уравнений для мер существуют при более широких условиях, чем те, при которых существует бесконечномерная диффузия. Положим

$$L_\mu \psi := \sum_{i,j=1}^{\infty} a^{ij}(\mu,x,t)\partial^2_{e_i e_j}\psi + \sum_{i=1}^{\infty} b^i(\mu,x,t)\partial_{e_i}\psi,$$

где ∂_{e_i} – производная вдоль вектора e_i. Введем класс пробных функций $\mathcal{FC}_0^\infty(H)$ на пространстве H, состоящий в точности из функций вида $\varphi(x) = \varphi_0(x_1,\ldots,x_d)$, где $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $x_j = \langle x, e_j\rangle$. По определению $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ есть вероятностное решение задачи Коши (12), если $\mu \in M_{T_0}(V)$, μ_t – вероятностные меры и для всех $t \in [0,T_0]$ и $\varphi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$ выполнено равенство

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu \varphi d\mu_s ds. \tag{14}$$

Здесь мы по определению считаем, что $a^{ij}, b^i \in L^1(H\times[0,T_0], d\mu)$ для всех $i,j \in \mathbb{N}$, т. е. интеграл в правой части тождества корректно определен.

В первом разделе третьей главы рассматривается проблема единственности вероятностного решения задачи (12). Рассматриваются случай цилиндрической диффузии (т.е. $\beta_j \geq \beta_0 > 0$) и случай возможно вырождающейся диффузии.

Случай цилиндрической диффузии соответствует стохастическому дифференциальному уравнению с частными производными с винеровским процессом, принимающим значения в пространстве, более широком, чем H. Тем не менее задача Коши (12) для мер в этом случае может быть изучена аналитическими методами. Пусть $\mathcal{P}_m(H)$ – класс вероятностных мер на H, относительно которых норма в степени m интегрируема.

Далее мы будем рассматривать только решения задачи Коши (12) в классе $\mathcal{K}_2$ мер $\mu = \mu_t dt$ из $M_T(V)$ с $\mu_t \in \mathcal{P}_2(H)$. Сформулируем условия на коэффициент сноса:

(T1) Для каждого решения $\mu \in \mathcal{K}_2$ имеем $\Phi(\mu,\cdot,\cdot) \in l^2$ $\mu \times [0,T_0]$-п.в. и $\|\Phi\|_{l^2} \in L^2(\mu)$.

(T2) Существует непрерывная возрастающая функция G на $[0,+\infty)$ такая, что $G(0)=0$ и

$$|\Phi(\mu,x,t) - \Phi(\sigma,x,t)| \le \sqrt{V(x)} \cdot G(\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV}) \tag{15}$$

для всех $(x,t) \in H \times [0,T]$ и всех решений $\mu, \sigma \in \mathcal{K}_2$.

Теорема 12. *Пусть $\beta^j \ge \beta_0 > 0$. Предположим, что выполнены условия* (T1), (T2). *Если начальное условие $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(H)$ таково, что $\sqrt{V} \in L^1(\mu_0)$, причем*

$$\int_{0+} \frac{du}{G^2(\sqrt{u})} = +\infty,$$

то существует не более одного решения задачи Коши (12) *в классе $\mathcal{K}_2$. Кроме того, для всяких двух решений $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ и $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$ из $\mathcal{K}_2$ имеем*

$$\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \le F^{-1}\Big(F(\|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} - Ct\Big),$$

где F^{-1} – функция, обратная к $F(v) = \displaystyle\int_v^1 G(\sqrt{u})^{-2}du$. Если $G(u) = u$, то

$$\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \le \|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} e^{Ct}.$$

Перейдем к случаю возможно вырожденной диффузии. Пусть фиксирована некоторая положительная функция $V \in C^2(H)$. Предположим, что

(F0) оператор $A(x,t)$ диагонален с собственными числами $\beta^j \ge 0$.

Этот случай включает полностью или частично вырожденные операторы с $\beta^j = 0$. Будем рассматривать только такие решения задачи (12) из класса $\mathcal{K}_1$ мер $\mu = \mu_t dt \in M_T(V)$, где меры $\mu_t \in \mathcal{P}_1(H)$, что

(F1) для всяких $\varepsilon > 0$, $d \in \mathbb{N}$ и каждой меры $\mu \in \mathcal{K}_1$ существуют $N \ge d$ и функция $\Phi_{\mu,N}$ из класса $C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T_0])$ такие, что $\Phi_{\mu,N} \in L^1(H, \mu+\sigma)$ для всякой $\sigma \in \mathcal{K}_1$ и

$$\int_0^T \int_H |\Phi_N(x,t,\mu) - \Phi_{\mu,N}(P_N x,t)|(\mu_t + \sigma_t)(dx)dt < \varepsilon,$$

а также

$$\sup_{x\in H} |\Phi_{\mu,N}(\mu,x,t)| \cdot (1+|x|)^{-1} \le C_N(\mu) < \infty.$$

(F2) Для каждого решения $\mu \in \mathcal{K}_1$ существует константа $\theta = \theta(\mu)$ такая, что

$$\langle \Phi_{\mu,N}(\mu,x,t) - \Phi_{\mu,N}(\mu,y,t), x-y\rangle \le \theta|x-y|^2 + \|x-y\|^2_{\lambda_N}$$

для всех $x,y \in H$ и $t \in [0,T_0]$.

(F3) существует непрерывная возрастающая функция G на $[0,+\infty)$ такая, что $G(0)=0$ и

$$|\Phi(\mu,x,t) - \Phi(\sigma,x,t)| \le V(x) G(W_1(\mu_t,\sigma_t))$$

для всех $(x,t) \in H \times [0,T_0]$ и $\mu,\sigma \in \mathcal{K}_1$.

Теорема 13. *Предположим, что выполнены условия* (F0), (F1), (F2), (F3). *Пусть* $\mu_0 \in \mathcal{P}_1(H)$, $V \in L^1(\mu_0)$ *и* G *есть функция Осгуда, т. е.*

$$\int_{0+} \frac{du}{G(u)} = +\infty.$$

Тогда существует не более одного решения задачи Коши (12) *в классе* $\mathcal{K}_1$. *Кроме того, для любых двух решений* $(\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ *и* $(\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$ *из класса* $\mathcal{K}_1$ *выполнена оценка*

$$W_1(\mu_t, \sigma_t) \le F^{-1}\Big(F(2e^{2\theta T_0} W_1(\mu_0, \sigma_0)) - Ct\Big),$$

где F^{-1} *– функция, обратная к* $F(v) := \int_v^1 G(u)^{-1} du$. *Если* $G(u) = u$, *то*

$$W_1(\mu_t, \sigma_t) \le 2e^{2\theta T_0} W_1(\mu_0, \sigma_0) e^{Ct}.$$

Второй раздел посвящен вопросу существования решения для уравнения более общего вида

$$\partial_t \mu_t = \partial^2_{e_i e_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{e_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{16}$$

где μ_t, ν – борелевские вероятностные меры на H.

Следующая теорема является по сути реализацией метода Галеркина и переносит результат главы 1 на бесконечномерный случай. Определения классов $M_{\tau,\alpha}$ и V-сходимости аналогичны конечномерным определениям из главы 1. Сформулируем условия на коэффициенты:

(ID1) Существуют функция V на H такая, что

$$V(x) > 0, \quad \lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty,$$

и отображения Λ_1 и Λ_2 пространства $C^+([0,T_0])$ в $C^+([0,T_0])$ такие, что для всех $\tau \in (0, T_0]$ и всех $\alpha \in C^+([0,T_0])$ функции a^{ij} и b^i определены на $M_{\tau,\alpha} = M_{\tau,\alpha}(V)$ и для всех $\mu \in M_{\tau,\alpha}$ и $(x,t) \in H \times [0,\tau]$ выполнены неравенства

$$L_\mu V(x,t) \le \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x).$$

Такую функцию V будем называть функцией Ляпунова для оператора L_μ.

(ID2) Для всех $\tau \in (0,T_0]$, $\alpha \in C^+([0,T_0])$, $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$, $x \in H$ функции $t \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$ и $t \mapsto b^i(x,t,\sigma)$ измеримы по Борелю на $[0,\tau]$; для каждого цилиндрического множества $K \subset H$ с конечномерным компактным основанием отображения $x \mapsto b^i(x,t,\sigma)$ и $x \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$ ограничены на K равномерно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ и непрерывны на K равностепенно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$. Более того, если последовательность $\mu^n \in M_{\tau,\alpha}$ V-сходится к $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, то для каждой пары $(x,t) \in H \times [0,\tau]$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} a^{ij}(x,t,\mu^n) = a^{ij}(x,t,\mu), \quad \lim_{n\to\infty} b^i(x,t,\mu^n) = b^i(x,t,\mu).$$

(ID3) При всяких $d \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0,T_0]$, $\alpha \in C^+([0,T_0])$ и $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ конечномерная матрица $A_d(x,t,\sigma) = (a^{ij}(x,t,\sigma))_{1\le i,j\le d}$ симметрична и неотрицательно определена.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия* $(\mathrm{ID1})-(\mathrm{ID3})$ *и* $V \in L^1(\nu)$. *Тогда*

(i) *существует* $\tau \in (0, T_0]$ *такое, что задача Коши* (16) *обладает вероятностным решением* $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ *на* $[0,\tau]$; *более того,* τ *можно взять зависящим только от* Λ_1 *и* Λ_2.

(ii) *Если* Λ_1 *и* Λ_2 *постоянны, то задача Коши* (16) *имеет решение на всем* $[0, T_0]$.

В обоих случаях

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \int V\, d\mu_t < \infty.$$

Как следствие этой теоремы (с $V(x) = 1 + \|x\|^2$) и теоремы единственности для возможно вырождающейся диффузии, получаем существование и единственность решения для уравнений с диффузией, имеющей конечный след и снос вида (13)

$$\Phi(\mu, x, t) = \int K(x, y) d\mu_t(y), \quad \text{где } \lambda_j \geq 0,\ j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 15. *Пусть* $K(\cdot,\cdot)\colon H \times H \to H$ *– непрерывное отображение и* $\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j < +\infty$. *Предположим, что для некоторого числа* $C_0 > 0$ *мы имеем*

$$|K(x, y) - K(x, z)| \leq C_0 \cdot (1 + |x|^2) \cdot |y - z|.$$

Предположим также, что существует последовательность гладких ограниченных отображений K_n *такая, что для всех* $(x, y) \in H \times H$ *имеет место сходимость* $K_n(x, y) \to K(x, y)$ *при* $n \to \infty$, *причем*

$$\langle K_n(x, y) - K_n(z, y), x - z\rangle \leq \theta|x - z|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot (x_j - z_j)^2$$

и $|K_n(x, y)| \leq C_4(1 + |x|)(1 + |y|^{2-\delta})$ *для некоторого* $\delta > 0$. *Тогда для всякой начальной меры* μ_0 *с конечным вторым моментом задача Коши* (12) *имеет единственное решение в классе мер с конечным вторым моментом.*

Заключение.

В диссертации разработан функционально-аналитический подход к исследованию нелинейных уравнений ФПК общего вида для мер. В частности, этот подход включает новые условия слабой компактности некоторых классов вероятностных мер. Основные результаты состоят в следующем:

1. Найдены достаточные условия существования локальных решений нелинейных уравнений ФПК относительно мер с неограниченными коэффициентами; получены оценки времени существования решений в рассматриваемых классах мер.

2. Получены достаточные условия единственности вероятностного решения нелинейного уравнения ФПК с неограниченными коэффициентами в случаях невырожденной матрицы диффузии и возможно вырождающейся матрицы диффузии. Получены оценки в метрике Канторовича между решениями нелинейных уравнений ФПК с различными начальными данными.

3. Для линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым для мер на открытых множествах получены достаточные условия существования и достаточные условия единственности субвероятностного решения; найдены условия, при которых это решение вероятностное.

4. Изучена разрешимость задач Коши для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах, соответствующих нелинейным стохастическим уравнениям с частными производными; получены достаточные условия существования вероятностного решения. Получены

оценки расстояния Канторовича и расстояния полной вариации между решениями нелинейных уравнений с различными начальными данными и, как следствие, получены достаточные условия единственности вероятностного решения для строго положительных диффузионных операторов и для возможно вырождающихся диффузионных операторов.

Благодарности.
Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор также благодарен Александру Юрьевичу Веретенникову и Станиславу Валерьевичу Шапошникову за многочисленные полезные обсуждения.

Основные публикации автора по теме диссертации.

Публикации из официального перечня ВАК:

[1] Manita O. A. Nonlinear Fokker – Planck – Kolmogorov equations in Hilbert spaces. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2015, т. 437, с. 184–206.

[2] Manita O. A., Romanov M. S., Shaposhnikov S. V. On uniqueness of solutions to nonlinear Fokker – Planck – Kolmogorov equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2015, v. 128, p. 199–226.

В работе [2] диссертанту принадлежат теоремы 3.1, 4.4, примеры 3.2 и 4.5;

С.В. Шапошникову принадлежат теорема 5.1 и пример 5.2, М.С. Романову принадлежат теорема 6.1 и примеры 6.2–6.6.

[3] Манита О. А., Шапошников С. В. Нелинейные параболические уравнения для мер. *Алгебра и анализ*, 2013, т. 25, №1, с. 64–93.

В работе [3] диссертанту принадлежат пункты (i), (iii), (iv) теоремы 1, предложения 2 и 3, теорема 2; С.В. Шапошникову принадлежит общая постановка задачи, пункт (ii) теоремы 1, предложение 1.

[4] Манита О. А., Шапошников С. В. Уравнения Фоккера – Планка с потенциалом на области. *Доклады Академии Наук*, 2015, т. 460, №2, с. 136–139.

В работе [4] диссертанту принадлежат пункты (i), (iii) теоремы 1, пункт (iii) теоремы 2, теорема 3, примеры 1 и 2; С.В. Шапошникову принадлежат пункты (ii) теоремы 1, пункты (i), (ii) теоремы 2.

[5] Манита О. А., Шапошников С. В. Нелинейные параболические уравнения для мер. *Доклады Академии Наук*, 2012, т. 447, №6, с. 610–614.

В работе [5] диссертанту принадлежат пункты (i), (iii), (iv) теоремы 1, предложения 2 и 3, теорема 2; С.В. Шапошникову принадлежит общая постановка задачи, пункт (ii) теоремы 1, предложение 1.

Прочие публикации:

[6] Манита О. А. Разрешимость задачи Коши для мерозначного уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка в произвольной области. *Сборник «Spectral Theory and Differential Equations, International conference dedicated to the centenary of B.M. Levitan»*, Moscow, 2014.

[7] Манита О. А. Существование решений нелинейных параболических уравнений для мер. *Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2012*, МГУ, 2012.