ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова"

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.987.1, 517.955

Манита Оксана Анатольевна

Нелинейные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для мер

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
В. И. Богачев

Москва — 2015

Оглавление

Введение **3**

1 Разрешимость нелинейных уравнений **7**
1.1 Существование решения 10
1.1.1 Доказательство основной теоремы 13
1.1.2 Примеры 24
1.1.3 Отсутствие глобального решения 26
1.2 Единственность решений 28
1.2.1 Матрица диффузии невырожденная 30
1.2.2 Матрица диффузии может вырождаться 36
1.3 Оценки расстояний Канторовича между решениями 45

2 Разрешимость линейных уравнений с потенциалом на областях **55**
2.1 Существование решений 58
2.2 Единственность решения 65
2.3 Примеры 69

3 Уравнения в гильбертовом пространстве **73**
3.1 Разрешимость нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве . . 73
3.1.1 Единственность вероятностного решения 75
3.1.2 Существование вероятностного решения 84

Заключение **88**

Список обозначений **89**

Литература **91**

Введение

Актуальность темы.

Тематика диссертационной работы находится на стыке функционального анализа и теории меры с теорией уравнений с частными производными и теорией диффузионных процессов и посвящена применениям конструкций, связанных с метриками и топологиями на пространствах мер и с теоремами о неподвижных точках в таких пространствах, к качественному анализу уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (далее ФПК) относительно конечных мер. Уравнения ФПК, т. е. параболические уравнения для вероятностных мер вида (с суммированием по повторяющимся индексам)

$$\partial_t\mu_t = \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu \tag{1}$$

являются одними из самых часто используемых уравнений в теории случайных процессов и статистической механике и физике. В частности, они появляются в теории среднего поля и смежных вопросах. Традиционно матрица (a^{ij}) называется матрицей диффузии и предполагается симметричной и неотрицательно определенной, векторное поле $b = (b^i)$ называется сносом. Подобные уравнения относительно плотностей мер появились уже в начале XX века в работах А. Фоккера [46], М. Планка [70] и А.Н. Колмогорова [12]. В последующие десятилетия исследования подобных задач продолжили многие другие видные ученые, в том числе М. Смолуховский, С. Чэпмен, И.Г. Петровский, У. Феллер, Дж. Нэш, Ю. Мозер, Л. Хёрмандер, О.А. Ладыженская, О.А. Олейник, А. Фридман. Нелинейные уравнения такого вида впервые введены А.А. Власовым [7]. Исследованиями линейных и нелинейных уравнений ФПК и близкими проблемами занимаются многие известные российские исследователи, назовем лишь Н.Н. Уральцеву, В.А. Солонникова, Е.В. Радкевича, Н.В. Крылова, Я.И. Белопольскую, А.Ю. Веретенникова, Ю.Е. Гликлиха, В.Н. Денисова, А.И. Назарова, А.А. Арсеньева, А.К. Гущина, В.В. Жикова, А.В. Фурсикова, В.В. Козлова, С.В. Шапошникова. Подробную библиографию можно найти в недавней книге Богачева, Крылова, Рёкнера, Шапошникова [5]. Уравнения ФПК описывают эволюцию начальной меры ν под действием потока, задаваемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений или системой стохастических дифференциальных уравнений и обобщают сразу несколько важных для приложений классов уравнений: транспортное уравнение [22, 60], уравнение Власова (уравнения движения в самосогласованном силовом поле [9, 10] и его обобщения [38, 39]), линейное уравнение Фоккера – Планка (обратное уравнение Колмогорова для распределений марковского процесса) и задача Коши для распределений решения уравнения МакКина – Власова [65, 66, 76], т. е. стохастического дифференциального уравнения для нелинейных марковских процессов. Заметим, что в естественных и важных примерах коэффициенты в уравнениях ФПК негладкие или неограниченные.

В последние десятилетия значительное внимание уделяется исследованию уравнений со сносом, являющимся сверткой меры с градиентом выпуклой функции. Выявляются все новые связи этих уравнений с различными областями математики, а также изучается внутренняя структура этих уравнений (например, представление уравнения через градиентный поток [53] и связи с теорией больших уклонений [21].

В случае негладких и вырожденных коэффициентов более продуктивным оказывается изучение уравнений ФПК относительно мер, а не их плотностей (которых может и не быть). В частности, в ряде моделей, описываемых нелинейными уравнениями типа Власова, плотность решения исчезает в конечный момент времени [38]. Кроме того, подход к уравнениям ФПК как к уравнениям относительно мер позволяет анализировать уравнения в бесконечномерных пространствах и распространять на них конечномерные результаты. Во всех этих ситуациях основную роль играют топологии и метрики на пространствах вероятностных мер типа метрики Канторовича [2, 3], что весьма характерно и для данной работы.

Несмотря на обширную литературу, посвященную данной тематике, практически нет общих результатов существования и единственности в случае нелипшицевых и быстро растущих коэффициентов. Стоит отметить работу [49], в которой для уравнения с коэффициентами общего вида установлено существование глобального решения уравнения с помощью изучения соответствующей мартингальной задачи. В работах [39, 59] нелинейные транспортные уравнения с коэффициентами типа сверток также исследуются в пространстве мер с подходящей метрикой Канторовича, причем решения уравнения рассматриваются как геодезические. Однако такой подход сильно использует специфический вид коэффициентов.

В первой главе диссертации изучается разрешимость нелинейных уравнений ФПК относительно мер в конечномерных пространствах без использования конкретной структуры коэффициентов. Тем не менее полученные результаты покрывают многие типичные примеры. Главное отличие полученных в диссертации результатов от известных ранее состоит в том, что не накладывается явных ограничений на рост коэффициентов уравнения, а предполагается только существование функции Ляпунова. Также получены оценки времени существования решений. Важным достижением является то, что рассмотрен сложный случай вырождающейся матрицы диффузии и для него получены достаточные условия существования и единственности решений.

Традиционно уравнения ФПК рассматриваются для вероятностных мер, заданных на всем пространстве. Однако для приложений часто полезно решать уравнения для мер, заданных на открытых множествах. Это позволяет, в частности, сводить вопросы разрешимости уравнений с сингулярными коэффициентами к уравнениям относительно мер на меньшем множестве, но с более регулярными коэффициентами. В этой связи стоит отметить работу [50], в которой исследуются диффузионные процессы на областях.

Во второй главе диссертации изучается разрешимость линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым на открытых множествах в конечномерном пространстве. Получены достаточные условия существования и единственности решений подобных уравнений, а также условия, при которых решение оказывается вероятностным. Полученные условия и результаты покрывают большое число конкретных примеров из ряда смежных областей математики.

Уравнения для мер и естественные вопросы существования, единственности и качественных свойств решений имеют смысл не только для мер, заданных на конечномерных, но и на бесконечномерных пространствах. Связь со случайными процессами и переходными вероятностями решений стохастических уравнений с частными производными здесь особенно важна, поскольку в бесконечномерном случае теряются многие физические аналогии и описания (например, уравнение среднего поля теряет наглядную физическую интерпретацию). Тем не менее, несмотря на растущий в последние годы интерес к стохастическим уравнениям с частными производными, изучению бесконечномерных уравнений для мер пока было уделено значительно меньше внимания. Обзор современного состояния исследований дан в работе [36] и книге [5]. Однако практически не было известно результатов, касающихся существования и единственности вероятностных решений для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах. В статье [30] рассмотрен вопрос существования решений для нелинейных уравнений переноса при ограничениях на рост коэффициентов на бесконечности.

В третьей главе диссертации получены достаточные условия существования и единственности вероятностных решений для нелинейных уравнений ФПК для мер в гильбертовых пространствах. Эти результаты обобщают известные результаты для уравнений общего вида.

Цель работы. Разработать основанные на конструкциях теории меры функционально-аналитические методы исследования задачи Коши для уравнений ФПК относительно мер. Исследовать существование и единственность решений нелинейных уравнений ФПК общего вида с неограниченными коэффициентами для вероятностных мер в конечномерных пространствах, изучить свойства решений и получить оценки расстояний между различными решениями. Изучить разрешимость линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым на открытых множествах в конечномерном пространстве и указать условия, при которых решение оказывается вероятностным. Получить достаточные условия существования и единственности решений уравнений ФПК для вероятностных мер в гильбертовом пространстве.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем. Разработан функционально-аналитический подход к исследованию нелинейных уравнений ФПК общего вида для мер, включающий новые условия слабой компактности некоторых классов вероятностных мер, на основе которого

1. Найдены достаточные условия существования локальных решений нелинейных уравнений ФПК относительно мер с неограниченными коэффициентами; получены оценки времени существования решений в рассматриваемых классах мер.

2. Получены достаточные условия единственности вероятностного решения нелинейного уравнения ФПК с неограниченными коэффициентами в случаях невырожденной матрицы диффузии и возможно вырождающейся матрицы диффузии. Получены оценки в метрике Канторовича между решениями нелинейных уравнений ФПК с различными начальными данными.

3. Для линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым для мер на открытых множествах получены достаточные условия существования и достаточные

условия единственности субвероятностного решения; найдены условия, при которых это решение вероятностное.

4. Изучена разрешимость задач Коши для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах, соответствующих нелинейным стохастическим уравнениям с частными производными; получены достаточные условия существования вероятностного решения; исследована единственность вероятностного решения для строго положительных диффузионных операторов и для возможно вырождающихся диффузионных операторов. Получены оценки расстояния Канторовича и расстояния полной вариации между решениями нелинейных уравнений с различными начальными данными.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, особенно слабые топологии на пространствах мер и метрики типа Канторовича, методы функционального анализа, уравнений в частных производных и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, уравнений с частными производными, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова, МИАН им. В.А. Стеклова, Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, СПбГУ, НГУ, Дальневосточном федеральном университете, МГТУ им. Н.Э. Баумана, НИУ ВШЭ.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» (2012–2015 г.) в МГУ им. М.В. Ломоносова, международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2012–2014 г.), научно-исследовательском семинаре «Динамические системы и статистическая физика» (2013 г.) в МГУ им. М.В. Ломоносова, на научно-исследовательском семинаре «Probability, stochastic modelling and financial mathematics seminar» в университете Лидса (Великобритания, 2014 г.), международной конференции «Microscopic descriptions and mean-field equations in physics and social sciences» в университете Бата (Великобритания, 2014 г.), международной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной 100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014 г.), британско-японской школе по стохастическому анализу в университете Уорика (Великобритания, 2014 г.), научно-исследовательском семинаре по бесконечномерному стохастическому анализу в университете Билефельда (Германия, 2014 г.), научно-исследовательском семинаре им. В.И. Смирнова по математической физике в ПОМИ (Санкт-Петербург, 2015 г.), научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и математическая физика» в МГУ им. М.В. Ломоносова (2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора [13–16, 61–63], в том числе в 5 работах ([15, 16, 61–63]), опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка обозначений и списка литературы из 80 наименований. Общий объем диссертации составляет 96 страниц.

Глава 1

Разрешимость нелинейных уравнений

В данной главе мы исследуем разрешимость в классе вероятностных мер следующей задачи Коши:

$$\partial_t \mu_t = \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{1.1}$$

где ν – вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$.

Уравнения такого вида обобщают несколько важных для приложений типов уравнений: транспортное уравнение, уравнения Власова, линейные уравнения ФПК и уравнения МакКина – Власова. Они описывают эволюцию начальной меры ν под действием потока, порожденного системой дифференциальных уравнений – обыкновенных или стохастических. Каждому из указанных типов уравнений посвящена обширная литература. Отметим классическую работу Колмогорова [12], где выведены линейные уравнения такого типа для переходных вероятностей марковских процессов, и работы МакКина [65, 66], посвященные нелинейным параболическим уравнениям и соответствующим марковским процессам. Различные физические задачи, приводящие к изучению нелинейных уравнений ФПК, представлены в [47].

Первый вопрос, позникающий при работе с подобными уравнениями – вопрос существования и единственности решения. Большое количество статей посвящено изучению качестсвенных свойств уравнений конкретного типа. Уравнения Власова с гладкими коэффициентами рассмотрены в работе [9], где существование и единственность решения доказана с помощью метода сжимающих отображений и специального выбора метрики – метрики Канторовича – на пространстве мер. Отметим, что в общем случае эти идеи неприменимы, поскольку решение, вообще говоря, не единственно. Обзор недавних результатов, касающихся уравнений Власова, дан в [10, 11]. В работах [45, 57, 59, 77] нелинейные транспортные уравнения со сносом, являющимся сверткой с неким ядром, изучаются в пространстве вероятностных мер с метрикой Канторовича и решения рассматриваются как геодезические. Однако этот подход сильно использует специальный вид коэффициентов. Транспортные уравнения, линейные уравнения ФПК, уравнения Власова и Больцмана с соболевскими коэффициентами изучаются в [41, 42, 58], где разработан метод перенормированных решений, а разрешимость изучается в пространствах L^p. Во многих работах (например, [23, 38, 53]) рассматривается случай единичной матрицы диффузии и снос

вида
$$b(\mu_t, x) = \nabla\psi(x) + \int \nabla W(x-y)\, d\mu_t$$
методами градиентных потоков. Несмотря на обширную литературу, практически не известно результатов о существовании и единственности решений для нелипшициевых и быстро растущих коэффициентов в общей постановке.

Существование глобального решения для транспортного уравнения с общим сносом в частном случае установлено в [32]. В общем случае такие уравнения вероятностными методами изучены в статье [49], где доказана разрешимость соответствующей мартингальной задачи. В частности, там доказано следующее. Если коэффициенты уравнения имеют вид $a^{ij}(x, \mu_t)$ и $b^i(x, \mu_t)$, и соответствующая мартингальная задача и соответствующее линейное уравнения имеют единственные решения, то задача Коши (1.11) имеет единственное решение. Единственность решения мартингальной задачи установлена в предположении
$$|\sqrt{A}(\mu_t, x) - \sqrt{A}(\sigma_t, y)| + |b(\mu_t, x) - b(\sigma_t, y)| \le C|x-y| + G(w_p(\mu_t, \sigma_t)),$$
где $A = (a^{ij})$, $b = (b^i)$, w_p есть p-метрика Канторовича и G – некая непрерывная возрастающая функция на $[0, +\infty)$ со свойством $G(0) = 0$ и $\displaystyle\int_{0+} G^{-2}(\sqrt{u})\, du = +\infty$. Таким образом, допускаются только глобально липшициевы коэффициенты. Более того, зависимость коэффициентов от μ ограничивается по сути свертками с полиномиально растущими ядрами. Также отметим довольно условный характер этого утверждения, требующего априори единственность для других задач. В одномерном случае единственность решения мартингальной задачи (или, что эквивалетно, единственность слабого решения соответствующего уравнения МакКина–Власова) для единичной диффузии и сноса, являющегося сверткой с монотонным нечетным ядром, изучается в [26, 27]. Сильные решения уравнений МакКина–Власова получены в [76]. В работе [1] вероятностные методы применяются к изучению нелинейных параболических уравнений.

Данная глава диссертации состоит из 3 разделов. Первый посвящен вопросу существования локального решения задачи (1.1) и оценкам времени существования решения, в частности, достаточным условиям отсутствия глобального решения. Результаты этого раздела опубликованы в [15, 63]. Раздел 2 содержит достаточные условия единственности вероятностных решений для уравнений с матрицей диффузии, не зависящей от решения. Результаты этого раздела опубликованы в [61]. Наконец, в разделе 3 приводится альтернативный подход к изучению нелинейных уравнений ФПК с монотонными сносами с помощью оценок расстояний между решениями линейных уравнений с различными сносами.

Главное отличие полученных в диссертации результатов от известных ранее состоит в том, что не накладывается явных ограничений на рост коэффициентов уравнения, а только существование функции Ляпунова. Отметим, что метод функций Ляпунова для уравнений такого вида был введен Хасьминским в [51] и активно применялся в последние годы для изучения линейных уравнений ФПК с неограниченными коэффициентами (например, см. [6, 29, 34]). Также не предполагается никакой конкретной формы коэффициентов. Тем не менее, полученные результаты покрывают типичные примеры [9–11, 42, 45, 59, 77]. Кроме того, не предполагается принадлежность коэффициентов классу Соболева или классу фукнций ограниченной вариации, а только их непрерывность. Также получены оценки времени существования решений и blow-up. Важной особенностью является то, что рассмотрен сложный случай вырождающейся матрицы диффузии, и для него получены достаточные условия существования и единственности решений.

Перейдем к определениям и точным формулировкам. Определим оператор L_μ следующим образом:

$$L_\mu u = a^{ij}(x,t,\mu)\partial^2_{x_i x_j} u + b^i(x,t,\mu)\partial_{x_i} u,$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Пусть $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ есть линейное пространства конечных борелевских мер на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Напомним, что $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ с метрикой Канторовича–Рубинштейна

$$\|\mu\| = \sup\Big\{ \int f\,d\mu \, : \, f \in \mathrm{Lip}_1, \quad |f| \le 1 \Big\}$$

является нормированным пространством. Более того, топология, порожденная этой нормой на подмножестве неотрицательных мер, совпадает с топологией слабой сходимости [2, Теорема 8.3.1].

Будем говорить, что мера $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0,\tau])$ задана семейством борелевских мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ на $\mathbb{R}^d$ (и писать $\mu = (\mu_t)_{[0,\tau]}$ или $\mu = \mu_t\,dt$), если отображение $t \mapsto \mu_t(B)$ измеримо по Борелю на $[0,\tau]$ для каждого борелевского множества B и для каждой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\tau))$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^d\times[0,\tau]} u(x,t)\,d\mu = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\,d\mu_t\,dt.$$

Очевидно, что последнее равенство распространяется также на все функции вида fu, где u такая же, как и выше, а f локально интегрируема по мере μ.

Будем говорить, что $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ является решением задачи Коши (1.1), если меры μ_t вероятностные, отображения $a^{ij}(x,t,\mu)$ и $b^i(x,t,\mu)$ борелевские на $\mathbb{R}^d$ при каждых $1 \le i,j \le d$, и $a^{ij}, b^i \in L^1(U \times [0,\tau], d\mu)$ для каждого замкнутого шара $U \subset \mathbb{R}^d$, а также выполняется интегральное тождество

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu \varphi d\mu_s ds \tag{1.2}$$

для всех $t \in [0,\tau]$ и всех пробных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

В частности, решение задачи Коши μ_t непрерывно по t относительно слабой сходимости вероятностных мер. Это мгновенно следует из непрерывности по t интегралов $\displaystyle\int \varphi\,d\mu_t$ для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$; последнее является следствием интегрального тождества (1.2).

Иногда удобнее использовать другое определение решения, которое, тем не менее, эквивалетно данному выше (см. [34]). Мера $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ является решением задачи

Коши (1.1), если для любой пробной функции $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,t)) \bigcap C(\mathbb{R}^d \times [0,t])$, равной нулю вне некоторого шара $B \subset \mathbb{R}^d$, и для любого $t \in [0,T]$ выполнено

$$\int u(x,t)\,d\mu_t = \int u(x,0)\,d\mu_0 + \int_0^t \int \big[\partial_t u + L_\mu u\big]\,d\mu_s\,ds. \tag{1.3}$$

Если априори известно, что коэффициенты глобально интегрируемы на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ по мере $d\mu$, а u имеет две ограниченные производные, то тождество (1.3) также выполнено (чтобы это показать, достаточно применить стандартную процедуру срезки).

Решение задачи Коши (1.1) на всем интервале рассмотрения по времени естественно называть глобальным решением, а решение на меньшем интервале времени – локальным.

Типичные коэффициенты в уравнениях ФПК содержат выражения вида

$$\int K(x,y,t)\,d\mu_t \quad \text{или} \quad \int_0^t \int K(x,y,s)\,d\mu_s\,ds$$

с растущим на бесконечности ядром K, поэтому необходимо рассматривать уравнения с растущими коэффициентами. Далее мы будем рассматривать меры, интегрирующие некоторую заданную растущую на бесконечности функцию. Эта априорная интегрируемость следует из существования функции Ляпунова. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только решения из класса $\mathcal{M}_T(V)$ мер μ на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$, заданных семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ и удовлетворяющих

$$\sup_{t\in[0,T]} \int V(x)\,d\mu_t < \infty, \tag{1.4}$$

где $V \geq 1$ и, вообще говоря, неограничена при $|x| \to \infty$.

1.1 Существование решения

Идея доказательства существования вероятностного решения задачи Коши (1.1) состоит в использовании теоремы Шаудера о неподвижной точке: если K – выпуклый компакт в нормированном пространстве и $Q\colon\ K \to K$ – непрерывное отображение, то существует $x \in K$ такое, что $Q(x) = x$ (см. [8]).

Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть τ_0 – некоторое фиксированное положительное число и V – неотрицательная функция. Для всякой функции $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ и всякого $\tau \in (0,\tau_0]$ через $M_{\tau,\alpha}(V)$ обозначим множество неотрицательных мер μ из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0,\tau])$, заданных потоком вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ и таких, что для всех $t \in [0,\tau]$ выполняется неравенство

$$\int V(x)\,d\mu_t \leq \alpha(t).$$

Отметим, что функция α выбирается из класса $C^+([0,\tau_0])$, а не из $C^+([0,\tau])$, для того, чтобы иметь возможность выбирать функцию α и число τ независимо друг от друга. Сформулируем условия на коэффициенты a^{ij} и b^i.

(H1) Задана функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой

$$V(x) > 0, \quad \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty,$$

отображения Λ_1 и Λ_2 пространства $C^+([0,\tau_0])$ в $C^+([0,\tau_0])$ такие, что для всякого $\tau \in (0,\tau_0]$ и всякой функции $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ для каждой меры μ из $M_{\tau,\alpha} = M_{\tau,\alpha}(V)$ заданы функции $(x,t) \mapsto a^{ij}(x,t,\mu)$ и $(x,t) \mapsto b^i(x,t,\mu)$, причем для всех μ из $M_{\tau,\alpha}$ и всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ выполняется неравенство

$$L_\mu V(x,t) \le \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x).$$

Такую функцию V будем называть функцией Ляпунова для оператора L_μ. Отметим, что для дальнейшего важно, что V – строго положительная функция.

Пример 1.1. Условие (H1) выполняется с функцией $V(x) = 1 + |x|^2$ для оператора

$$L_\mu u = (x, \nabla u)\int |y|^2 d\mu_t.$$

В этом случае

$$L_\mu V = 2|x|^2 \int |y|^2 d\mu_t \le 2\alpha(t)V(x)$$

и $L_\mu V \le \Lambda_1 + \Lambda_2 V$, $\Lambda_1[\alpha] \equiv 0$ и $\Lambda_2[\alpha] = 2\alpha$.

Отметим также, что типичными примерами отображений Λ_1 и Λ_2 являются отображения вида $\alpha(t) \mapsto G(\alpha(t))$ или $\alpha(t) \mapsto \displaystyle\int_0^t G(\alpha(s))\,ds$.

Нам потребуется непрерывность коэффициентов относительно подходящей сходимости мер. Однако слабой сходимости недостаточно, так как в типичных примерах коэффициенты имеют вид интегралов от неограниченной функции.

Будем говорить, что меры $\mu^n = (\mu^n_t)_{t\in[0,\tau]}$ из множества $M_{\tau,\alpha}$ сходятся V-слабо к мере $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ из $M_{\tau,\alpha}$, если для всех $t \in [0,\tau]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int F(x)d\mu^n_t = \int F(x)d\mu_t$$

для всякой непрерывной на $\mathbb{R}^d$ функции F такой, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} F(x)/V(x) = 0$.

(H2) Для всяких $\tau \in (0,\tau_0]$, $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$, $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $x \in \mathbb{R}^d$ отображения

$$t \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma) \quad \text{и} \quad t \mapsto b^i(x,t,\sigma)$$

измеримы по Борелю на $[0,\tau]$ и для всякого замкнутого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ отображения

$$x \mapsto b^i(x,t,\sigma) \quad \text{и} \quad x \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$$

равномерно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ ограничены на U и равностепенно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ непрерывны на U. Кроме того, если последовательность $\mu^n \in M_{\tau,\alpha}$ сходится V-слабо к $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, то для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ требуются равенства

$$\lim_{n\to\infty} a^{ij}(x,t,\mu^n) = a^{ij}(x,t,\mu), \qquad \lim_{n\to\infty} b^i(x,t,\mu^n) = b^i(x,t,\mu).$$

Замечание 1.1. (i) Непрерывность функций a^{ij} и b^i по переменной x и измеримость по переменной t влекут измеримость по совокупности переменных (x,t) относительно борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times [0,\tau])$ (см. [2, лемма 6.4.6, задача 6.10.39]).

(ii) При каждом $t \in [0,\tau]$ последовательности $a^{ij}(x,t,\mu^n)$ и $b^i(x,t,\mu^n)$ сходятся равномерно по x на всяком шаре $U \subset \mathbb{R}^d$, что немедленно следует из их поточечной сходимости, равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности.

Обратим внимание также на то, что непрерывность коэффициентов по t не предполагается.

Пример 1.2. Условие (H2) выполняется для

$$b(x,t,\mu) = \int K(x,y)d\mu_t$$

с функцией Ляпунова V и ядром K, являющимся непрерывным векторным полем на $\mathbb{R}^d \times [0,\tau]$, для которого выполняется оценка

$$|K(x,y)| \le C_1(x) + C_2(x)V^{1-\gamma}(y),$$

где $\gamma \in (0,1)$ – число, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ — непрерывные функции. Действительно, поправка степени на γ дает V-сходимость. Требуемая измеримость следует из непрерывности K и измеримости отображений $t \mapsto \mu_t(B)$ для всякого борелевского множества B. Равномерная ограниченность немедленно следует из оценки

$$|b(x,t,\mu)| \le C_1(x) + C_2(x)\left(\int V(x)\,d\mu_t\right)^{(1-\gamma)/\gamma}.$$

Проверим равностепенную непрерывность. Пусть U – замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$. Для всякого $\varepsilon > 0$ и всех x, $z \in U$ получаем

$$|b(x,t,\mu) - b(z,t,\mu)| = \left|\int (K(x,y) - K(z,y))\,d\mu_t\right| \le$$

$$\le 2\int_{|y|>R} C_1(x) + C_2(x)V^{1-\gamma}(y)d\mu_t + \int_{|y|\le R} |K(x,y) - K(z,y)|d\mu_t.$$

По неравенству Чебышёва существует $R > 0$ такое, что первый интеграл меньше $\varepsilon/2$ для всех $\mu_t \in M_{\tau,\alpha}$. Зафиксируем это R. Тогда $U \times \{y\colon\ |y| \le R\}$ — компакт, значит, функция K равномерно непрерывна на нем, поэтому за счет выбора близких x, z второй интеграл можно сделать равномерно по μ меньшим $\varepsilon/2$.

Наконец, нам нужно еще одно условие.

(H3) Для всяких числа $\tau \in (0,\tau_0]$, функции $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ и меры $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ матрица $A(x,t,\sigma) = (a^{ij}(x,t,\sigma))_{1\le i,j\le d}$ является симметричной и неотрицательно определенной, т. е. $a^{ij} = a^{ji}$ и для всякого $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство $(A\xi,\xi) \ge 0$.

Замечание 1.2. Как будет видно из доказательства теоремы существования решения, выполнение условий (H1), (H2) и (H3) на множестве $M_{\tau,\alpha}$ можно требовать не для всяких τ и α, а лишь для фиксированных, вид которых полностью определяется начальным условием задачи Коши и отображениями Λ_1 и Λ_2.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия (H1)–(H3) и начальное условие* ν *таково, что* $V \in L^1(\nu)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) Существует $\tau \in (0, \tau_0]$ *такое, что задача Коши (1.1) на* $[0, \tau]$ *имеет решение* μ, *заданное вероятностными мерами* $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$.

(2) Если $\Lambda_1[\alpha] = 0$ *и* $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$, *где* G *– строго возрастающая непрерывная положительная функция на* $[0, +\infty)$, *то задача Коши (1.1) имеет решение на всяком отрезке* $[0, \tau]$, *где* $\tau \in (0, \tau_0]$, $\tau < T$ *и*

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{uG(u)}\, du, \quad u_0 = \int V(x)\, d\nu.$$

(3) Если $\Lambda_1[\alpha](t) = G(\alpha(t))$ *и* $\Lambda_2[\alpha] = 0$, *где* G *– строго возрастающая непрерывная положительная функция на* $[0, +\infty)$, *то задача Коши (1.1) имеет решение на всяком отрезке* $[0, \tau]$, *где* $\tau \in (0, \tau_0]$, $\tau < T$ *и*

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{G(u)}\, du, \quad u_0 = \int V(x)\, d\nu.$$

Кроме того, во всех пунктах для решения $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \int V(x) d\mu_t < \infty.$$

1.1.1 Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1.1 разбито на несколько этапов.

1. Используя теорему Шаудера о неподвижной точки и линейную теорию параболических уравнений для мер, мы доказываем теорему 1.1 в случае невырожденной и достаточно гладкой матрицы A.

2. Применяя метод исчезающей вязкости, доказываем теорему 1.1 в случае вырожденной и достаточно гладкой матрицы A.

3. Отказываемся от гладкости матрицы A.

Основная причина такого поэтапного отказа от гладкости A состоит в том, что для применения теоремы Шаудера требуется единственность решения линейного уравнения, а для этого в свою очередь приходится требовать от матрицы A дополнительную регулярность.

Сначала рассмотрим случай невырожденной главной части уравнения (1.1), а именно предполагаем, что вместо условия (H3) выполняется более сильное предположение

(H3') выполнено условие (H3) и для всяких $\tau \in (0, \tau_0)$, функции $\alpha \in C([0, \tau_0])$, замкнутого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ и $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ существует такое число $\lambda = \lambda(\sigma, U) > 0$, что для всех $x, y \in U$, $t \in [0, \tau]$ имеем $\det A(x, t, \sigma) \neq 0$ и справедливо неравенство

$$|A(x, t, \sigma) - A(y, t, \sigma)| \leq \lambda |x - y|.$$

Кроме того, предполагается, что для всякой меры $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ существуют такие числа C_1 и C_2, что

$$|\sqrt{A(x, t, \sigma)} \nabla V(x)| \leq C_1 + C_2 V(x).$$

Невырожденность позволяет применять линейную теорию при широких локальных предположениях относительно коэффициентов и, что особенно важно, гарантирует существование и единственность решения задачи Коши для линейного уравнения.

Пусть $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения:

$$\partial_t \mu_t = \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t,\sigma)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\sigma)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu.$$

В [29, Теорема 3.1] доказано, что условия (H1), (H2) и (H3') влекут существование решения μ, заданного вероятностными мерами $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$. Отметим также, что теорему существования для линейного уравнения можно извлечь из разрешимости соответствующей мартингальной задачи (см. [74]). Как доказано в [72, Теорема 2.3] (см. также [34]), выполнение условий (H1), (H2) и (H3') влечет единственность вероятностного решения.

Таким образом, корректно определено отображение $Q\colon\ M_{\tau,\alpha} \mapsto \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0,\tau])$:

$$Q(\sigma) = \chi \Longleftrightarrow \partial_t \chi_t = \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t,\sigma)\chi_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\sigma)\chi_t), \quad \chi_0 = \nu.$$

Ясно, что мера μ является решением задачи Коши (1.1) тогда и только тогда, когда μ является неподвижной точкой отображения Q. Поэтому естественно доказывать существование решения с помощью теоремы Шаудера.

Отметим, что единственность решения линейного уравнения используется не только для корректного определения отображения Q, но и в доказательстве непрерывности отображения Q.

Для применения теоремы Шаудера надо построить выпуклый компакт в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0,\tau])$, который отображением Q переводится в себя. Таким компактом для подходящих τ и α является множество $N_{\tau,\alpha}$, в которое входят в точности те меры $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, заданные вероятностными мерами $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$, для которых при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $t,s \in [0,\tau]$ выполняется неравенство

$$\left|\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\mu_s\right| \le \Lambda(\tau,\alpha,\varphi)|t-s|, \tag{1.5}$$

где

$$\Lambda(\tau,\alpha,\varphi) = \sup\bigl\{|L_\mu \varphi(x,t)|\colon\ (x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,\tau],\ \mu\in M_{\tau,\alpha}\bigr\}$$

не зависит от $\mu \in N_{\tau,\alpha}$. Заметим, что sup в определении конечен по условию (H2).

Лемма 1.1. *Из любой последовательности мер $\mu^n = (\mu^n_t)_{t\in[0,\tau]}$ из $N_{\tau,\alpha}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\mu^{n_l}\}$, что $\{\mu^{n_l}\}$ слабо сходится к $\mu \in N_{\tau,\alpha}$ и $\{\mu^{n_l}_t\}$ слабо сходится к μ_t для всех $t\in[0,\tau]$.*

Доказательство. Заметим, что в силу определения $N_{\tau,\alpha}$ и неравенства Чебышева множество $\{\mu^n_t\}$ равномерно плотно для любого t. Пусть $T = \{t_1, t_2, \ldots\}$ – счетное всюду плотное множество в $[0,\tau]$. Так как для любого j из $\mu^n_{t_j}$ по теореме Прохорова можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, то, применяя диагональный метод, можно заключить, что существует подпоследовательность $\mu^{n_l}_t$, слабо сходящаяся для всякого $t \in T$. Покажем, что она слабо фундаментальна при любом $t \in [0,\tau]$. Пусть $t \in [0,\tau]$, $s \in T$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Имеем

$$\left|\int \varphi d\mu_t^{n_p} - \int \varphi d\mu_t^{n_k}\right| \le \left|\int \varphi d\mu_t^{n_p} - \int \varphi d\mu_s^{n_p}\right| + \left|\int \varphi d\mu_s^{n_p} - \int \varphi d\mu_s^{n_k}\right| + \\ + \left|\int \varphi d\mu_s^{n_k} - \int \varphi d\mu_t^{n_k}\right| \le 2\Lambda(\tau,\alpha,\varphi)\cdot|t-s| + \left|\int \varphi d\mu_s^{n_p} - \int \varphi d\mu_s^{n_k}\right|.$$

Выбирая s достаточно близким к t, первое слагаемое можно сделать меньшим $\varepsilon/2$ для всякого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{\mu_s^{n_l}\}$ сходится, то она фундаментальна, следовательно, найдется такой номер N, что для всяких $p,k > N$ второе слагаемое меньше $\varepsilon/2$. Тем самым доказано, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ последовательность интегралов $\displaystyle\int \varphi(x)\,d\mu_t^{n_l}$ фундаментальна. Из-за равномерной плотности мер $\mu_t^{n_l}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой шар U, что $\mu_t^{n_l}(\mathbb{R}^d\backslash U) < \varepsilon$ для всякого l. Пусть f – непрерывная ограниченная функция и $|f(x)| \le M$. Пусть также $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $|f(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$ для всякого $x \in U$ и $|\psi(x)| \le M+1$. Тогда

$$\left|\int f d\mu_t^{n_p} - \int f d\mu_t^{n_k}\right| \le \int_U |f-\psi|\,d\mu_t^{n_p} + \int_U |f-\psi|\,d\mu_t^{n_k} + \\ + \left|\int \psi d\mu_t^{n_p} - \int \psi d\mu_t^{n_k}\right| + \int_{\mathbb{R}^d\backslash U} (|f|+|\psi|)\,d\mu_t^{n_p} + \int_{\mathbb{R}^d\backslash U} (|f|+|\psi|)\,d\mu_t^{n_k},$$

что очевидным образом оценивается через

$$4\varepsilon(M+1) + \left|\int \psi d\mu_t^{n_p} - \int \psi d\mu_t^{n_k}\right|.$$

Последнее слагаемое можно сделать сколь угодно малым, устремляя p и k в бесконечность. Таким образом доказано, что последовательность $\{\mu_t^{n_l}\}$ слабо фундаментальна для всякого $t \in [0,\tau]$ и тем самым слабо сходится для всякого $t \in [0,\tau]$ к некоторой мере μ_t. Следовательно, для всякой непрерывной и ограниченной функции f отображение $t \mapsto \displaystyle\int f\,d\mu_t$ измеримо по Борелю на $[0,\tau]$ как предел измеримых функций. Рассмотрим класс Φ всех ограниченных борелевских функций φ на $\mathbb{R}^d$, для которых отображение $t \mapsto \displaystyle\int \varphi\,d\mu_t$ измеримо по Борелю на $[0,\tau]$. Множество Φ содержит алгебру всех непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$ и замкнуто относительно равномерных и монотонных пределов. По теореме о монотонных классах (см. [2, Теорема 2.19.9]) множество Φ содержит все ограниченные борелевские функции на $\mathbb{R}^d$. В частности, отображение $t \mapsto \mu_t(B)$ измеримо по Борелю на $[0,\tau]$ для всякого борелевского множества B. Пусть μ — мера, заданная семейством мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$.

Покажем, что $\{\mu^{n_l}\}$ слабо сходится к μ. Пусть h – непрерывная и ограниченная функция на $\mathbb{R}^d \times [0,\tau]$. По доказанному выше для каждого фиксированного t имеем

$$\lim_{l\to\infty} \int h(x,t)d\mu_t^{n_l} = \int h(x,t)d\mu_t.$$

Так как функция h ограничена, а меры $\mu_t^{n_l}$ вероятностные, то интегралы $\displaystyle\int h(x,t)d\mu_t^{n_l}$ равномерно по t и n_l ограничены. По теореме Лебега получаем

$$\lim_{l\to\infty}\int_0^\tau\int h(x,t)d\mu_t^{n_l}dt=\int_0^\tau\int h(x,t)d\mu_t dt,$$

что по определению означает слабую сходимость мер μ^{n_l} к μ.

Остается проверить, что $\mu\in N_{\tau,\alpha}$. Для этого заметим, что в силу слабой сходимости $\{\mu_t^{n_l}\}$ к μ_t имеет место неравенство

$$\int\min\{V(x),N\}\,d\mu_t\le\alpha(t)$$

для всякого натурального числа N. Устремляя N в бесконечность и применяя лемму Фату, получаем включение $\mu\in M_{\tau,\alpha}$. Наконец, переходя в неравенстве

$$\left|\int\varphi\,d\mu_t^{n_l}-\int\varphi\,d\mu_s^{n_l}\right|\le\Lambda(\tau,\alpha,\varphi)|t-s|$$

к пределу при $l\to\infty$, получаем

$$\left|\int\varphi\,d\mu_t-\int\varphi\,d\mu_s\right|\le\Lambda(\tau,\alpha,\varphi)|t-s|.$$

Лемма полностью доказана. □

Следствие 1.1. *Множество $N_{\tau,\alpha}$ является выпуклым компактом в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times[0,\tau])$.*

Доказательство. Выпуклость $N_{\tau,\alpha}$ следует из выпуклости множества $M_{\tau,\alpha}$. Далее, пространство $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times[0,\tau])$ является нормированным, причем на неотрицательных мерах сходимость по норме равносильна слабой сходимости. Таким образом, лемма 1.1 влечет компактность $N_{\tau,\alpha}$. □

Лемма 1.2. *Если последовательность мер $\mu^n\in N_{\tau,\alpha}$ слабо сходится, то она V-слабо сходится.*

Доказательство. Пусть последовательность мер μ^n слабо сходится к μ. Тогда для всех $t\in[0,\tau]$ последовательность мер μ_t^n слабо сходится к μ_t. Действительно, по предыдущей лемме из всякой подпоследовательности номеров n_l можно выбрать подпоследовательность $\{n_{l_k}\}$, для которой $\{\mu_t^{n_{l_k}}\}$ сходится слабо к μ_t. Следовательно, вся последовательность $\{\mu_t^n\}$ сходится к μ_t. Пусть F – непрерывная функция на $\mathbb{R}^d$ и функция $g(x)=F(x)(1+V(x))^{-1}$ такова, что $\lim\limits_{|x|\to\infty}g(x)=0$. Для всякого $\varepsilon>0$ существует такая функция $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, что $|g(x)-\psi(x)|<\varepsilon$ для всякого $x\in\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\begin{aligned}\left|\int F\,d\mu_t^n-\int F\,d\mu_t\right|&=\left|\int g(1+V)\,d\mu_t^n-\int g(1+V)\,d\mu_t\right|\le\\&\le\left|\int\psi(1+V)\,d\mu_t^n-\int\psi(1+V)\,d\mu_t\right|+\varepsilon(2+2\alpha(t)).\end{aligned}$$

Остается заметить, что из слабой сходимости μ_t^n следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int \psi(1+V)\,d\mu_t^n - \int \psi(1+V)\,d\mu_t\right| = 0.$$

Лемма доказана. □

Следствие 1.2. *Пусть для некоторых $\tau \in (0,\tau_0]$ и $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ мы имеем включение $Q(N_{\tau,\alpha}) \subseteq N_{\tau,\alpha}$. Тогда Q – непрерывное отображение из $N_{\tau,\alpha}$ в $N_{\tau,\alpha}$.*

Доказательство. Пусть $\mu^n, \mu \in N_{\tau,\alpha}$ и последовательность $\{\mu^n\}$ слабо сходится к μ. Положим $\chi^n = Q(\mu^n)$. Для доказательства сходимости $\{\chi^n\}$ достаточно показать, что из любой подпоследовательности в $\{\chi^n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность к одной и той же мере χ, удовлетворяющей равенству $Q(\mu) = \chi$. Не меняя индексов, будем доказывать это для самой последовательности $\{\chi^n\}$.

По лемме 1.1 существует подпоследовательность таких номеров n_k, что $\{\chi^{n_k}\}$ слабо сходится к некоторой мере $\chi \in N_{\tau,\alpha}$, причем $\{\chi_t^{n_k}\}$ слабо сходится к χ_t для всякого t из отрезка $[0,\tau]$. Конечно, последовательность мер μ^{n_k} слабо сходится к μ, значит, по лемме 1.2, она V-слабо сходится к μ. По условию (H2) для каждого $t \in [0,\tau]$ последовательности функций $x \mapsto a^{ij}(x,t,\mu^{n_k})$ и $x \mapsto b^i(x,t,\mu^{n_k})$ равностепенно непрерывны, равномерно ограничены и поточечно сходятся к $a^{ij}(x,t,\mu)$ и $b^i(x,t,\mu)$ на всяком шаре $U \subset \mathbb{R}^d$. Следовательно, последовательности функций $a^{ij}(x,t,\mu^{n_k})$ и $b^i(x,t,\mu^{n_k})$ сходятся равномерно на шаре $U \subset \mathbb{R}^d$ к $a^{ij}(x,t,\mu)$ и $b^i(x,t,\mu)$ соответственно.

Покажем, что $Q(\mu) = \chi$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и U – шар, содержащий носитель функции φ. Так как $Q(\mu^{n_k}) = \chi^{n_k}$, то выполняется равенство

$$\int_U \varphi d\chi_t^{n_k} - \int_U \varphi d\nu = \int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}}\varphi d\chi_s^{n_k} ds.$$

Заметим, что

$$\int_U L_{\mu^{n_k}}\varphi d\chi_s^{n_k} = \int_U (L_{\mu^{n_k}}\varphi - L_\mu\varphi) d\chi_s^{n_k} + \int_U L_\mu\varphi d\chi_s^{n_k} ds.$$

При $k \to \infty$ первое слагаемое стремится к нулю из-за равномерной сходимости коэффициентов $a^{ij}(x,s,\mu^{n_k})$ и $b^i(x,s,\mu^{n_k})$ на U, а второе слагаемое стремится к $\int_U L_\mu\varphi d\chi_s$ из-за слабой сходимости $\{\chi_s^{n_k}\}$ к χ_s. Напомним, что $|L_{\mu^{n_k}}\varphi| \le \Lambda(\tau,\alpha,\varphi)$, следовательно, равномерно ограниченны интегралы $\int_U L_{\mu^{n_k}}\varphi d\chi_s^{n_k}$. По теореме Лебега

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}}\varphi d\chi_s^{n_k} ds = \int_0^t \int_U L_\mu\varphi d\chi_s.$$

Также из слабой сходимости $\{\chi_t^{n_k}\}$ к χ_t при каждом t имеем $\int \varphi d\chi_t^{n_k} \to \int \varphi d\chi_t$. Полагая $k \to \infty$, получаем равенство

$$\int_U \varphi d\chi_t - \int_U \varphi d\nu = \int_0^t \int_U L_\mu\varphi d\chi ds.$$

В силу произвольности φ получаем $Q(\mu) = \chi$. Остается заметить, что при наших условиях такое χ определено единственным образом. □

Теперь для доказательства теоремы 1.1 осталось найти такое число $\tau \in (0, \tau_0]$ и функцию $\alpha \in C^+([0,\tau])$, что $Q(N_{\tau,\alpha}) \subseteq N_{\tau,\alpha}$. Заметим, что по существу надо проверять лишь вложение $Q(M_{\tau,\alpha}) \subseteq M_{\tau,\alpha}$, так как условие (1.5) автоматически выполняется для мер χ, удовлетворяющих равенству $\chi = Q(\mu)$.

Лемма 1.3. *Пусть $\mu \in N_{\tau,\alpha}$ и $\chi = Q(\mu)$ на $[0,\tau]$. Тогда для всех $t \in [0,\tau]$ выполняется оценка*

$$\int V(x)\, d\chi_t \le S[\alpha](t) + R[\alpha](t) \int V(x)\, d\nu,$$

где

$$R[\alpha](t) = \exp\Big(\int_0^t \Lambda_2[\alpha](s)\, ds\Big), \quad S[\alpha](t) = R[\alpha](t) \int_0^t \frac{\Lambda_1[\alpha](s)}{R[\alpha](s)}\, ds.$$

Отображения Λ_1 и Λ_2 взяты из условия (H1).

Доказательство. Пусть $\mu \in N_{\tau,\alpha}$. Возьмем функцию $\zeta_m \in C^\infty[0,+\infty)$, для которой $0 \le \zeta_m'(x) \le 1$, $\zeta_m'' \le 0$, причем $\zeta_m(x) = x$ при $x \le m-1$ и $\zeta_m(x) = m$ при $x > m$. Пусть χ_t — решение задачи Коши (1.1), т. е. для всякой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство

$$\int \varphi d\chi_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu \varphi d\chi_s ds.$$

Ясно, что вместо функций класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ здесь можно подставлять функции из $C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Положим $\varphi(x) = \zeta_m(V(x)) - m$. Заметим, что

$$L_\mu \zeta_m(V) = \zeta_m'(V) L_\mu V + \zeta_m''(V)(A\nabla V, \nabla V).$$

Тогда

$$\int_{|V|\le m} V d\chi_t \le \int \zeta_m(V) d\chi_t \le \int V(x) d\nu + \int_0^t \int_{|V|\le m} \zeta_m'(V) L_\mu V d\chi_s ds.$$

По условию (H1) имеем

$$\int_0^t \int_{|V|\le m} L_\mu V d\chi_s ds \ \le \ \int_0^t \Big(\Lambda_1[\alpha](s) + \Lambda_2[\alpha](s) \int_{|V|\le m} V d\chi_s\Big) ds.$$

Полагая $m \to \infty$ и применяя лемму Гронуолла, получаем требуемую оценку. □

Применяя лемму 1.3, находим τ и α для каждого из пунктов (1)–(3) теоремы 1.1.

Следствие 1.3. *Существуют $\tau \in (0, \tau_0]$ и постоянная функция $\alpha(t) \equiv \alpha > 0$ такие, что $Q(N_{\tau,\alpha}) \subseteq N_{\tau,\alpha}$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.3 для $\chi = Q(\mu)$, где $\mu \in N_{\tau,\alpha}$, имеет место неравенство

$$\int V\, d\chi_t \le S[\alpha](t) + R[\alpha](t) \int V(x)\, d\nu.$$

Положим

$$\alpha = 2\int V\, d\nu + 1$$

и заметим, что функции $S[\alpha]$ и $R[\alpha]$ не зависят от выбора τ, так как Λ_1 и Λ_2 не зависят от τ. Кроме того, $\lim\limits_{t\to 0} S[\alpha](t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to 0} R[\alpha](t) = 1$. Выбираем τ так, чтобы $S[\alpha](t) < 1$ и $R[\alpha](t) < 2$ при $t \in [0,\tau]$. Тогда неравенство

$$\int V\,d\chi_t \le \alpha$$

выполняется при всех $t \in [0,\tau]$. □

Следствие 1.4. *Предположим, что* $\Lambda_1[\alpha] = 0$ *и* $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$, *где* G *– строго возрастающая непрерывная положительная функция на* $[0,+\infty)$. *Пусть*

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{uG(u)}, \quad u_0 = \int V(x)\,d\nu.$$

Тогда для всякого $\tau \in (0,\tau_0]$, $\tau < T$, *найдется такая функция* $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$, *что* $Q(N_{\tau_0,\alpha}) \subseteq N_{\tau_0,\alpha}$.

Доказательство. Согласно лемме 1.3, для $\chi = Q(\mu)$ имеет место неравенство

$$\int V\,d\chi_t \le \int V\,d\nu \exp\Bigl(\int_0^t G(\alpha(s))\,ds\Bigr).$$

Пусть $\tau \in (0,\tau_0]$, $\tau < T$ и функция α на отрезке $[0,\tau]$ определяется равенством

$$t = \int_{\alpha(0)}^{\alpha(t)} \frac{du}{uG(u)}, \quad \alpha(0) = \int V(x)\,d\nu.$$

Если $\tau < \tau_0$, то положим $\alpha(t) = \alpha(\tau)$ для $t > \tau$. Тогда функция α является непрерывно дифференцируемой строго возрастающей функцией на отрезке $[0,\tau]$ и непрерывной на $[0,\tau_0]$. Кроме того, $\alpha' = \alpha G(\alpha)$. Следовательно, для всех $t \in [0,\tau]$ имеет место равенство

$$\int V\,d\nu \exp\Bigl(\int_0^t G(\alpha(s))\,ds\Bigr) = \alpha(t)\alpha^{-1}(0) \int V\,d\nu = \alpha(t).$$

Поэтому для такой функции α включение $\mu \in N_{\tau_0,\alpha}$ дает включение $\chi \in N_{\tau_0,\alpha}$. □

Следствие 1.5. *Предположим, что* $\Lambda_1[\alpha](t) = G(\alpha(t))$ *и* $\Lambda_2[\alpha] = 0$, *где* G *– строго возрастающая непрерывная положительная функция на* $[0,+\infty)$. *Пусть*

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{G(u)}, \quad u_0 = \int V(x)\,d\nu.$$

Тогда для всякого $\tau \in (0,\tau_0]$, *где* $\tau < T$, *найдется такая функция* $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$, *что* $Q(N_{\tau_0,\alpha}) \subseteq N_{\tau_0,\alpha}$.

Доказательство. Согласно лемме 1.3 для $\chi = Q(\mu)$, где $\mu \in N_{\tau,\alpha}$, имеет место неравенство

$$\int V\,d\chi_t \le \int V\,d\nu + \int_0^t G(\alpha(s))\,ds.$$

Пусть $\tau \in (0, \tau_0]$, $\tau < T$, а функция α на $[0, \tau]$ определяется равенством

$$t = \int_{\alpha(0)}^{\alpha(t)} \frac{1}{G(u)}\, du, \quad \alpha(0) = \int V\, d\nu.$$

Если $\tau < \tau_0$, то положим $\alpha(t) = \alpha(\tau)$ для $t > \tau$. Тогда функция α является непрерывно дифференцируемой строго возрастающей функцией на отрезке $[0, \tau]$ и непрерывной на $[0, \tau_0]$. Кроме того, $\alpha' = G(\alpha)$. Следовательно, для всех $t \in [0, \tau]$ имеет место равенство

$$\int V\, d\nu + \int_0^t G(\alpha(s))\, ds = \alpha(t) + \int V\, d\nu - \alpha(0) \leq \alpha(t).$$

Поэтому для такой функции α включение $\mu \in N_{\tau_0,\alpha}$ дает включение $\chi \in N_{\tau_0,\alpha}$. □

Замечание 1.3. Заметим, что в следствиях 1.3, 1.4 и 1.5 выбор τ и α полностью определяется отображениями Λ_1 и Λ_2. Поэтому можно считать, что условия (H1), (H2) и (H3') выполняются на одном фиксированном и полностью определенном отображениями Λ_1 и Λ_2 множестве $M_{\tau,\alpha}$.

Доказательство теоремы 1.1 в невырожденном случае. Используя следствия 1.3, 1.4 и 1.5 найдем для каждого случая (1)–(3) подходящие α и τ. Согласно следствию 1.1 множество $N_{\tau,\alpha}$ является выпуклым компактом в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, \tau])$, а по следствию 1.2 отображение $Q\colon\ N_{\tau,\alpha} \to N_{\tau,\alpha}$ непрерывно. По теореме Шаудера есть мера $\mu \in N_{\tau,\alpha}$, являющееся неподвижной точкой отображения Q и, следовательно решением задачи Коши (1.1). □

Перейдем к вырожденному уравнению. Для доказательства теоремы существования в случае вырожденной (возможно нулевой) главной части уравнения мы воспользуемся известным методом «исчезающей вязкости» (см., например, [20, 42]). Как и выше, будем предполагать выполнение всех требований условия (H3') за исключением невырожденности матрицы A, т. е. условие $\det A > 0$ уже не требуется.

Пусть $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varrho > 0$ и для всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено неравенство

$$\varrho(x)(|\Delta V(x)| + |\nabla V(x)|^2) \leq \min\{V(x), 1\}.$$

Такая функция ϱ существует, так как по условию мы имеем $\min V > 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t \mu_t = \varepsilon \varrho(x) \Delta \mu_t + \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(x, t, \mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x, t, \mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu. \tag{1.6}$$

Покажем, что выполнены все условия теоремы 1.1 для невырожденного случая. Начнем с условия (H1). Положим

$$L_{\mu,\varepsilon} := \varepsilon \varrho \Delta + L_\mu.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда получаем

$$L_{\mu,\varepsilon} V(x, t) = \varepsilon \varrho(x) \Delta V(x) + L_\mu V(x, t) \leq \varepsilon_0 \min\{V(x), 1\} + \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t) V(x).$$

Таким образом, условие (H1) выполняется с $\widehat{\Lambda}_1[\alpha](t) = \Lambda_1[\alpha](t) + \varepsilon_0$ вместо $\Lambda_1[\alpha]$. Напомним, что в пунктах (2) и (3) выбирается $\tau < T$, где

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{uG(u)} \quad \text{и} \quad T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{G(u)}$$

соответственно. После замены Λ_1 на $\Lambda_1 + \varepsilon_0$ или Λ_2 на $\Lambda_2 + \varepsilon_0$ мы должны заменить T с функцией G на T_{ε_0} с функцией $G + \varepsilon_0$. Заметим, что $T_{\varepsilon_0} < T$ и $T_{\varepsilon_0} \to T$ при $\varepsilon_0 \to 0$. Выбираем $\varepsilon_0 > 0$ так, что $\tau < T_{\varepsilon_0} < T$. Ясно, что условия (H2) и (H3') выполняются. Итак, для каждого из пунктов (1)–(3) теоремы 1.1 найдем, используя следствия 1.3, 1.4 и 1.5, подходящие τ и α. Напомним, что τ и α зависят только от Λ_1 и Λ_2 и, следовательно, не зависят от ε. Пусть $\varepsilon = 1/n < \varepsilon_0$. По доказанному в невырожденном случае для каждого n существует мера $\mu^n \in N_{\tau,\alpha}$, являющаяся решением задачи Коши (1.6).

Применим лемму 1.1 и выберем подпоследовательность номеров n_k так, что $\{\mu^{n_k}\}$ слабо сходится к $\mu \in N_{\tau,\alpha}$. По лемме 1.2 эта последовательность V-слабо сходится к мере μ. Применяя условие (H2), замечаем, что для каждого $t \in [0, \tau]$ последовательности функций $a^{ij}(x, t, \mu^{n_k})$ и $b^i(x, t, \mu^{n_k})$ сходятся равномерно на всяком шаре $U \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и U – шар, содержащий носитель φ. Выполняется равенство

$$\int_U \varphi d\mu_t^{n_k} - \int_U \varphi d\nu = \int_0^t \int_U [n_k^{-1} \varrho \Delta\varphi + L_{\mu^{n_k}}\varphi] d\mu_s^{n_k} ds. \tag{1.7}$$

Из-за равномерной сходимости коэффициентов $a^{ij}(x, s, \mu^{n_k})$, $b^i(x, s, \mu^{n_k})$ и слабой сходимости мер $\mu_s^{n_k}$ при каждом $s \in [0, t]$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_U L_{\mu^{n_k}}\varphi \, d\mu_s^{n_k} = \int_U L_\mu \varphi \, d\mu_s.$$

Так как $|L_{\mu^{n_k}}\varphi| \le \Lambda(\tau, \alpha, \varphi)$, то по теореме Лебега

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_U L_{\mu^{n_k}}\varphi \, d\mu_s^{n_k} \, ds = \int_0^t \int_U L_\mu \varphi \, d\mu_s \, ds.$$

Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_U n_k^{-1} \varrho \Delta\varphi \, d\mu_s \, ds = 0.$$

Полагая $k \to \infty$ в равенстве (1.7), получаем

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu \varphi d\mu_s ds.$$

Таким образом, μ – искомое решение задачи Коши (1.1).

Наконец, откажемся от гладкости матрицы A, т.е. пусть теперь выполняются условия (H1), (H2) и (H3). Начнем с важного частного случая. Предположим, что существует такое число $R > 0$, что матрица $A(x, t, \sigma) \equiv 0$ для всех x с $|x| > R$.

Тогда по условию (H2) для всяких $\tau \in (0, \tau_0]$ и $\alpha \in C^+([0, \tau_0])$ существует число $C(\alpha, \tau) > 0$ такое, что $|a^{ij}(x, t, \sigma)| \le C(\alpha, \tau)$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, \tau]$ и $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$.

Кроме того, отображения $x \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$ равностепенно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ непрерывны на всем $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\omega \geq 0$, $\omega(x) = 0$ при $|x| > 1$ и $\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Для $0 < \delta < 1$ положим $\omega_\delta(x) = \delta^{-d}\omega(x/\delta)$ и $A_\delta = (a_\delta^{ij})$, где

$$a_\delta^{ij}(x,t,\sigma) = a^{ij} * \omega_\delta(x,t,\sigma) = \int a^{ij}(y,t,\sigma)\omega_\delta(x-y)\,dy.$$

Заметим, что $A_\delta(x,t,\sigma) \equiv 0$ при $|x| > R+1$. Ясно, что для A_δ выполняется условие (H2) и для всякой меры σ отображение $A_\delta(x,t,\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по t. Более того, так как отображения $x \mapsto A(x,t,\sigma)$ равностепенно по σ и t непрерывны, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что для всяких $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,\tau]$ и $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ выполняется неравенство

$$|A(x,t,\sigma) - A_\delta(x,t,\sigma)| \leq \int |A(x,t,\sigma) - A(x+y,t,\sigma)|\omega_\delta(y)\,dy < \varepsilon.$$

Поэтому для всяких τ и α можно выбрать такую последовательность $\delta_n > 0$, что для каждой меры $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ имеет место неравенство

$$\max_{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,\tau]} |A(x,t,\sigma) - A_n(x,t,\sigma)| < \frac{1}{n}, \quad A_n = A_{\delta_n}.$$

Рассмотрим новый оператор

$$L_{n,\mu}u := a_n^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}u.$$

Пусть $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\widehat{\Lambda}_1[\alpha](t) = \Lambda_1[\alpha](t) + \varepsilon_0$ и $\widehat{\Lambda}_2[\alpha] = \Lambda_2[\alpha]$. Если же, как в пункте (2) теоремы 1.1, предполагается, что $\Lambda_1 = 0$, то $\widehat{\Lambda}_2[\alpha](t) = \Lambda_2[\alpha](t) + \varepsilon_0$ и $\widehat{\Lambda}_1 = 0$. Напомним, что в пунктах (2) и (3) выбирается $\tau < T$, где

$$T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{uG(u)} \quad \text{и} \quad T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{G(u)}$$

соответственно. После замены Λ_1 на $\Lambda_1 + \varepsilon_0$ или Λ_2 на $\Lambda_2 + \varepsilon_0$ мы должны заменить T с функцией G на T_{ε_0} с функцией $G + \varepsilon_0$. Заметим, что $T_{\varepsilon_0} < T$ и $T_{\varepsilon_0} \to T$ при $\varepsilon_0 \to 0$. Выбираем $\varepsilon_0 > 0$ так, что $\tau < T_{\varepsilon_0} < T$.

Применяя следствия 1.3, 1.4 и 1.5 для каждого пункта (1)–(3) теоремы 1.1, найдем подходящие τ и α. Согласно замечанию 1.3 достаточно проверить условия (H1), (H2) и (H3') только на получившемся $M_{\tau,\alpha}$.

Найдем номер N такой, что для всякого $n > N$ и всякой меры $\mu \in M_{\tau,\alpha}$ выполняется неравенство

$$|L_{n,\mu}V(x,t) - L_\mu V(x,t)| = |(a_n^{ij}(x,t) - a^{ij}(x,t))\partial_{x_i}\partial_{x_j}V(x)| \leq \varepsilon_0 \min\{V(x), 1\}.$$

Напомним, что для оператора L_μ выполняется условие (H1). Пусть $\mu \in M_{\tau,\alpha}$ и $n > N$. Тогда

$$L_{n,\mu}V = L_\mu V + \bigl(L_{n,\mu}V - L_\mu V\bigr) \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 V + \varepsilon_0 \min\{V,1\} \leq \widehat{\Lambda}_1 + \widehat{\Lambda}_2 V.$$

Следовательно, для оператора $L_{n,\mu}$ при $n > N$ на $M_{\tau,\alpha}$ выполняется условие (H1), причем τ и α уже выбраны так, что $Q(N_{\tau,\alpha}) \subseteq N_{\tau,\alpha}$. Напомним, что матрица A_n равна нулю при $|x| > R+1$. Поэтому для некоторых чисел C_1 и C_2 выполняется условие $|\sqrt{A_n}\nabla V| \le C_1 + C_2 V$. Таким образом, условия (H1), (H2) и (H3') выполнены и для каждого $n > N$ существует решение μ^n задачи Коши (1.1) с оператором $L_{n,\mu}$, причем все меры μ^n принадлежат $N_{\tau,\alpha}$. Как и в предыдущих пунктах, можно выбрать подпоследовательность $\{\mu^{n_k}\}$, которая слабо и V-слабо сходится к некоторой мере $\mu \in N_{\tau,\alpha}$. Покажем, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t \int L_{n_k,\mu^{n_k}}\varphi\, d\mu_s^{n_k}\, ds = \int_0^t \int L_\mu \varphi\, d\mu_s\, ds. \tag{1.8}$$

Для этого заметим, что

$$\int_0^t \int L_{n_k,\mu^{n_k}}\varphi\, d\mu_s^{n_k}\, ds \;=\; \int_0^t \int (L_{n_k,\mu^{n_k}}\varphi \;-\; L_{\mu^{n_k}}\varphi)\, d\mu_s^{n_k}\, ds \;+\; \int_0^t \int L_{\mu^{n_k}}\varphi\, d\mu_s^{n_k}\, ds.$$

Первое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\left|\int_0^t \int L_{n_k,\mu^{n_k}}\varphi - L_{\mu^{n_k}}\varphi\, d\mu_s^{n_k}\, ds\right| \le n_k^{-1} t \max_x |\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi(x)|,$$

следовательно, стремится к нулю. Аналогично предыдущему получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t \int L_{\mu^{n_k}}\varphi\, d\mu_s^{n_k}\, ds = \int_0^t \int L_\mu \varphi\, d\mu_s\, ds.$$

Равенство (1.8) доказано. Для каждого k и всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство

$$\int \varphi d\mu_t^{n_k} - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_{n_k,\mu^{n_k}}\varphi\, d\mu_s^{n_k} ds.$$

При $k \to \infty$ получаем, что мера μ является решением задачи Коши 1.1.

Наконец, рассмотрим общий случай и сведем его к уже исследованному. Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\psi(x) = 0$ при $|x| > 2$. Положим $\psi_n(x) = \psi(x/n)$ и $L_{n,\mu} := \psi_n L_\mu$. Легко видеть, что матрица главной части оператора $L_{n,\mu}$ равна нулю вне шара $|x| < n$. Условия (H2) и (H3) очевидно выполняются для коэффициентов нового оператора. Проверим условие (H1):

$$L_{n,\mu}V = \psi_n L_\mu V \le \psi_n \Lambda_1 + \psi_n \Lambda_2 V \le \Lambda_1 + \Lambda_2 V.$$

Пусть μ^n – решения задачи Коши с оператором $L_{n,\mu}$. Опять можно считать, что все μ^n принадлежат одному множеству $N_{\tau,\alpha}$. Остается повторить уже приведенные выше рассуждения с выбором слабо и V-слабо сходящейся подпоследовательности $\{\mu^{n_k}\}$ и перейти к пределу, учитывая, что $L_{n,\mu}\varphi(x) = L_\mu\varphi(x)$ при $|x| < n$. Теорема 1.1 полностью доказана. $\square$

1.1.2 Примеры

Пример 1.3. Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t \mu_t = \operatorname{div}\Big(\mu_t \int \nabla W(x-y)\, d\mu_t\Big), \quad \mu_0 = \nu. \tag{1.9}$$

Предложение 1.1. *Пусть $W(x) = K(|x|)$, где $K \in C^2([0,+\infty))$, $K(0) = 0$, $K'(0) = 0$, $K'(u) > 0$, $K''(u) > 0$ при $u > 0$ и существуют такие числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для всех $u, v > 0$ справедливо неравенство*

$$K'(u+v) \le C_1 K(u) + C_2 K(v).$$

Предположим также, что $K^m(|x|) \in L^1(\nu)$ для некоторого $m > 1$. Тогда существует такое положительное число τ, что на отрезке $[0,\tau]$ задача Коши (1.9) имеет решение μ, заданное семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$. Кроме того, выполняется неравенство

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \int K^m(|x|)\, d\mu_t < \infty.$$

Доказательство. По условию $a^{ij} = 0$ и

$$b(x,t,\mu) = -\int \frac{K'(|x-y|)(x-y)}{|x-y|}\, d\mu_t.$$

Положим $V(x) = K^m(|x|) + 1$ Заметим, что

$$K'(|x-y|) \le C_1 K(|x|) + C_2 K(|y|) \le C_1 K(|x|) + C_2 V^{1-\gamma}(y),$$

где $\gamma = (m-1)/m$. Следовательно, выполняется условие (H2) и, как и выше, достаточно проверить только условие (H1). Положим $f(u) = K'(u)$. Мы имеем

$$(b(x,t,\mu), x) = -\int \frac{f(|x-y|)(x-y,x)}{|x-y|}\, d\mu_t \le \\ \le -\int f(|x-y|)|x-y|\, d\mu_t + \int f(|x-y|)|y|\, d\mu_t.$$

Напомним, что для $c, d > 0$ выполняется неравенство Юнга

$$cd \le \int_0^c f^{-1}(s)\, ds + \int_0^d f(t)\, dt,$$

где f^{-1} – обратная функция к f. Применяя это неравенство к $f(|x-y|)|y|$ и используя оценку

$$\int_0^{f(|x-y|)} f^{-1}(u)\, du \le |x-y| f(|x-y|),$$

получаем

$$(b(x,t,\mu), x) \le \int \Big(\int_0^{|y|} f(u)\, du\Big)\, d\mu_t.$$

Заметим, что $\nabla V(x) = mK^{m-1}(|x|)f(|x|)x/|x|$. Следовательно, для некоторых чисел $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ имеем место неравенство

$$L_\mu V(x,t) \le \bigl(c_1 + c_2 V(x)\bigr)\Bigl(\int V(y)\,d\mu_t\Bigr)^{1/m} = \bigl(c_1 + c_2 V(x)\bigr)\alpha^{1/m}(t).$$

Тем самым выполняется условие (H1). Остается применить пункт (1) теоремы 1.1. $\square$

Пример 1.4. Пусть $\tau_0 > 0$ и $b(x,t)$ – непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^d \times [0,\tau_0]$. Пусть также F – непрерывная неотрицательная функция на $\mathbb{R}^d$ и G – строго возрастающая непрерывная положительная функция на $[0,+\infty)$, $G(0) > 1$. Положим

$$b(x,t,\mu) = b(x,t)G\Bigl(\int F(y)\,d\mu_t\Bigr).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t \mu_t = \Delta\mu_t + \mathrm{div}\Bigl(\mu_t b(x,t,\mu)\Bigr), \quad \mu_0 = \nu, \tag{1.10}$$

Предложение 1.2. *Предположим, что существует такая функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что $V \ge 1$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} F(x)/V(x) = 0$ и для некоторых чисел C_1 и C_2 и всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau_0]$ выполняется неравенство*

$$|\Delta V(x)| + (b(x,t),\nabla V(x)) \le C_1 + C_2 V(x).$$

Пусть $V \in L^1(\nu)$. Тогда существует такое число $\tau \in (0,\tau_0]$, что на отрезке $[0,\tau]$ задача Коши (1.10) имеет решение μ, заданное семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$. Кроме того, выполняется неравенство

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \int V(x)\,d\mu_t < \infty.$$

Если же известно, что

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{uG(u)} = +\infty, \quad u_0 = \int V\,d\nu.$$

то решение задачи Коши существует на всем отрезке $[0,\tau_0]$.

Доказательство. Пусть $\mu \in M_{\tau,\alpha}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} L_\mu V(x,t) &= \Delta V + (b(x,t),\nabla V(x))G(\alpha(t)) = \\ &= \Delta V + (b(x,t),\nabla V(x)) + (b(x,t),\nabla V(x))(G(\alpha(t)) - 1) \le (C_1 + C_2 V)G(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Требуемое утверждение немедленно следует из теоремы 1.1. $\square$

Пусть, например, $V(x) = \exp(M|x|^r)$, где $M > 0$ и $r \ge 2$. Для выполнения условий предложения 1.2 достаточно, чтобы

$$\exp(M|x|^r) \in L^1(\nu), \quad |F(x)| \le \exp(M'|x|^r), \quad M' < M$$

и для некоторых чисел c_1 и $c_2 > drM$ и всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau_0]$ выполнялось неравенство

$$(b(x,t),x) \le c_1 - c_2|x|^r.$$

1.1.3 Отсутствие глобального решения

В настоящем разделе мы получим достаточные условия отсутствия глобального решения. Отметим, что вопросам «blow-up» решений уравнений рассматриваемого вида посвящена обширная литература, см. [17, 18, 28, 38, 57].

Напомним, что если в условии (H1) $\Lambda_1[\alpha]=0$ и $\Lambda_2[\alpha](t)=G(\alpha(t))$, то при выполнении условий (H2) и (H3) пункт (2) теоремы 1.1 гарантирует существование решения на всяком отрезке $[0,\tau]$, где
$$\tau<\int_{u_0}^{+\infty}\frac{du}{uG(u)}.$$
Аналогичное утверждение имеет место в пункте (3). Следующая теорема показывает, что в некотором смысле такие оценки времени существования решения являются точными.

Теорема 1.2. *Пусть $V\in C^2(\mathbb{R}^d)$, $V\geq 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=+\infty$. Пусть также задана непрерывная положительная возрастающая функция G на $[0,+\infty)$. Предположим, что коэффициенты оператора*
$$L_\mu=a^{ij}(x,t,\mu)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+b^i(x,t,\mu)\partial_{x_i}$$
определены на всяком множестве $M_{\tau,\alpha}(V)$ и для всех $\mu\in M_{\tau,\alpha}(V)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,\tau]$ выполняется неравенство

(i) $L_\mu V(x,t)\geq G\Bigl(\int V(x)d\mu_t\Bigr)V(x)$

или неравенство

(ii) $L_\mu V(x,t)\geq G\Bigl(\int V(x)d\mu_t\Bigr)$.

Пусть также $|\sqrt{A(x,t,\mu)}\nabla V(x)|^2\leq C_1+C_2V(x)$ для некоторых постоянных $C_1,C_2>0$. Предположим, что $u_0=\int V\,d\nu>0$ и в ситуации (i) мы имеем
$$T=\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{uG(u)}<+\infty,$$
а в ситуации (ii) имеем
$$T=\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{G(u)}<+\infty.$$
Тогда задача Коши (1.1) на отрезке $[0,\tau]$ с $\tau\geq T$ не имеет решения в классе мер $\mu=(\mu_t)_{t\in[0,T]}$, для которых μ_t – вероятностные меры и
$$\sup_{t\in[0,T]}\int V(x)\,d\mu_t<\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случай (i). Пусть $\tau>0$. Если $\mu=(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ — решение задачи Коши, то для всех $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство
$$\int\varphi d\mu_t-\int\varphi d\nu=\int_0^t\int L_\mu\varphi d\mu_s ds.$$

Возьмем $\zeta_m \in C^\infty[0,+\infty)$, для которых $0 \le \zeta_m'(z) \le 1$, $\zeta_m'' \le 0$, причем $\zeta_m(z) = z$ при $z \le m-1$ и $\zeta_m(z) = m$ при $z > m$. Положим $\varphi(x) = \zeta_m(V(x)) - m$. Заметим, что

$$L_\mu \zeta_m(V) = \zeta_m'(V) L_\mu V + \zeta_m''(V)(A\nabla V, \nabla V).$$

Тогда

$$\int \zeta_m(V) d\mu_t = \int \zeta_m(V(x)) d\nu + \int_0^t \int \zeta_m'(V) L_\mu V d\mu_s ds + \int_0^t \int \zeta_m''(V) |\sqrt{A}\nabla V|^2 d\mu_s ds,$$

что оценивается снизу выражением

$$\int \zeta_m(V) d\nu + \int_0^t \int \zeta_m'(V) V G\Bigl(\int V\, d\mu_s\Bigr) d\mu_s ds - \int_0^t \int_{|V|\ge m} |\zeta_m''(V)|(C_1 + C_2 V) d\mu_s ds.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая интегрируемость V по мере μ, получаем оценку

$$\int V d\mu_t \ge \int V d\nu + \int_0^t G\Bigl(\int V\, d\mu_s\Bigr) \int V d\mu_s ds.$$

Положим

$$H(u) = G(u)u, \quad g(t) := \int V\, d\nu + \int_0^t H\Bigl(\int V\, d\mu_s\Bigr) ds.$$

Тогда неравенство перепишется в виде $H^{-1}(g'(t)) \ge g(t)$ или, что равносильно, в виде $g'(t) \ge H(g(t))$. Поделим последнее неравенство на $H(g) = gG(g)$ и проинтегрируем от 0 до t. Тогда для всех t из отрезка $[0,\tau]$ получим неравенство

$$t \le \int_{g(0)}^{g(t)} \frac{du}{uG(u)} \le \int_{g(0)}^{+\infty} \frac{du}{uG(u)} = T.$$

Напомним, что $g(0) = \displaystyle\int V(x)\, d\nu$. Пусть $\tau \ge T$. Тогда при $t = T$ получаем $g(t) = +\infty$ и приходим к противоречию с условием, что $\displaystyle\sup_{t\in[0,\tau]} \int V(x)\, d\mu_t < \infty$. Доказательство в случае (ii) проводится совершенно аналогично. □

Пример 1.5. Пусть в задаче Коши (1.1) мы имеем

$$a^{ij} = 0, \quad b(x,t,\mu) = x \int |y|^2 d\mu_t.$$

Предположим, что $|x|^p \in L^1(\nu)$ для некоторого $p > 2$. Пусть $m \in (2,p)$. Тогда

$$L_\mu |x|^m = (b, \nabla |x|^m) = m|x|^m \int |y|^2\, d\mu_t.$$

Таким образом, для $V(x) = \delta + |x|^m$, $\delta > 0$, выполняется неравенство

$$L_\mu V \le mV\Bigl(\int V\, d\mu_t\Bigr)^{2/m}$$

и, следовательно, по пункту (2) теоремы 1.1 существует решение на отрезке $[0,\tau]$ для всякого

$$\tau < \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{mu^{1+2/m}} = \frac{1}{2u_0^{2/m}}, \quad u_0 = \delta + \int |x|^m \, d\nu.$$

Учитывая то, что m – произвольное число из интервала $(2,p)$ и δ – произвольное положительное число, то, устремляя m к 2 и δ к 0, получаем, что решение существует на отрезке $[0,\tau]$ для всякого $\tau < \left(2\int |x|^2 \, d\nu\right)^{-1}$. Если же $\int |x|^2 \, d\nu > 0$, т.е. начальное условие не является мерой Дирака δ_0 в нуле, то выполнены условия пункта (i) теоремы 1.2 с функцией $V(x) = |x|^2$ и, значит, глобального решения на отрезке $[0,\tau]$ при $\tau \geq \left(2\int |x|^2 \, d\nu\right)^{-1}$ нет. Легко проверить, что $\mu_t \equiv \delta_0$ является решением задачи Коши на всяком отрезке $[0,\tau]$.

1.2 Единственность решений

В этом разделе мы исследуем единственность решения задачи Коши

$$\partial_t \mu = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}(x,t)\mu) - \partial_{x_i}(b^i(\mu,x,t)\mu), \quad \mu|_{t=0} = \nu \tag{1.11}$$

с матрицей диффузии, не зависящей от решения. Случай невырожденных матриц диффузии, зависящих от решения, а также примеры неединственности, рассмотрен в [61].

Далее нам понадобится строить гладкие аппроксимации коэффициентов уравнения, сохраняющие существование функции Ляпунова. Хорошо известно, что локально интегрируемые или ограниченные функции хорошо аппроксимируются свертками с гладикми ядрами. Контроль над существованием функции Ляпунова обеспечивается следующей леммой.

Лемма 1.4. *Пусть a^{ij}, b^i – некотороые борелевские функции на $\mathbb{R}^{d+1}$, ограниченные на $B \times [\alpha,\beta]$ для каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ и каждого интервала $[\alpha,\beta]$. Предположим, что существуют функции $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и $\Lambda \in C(\mathbb{R}^d)$ такие, что $W \geq 1$ и*

$$a^{ij}(x,t)\partial_{x_i x_j} W(x) + b^i(x,t)\partial_{x_i} W(x) \leq \Lambda(x) W(x) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Тогда:

(i) *существует последовательность функций a_n^{ij} и $b_n^i \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ такая, что для каждой меры $\mu = \varrho(x,t)\,dx\,dt$ с неотрицательной борелевской плотностью ϱ, т.е. $\|\varrho(\,\cdot\,,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ для п. в. t, имеет место*

$$\lim_{m\to\infty} \|a_n^{ij} - a^{ij}\|_{L^p(\mu, B\times[\alpha,\beta])} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|b_n^i - b^i\|_{L^p(\mu, B\times[\alpha,\beta])} = 0$$

для каждого $p \geq 1$, каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ и интервала $[\alpha,\beta]$. Более того, для каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ и каждого интервала $[\alpha,\beta]$ существует такой индекс n_0, что для всех $n > n_0$

$$a_n^{ij}(x,t)\partial_{x_i x_j} W(x) + b_n^i(x,t)\partial_{x_i} W(x) \leq (1+\Lambda(x)) W(x) \quad \forall (x,t) \in B \times [\alpha,\beta].$$

(ii) *Предположим, что a^{ij}, b^i непрерывны по x равномерно по t на $B\times[\alpha,\beta]$ для каждого шара $B\subset\mathbb{R}^d$ и интервала $[\alpha,\beta]$. Пусть μ – борелевская мера на $\mathbb{R}^{d+1}$, заданная семейством вероятностных мер μ_t на $\mathbb{R}^d$, т.е. $\mu(dxdt)=\mu_t(dx)\,dt$. Тогда существует последовательность функций $a^{ij}_n, b^i_n\in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty}\|a^{ij}_n-a^{ij}\|_{L^p(\mu,B\times[\alpha,\beta])}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|b^i_n-b^i\|_{L^p(\mu,B\times[\alpha,\beta])}=0$$

для каждого $p\ge 1$, каждого шара $B\subset\mathbb{R}^d$ и интервала $[\alpha,\beta]$. Более того, для каждого шара $B\subset\mathbb{R}^d$ и интервала $[\alpha,\beta]$ существует такой индекс n_0, что для всех $n>n_0$

$$a^{ij}_n(x,t)\partial_{x_ix_j}W(x)+b^i_n(x,t)\partial_{x_i}W(x)\le(1+\Lambda(x))W(x)\quad \forall(x,t)\in B\times[\alpha,\beta].$$

(iii) *Предположим, что $a^{ij}\in C(\mathbb{R}^{d+1})$. Тогда существуют такие последовательности a^{ij}_m и $b^i_n\in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, что все заключения пунктов* (i) *и* (ii) *верны с a^{ij}_m вместо a^{ij}_n (т.е. в* (i) *и* (ii) *функции a^{ij} и b^i можно приближать независимо). Более того, неравенство для W остается верным, если заменить в неравенстве a^{ij}_m на a^{ij}.*

Доказательство. Пусть $\xi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – некоторые ядра усреднения, т.е. $\xi\ge 0$, $\|\xi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}=1$ и $\eta\ge 0$, $\|\eta\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}=1$. Для каждого $\varepsilon>0$ положим

$$\xi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}\xi(x/\varepsilon),\quad \eta_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\eta(t/\varepsilon),\quad \omega_\varepsilon(x,t)=\xi_\varepsilon(x)\eta_\varepsilon(t).$$

Докажем (i). Последовательности $a^{ij}_n=\omega_{1/n}*a^{ij}$ и $b^i_n=\omega_{1/n}*b^i$ сходятся к a^{ij} и b^i соответственно для п.в. (x,t) относительно меры Лебега и ограничены на каждом множестве $B\times[\alpha,\beta]$, где B – некоторый шар. Учитывая, что $\|\varrho(\,\cdot\,,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}=1$, и применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем требуемое утверждение. Проверим последнее заключение пункта (i). Пусть g^1 и g^2 – две борелевские функции на $\mathbb{R}^{d+1}$, ограниченные на $B\times[\alpha,\beta]$ для каждого шара B и интервала $[\alpha,\beta]$. Предположим также, что существуют функции $\varphi_1,\varphi_2,\psi\in C(\mathbb{R}^d)$, для которых

$$\varphi_1(x)g^1(x,t)+\varphi_2(x)g^2(x,t)\le\psi(x)$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$. Как и выше, $g^i_n=\omega_{1/n}*g^i$, $i=1,2$. Чтобы проверить последнее заключение в (i), достаточно доказать, что для каждого шара $B\subset\mathbb{R}^d$ и интервала $[\alpha,\beta]$ существует такой индекс n_0, что для всех $n>n_0$ и для всех $(x,t)\in B\times[\alpha,\beta]$ выполнено $\varphi_1(x)g^1_n(x,t)+\varphi_2(x)g^2_n(x,t)\le\psi(x)+1$. Действительно,

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)g^1_n(x,t)+\varphi_2(x)g^2_n(x,t)\le\psi(x)+&\\ +\int\!\!\int\Big(\big(\varphi_1(x)-\varphi_1(y)\big)g(y,\tau)+&\\ +\big(\varphi_1(x)-\varphi_1(y)\big)g(y,\tau)+\big(\psi(y)-\psi(x)\big)\Big)\omega_{1/n}(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau.\end{aligned}$$

Требуемое утверждение следует из непрерывности φ_i,ψ и ограниченности g^i.

Докажем (ii). Достаточно построить последовательность непрерывных функций, приближающих a^{ij} и b^i, поскольку непрерывные функции допускают равномерное приближение гладкими функциями. Для каждого x положим

$$a^{ij}_n(x,t)=a^{ij}(x,\,\cdot\,)*\eta_{1/n}(t)\qquad\text{и}\qquad b^i_n(x,t)=b^i(x,\,\cdot\,)*\eta_{1/n}(t).$$

Заметим, что равномерная непрерывность a^{ij} и b^i по x влечет непрерывность a_n^{ij}, b_n^i по паре переменных. Более того, поскольку Λ и W не зависят от t, неравенство с W очевидно выполняется для a_n^{ij}, b_n^i. По свойствам сверток для каждого x последовательности $a_n^{ij}(x,t)$ и $b_n^i(x,t)$ сходятся к $a_n^{ij}(x,t)$ и $b_n^i(x,t)$ для п.в. t. Еще раз используя равномерную непрерывность по x, выводим существование такого множества $J \subset [\alpha, \beta]$ полной меры Лебега, что сходимость имеет место для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times J$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{m\to\infty} \int_B |a_n^{ij}(x,t) - a^{ij}(x,t)|^p \, d\mu_t = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_B |b_n^i(x,t) - b^i(x,t)|^p \, d\mu_t = 0$$

для п.в. $t \in J$. Ограниченность a^{ij}, b^i, вместе с тем, что меры μ_t вероятностные, влечет требуемое утверждение.

Для доказательства (iii) достаточно заметить, что a_m^{ij} построены как свертки с гладкими ядрами, поэтому они сходятся к a^{ij} равномерно на каждом компакте. □

Замечание 1.4. (i) Из доказательства видно, что если для некоторой непрерывной функции φ верно $|b^i(x,t)| \le \varphi(x)$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, то для каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ и интервала $[\alpha, \beta]$ существует такой индекс n_0, что для всех $n > n_0$ выполнено $|b_n^i(x,t)| \le \varphi(x) + 1$ для $(x,t) \in B \times [\alpha, \beta]$.

(ii) Если $\langle b(x+y,t) - b(x,t), y\rangle \le \theta(x)|y|^2$ для всех x, y, t и некоторой непрерывной функции θ, то для каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ и отрезка $[\alpha, \beta]$ существует n_0 такое, что для всех $n > n_0$ выполнено $\langle b_n(x+y,t) - b_n(x,t), y\rangle \le (\theta(x)+1)|y|^2$ для всех $(x,t) \in B \times [\alpha, \beta]$ и всех $y \in \mathbb{R}^d$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\langle b_n(x+y,t) - b_n(x,t), y\rangle = \\
&\qquad = \int\int \langle b(\xi+y,t) - b(\xi,t), y\rangle \, \omega_{1/n}(x-\xi, t-\tau) \, d\xi \, d\tau \le \\
&\qquad\qquad \theta(x)|y|^2 + |y|^2 \int\int \Big(\theta(\xi) - \theta(x)\Big)\omega_{1/n}(x-\xi, t-\tau) \, d\xi \, d\tau.
\end{aligned}$$

(iii) Если $\lambda|\xi|^2 \le \langle A(x,t)\xi, \xi\rangle \le \lambda^{-1}|\xi|^2$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $t \in \mathbb{R}$, то те же неравенства с той же константой λ выполняются для A_m. Это следует из свойств сверток и ядра ω_ε. Более того, если A из класса Липшица по x с константой Липшица Λ, то A_m лежит в классе Липшица по x с константой Липшица Λ.

1.2.1 Матрица диффузии невырожденная

Сначала рассмотрим случай, когда a^{ij} не зависят от μ и $\det A > 0$. Предположим, что выполнено условие

(NH1) Пусть $a^{ij} \in C(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ и существует положительная непрерывная функция λ на $\mathbb{R}^d$ такая, что

$$\langle A(x,t)\xi, \xi\rangle \ge \lambda(x)|\xi|^2$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, и для каждого B существуют числа $\gamma = \gamma(B) > 0$ и $\kappa = \kappa(B) \in (0,1]$ такие, что

$$|a^{ij}(x,t) - a^{ij}(y,t)| \le \gamma|x-y|^\kappa$$

для $x, y \in B$, $t \in [0, T]$.

Через $\|\mu\|_{TV}$ обозначим полную вариацию меры μ:

$$\|\mu\|_{TV} := \sup\Big\{\Big|\int f(x)\mu(dx)\Big| \colon \ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ |f| \leq 1\Big\}. \tag{1.12}$$

Заметим, что если мера задана плотностью относительно меры Лебега, то полная вариация меры равна L^1-норме ее плотности. Для каждой положительной измеримой функции W положим $\|\mu\|_W = \|W\mu\|_{TV}$.

Для заданной непрерывной функции $V \geq 1$ через $\mathcal{M}_T(V)$ будем обозначать множество мер μ на $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, заданных семействами вероятностных мер μ_t на $\mathbb{R}^d$ со свойством

$$\sup_{t \in [0,T]} \int V(x)\, d\mu_t < \infty. \tag{1.13}$$

В дополнение к (NH1) предположим, что выполнены условия

(NH2) существует функция $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $W > 0$, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} W(x) = +\infty$ такая, что функция $W(x)V^{-1/2}(x)$ ограничена на $\mathbb{R}^d$ и для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_T(V)$ существует постоянная $\alpha(\mu) > 0$ такая, что

$$L_\mu W(x, t) \leq \alpha(\mu) W(x)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$;

(NH3) существует непрерывная возрастающая функция G на $[0, +\infty)$ такая, что $G(0) = 0$ и

$$\lambda(x)^{-1}\big|b(\mu, x, t) - b(\sigma, x, t)\big| \leq \sqrt{V(x)}\, G(\|\mu_t - \sigma_t\|_W)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$ и $\mu, \sigma \in \mathcal{M}_T(V)$;

(NH4) существует функция $U \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $U > 0$, $\lim_{|x| \to \infty} U(x) = +\infty$ такая, что для каждой $\mu \in \mathcal{M}_T(V)$ существует число $\beta(\mu) > 0$ со свойством

$$W^2(x)\lambda(x)^{-1}|b(\mu, x, t)|^2 + \frac{|\sqrt{A(x,t)}\nabla U(x)|^2}{U^2(x)} + \frac{|L_\mu U(x, t)|}{U(x)} \leq \beta(\mu) V(x)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$.

Теорема 1.3. *Предположим, что выполнены условия* (NH1), (NH2), (NH3), (NH4). *Если*

$$\int_{0+} \frac{du}{G^2(\sqrt{u})} = +\infty,$$

то существует не более одного решения задачи Коши (1.11) *в классе* $\mathcal{M}_T(V)$.

Пример 1.6. Пусть $m \geq k \geq 1$. Запишем условия теоремы для $A = I$ и функций Ляпунова $V(x) = 1 + |x|^{2m}$, $W(x) = 1 + |x|^k$ и $U(x) = 1 + |x|^2$. Условия (NH2) и (NH4) принимают следующий вид: для каждой меры $\mu = \mu_t\, dt$ из $\mathcal{M}_T(1 + |x|^{2m})$, т.е.

$$\sup_{t \in [0,T]} \int (1 + |x|^{2m})\, d\mu_t < \infty,$$

существуют постоянные $\alpha(\mu) > 0$ и $\beta(\mu) > 0$ такие, что

$$\langle b(\mu,x,t),x\rangle \le \alpha(\mu)(1+|x|^2), \quad |b(\mu,x,t)| \le \beta(\mu)(1+|x|^{m-k}).$$

Условие (NH3) с $G(u) = u$ записывается так:

$$|b(\mu,x,t) - b(\sigma,x,t)| \le c(1+|x|^m)\int (1+|y|^k)\,d\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV}$$

для всех $\mu,\sigma \in \mathcal{M}_T(V)$ с некоторой постоянной $c > 0$.

Если эти условия выполнены, то задача Коши

$$\partial_t\mu = \Delta\mu - \operatorname{div}(b(\mu,x,t)\mu), \quad \mu|_{t=0} = \mu_0,$$

имеет не более одного решения в классе $\mathcal{M}_T(1+|x|^{2m})$.

В частности, все условия выполнены для

$$b(\mu,x,t) = -\int |x-y|^n(x-y)\mu_t(dy)$$

с $m = 2n+2$ и $k = n+1$. Проверим (NH2). Имеем

$$\langle b(\mu,x,t),x\rangle = -\int |x-y|^n\langle x-y,x\rangle\mu_t(dy) \le -\int |x-y|^{n+2}\mu_t(dy) + \int |x-y|^{n+1}|y|\mu_t(dy).$$

Заметим, что $|x-y|^{n+1}|y| \le \frac{n+1}{n+2}|x-y|^{n+2} + \frac{1}{n+2}|y|^{n+2}$. Тогда

$$\langle b(\mu,x,t),x\rangle \le (n+2)^{-1}\sup_{t\in[0,T]}\int |y|^{n+2}\mu_t(dy) = \alpha(\mu).$$

Условия (NH1), (NH3) и (NH4) очевидно выполнены.

Перейдем к доказательству теоремы 1.3.

Доказательство. Пусть $\mu(dxdt) = \mu_t(dx)\,dt$ и $\sigma(dxdt) = \sigma_t(dx)\,dt$ – два решения задачи Коши (1.11). Положим $\alpha = \max\{\alpha(\mu),\alpha(\sigma)\}$, $\beta = \sup\{\beta(\mu),\beta(\sigma),W(x)V^{-1/2}(x)\}$ и

$$M = \sup_{t\in[0,T]}\int V(x)\,d(\mu_t+\sigma_t).$$

Далее считаем, что условия (NH2) и (NH4) выполняются с указанными α и β. Поскольку A невырождена, меры μ и σ задаются плотностями ϱ_μ и ϱ_σ относительно меры Лебега (см. [4]), и $\|\varrho_\mu(\,\cdot\,,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$, $\|\varrho_\sigma(\,\cdot\,,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ для п. в. t. Значит, применим пункт (i) леммы 1.4.

Шаг I. Аппроксимация Зафиксируем функцию срезки $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2$. Предположим, что при некотором $C > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка $|\varphi''(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2 \le C\varphi(x)$. Для каждого $N \ge 1$ положим

$$\varphi_N^W(x) = \varphi(W(x)/N) \quad \text{и} \quad \varphi_N^U(x) = \varphi(U(x)/N),$$

$$B_N^W = \{x : W(x) \le N\} \quad \text{и} \quad B_N^U = \{x : U(x) \le N\}.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $|\psi(x)| \le W(x)$.

Пусть $K \ge 2$ таково, что носитель ψ содержится в B_K^U. Для каждого такого K найдем число $N = N(K) \ge 2$ такое, что $B_{2K}^U \subset B_N^W$. Заметим, что $\varphi_N^W(x) = 1$ для $x \in \operatorname{supp} \varphi_K^U$. Функция φ_K^U используется для локализации задачи, что позволит приблизить коэффициенты оператора L локально, а не на всем пространстве $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Функция φ_N^W срезает коэффициенты так, чтобы новый оператор также имел функцию Ляпунова, т.е. выполнялось условие (NH2).

Продолжим коэффициенты a^{ij}, b^i на $\mathbb{R}^{d+1}$ следующим образом: $a^{ij}(x,t) = a^{ij}(x,T)$, $b^i(x,t,\mu) = b^i(x,T,\mu)$ при $t > T$ и $a^{ij}(x,t) = a^{ij}(x,0)$, $b^i(x,t,\mu) = b^i(x,0,\mu)$ при $t < 0$. Очевидно, что продолженные таким образом коэффициенты удовлетворяют условиям (NH1), (NH2), (NH3) и (NH4) на $\mathbb{R}^{d+1}$.

Построим новый оператор $\widetilde{L}$ с гладкими коэффициентами, который приближает L на $B_{2N}^W \times [0,T]$. Заметим, что $a^{ij} \in C(\mathbb{R}^{d+1})$ и применим пункт (iii) леммы 1.4. В силу (i) и (iii) леммы 1.4, существуют последовательности функций $b_n^i, a_m^{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \|a^{ij} - a_m^{ij}\|_{L^1((\mu+\sigma), B_{2N}^W \times [0,T])} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|b^i(\mu, \cdot\,, \cdot\,) - b_n^i\|_{L^2((\mu+\sigma), B_{2N}^W \times [0,T])} = 0.$$

Согласно Замечанию 1.4, матрица $A_m = (a_m^{ij})$ удовлетворяет условию (NH1) для каждого m для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}$. По (i) и (iii) леммы 1.4, существует индекс n_0 такой, что для всех $m, n > n_0$ имеет место

$$a_m^{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j} W(x) + b_n^i(x,t)\partial_{x_i} W(x) \le (\alpha+1)W(x).$$

В силу замечания 1.4, $\lambda^{-1}(x)|b_n(x,t)|^2 \le (\beta+1)V(x)$ для всех $(x,t) \in B_{2N}^W \times [0,T]$. Далее везде считаем, что $m, n > n_0$.

Положим $\widetilde{A} = \varphi_{2N}^W A_m + (1 - \varphi_{2N}^W)I$, $\widetilde{b} = \varphi_{2N} b_n$ и

$$\widetilde{L} = \widetilde{a}^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \widetilde{b}^i\partial_{x_i}.$$

Шаг II. Функция Ляпунова. Преобразуем функцию Ляпунова W так, чтобы полученная функция оказалась функцией Ляпунова для $\widetilde{L}$. Пусть $W_N(x) = \zeta_K(W)$, где $\zeta_N(z) = z$ при $z < N$, $\zeta(z) = N+1$ при $z > N+2$, $0 \le \zeta_N' \le 1$, $\zeta_N'' \le 0$. Заметим, что $W_N(x) \le W(x)$ и $\widetilde{L}W_N(x,t) \le (\alpha+1)W_N(x)$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Действительно, $\widetilde{L}W_N = 0$ вне B_{N+2}^W, и на B_{N+2}^W выполняется

$$\widetilde{L}W_N = \zeta_N'(W)\widetilde{L}W + \zeta_N''(W)|\sqrt{A_m}\nabla W|^2 \le (\alpha+1)\zeta_N(W).$$

Здесь использовано неравенство $z\zeta_N'(z) \le \zeta_N(z)$, которое следует из выпуклости $\zeta_N(z)$ и равенства $(z\zeta_N'(z) - \zeta_N(z))' = z\zeta_N''(z)$. Поэтому W_N есть искомая функция Ляпунова.

Шаг III. Сопряженная задача. Пусть $s \in (0,T)$ и f есть решение задачи Коши $\partial_t f + \widetilde{L}f = 0$, $f|_{t=s} = \psi$. Так как все коэффициенты гладкие и ограниченные вместе со всеми производными, у данной задачи существует гладкое решение f, ограниченное вместе со всеми производными (например, см. [48]). Функция f зависит от m, n и N, но для краткости мы будем опускать эти индексы.

Оценим $|f|$. Заметим, что для фиксированной функции ψ принцип максимума влечет $|f| \le \max|\psi| = C(\psi)$. Выведем оценку, не зависящую от ψ. Для этого заметим, что функция $v = f/W_N$ удовлетворяет

$$\partial_t v + \widetilde{L}v + 2\langle \widetilde{A}\nabla v, \nabla W_N\rangle W_N^{-1} + vW_N^{-1}\widetilde{L}W_N = 0.$$

Значит, $W_N^{-1}\widetilde{L}W_N \le \alpha+1$ и $|v(x,s)| = |\psi(x)|/W_N(x) \le 1$. По принципу максимума $|v(x,t)| \le e^{(\alpha+1)(s-t)}$, откуда следует

$$|f(x,t)| \le W_N(x)e^{(\alpha+1)(s-t)} \le W(x)e^{(\alpha+1)(s-t)}.$$

Заметим, что в силу [54, Теорема 2.8] существует постоянная $C(n,N,\psi)$ такая, что

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,s]} |\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x,t)| \le C(n,N,\psi).$$

Для дальнейшего важно, что $C(n,N,\psi)$ не зависит от m.

Шаг IV. Оценка градиента. Теперь оценим $|\nabla_x f|$. Подставляя пробную функцию $u = \varphi_K^U f^2$ в тождество (1.3) для решения μ, получим

$$\int \varphi_K^U f^2\, d\mu_s - \int \varphi_K^U f^2\, d\nu = \int_0^s \int \Big[2f\varphi_K^U(L_\mu f - \widetilde{L}f) + \\ f^2 L_\mu\varphi_K^U + 2\langle A\nabla\varphi_K^U, \nabla f\rangle f + |\sqrt{A}\nabla f|^2\varphi_K^U\Big]\, d\mu_t\, dt.$$

Заметим, что

$$L_\mu\varphi_K^U = K^{-1}\varphi'(U/K)L_\mu U + K^{-2}\varphi''(U/K)|\sqrt{A}\nabla U|^2.$$

Поскольку это выражение отлично от нуля только на множестве $K \le U(x) \le 2K$, то

$$|L_\mu\varphi_K^U| \le 2CI_K\Big(\frac{|L_\mu U|}{U} + \frac{|\sqrt{A}\nabla U|^2}{U^2}\Big),$$

где I_K есть индикатор множества $\{x:\ K \le U(x) \le 2K\}$. Аналогично

$$|\langle A\nabla\varphi_K^U, \nabla f\rangle f| \le 8C^2C^2(\psi)I_K\frac{|\sqrt{A}\nabla U|^2}{U^2} + \frac{1}{4}\varphi_K^U|\sqrt{A}\nabla f|^2.$$

Так как

$$|f\varphi_K^U(L_\mu - \widetilde{L})f| \le \varphi_K^U|f||A-A_m||D^2 f| + \varphi_K^U|f||\nabla f|\lambda^{-1}\big(|b_n| + |b|\big),$$

выполняется следующее неравенство:

$$|f\varphi_K^U(\widetilde{L}f - L_\mu f)| \le C(\psi)C(n,N,\psi)|A-A_m| + 16(\beta+1)V(x)e^{2(\alpha+1)(s-t)} + \frac{1}{4}|\sqrt{A}\nabla f|^2\varphi_K^U.$$

Заметим, что

$$\int \varphi_K^U f^2\, d\mu_s \le \int W^2\, d\mu_s \le M\sup_x W^2(x)V(x)^{-1}.$$

Соберем все оценки вместе и получим

$$\int_0^s \int |\sqrt{A}\nabla f|^2 \varphi_K^U \, d\mu_t \, dt \le C_1(1 + R_m + Q_K),$$

где

$$R_m = C(n, N, \psi)\|A - A_m\|_{L^1(\mu+\sigma, B^W_{2N}\times[0,T])}, \quad Q_K = C^2(\psi)\int_0^T \int_{K<U<2K} V \, d(\mu + \sigma)$$

и C_1 не зависит от m, n, N, K, s и ψ. Аналогичная оценка верна с σ вместо μ, т.к. мы не использовали, что b_n приближает $b(\mu)$.

Шаг V. Приницип Гольмгрена. Подставим пробную функцию $u = f\varphi_K$ в тождество (1.3) для решений μ и σ и получим

$$\int \varphi_K^U \psi \, d\mu_s - \int \varphi_K^U f \, d\nu = \int_0^s \int \Big[\varphi_K(\widetilde{L}f - L_\mu f) + f L_\mu \varphi_K^U + 2\langle A\nabla\varphi_K^U, \nabla f\rangle\Big] \, d\mu_t \, dt, \quad (1.14)$$

$$\int \varphi_K^U \psi \, d\sigma_s - \int \varphi_K^U f \, d\nu = \int_0^s \int \Big[\varphi_K(\widetilde{L}f - L_\sigma f) + f L_\sigma \varphi_K^U + 2\langle A\nabla\varphi_K^U, \nabla f\rangle\Big] \, d\sigma_t \, dt. \quad (1.15)$$

Оценим отдельные слагаемые в правой части (1.14) и (1.15). Т.к.

$$|L_\mu \varphi_K^U||f| + |L_\sigma \varphi_K^U||f| \le 2C(\psi)\Big(\frac{|L_\mu U|}{U} + \frac{|L_\sigma U|}{U} + \frac{|\sqrt{A}\nabla U|^2}{U^2}\Big) \le 2(\beta + 1)C(\psi)I_K V,$$

то

$$\int_0^s \int |L_\mu \varphi_K^U||f| \, d\mu_t \, dt + \int_0^s \int |L_\sigma \varphi_K^U||f| \, d\sigma_t \, dt \le$$
$$\le 2(\beta + 1)C(\psi)\int_0^T \int_{K\le V\le 2K} V \, d(\mu_t + \sigma_t) \, dt.$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\int_0^s \int |\sqrt{A}\nabla\varphi_K^U||\sqrt{A}\nabla f| \, d(\mu_t + \sigma_t) \, dt \le$$
$$\le C\Big(\int_0^s \int |\sqrt{A}\nabla f|^2 \varphi_K^U \, d(\mu_t + \sigma_t) \, dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \int_{K<V<2K} \frac{|\sqrt{A}\nabla U|^2}{U^2} \, d(\mu_t + \sigma_t) \, dt\Big)^{1/2},$$

что мажорируется величиной

$$C_2\Big(1 + R_m + Q_K\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \int_{K<U<2K} V \, d(\mu_t + \sigma_t) \, dt\Big)^{1/2}.$$

Здесь C_2 не зависит от n, m, K, N, s, ψ. Поскольку

$$\varphi_K^U|\widetilde{L}f - L_\mu f| \le C(n, N, \psi)|A - A_m| + |\sqrt{A^{-1}}(b_n - b(\mu, \cdot, \cdot))||\sqrt{A}\nabla f|\varphi_K^U,$$

то имеет место следующая оценка:

$$\int_0^s \int \varphi_K^U |\widetilde{L}f - L_\mu f|\, d\mu_t\, dt \leq C(n, N, \psi)\|A - A_m\|_{L^1(\mu, B_{2N}^W \times [0,T])} +$$
$$+ C_1^{1/2} \|\sqrt{A^{-1}}(b_n - b(\mu, \,\cdot\,, \,\cdot\,))\|_{L^2(\mu, B_{2N}^W \times [0,T])} \Bigl(1 + R_m + Q_K\Bigr)^{1/2}$$

Наконец,

$$\varphi_K^U |\widetilde{L}f - L_\sigma f| \leq \varphi_K^U |\widetilde{L}f - L_\mu f| + \varphi_K^U |\sqrt{A^{-1}}(b(\mu, x, t) - b(\sigma, x, t))||\sqrt{A}\nabla f|.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства оценивается, как показано выше. Рассмотрим второе слагаемое. По неравенству Коши-Буняковского и (NH3)

$$\int_0^s \int \varphi_K^U |\sqrt{A^{-1}}(b(\mu, x, t) - b(\sigma, x, t))||\sqrt{A}\nabla f|\, d\sigma_t\, dt \leq$$
$$\leq \Bigl(\int_0^s \int G^2(\|\mu_t - \sigma_t\|_W) V\, d\sigma_t\, dt\Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_0^s \int |\sqrt{A}\nabla f|^2 \varphi_K^U\, d\sigma_t\, dt\Bigr)^{1/2},$$

что оценивается

$$C_1^{1/2}\Bigl(1 + R_m + Q_K\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int_0^s G^2(\|\mu_t - \sigma_t\|_W)\, dt\Bigr)^{1/2}.$$

Вычитая (1.15) из (1.14) и применяя все полученные оценки, устремляя $m \to \infty$, затем $n \to \infty$ и, наконец, $K \to \infty$ (как следствие, $N \to \infty$), получим

$$\int \psi\, d(\mu_s - \sigma_s) \leq C_1^{1/2}\Bigl(\int_0^s G^2(\|\sigma_t - \mu_t\|_W)\, dt\Bigr)^{1/2}.$$

Учитывая, что ψ есть произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $|\psi(x)| \leq W(x)$, получим

$$\|\mu_s - \sigma_s\|_W \leq C_1^{1/2}\Bigl(\int_0^s G^2(\|\sigma_t - \mu_t\|_W)\, dt\Bigr)^{1/2}.$$

По неравенству Гронуолла $\|\mu_s - \sigma_s\|_W = 0$ для всех $s \in (0, T)$. □

Замечание 1.5. Заметим, что условие $\lim_{|x|\to+\infty} W(x) = +\infty$ играет ключевую роль в построении функции φ_N^W и функции Ляпунова $\tilde{W}$. Если $W = 1$, то можно взять произвольную функцию φ_N, т.к. $\tilde{L}1 = 0$. Поэтому предыдущая теорема верна и при $W \equiv 1$, причем доказательство сильно упрощается.

1.2.2 Матрица диффузии может вырождаться

Если матрица диффузии вырождается, то непрерывность коэффициентов относительно полной вариации меры не достаточна для единственности решения. Например, рассмотрим $A = 0$ и

$$b(\mu_t) = \int \min\{|y|^{2/3}, 1\}\, d\mu_t.$$

Тогда мера $\delta_{x(t)}$ является решением уравнения $\partial_t\mu = \operatorname{div}(b(\mu_t)\mu)$ с начальным условием $\mu|_{t=0} = \delta_0$, как только $x(t)$ есть решение задачи Коши $\dot{x} = \min\{|x|^{2/3}, 1\}$, $x(0) = 0$. Но эта задача при малых t имеет два решения: $x(t) = t^3/27$ и $x(t) = 0$. Значит, необходимо предполагать непрерывность относительно другой метрики.

Пусть $W \in C(\mathbb{R}^d)$ – некоторая выпуклая функция и $W \geq 1$. На пространстве вероятностных мер μ, для которых $|x|\sqrt{W(x)} \in L^1(\mu)$, введем новую метрику

$$w_W(\mu,\sigma) = \sup\Bigl\{\int f\,d(\mu-\sigma)\,:\, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\, |\nabla f(x)| \leq \sqrt{W(x)}\Bigr\}.$$

В приложениях и примерах обычно $W(x) = (1+|x|)^p$ или $W(x) = e^{|x|^p}$. Метрика w_W допускает несколько эквивалентных определений. Определим

$$\mathcal{F}_0' = \Bigl\{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) :\, |\nabla f(x)| \leq \sqrt{W(x)}\Bigr\},$$

$$\mathcal{F}_0 = \Bigl\{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) :\, |f(x)-f(y)| \leq |x-y|\max\{\sqrt{W(x)}, \sqrt{W(y)}\}\Bigr\},$$

$$\mathcal{F} = \Bigl\{f \in C(\mathbb{R}^d) :\, |f(x)-f(y)| \leq |x-y|\max\{\sqrt{W(x)}, \sqrt{W(y)}\}\Bigr\}.$$

Положим

$$d_{\mathcal{F}}(\mu,\sigma) = \sup_{f\in\mathcal{F}}\int f\,d(\mu-\sigma)$$

и аналогично $d_{\mathcal{F}_0}$ и $d_{\mathcal{F}_0'} = w_W$ для множеств функций $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_0'$ соответственно. В приложениях часто проще проверять условия для классов $d_{\mathcal{F}}$ или $d_{\mathcal{F}_0}$.

Предложение 1.3. *Метрики $d_{\mathcal{F}_0'}$, $d_{\mathcal{F}_0}$ и $d_{\mathcal{F}}$ совпадают на пространстве мер μ с $|x|\sqrt{W(x)} \in L^1(\mu)$.*

Доказательство. Равенство $d_{\mathcal{F}_0'} = d_{\mathcal{F}_0}$ следует из формулы Ньютона-Лейбница

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \langle\nabla f(y+t(x-y)), x-y\rangle\,dt$$

и выпуклости W. Заметим, что $d_{\mathcal{F}_0} \leq d_{\mathcal{F}}$. Докажем обратное неравенство. Пусть μ,σ — вероятностные меры, для которых $|x|\sqrt{W(x)} \in L^1(\mu+\sigma)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдем такое $f \in \mathcal{F}$, что

$$d_{\mathcal{F}}(\mu,\sigma) \leq \int f\,d(\mu-\sigma) + \varepsilon. \tag{1.16}$$

Рассмотрим такую функцию срезки, что $\psi_N(t) = t$ при $t \in [-N,N]$, $\psi_N(t) = N$ при $t > N$ и $\psi_N(t) = -N$ при $t < -N$. Положим $\varphi_K(x) = \varphi(x/K)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ и $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Положим $g_{\delta,K,N}(x) = (1-\delta)\varphi_K(x)\psi_N(f(x))$ для каждого $\delta \in (0,1)$. Заметим, что для достаточно малых δ и достаточно больших N и K функция f в (1.16) может быть заменена на $g_{\delta,K,N}$ с 2ε вместо ε в правой части. Поскольку $g_{\delta,K,N}$ имеет компактный носитель, то, взяв достаточно большое K, получим

$$|g_{\delta,K,N}(x) - g_{\delta,K,N}(y)| \leq (1-\delta/2)|x-y|\max\{\sqrt{W(x)}, \sqrt{W(y)}\}.$$

Сгладив функцию $g_{\delta,K,N}$ стандартной сверткой с гладким ядром и учитывая коэффициент $(1-\delta/2)$, получим, что сглаженная версия принадлежит $\mathcal{F}_0$. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ $d_{\mathcal{F}}(\mu,\sigma) \le d_{\mathcal{F}'}(\mu,\sigma) + 3\varepsilon$. Отсюда $d_{\mathcal{F}}(\mu,\sigma) \le d_{\mathcal{F}'}(\mu,\sigma)$. □

Если $W = 1$, тогда метрика $w_W = d_{\mathcal{F}}$ совпадает с 1-метрикой Канторовича $W_1(\mu,\sigma)$ (см. [2, Теорема 8.10.41]). В общем случае $W_1(\mu,\sigma) \le w_W(\mu,\sigma)$.

Часто интересно рассматривать не только полиномиальные функции W. Например, коэффициент сноса

$$b(x,t,\mu) = \int K(x,y,t)\,d\mu_t$$

удовлетворяет $|b(x,t,\mu) - b(x,t,\sigma)| \le C(x,t)w_W(\mu_t,\sigma_t)$, если

$$|K(x,y,t) - K(x,z,t)| \le C(x,t)|z-y|\max\{\sqrt{W(z)}, \sqrt{W(y)}\}.$$

Поэтому можно рассматривать коэффициенты, являющиеся свертками с функциями не только полиномиального, но и произвольного роста, определяемого функцией $\sqrt{W}$.

Замечание 1.6. Чтобы сравнить достаточные условия единственности решения, приводимые ниже, с достаточными условиями существования решения, полезно сравнить V-сходимость и сходимость по метрике w_W. Предположим, что последовательность вероятностных мер μ_n на $\mathbb{R}^d$ V-сходится к мере μ и

$$\sup_n \int V\,d\mu_n < \infty.$$

Если $\lim_{|x|\to\infty} |x|\sqrt{W(x)}/V(x) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} w_W(\mu_n,\mu) = 0$.

Докажем это. Как и выше, через $\mathcal{F}$ обозначим множество функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ таких, что $|\nabla f(x)| \le \sqrt{W(x)}$. Заметим, что для всех $f \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n\to\infty}\int f\,d\mu_n = \int f\,d\mu, \quad \int_{|x|>R} |f|\,d\mu_n \le g(R)\int V\,d\mu_n, \quad g(R) = \sup_{|x|\ge R}\frac{|x|\sqrt{W(x)}}{V(x)}$$

и $\lim_{R\to\infty} g(R) = 0$. Наконец, по теореме Арцела–Асколи множество функции $\mathcal{F}$ на каждом шаре $\{x : |x| \le R\}$ предкомпактно и поэтому имеет конечную ε-сеть для всякого $\varepsilon > 0$. Поскольку сходимость имеет место для каждого элемента этой конечной сети и любая другая функция из $\mathcal{F}$ может быть равномерно на $\{x : |x| \le R\}$ приближена ими, то, учитывая равномерную оценку интегралов на $|x| \ge R$, получим $\lim_{n\to\infty} w_W(\mu_n,\mu) = 0$.

Напомним, что мы рассматриваем только решения из класса $\mathcal{M}_T(V)$ с $V \in C(\mathbb{R}^d)$ и $V \ge 1$. Сформулируем наши предположения на коэффициенты.

(DH1) Матрица $A = (a^{ij})$ симметрична, неотрицательно определена и ее элементы $a^{ij} \in C(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Через r^{ij} обозначим элементы матрицы $r = \sqrt{A}$. Предположим, что для каждого $t \in [0,T]$ функции $x \mapsto r^{ij}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

(DH2) Для некоторой выпуклой функции $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$ такой, что функция $|x|\sqrt{W(x)}V(x)^{-1}$ ограничена на $\mathbb{R}^d$, $W \ge 1$, для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_T(V)$ существуют функции $\theta_\mu, \Lambda_\mu \in C(\mathbb{R}^d)$ и постоянные $C_\mu > 0$, $1 > \delta_\mu > 0$ такие, что

$$\langle b(\mu,x+y,t) - b(\mu,x,t), y\rangle \le \theta_\mu(x)|y|^2, \quad L_\mu W(x,t) \le (C_\mu - \Lambda_\mu(x))W(x),$$

$$2\theta_\mu(x) + \delta_\mu(1+|x|^2)^{-1}|b(\mu,x,t)|^2+ \\ + \delta_\mu(1+|x|^2)^{-2}|\mathrm{tr}A(x,t)|^2 + 4\sum_{i,j,k\le d}\left|\partial_{x_k} r^{ij}(x,t)\right|^2 \le \Lambda_\mu(x) \quad (1.17)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $t \in [0,T]$.

(DH3) Для каждого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ функции b^i непрерывны по x равномерно по t на $B\times[0,T]$ и существует такая возрастающая непрерывная функция G на $[0,+\infty)$, что $G(0)=0$ и

$$|b(\mu,x,t) - b(\sigma,x,t)| \le \frac{V(x)}{\sqrt{W(x)}}G(w_W(\mu_t,\sigma_t))$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]$ и $\mu,\sigma\in\mathcal{M}_T(V)$.

(DH4) Для некоторой строго положительной функции $U \in C^2(\mathbb{R}^d)$ с условием $\lim\limits_{|x|\to+\infty} U(x) = +\infty$, и для каждой меры $\mu\in\mathcal{M}_T(V)$ существует постоянная $\beta(\mu)$ такая, что

$$\frac{|A(x,t)\nabla U(x)|\sqrt{W(x)}}{U(x)} + \frac{|\sqrt{A(x,t)}\nabla U(x)|^2}{U^2(x)} + \frac{|L_\mu U(x,t)|}{U(x)} \le \beta(\mu)V(x)$$

для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]$.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* (DH1), (DH2), (DH3), (DH4). *Если*

$$\int_{0+}\frac{du}{G(u)} = +\infty,$$

то существует не более одного решения задачи Коши (1.11) *из класса* $\mathcal{M}_T(V)$.

В частном, но важном случае $A=0$ условия (DH1)–(DH4) выполнены, например, если

(i) $(1+|x|)^{-1}|b(\mu,x,t)| \le \beta(\mu)V(x)$,

(ii) $\langle b(\mu,x+y,t) - b(\mu,x,t), y\rangle \le \theta_\mu(x)|y|^2$,

(iii) $\langle b(\mu,x,t),\nabla W(x)\rangle \le \Big(C_\mu - 2\theta_\mu(x) - \delta_\mu(1+|x|^2)^{-1}|b(\mu,x,t)|^2\Big)W(x)$.

(iv) $|b(\mu,x,t)-b(\sigma,x,t)| \le V(x)W(x)^{-1/2}G(w_W(\mu_t,\sigma_t))$.

Здесь $U(x) = 1+|x|^2$.

Пример 1.7. Пусть $m\ge 1$, $r\ge 1$, $\kappa>0$ и $V(x)=W(x)=\exp(\kappa|x|^{2m})$. Предположим, что для каждой меры $\mu=\mu_t\,dt\in\mathcal{M}_T(V)$, т.е.

$$\sup_{t\in[0,T]}\int \exp(\kappa|x|^{2m})\,d\mu_t < \infty,$$

существуют постоянные $c_1(\mu)>0$, $c_2(\mu)>0$, $c_3(\mu)>0$ и $c_4(\mu)>0$ такие, что

$$\langle b(\mu,x,t),x\rangle \le c_1(\mu) - c_2(\mu)|x|^{2k}, \quad |b(\mu,x,t)| \le c_3(\mu)(1+|x|^{m+k+1}),$$

$$\langle b(\mu,x+y,t) - b(\mu,x,t), y\rangle \le c_4(\mu)(1+|x|^{m+k+1})|y|^2$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$. Предположим также, что существует постоянная $c_5 > 0$ такая, что

$$|b(\mu, x, t) - b(\sigma, x, t)| \leq c_5(1 + |x|^{m+k+1}) w_W(\mu_t, \sigma_t).$$

для всех $\mu, \sigma \in \mathcal{M}_T(V)$ и $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$.

Тогда задача Коши

$$\partial_t \mu + \operatorname{div}(b(\mu, x, t)\mu) = 0, \quad \mu|_{t=0} = \mu_0,$$

имеет не более 1 решения в классе $\mathcal{M}_T(V)$.

Рассмотрим частный случай

$$b(\mu, x, t) = \int K(x, y, t)\mu_t(dy).$$

Сформулироваaные выше условия выполняются, если

(i) $\langle K(x, y, t), x\rangle \leq (C_1 - C_2|x|^{2k}) \exp(\kappa|y|^{2m})$,

(ii) $|K(x, y, t)| \leq C_3(1 + |x|^{m+k+1}) \exp(\kappa|y|^{2m})$,

(iii) $\langle K(x + z, y, t) - K(x, y, t), z\rangle \leq C_3|z|^2(1 + |x|^{m+k+1}) \exp(\kappa|y|^{2m})$,

(iv) $|D_y K(x, y, t)| \leq C_3(1 + |x|^{m+k+1}) \exp(\frac{\kappa}{2}|y|^{2m})$.

Например, можно взять $K(x, y, t) = p(y) - xq(y) - \nabla R(x - y)$, где $R \in C^2(\mathbb{R}^d)$ есть выпуклая функция, $p, q \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $q(y) \geq q_0 > 0$ и

$$|p(y)| + |Dp(y)| + |q(y)| + |Dq(y)| \leq C_1 \exp\Big(\frac{\kappa}{2}|y|^{2m}\Big),$$

$$|DR(y)| + |D^2R(y)| \leq C_2|y|^m.$$

Для доказательства теоремы 1.4 нам понадобится следующее утверждение, обобщающее оценку из [36].

Пусть функция срезки $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ такова, что $\eta(x) = 1$ для $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ для $|x| > 2$, $0 \leq \eta \leq 1$ и существует число $C \geq 1$ такое, что $|\eta'(x)|^2\eta^{-1}(x) \leq C$ для всех x из носителя η.

Лемма 1.5. *Предположим, что функции h^i, g^{ij} непрерывны на $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ и дважды непрерывно дифференцируемы по x, и матрица $G = (g^{ij})$ неотрицательно определена. Положим $Q = \sqrt{G}$ и $L_{g,h}u = g^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + h^i\partial_{x_i}u$. Пусть θ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^d$ и $M > 1$, $\delta > 0$, $C_0 > 0$. Положим*

$$\kappa = 32^{-1}\min\{\delta, C^{-2}\}$$

где C взята из определения η. Если для всех $(x, t) \in \{|x| < (2M)^{\frac{1}{2\kappa}}\}$, $t \in [0, T]$ и всех $y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\langle h(x + y, t) - h(x, t), y\rangle \leq \theta(x)|y|^2, \quad L_{g,h}W(x, t) \leq (C_0 - \Lambda(x, t))W(x),$$

$$\Lambda(x, t) := 4\sum_{i,j,k\leq d} \left|\partial_{x_k} q^{ij}(x, t)\right|^2 + 2\theta(x) + \delta(1 + |x|^2)^{-1}|h(x, t)|^2 + \delta(1 + |x|^2)^{-2}|\mathrm{tr}G(x, t)|^2,$$

то для всех $s \in (0, T)$ *задача Коши*

$$\partial_t f + \zeta_M L_{g,h} f = 0, \quad f|_{t=s} = \psi$$

с $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $|\nabla\psi(x)| \le \sqrt{W(x)}$, $\zeta_M(x) = \eta\big((1+|x|^2)^\kappa/M\big)$, *имеет гладкое решение* f *и*

$$|\nabla f(x,t)| \le \sqrt{W(x)} \cdot e^{(C_0+1)(s-t)/2}.$$

Доказательство. Существование гладкого решения f хорошо известно (см., например, [74, Теоремы 3.2.4, 3.2.6]). Выведем оценку $|\nabla f|$. Очевидно, что неравенство $\langle h(x+y,t) - h(x,t), y\rangle \le \theta(x)|y|^2$ для гладких функций h влечет

$$\langle \mathcal{H}(x,t)y, y\rangle \le \theta(x)|y|^2, \quad \mathcal{H} = (\partial_{x_j} h^i)_{i,j\le d}.$$

Кроме того, это неравенства и все неравенства из формулировки леммы должны выполняться только на носителе ζ_M, поскольку все коэффициенты равны нулю вне вне носителя ζ_M. Положим $u = 2^{-1}\sum_{k=1}^d |\partial_{x_k} f|^2$. Дифференцируя по x_k уравнение $\partial_t f + \zeta_M L_{g,h} f = 0$ и умножая на $\partial_{x_k} f$, получим

$$\partial_t u + \zeta_M L_{g,h} u + \zeta_M \langle \mathcal{H}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla\zeta_M, \nabla f\rangle\langle h, \nabla f\rangle + \zeta_M \partial_{x_k} a^{ij} \partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f + \\ + g^{ij}\partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f \partial_{x_k}\zeta_M - \zeta_M g^{ij} \partial^2_{x_k x_j} f \partial^2_{x_k x_j} f = 0.$$

Заметим, что $\langle \mathcal{H}\nabla f, \nabla f\rangle \le 2\theta u$ и $\langle \nabla\zeta_M, \nabla f\rangle\langle h, \nabla f\rangle \le 2|\nabla\zeta_M||h|u$. Рассмотрим следующее выражение:

$$\zeta_M \partial_{x_k} g^{ij} \partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f + g^{ij}\partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f \partial_{x_k}\zeta_M - \zeta_M g^{ij}\partial^2_{x_k x_j} f \partial^2_{x_k x_j} f.$$

Напомним, что $Q = \sqrt{G}$. Поэтому

$$\sum_{i,j,k} \partial_{x_k} q^{ij} \partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f = 2\sum_{i,j,m,k} \partial_{x_k} q^{im} q^{mj} \partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f \le \\ \le 2\sum_{i,m} \Big(\sum_k |\partial_{x_k} q^{im}|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_k |\partial_{x_k} f|^2\Big)^{1/2} \Big|\sum_j q^{mj}\partial^2_{x_i x_j} f\Big|,$$

что мажорируется величиной

$$2u\sum_{i,m,k} |\partial_{x_k} q^{im}|^2 + \sum_{i,m}\Big|\sum_j q^{mj}\partial^2_{x_i x_j} f\Big|^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{i,m}\Big|\sum_j q^{mj}\partial^2_{x_i x_j} f\Big|^2 = \sum_{i,j,k} g^{ij}\partial^2_{x_k x_j} f \partial^2_{x_k x_j} f.$$

Используя очевидное неравенство $xy \le (4 + 4\mathrm{tr}G)^{-1}x^2 + (1+\mathrm{tr}G)y^2$, получим

$$g^{ij}\partial^2_{x_i x_j} f \partial_{x_k} f \partial_{x_k}\zeta_M \le 2u\frac{|\nabla\zeta_M|^2}{\zeta_M}(1+\mathrm{tr}G) + \zeta_M(4+4\mathrm{tr}G)^{-1}\Big(g^{ij}\partial^2_{x_i x_j} f\Big)^2.$$

Отметим, что

$$\Bigl(\sum_{i,j=1}^{d} g^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f\Bigr)^2 \le \Bigl(\sum_{i=1}^{d} g^{ii}\Bigr)\Bigl(\sum_{i,j,k}^{d} g^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_k} f \partial_{x_j}\partial_{x_k} f\Bigr).$$

Это следует из неравенства

$$|\mathrm{tr}(AB)|^2 \le \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}(AB^2)$$

для симметричных матриц A и B с неотрицательной матрицей A. Это неравенство вытекает из неравенства Коши–Буняковского для скалярного произведения, определяемого по правилу $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\,(XY^*)$, матриц $X = A^{1/2}$, $Y = BA^{1/2}$ в пространстве $d\times d$ матриц (поскольку $\mathrm{tr}\,(YY^*) = \mathrm{tr}\,(BA^{1/2}A^{1/2}B) = \mathrm{tr}\,(AB^2)$). Собирая вместе все оценки, получим

$$\partial_t u + \zeta_M L_{g,h} u + Zu \ge 0,$$

где

$$Z = \frac{|\nabla\zeta_M|^2}{\zeta_M}(1+\mathrm{tr}G) + |\nabla\zeta_M||h| + 2\zeta_M\theta + 4\zeta_M\sum_{i,j,k}\bigl|\partial_{x_k} q^{ij}\bigr|^2.$$

Т.к.

$$|\nabla\zeta_M(x)| \le 4\kappa(1+|x|^2)^{-1/2}\bigl|\eta'\bigl((1+|x|^2)^{\kappa}/M\bigr)\bigr|,$$

получим

$$Z \le 4\kappa C^2 + 16\kappa C + \zeta_M\Bigl(4\sum_{i,j,k}\bigl|\partial_{x_k} q^{ij}\bigr|^2 + 2\theta + 2\kappa(1+|x|^2)^{-1}|h|^2 + 2\kappa(1+|x|^2)^{-2}|\mathrm{tr}G|^2\Bigr).$$

Поскольку $\kappa = 32^{-1}\min\{\delta, C^{-2}\}$,

$$Z \le 1 + \zeta_M\Bigl(4\sum_{i,j,k}\bigl|\partial_{x_k}\sigma_N^{ij}\bigr|^2 + 2\theta + \delta(1+|x|^2)^{-1}|h|^2 + \delta(1+|x|^2)^{-2}|\mathrm{tr}G|^2\Bigr).$$

Положим $u = wW$. Тогда w удовлетворяет

$$\partial_t w + \zeta_M L_{g,\widetilde{h}} w + \widetilde{Z} w \ge 0,$$

где

$$\widetilde{h}^k = h^k + 2\frac{g^{kj}\partial_{x_j}W}{W}, \quad \widetilde{Z} = Z + \zeta_M\frac{L_{g,h}W}{W}.$$

По условиям леммы $\widetilde{Z} \le C_0 + 1$. Заметим, что $|w(x,s)| \le 1$. По принципу максимума (см. [74, Теорема 3.1.1]) $|w(x,t)| \le e^{(C_0+1)(s-t)}$, что завершает доказательство. □

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 1.4.

Доказательство. Пусть есть два решения μ и σ из класса $M_T(V)$.

Шаг I. Аппроксимация. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $|\nabla\psi(x)| \le \sqrt{W(x)}$. Зафиксируем $M \ge 1$. Аналогично лемме 1.5 положим $\kappa = 32^{-1}\min\{\delta_\mu, C^{-2}\}$, где C взято из определения η, и $\zeta_M = \eta((1+|x|^2)^\kappa/M)$. Функция η определена перед леммой 1.5.

Пусть функция срезки $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2$. Предположим, что для некоторого $C > 0$ и всех на носителе φ выполняется $|\varphi''(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2 \le C\varphi(x)$. Для каждого $K \ge 1$ положим $\varphi_K^U(x) = \varphi(U(x)/K)$. Возьмем M настолько большим, что $\zeta_M(x) = 1$ при $|x| < 2K$. Положим $B_M = \{x : |x| < (2M)^{1/2\kappa}\}$. Продлим функции $b^i(\mu)$ на все пространство $\mathbb{R}^{d+1}$ следующим образом: $b^i(\mu, x, t) = b^i(\mu, x, T)$ для $t > T$ и $b^i(\mu, x, t) = b^i(\mu, x, 0)$ для $t < 0$. Аналогично продлим a^{ij}. Очевидно условия (DH1)–(DH4) выполнены для новых b^i и a^{ij}. По лемме 1.4 и замечанию 1.4 существует последовательность $b_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|b_n - b(\mu)\|_{L^1(\mu+\sigma, B_M\times[0,T])} = 0$,

(ii) $\langle b_n(x+y,t) - b_n(x,t), y\rangle \le \widetilde{\theta}(x)|y|^2$ для всех $(x,t) \in B_M \times [0,T]$ и $y \in \mathbb{R}^d$, где $\widetilde{\theta}(x) = \theta_\mu(x) + 1$,

(iii) для всех $(x,t) \in B_M \times [0,T]$ имеет место (1.17) с $\widetilde{\theta}$ вместо θ_μ, b_n вместо $b(\mu)$ и $\widetilde{\Lambda}(x) = \Lambda_\mu(x) + 2$ вместо Λ_μ,

(iv) для всех $(x,t) \in B_M \times [0,T]$

$$a^{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j}W(x) + b_n^i(x,t)\partial_{x_i}W(x) \le (\widetilde{C}_0 - \widetilde{\Lambda}(x))W(x),$$

где $\widetilde{C}_0 = C_\mu + 3$.

Шаг II. Сопряженная задача. Пусть f_n есть решение задачи Коши

$$\partial_t f_n + \zeta_M a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_n + \zeta_M b_n^i \partial_{x_i} f_n = 0, \quad f_n|_{t=s} = \psi.$$

По принципу максимума $\sup|f_n| \le \max|\psi|$. По лемме 1.5 $|\nabla_x f_n(x,t)| \le C_1\sqrt{W(x)}$ с константой C_1, не зависящей от x, t, s, n и K.

Шаг III. Принцип Гольмгрена. Подставляя $u = \varphi_K^U f_n$ в тождество (1.3) для решений μ и σ, получим

$$\int \psi\, d\mu_s = \int \varphi_K^U f_n\, d\nu + \int_0^s \int \bigl[\varphi_K^U \langle b(\mu) - b_n, \nabla f_n\rangle + 2\langle A\nabla\varphi_K^U, \nabla f_n\rangle + f_n L_\mu \varphi_k\bigr]\, d\mu_t\, dt,$$

$$\int \psi\, d\sigma_s = \int \varphi_K^U f_n\, d\nu + \int_0^s \int \bigl[\varphi_K^U \langle b(\sigma) - b_n, \nabla f_n\rangle + 2\langle A\nabla\varphi_K^U, \nabla f_n\rangle + f_n L_\sigma \varphi_K^U\bigr]\, d\sigma_t\, dt.$$

Здесь мы использовали, что $\zeta_M(x) = 1$ для $x \in \mathrm{supp}\varphi_K^U$ и члены $\varphi_K^U\zeta_M a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_n$ и $\varphi_K^U a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_n$ сокращаются. Вычитая второе тождество из первого, получим

$$\begin{aligned}\int \psi\, d(\mu_s - \sigma_s) \le &\int_0^s \int \bigl[\varphi_K^U |b(\mu) - b_n||\nabla f_n| + 2|A\nabla\varphi_K^U||\nabla f_n| + |f_n||L_\mu \varphi_K^U|\bigr]\, d\mu_t\, dt + \\ &+ \int_0^s \int \bigl[\varphi_K^U |b(\sigma) - b_n||\nabla f_n| + 2|A\nabla\varphi_K^U||\nabla f_n| + |f_n||L_\sigma \varphi_K^U|\bigr]\, d\sigma_t\, dt.\end{aligned}$$

Заметим, что $|b(\sigma) - b_n| \le |b(\sigma) - b(\mu)| + |b(\mu) - b_n|$ и $|\nabla f_n| \le C_1\sqrt{W}$. Выражения $|A\nabla\varphi_K^U|$, $|L_\mu\varphi_K^U|$ и $|L_\sigma\varphi_K^U|$ оцениваются аналогично доказательству теоремы 1.3. Используя (DH4) и устремляя сначала $n \to \infty$ и затем $K \to \infty$, приходим к

$$\int \psi\, d(\mu_s - \sigma_s) \le C_1 \int_0^s \int |b(\mu) - b(\sigma)|\sqrt{W}\, d\sigma_t\, dt.$$

Применяя (DH3) и переходя к супремуму по $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $|\nabla\psi(x)| \le \sqrt{W(x)}$, получим

$$w_W(\mu_s,\sigma_s) \le C_1 N \int_0^s G(w_W(\mu_t,\sigma_t))\,dt, \quad N = \sup_t \int V\,d\sigma_t.$$

По неравенству Гроноулла отсюда следует, что $w_W(\mu_s,\sigma_s) = 0$ для $s \in [0,T]$. □

Замечание 1.7. При некоторых дополнительных условиях можно получить не просто утверждение о единственности решения задачи Коши (1.11), но и оценку расстояния между решениями с различными начальными условиями.

Предположим, что в условиях (DH2) и (DH4) теоремы 1.4 константы δ_μ, C_μ и $\beta(\mu)$ можно выбрать, не зависящими от μ, для всех мер из некоторого класса $M_{T,\alpha}(V)$, где $\alpha \in C^+([0,T])$. Напомним, что класс $M_{T,\alpha}(V)$ состоит из мер μ, заданных потоком вероятностных мер μ_t таких, что

$$\int V\,d\mu_t \le \alpha(t).$$

Пусть вероятностные меры ν_1 и ν_2 на $\mathbb{R}^d$ таковы, что $V \in L^1(\nu_1+\nu_2)$. Пусть $\sqrt{W}$ – выпуклая функция. Предположим, что $\mu^1(dxdt) = \mu_t^1(dx)\,dt$ и $\mu^2(dxdt) = \mu_t^2(dx)\,dt$ – решения задачи Коши (1.11) из класса $M_{T,\alpha}(V)$, соответствующие начальным условиям ν_1 и ν_2. Пусть выполняются условия (DH1)–(DH4) теоремы 1.4. Тогда, в обозначениях предыдущей теоремы и при условии выпуклости $\sqrt{W}$ последовательность f^n оказывается сходящейся; это следует из леммы 1.5 и теоремы Арцела-Асколи, т.к. семейство $\{f^n(x,s)\}$ компактно в sup- норме на $B_R \times [0,T]$. Стандартный диагональный метод позволяет выделить подпоследовательность решений (для упрощения обозначений это сама последовательность f^n), которая сходится к функции $f(x,t)$ равномерно на всех компактах в $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Поскольку $\sqrt{W}$ выпукла, значит, достигает максимума в одном из концов отрезка,

$$\begin{aligned}|f^n(x,s) - f^n(y,s)| &\le |\nabla f^n(\xi)| \cdot |x-y| \le e^{(t-s)/2}\sqrt{W(\xi)}\,|x-y| \le \\ &\le e^{t/2}\max\left\{\sqrt{W(x)}, \sqrt{W(y)}\right\} \cdot |x-y|,\end{aligned}$$

поэтому

$$|f(x,s) - f(y,s)| \le e^{t/2}\max\left\{\sqrt{W(x)}, \sqrt{W(y)}\right\} \cdot |x-y|,$$

т.е., по определению, $f \cdot e^{-t/2}$ лежит в классе $\mathcal{F}$. Далее, все f^n интегрируемы в силу формулы Ньютона-Лейбница, леммы 1.5 и выпуклости $\sqrt{W}$:

$$\begin{aligned}|f^n(x,s)| &\le \left|\int_0^1 \nabla f^n(x_0 + r(x-x_0), s)\right| dr \le C\int_0^1 \sqrt{W(x_0 + r(x-x_0))}dr \le \\ &\le C\int_0^1 r\sqrt{W(x)} + (1-r)\sqrt{W(x_0)}dr\end{aligned}$$

для некоторого x_0 вне носителя f^n. Значит, f^n и f интегрируемы по мерам ν_1 и ν_2. Поэтому, рассуждая аналогично доказательству предыдущей теоремы, придем к неравенству:

$$w_W(\mu_s,\sigma_s) \le e^{t/2} \cdot w_W(\nu_1,\nu_2) + C\int_0^s G(w_W(\mu_t,\sigma_t))\,dt.$$

По неравенству типа Гронуолла (см. [43, Теорема 27]) получим

$$w_W(\mu_t^1, \mu_t^2) \le F^{-1}\Big(F(e^{t/2} \cdot w_W(\nu_1, \nu_2)) - Ct\Big),$$

где $F(v) = \displaystyle\int_v^1 \frac{du}{G(u)}$ и F^{-1} есть обратная к F функция.

Аналогичная оценка верна и в условиях теоремы 1.3 для выпуклой $\sqrt{W}$.

1.3 Оценки расстояний Канторовича между решениями

В том разделе получены и изучаются оценки расстояний Канторовича между вероятностными решениями задачи Коши для нелинейного уравнения ФПК

$$\partial_t \rho_t = \Delta \rho_t - \operatorname{div}(B(\rho, x, t)\rho_t), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \tag{1.18}$$

где $\rho_t,\ t \ge 0$ – вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$.

Для этого сначала выводятся оценки для расстояний Канторовича между вероятностными решениями ρ_t *линейных уравнений*

$$\partial_t \rho_t \ \ = \ \ \Delta \rho_t - \operatorname{div}(B(x, t)\rho_t), \qquad \rho|_{t=0} = \rho_0, \tag{1.19}$$

с различными сносами и начальными данными. Подобные оценки позволяют предложить альтернативый подход к изучению разрешимости и устойчивости решений нелинейных уравнений ФПК. Схожий метод установления однозначной размешимости через оценки расстояний между решениями линейных уравнений использован в [35].

При выводе оценок между решениями уравнений с различными монотонными сносами частично используются идеи работы [67], однако они напрямую не применимы в этом случае. Обобщение на случай различных сносов удается осуществить для расстояний Канторовича с ограниченной функцией стоимости. Более того, удается рассмотреть уравнения с коэффициентами, зависящими от времени. Отметим, что условие монотонности сноса не очень ограничительно, поскольку в большинстве физических примеров снос является градиентом выпуклой функции, т.е. монотонным. В конце данного раздела показаны возможные применения оценок для линейных уравнений к изучению качественных свойств нелинейных уравнений. Однако заметим, что в свете растущего интереса к численному моделированию физических процессов, в частности описываемых уравнениями ФПК, оценки для уравнений с различными сносами представляют и самостоятельный интерес.

Положим

$$L\phi = \Delta\phi + \sum_{i=1}^d b^i(x,t)\partial_{x_i}\phi, \qquad B(x,t) = (b^1(x,t), \dots, b^d(x,t)).$$

Сначала рассмотрим решения двух линейных уравнений с разлиными сносами и начальными данными. Пусть μ_0 и σ_0 – две вероятностные меры, и B_μ и B_σ – различные коэффициенты сноса. Рассмотрим две задачи Коши

$$\begin{aligned} \partial_t \mu_t &= \Delta\mu_t - \operatorname{div}(B_\mu(x,t)\mu_t), \qquad \mu|_{t=0} = \mu_0 \\ \partial_t \sigma_t &= \Delta\sigma_t - \operatorname{div}(B_\sigma(x,t)\sigma_t), \qquad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Индексы μ и σ у коэффициентов сноса использованы только для различения сносов, указывая на соответствующее решение, и не определяют B как функцию меры.

Для монотонной неотрицательной непрерывной функции h на вещественной прямой с $h(0) = 0$ определим h-расстояние Канторовича между вероятностными мерами μ и σ как

$$C_h(\mu,\sigma) := \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\sigma)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} h(|x-y|)d\pi(x,y), \tag{1.21}$$

где $\Pi(\mu,\sigma)$ есть множество вероятностных мер на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ с проекциями μ и σ, т.е. $\pi\in\Pi(\mu,\sigma)$ тогда и только тогда, когда π есть вероятностная мера на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ и $\pi(E\times\mathbb{R}^d) = \mu(E)$, $\pi(\mathbb{R}^d\times E) = \sigma(E)$ для каждого борелевского множества $E\subset\mathbb{R}^d$.

Далее будем считать, что функция стоимости h монотонно неубывает, непрерывна, ограничена и $h(0) = 0$.

Теорема 1.5. *Пусть $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ и $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ – решения задач* (1.20) *с начальными данными μ_0 и σ_0 соответственно. Предположим, что снос B_μ λ-монотонный по x, т.е.*

$$\langle B_\mu(x,t) - B_\mu(y,t), x-y\rangle \le \lambda\|x-y\|^2 \tag{1.22}$$

для всех $x,y\in\mathbb{R}^d$ и всех $t\in[0,T]$. Пусть

$$B_\mu(x,t) - \lambda x,\ B_\sigma(x,t) - \lambda x \in L^2(\mathbb{R}^d\times[0,T], d(\mu_s+\sigma_s)ds) \tag{1.23}$$

Предположим также, что

$$\sup_{t\in[0,T]} |B_\mu(x,t)| < +\infty \quad \text{для каждого } x\in\mathbb{R}^d.$$

Тогда

$$C_{h_{\lambda t}}(\mu_t,\sigma_t) \le C_h(\mu_0,\sigma_0) + \|h\|_\infty \sqrt{\int_0^t\int |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds}\cdot\sqrt{1 + \int_0^t\int |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds} \tag{1.24}$$

для всех $t\in[0,T]$, где $h_s(r) := h(re^{-s})$.

Доказательство. Пусть (μ_t) и (σ_t) удовлетворяют условиям теоремы. В силу [31] меры μ_t и σ_t имеют строго положительные плотности относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d$. Доказательство (1.24) разбиваем на несколько шагов.

Шаг 1. Сведение к монотонному случаю $\lambda = 0$. Перемасштабируем задачу, сохраняя функцию стоимости, чтобы свести задачу к случаю монотонного сноса B_μ.

Для этого мы видоизменим процедуру масштабирования из [67]. Для $\lambda \neq 0$ определим замену времени

$$s(t) := \int_0^t e^{-2\lambda r} dr = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda}, \quad t(s) = \frac{-\ln(1 - 2\lambda s)}{2\lambda}, \ s \in [0, S_\infty),$$

где $S_\infty = +\infty$ для $\lambda < 0$ и $S_\infty = 1/(2\lambda)$ для $\lambda > 0$. Далее, для мер μ_t и σ_t определим их перемасштабированные версии ρ_s^μ и ρ_s^σ по следующему правилу: для каждого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}^d$ положим $\rho_s^m(E) := m_{t(s)}(e^{\lambda t(s)} E)$ для $m = \mu, \sigma$. Заметим, что $C_h(\rho_s^\mu, \rho_s^\sigma) = C_{h_{\lambda t}}(\mu_t, \sigma_t)$. Поскольку B_μ λ-монотонный, $A_\mu := B_\mu - \lambda I$ монотонный. Определим новые сносы по правилу

$$\tilde{B}_m(y, s) := e^{\lambda t(s)} B_m(t(s), e^{\lambda t(s)} y), \qquad \tilde{A}_m(y, s) := e^{\lambda t(s)} A_m(t(s), e^{\lambda t(s)} y), \quad m = \mu, \sigma.$$

Заметим, что $\tilde{A}_\mu$ также является монотонным оператором. Более того, $\mu = \mu_t dt$ есть решение задачи

$$\partial_t \mu_t = \Delta \mu_t - \operatorname{div}(B_\mu \mu_t)$$

тогда и только тогда, когда $\rho^\mu = \rho_t^\mu dt$ есть решение задачи

$$\partial_t \rho_t^\mu = \Delta \rho_t^\mu - \operatorname{div}(\tilde{A}_\mu \rho_t^\mu); \tag{1.25}$$

более того, (1.23) выполнено тогда и только тогда, когда для всех неотрицательных $s_1 < s_2 \leq S(T) < S_\infty$

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{A}_\mu(x, s)|^2 d\rho_s^\mu ds < +\infty.$$

Утверждение об интегрируемости мгновенно следует из формулы замены переменной, а тождество (1.25) проверяется явно: достаточно рассмотреть замену переменной $\mathtt{X}(x, t) := (e^{-\lambda t} x, s(t))$ и вычислить производные. Аналогичные утверждения верны для σ и ρ^σ. Это означает, что достаточно доказать (1.24) в случае $\lambda = 0$, т.е. для монотонного сноса B_μ.

Шаг 2. Аппроксимация сноса. Построим семейство гладких ограниченных липшициевых по x монотонных операторов A_k^ε, которые приближают монотонный снос $B_\mu(x, t)$. Сначала сгладим оператор $B_\mu(x, t)$ по t. Для этого рассмотрим ядро усреднения $\eta_\varepsilon(t) := \eta(t/\varepsilon)$ для некоторой неотрицательной функции $\eta \in C_0^\infty([0, T])$ такой, что $\|\eta\|_{L^1([0,T])} = 1$. Тогда операторы $A^\varepsilon(x, t) := \eta_\varepsilon(t) * B_\mu(x, t)$ имеют ограниченные производные по t всех порядков и сходятся в $L^2([0, T])$ к B_μ при $\varepsilon \to 0$. Более того, A^ε монотонны по x:

$$\langle A^\varepsilon(x, t) - A^\varepsilon(y, t), x - y \rangle = \eta_\varepsilon(t) * \langle B_\mu(x, t) - B_\mu(y, t), x - y \rangle \leq 0.$$

Далее, для каждого t монотонный оператор $A^\varepsilon(\cdot, t)$ может быть приближен липшициевыми по x ограниченными монотонными операторами $A_k^\varepsilon(\cdot, t)$ с ограниченными первыми производными по пространственной переменной (см. [67, Теорема 2.4, 2.5]):

$$\lim_{k \to \infty} A_k^\varepsilon(x, t) = A^\varepsilon(x, t) \text{ для п.в. } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]. \tag{1.26}$$

Заметим, что это приближение есть сглаженная версия аппроксимации Моро–Иосида монотонных операторов. Из явных формул для A_k^ε [67, Теоремы 2.4, 2.5] легко заметить, что эти операторы имеют ограниченные производные по t всех порядков. Наконец, определим дифференциальные операторы $\mathcal{L}_k^\varepsilon$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_k^\varepsilon[\phi](x,s) := \triangle\phi(x,s) + \langle A_k^\varepsilon(x,s), \nabla_x\phi(x,s)\rangle, \quad \phi(\cdot,s)\in C^2(\mathbb{R}^d), \quad (x,s)\in\mathbb{R}^d\times[0,T].$$

Шаг 3. Уменьшение класса пробных функции. Положим

$$\|h\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{R}^d} h(|z|) < \infty.$$

Хорошо известно (например, см. [77, Теорема 1.3]), что задача (1.21) допускает двойственную формулировку: определим класс Φ_h как

$$\Phi_h := \{(\phi,\psi)\in L^1(\mu)\times L^1(\nu) : \phi(x)+\psi(y)\le h(|x-y|)\}.$$

Тогда

$$C_h(\mu,\sigma) = \sup_{(\phi,\psi)\in\Phi_h} \int \phi\,\mathrm{d}\mu + \int \psi\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.27}$$

Важное наблюдение ([80, Лемма 2.3]) состоит в том, что верхнюю грань в двойственной задаче (1.27) с ограниченной функцией стоимости можно брать по меньшему классу функций

$$\Phi_h^\delta := \Phi_h \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\cap\{(\phi,\psi) : \inf\psi > -\delta \text{ и } \sup\psi\le\|h\|_\infty\} \tag{1.28}$$

для любого положительного δ. Доказательство основано на том, что функции φ и ψ могут быть сдвинуты на различные константы и срезаны так, что новая пара (φ_0,ψ_0) так же допустима и значение в (1.27) не уменьшается:

$$\int\varphi_0 d\mu + \int\psi_0 d\sigma \ge \int\varphi d\mu + \int\psi d\sigma \quad \text{и } \inf_{\mathbb{R}^d}\psi_0 = 0,\ \sup_{\mathbb{R}^d}\psi_0\le\|h\|_\infty,\ \sup_{\mathbb{R}^d}\varphi_0\ge 0.$$

При переходе к функциям с компактным носителем оценка портится и приводит к классу (1.28).

Поэтому далее будем рассматривать верхнюю грань в (1.27) по классу Φ_h^b допустимых пар $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$-функций таких, что $\|\psi\|_\infty\le\|h\|_\infty$.

Шаг 4. Оценки для сглаженного уравнения. Зафиксируем допустимую пару $(\phi,\psi)\in\Phi_h^b$ и обозначим

$$l := \|\nabla\phi\|_\infty + \|\nabla\psi\|_\infty < \infty.$$

Гладкость операторов A_k^ε влечет ([74, Теорема 3.2.1]) существование у следующих сопряженных задач решений $g, f\in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^d\times[0,t])$:

$$\partial_s g + \mathcal{L}_k^\varepsilon g = 0, \quad g(\cdot,t)=\phi(\cdot) \qquad \text{и} \qquad \partial_s f + \mathcal{L}_k^\varepsilon f = 0, \quad f(\cdot,t)=\psi(\cdot) \tag{1.29}$$

По принципу максимума

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}^d\times[0,t]} |g| &\le \sup\nolimits_{\mathbb{R}^d}|\phi|, \quad \sup_{\mathbb{R}^d\times[0,t]} |\nabla g| \le \sup_{\mathbb{R}^d}|\nabla\phi|,\\ \sup_{\mathbb{R}^d\times[0,t]} |f| &\le \sup\nolimits_{\mathbb{R}^d}|\psi|, \quad \sup_{\mathbb{R}^d\times[0,t]} |\nabla f| \le \sup_{\mathbb{R}^d}|\nabla\psi|. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Подставляя решения (1.29) в тождества (1.3), получим

$$\int \phi d\mu_t - \int g(x,0)d\mu_0 = -\int_0^t \int (A_k^\varepsilon(x,s) - B_\mu) \cdot \nabla g(x,s) d\mu_s ds,$$

$$\int \psi d\sigma_t - \int f(x,0)d\sigma_0 = -\int_0^t \int (A_k^\varepsilon(x,s) - B_\sigma) \cdot \nabla f(x,s) d\sigma_s ds.$$

В силу (1.30),

$$\int \phi d\mu_t - \int g(x,0)d\mu_0 \le l \int_0^t \int |A_k^\varepsilon - B_\mu| d\mu_s ds.$$

Заметим, что

$$\int \psi d\sigma_t - \int f(x,0)d\sigma_0 \le \int_0^t \int |A_k^\varepsilon - B_\mu| \cdot |\nabla f| d\sigma_s ds + \int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma| \cdot |\nabla f| d\sigma_s ds \overset{(1.30)}{\le}$$

$$\le l \int_0^t \int |A_k^\varepsilon - B_\mu| d\sigma_s ds + \int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma| \cdot |\nabla f| d\sigma_s ds.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\int \phi d\mu_t + \int \psi d\sigma_t \le \int g(x,0)d\mu_0 + \int f(x,0)d\sigma_0 + l \cdot R_k^\varepsilon + \int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma| \cdot |\nabla f| d\sigma_s ds,$$

где

$$R_k^\varepsilon := \int_0^t \int |A_k^\varepsilon - B_\mu| d(\mu_s + \sigma_s) ds.$$

Пара (φ, ψ) допустима, поэтому по [67, Теорема 3.1] $g(x,0) + f(y,0) \le h(|x-y|)$. Отсюда

$$\int g(x,0)d\mu_0 + \int f(x,0)d\sigma_0 \le C_h(\mu_0, \sigma_0). \tag{1.31}$$

Значит,

$$\int \phi d\mu_t + \int \psi d\sigma_t \le C_h(\mu_0, \sigma_0) + l \cdot R_k^\varepsilon + \int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma| \cdot |\nabla f| d\sigma_s ds. \tag{1.32}$$

Шаг 5. Оценка ∇f. Последнее слагаемое в правой части (1.32) мажорируется

$$\sqrt{\int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds} \cdot \sqrt{\int_0^t \int |\nabla f|^2 d\sigma_s ds}.$$

Чтобы оценить второй множитель, т.е. выражение $\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])}$, заметим, что f^2 есть функция класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,t)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ и ее можно подставить в тождество (1.3) для меры σ:

$$\int \psi^2 d\sigma_t - \int f^2(x,0)d\sigma_0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_s + L_\sigma) f^2 d\sigma_s ds =$$

$$2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\partial_s f + \Delta f + \langle B_\sigma, \nabla f\rangle) + |\nabla f|^2 d\sigma_s ds = -2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f\langle A_k^\varepsilon - B_\sigma, \nabla f\rangle + |\nabla f|^2 d\sigma_s ds.$$

Поэтому

$$2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\sigma_s ds \leq \int_{\mathbb{R}^d} \psi^2 d\sigma_t - \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x,0) d\sigma_0 + \\ + 2\max|f(x,t)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |A_k^\varepsilon - B_\sigma||\nabla f| d\sigma_s ds.$$

По принципу максимума (1.30) и определению (1.28) получаем, что

$$\max|f(x,t)| \leq \max|\psi(x)| \leq \|h\|_\infty$$

и, учитывая неравенство $ab \leq 2^{-1}\gamma a^2 + (2\gamma)^{-1}b^2$ с $\gamma = \|h\|_\infty$, приходим к

$$2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\sigma_s ds \leq \|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |A_k^\varepsilon - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds + \int_0^t \int |\nabla f|^2 d\sigma_s ds.$$

Приводя подобные и вспоминая (1.32), получим

$$\int \phi d\mu_t + \int \psi d\sigma_t \leq C_h(\mu_0, \sigma_0) + l \cdot R_k^\varepsilon + \|h\|_\infty \cdot r_k \cdot \sqrt{\int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds}, \quad (1.33)$$

где

$$r_k := \sqrt{1 + \int_0^t \int |A_k^\varepsilon - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds}.$$

Шаг 6. Пределы при $k \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Финальная оценка. Имеем

$$R_k^\varepsilon = R_\mu + R_\sigma, \quad R_m := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |A_k^\varepsilon - B_\mu| dm_s ds,\ m = \mu, \sigma.$$

Член R_m может быть оценен следующим образом:

$$R_m \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |A_k^\varepsilon - A^\varepsilon| dm_s ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B_\mu - A^\varepsilon| dm_s ds,$$

По свойствам аппроксимирующего семейства (1.26) применима теорема Лебега о мажорированной сходимости и, поскольку у мер μ_s и σ_s строго положительные плотности относительно меры Лебега,

$$\lim_{k\to\infty} R_m \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B_\mu - A^\varepsilon| dm_s ds.$$

Аналогично

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \sqrt{1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |A^\varepsilon - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds}.$$

По свойствам сверток и условию интегрируемости B_μ и B_σ,

$$\int_0^t \int |A^\varepsilon - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds \to \int_0^t \int |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds,\ \varepsilon \to 0.$$

Поэтому можно перейти к пределу при $k \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ в (1.33) и получить

$$\int \phi d\mu_t + \int \psi d\sigma_t \le C_h(\mu_0, \sigma_0) \\ + \|h\|_\infty \sqrt{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds} \cdot \sqrt{1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds}.$$

Переходя к точной верхней грани по множеству $(\phi, \psi) \in \Phi_h^b$ и учитывая шаг 3, получим

$$C_h(\mu_t, \sigma_t) \le C_h(\mu_0, \sigma_0) + \|h\|_\infty \sqrt{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds} \cdot \sqrt{1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B_\mu - B_\sigma|^2 d\sigma_s ds},$$

т.е. оценку (1.24) с $\lambda = 0$. □

Перейдем к некоторым применениям этой оценки для изучения разрешимости нелинейных уравнений ФПК.

Предположим, что борелевское отображение

$$B(\mu, \cdot, \cdot) \equiv B(\mu) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$$

задано для каждой меры $\mu = \mu_t dt \in M_T(V)$, где класс $M_T(V)$ определяется равенством (1.13). Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения ФПК

$$\partial_t \mu_t = \Delta \mu_t - \operatorname{div}(B(\mu, x, t)\mu_t), \quad \mu_t|_{t=0} = \mu_0. \tag{1.34}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(B1) Коэффициент сноса B является λ-монотонным по x, т.е.

$$\langle B(\mu, x, t) - B(\mu, y, t), x - y \rangle_{\mathbb{R}^d} \le \lambda \|x - y\|^2 \tag{1.35}$$

для каждого решения $\mu \in M_T(V)$ задачи (1.34), для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ и всех $t \in [0, T]$.

(B2) Коэффициент сноса $B(\mu)$ ограничен на всех цилиндрах $U \times [0, T]$ для всех $\mu \in M_T(V)$, где U есть шар $\mathbb{R}^d$; для всех решений μ и σ из $M_T(V)$

$$B(\mu, x, t) - \lambda x \in L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T], d(\mu_s + \sigma_s) ds). \tag{1.36}$$

Начнем с вопроса единственности и устойчивости вероятностных решений задачи (1.34).

Как и выше, предположим, что функция стоимости h непрерывна, не убывает, ограничена и $h(0) = 0$. Для неотрицательной неубывающей функции G определим

$$F_G(r) \equiv F(r) := \int_r^1 \frac{du}{G^2(\sqrt{u})}.$$

Следствие 1.6. *Пусть* $V \in L^1(\mu_0) \cap L^1(\sigma_0)$. *Предположим, что коэффициент сноса* B *в уравнении* (1.34) *удовлетворяет условиям* (B1) *и* (B2). *Предположим, что для любых двух решений* $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$ *и* $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ *из* $M_T(V)$

$$|B(\mu, x, t) - B(\sigma, x, t)| \leq \sqrt{V(x)} G(C_h(\mu_s, \sigma_s)) \tag{1.37}$$

для некоторой неотрицательной неубывающей функции G *со свойством* $F(0) = +\infty$. *Тогда для любых двух решений* $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ *и* $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ *задачи* (1.34) *из класса* $M_T(V)$ *с начальными условиями* μ_0 *и* σ_0 *соответственно выполнено*

$$C_{h_{\lambda t}}(\mu_t, \sigma_t) \leq (F^{-1}\Big(F(2(C_h(\mu_0, \sigma_0))^2) - ct\Big))^{1/2}$$

для всех $t \in [0, T]$, *где* F^{-1} *есть обратная к функция* F *и* $c > 0$.

Доказательство Следствия 1.6. Для начала заметим, что если μ есть решение задачи (1.34) и выполнены условия следствия 1.6, то линейное уравнение ФПК

$$\partial_t \rho_t = \Delta \rho_t - \operatorname{div}(B(\mu, x, t)\rho_t), \quad \rho_t|_{t=0} = \mu_0$$

имеет решение $\rho = \mu$, удовлетворяющее условиям теоремы 1.5; аналогично для σ. Поэтому применима (1.24) с $B_\mu(\cdot, \cdot) = B(\mu, \cdot, \cdot)$ и $B_\sigma(\cdot, \cdot) = B(\sigma, \cdot, \cdot)$.

Далее, рассуждая аналогично шагу 1 доказательства теоремы 1.5, можно считать, что снос B монотонный. Учитывая условие (1.37), оценка (1.24) перепишется в виде

$$C_h(\mu_t, \sigma_t) \leq C_h(\mu_0, \sigma_0) + \|h\|_\infty \bar{V} \sqrt{\int_0^t G^2(C_h(\mu_s, \sigma_s)) ds} \cdot \sqrt{1 + \bar{V} \int_0^t G^2(C_h(\mu_s, \sigma_s)) ds} \tag{1.38}$$

с некоторой постоянной $\bar{V}$. Заметим, что $C_h(\mu_t, \sigma_t) \leq \|h\|_\infty$. Тогда (1.38) влечет

$$C_h(\mu_t, \sigma_t) \leq C_h(\mu_0, \sigma_0) + K \sqrt{\int_0^t G^2(C_h(\mu_s, \sigma_s)) ds} \tag{1.39}$$

с $K = \|h\|_\infty \bar{V} \cdot \sqrt{1 + \bar{V}^2 \cdot T G^2(\|h\|_\infty)}$. Возводя (1.39) в квадрат, получим

$$C_h(\mu_t, \sigma_t)^2 \leq \Big(C_h(\mu_0, \sigma_0) + K \sqrt{\int_0^t G^2(C_h(\mu_s, \sigma_s)) ds}\Big)^2 \leq$$
$$\leq 2C_h(\mu_0, \sigma_0)^2 + 2K^2 \int_0^t G^2(C_h(\mu_s, \sigma_s)) ds.$$

Если $\mu_0 = \sigma_0$, то единственность мгновенно следует из явного интегрирования. В общем случае по неравенству Гронуолла [43, Теорема 27]) получим

$$C_h(\mu_t, \sigma_t) \leq \Big(F^{-1}\Big(F(2(C_h(\mu_0, \sigma_0))^2) - 2K^2 t\Big)\Big)^{1/2},$$

где $F(r) = \displaystyle\int_r^1 \frac{du}{G^2(\sqrt{u})}$ и F^{-1} есть обратная функция к F. □

В частном случае $G(u) = u$ последняя оценка особенно интересна:

Следствие 1.7. *Пусть μ и σ – два решения задачи* (1.34)*, удовлетворяющие условиям теоремы 1.6 с $G(u) = u$. Тогда*

$$C_{h_{\lambda t}}(\mu_t, \sigma_t) \le \sqrt{2} C_h(\mu_0, \sigma_0) e^{N^2 t}.$$

В частности, если снос монотонен $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$, то

$$C_h(\mu_t, \sigma_t) \le \sqrt{2} C_h(\mu_0, \sigma_0) e^{N^2 t}.$$

Оценка (1.24) в некоторых случаях позволяет также установить существование решения нелинейного уравнения (1.34). Пусть $h(r) = \min\{|r|^p, 1\}$ для некоторого $p \ge 1$. В этом случае пространство вероятностных мер с метрикой $C_h^{1/p}(\mu_t, \sigma_t)$ есть полное метрическое пространство. Более того, сходимость по этой метрике эквивалентна слабой сходимости ([3, Теорема 1.1.9]).

Следствие 1.8. *Предположим, что коэффициент сноса B удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Предположим, что $B(\sigma^n) \to B(\sigma)$ в $L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T], d\sigma_s ds)$ при $n \to \infty$, если меры $\sigma^n(dx\,dt) = \sigma_t^n(dx)dt$ слабо сходятся к мере $\sigma(dx\,dt) = \sigma_t(dx)dt$ на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Предположим, что существует функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $V \ge 1$ и постоянная $C > 0$ такая, что $L_\mu V \le C(1+V)$ для каждой меры $\mu \in M_T(V)$. Тогда для каждой вероятностной меры μ_0 со свойством $V \in L^1(\mu_0)$ существует вероятностное решение $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$ задачи* (1.34).

Доказательство. Как и выше, без ограничения общности снос монотонен. Определим отображение Q пространства $M_T(V)$ в пространство вероятностных мер:

$$\mu = Q(\sigma) \Longleftrightarrow \partial_t \mu_t = \Delta \mu_t - \operatorname{div}(B(\sigma, x, t)\mu_t), \quad \mu_0 = \sigma_0.$$

Это отображение корректно определено в силу [29, Теорема 3.1] и [72]. Очевидно, что решения (1.34) являются в точности неподвижными точками отображения Q.

Множество $N_{T,\alpha}$, определяемое равенством 1.5, очевидно выпукло. Существование функции V со свойством $L_\mu V \le C(1+V)$, влечет компактность этого множества в топологии слабой сходимости по следствию 1.1, значит, и в топологии сходимости относительно C_h. Далее, в силу интегрального тождества (1.2) все решения задачи Коши лежат в $N_{T,\alpha}$. По [15, Следствие 2.4] существует такая постоянная $\alpha > 0$, что $Q(N_{T,\alpha}) \subset N_{T,\alpha}$. Проверим непрерывность отображения Q на $N_{T,\alpha}$. Предположим, что последовательность $\sigma^n = (\sigma_t^n) \in N_{T,\alpha}$ слабо сходится к $\sigma = (\sigma_t) \in N_{T,\alpha}$. Положим $\mu^n := Q(\sigma^n)$, $\mu := Q(\sigma)$. По (1.32) имеем

$$C_h(\mu_t^n, \mu_t) \le \sqrt{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B(\sigma^n) - B(\sigma)|^2 d\sigma_s ds} \cdot \sqrt{1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |B(\sigma^n) - B(\sigma)|^2 d\sigma_s ds}.$$

По условиям теоремы правая часть стремится к нулю, следовательно, μ^n сходится к μ по метрике $C_h^{1/p}$, значит, и слабо. Это и означает непрерывность отображения Q на выпуклом компакте $N_{T,\alpha}$; более того, это отображение компакта на себя. По теореме Шаудера это означает, что отображение Q имеет неподвижную точку в $N_{T,\alpha}$, т.е. существует решение $\mu = (\mu)_{t\in[0,T]}$ задачи (1.34). $\square$

Замечание 1.8. Отметим, что подобные оценки и результаты имеют место не только для единичной матрицы диффузии, но и для любой невырожденной симметричной $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$-матрицы диффузии $C(x,t)$ такой, что

$$\lambda|y|^2 \le \langle C(x,t)y, y\rangle; \qquad \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]} \operatorname{trace} C(x,t) < +\infty. \tag{1.40}$$

Для доказательства достаточно заметить, что в доказательстве (1.24) единичность матрицы диффузии использовалась только в формуле (1.31). Формула (1.31) следует из [67, Теорема 3.1]. Однако доказательство последней может быть дословно повторено для матриц диффузии, удовлетворяющих (1.40).

Глава 2

Разрешимость линейных уравнений с потенциалом на областях

В этой главе изучается задача Коши для уравнения ФПК

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i} \partial_{x_j} \big(a^{ij} \mu_t \big) - \partial_{x_i} \big(b^i \mu_t \big) + c \mu_t, \quad \mu_t|_{t=0} = \nu \tag{2.1}$$

для неотрицательных мер, заданных на открытом множестве (далее называемом областью) $D \subset \mathbb{R}^d$; граничное условие не накладывается. Как и выше, подразумевается суммирование по повторящимся индексам.

Подобные уравнения для переходных вероятностей марковских процессов были впервые получены А.Н. Колмогоровым в его знаменитой работе [12]. В той же работе поставлен вопрос о существовании и единственности вероятностных решений в случае $c = 0$. В классических работах [25, 48, 74, 75, 78] рассматриваются аналогичные уравнения с гладкими коэффициентами, имеющими не более, чем линейный рост на бесконечности.

Уравнения с интегрируемыми и соболевскими коэффициентами в классах ограниченных борелевских мер интенсивно изучались в последние десятилетия. Вариационный подход к задаче (2.1) в случае единичной диффузии, градиентного сноса и $c = 0$ рассмотрен в [23, 53]. Существование и единственность решений, задаваемых семейством вероятностных мер, при $c = 0$, невырожденной диффузии и соболевском сносе установлены в [4,29,34,37]. В работах [19,38,58] изучаются уравнения с вырожденной диффузией. В частности, разрешимость задачи Коши для уравнения с вырожденной соболевской диффузией A в классе плотностей при некоторых ограничениях на рост коэффициентов низших порядков доказана в [58]. Связь L^1- и L^∞-единственности полугрупп, теорем типа Лиувилля и единственности L^1-решений задачи Коши для уравнения ФПК изучается в [56, 79]. В статье [44] установлено существование, единственность и поведение неотрицательных решений уравнения (2.1) с $b = c = 0$ на $\mathbb{R}^{d+1}$. Неотрицательные решения дивергентных уравнений рассмотрены в [52, 69].

Уравнения ФПК тесно связаны с диффузионными процессами (см. [12, 74]). Хорошо известно, что переходные вероятности диффузионных процессов удовлетворяют этим уравнениям; более того, в случае глобально ограниченных коэффициентов решения уравнений ФПК могут быть представлены как переходные вероятности (см. [45]). Однако, если коэффициенты неограниченные или негладкие, может существовать неединственный соответствующий диффузионный процесс, и он может взрываться. Более того, в этом случае задача Коши (2.1) может иметь несколько решений даже если соответствующий диффузионный процесс единственен (см. [34]). Отметим, что диффузионные процессы в произвольных областях изучались в [50], где, в частности, доказано существование и единственность диффузионного процесса в $D = (-1, 1)$ с генератором

$$Lu(x) = 2^{-1}\big|1 - |x|\big|^{2\alpha} u''(x) + \big(\mathrm{tg}(-\pi x/2) + \mathrm{sgn} x\big)u'(x).$$

Тем не менее, несмотря на обширную литературу, нельзя сказать, что дан полный ответ на вопрос Колмогорова. Например, до сих пор неизвестно, единственно ли вероятностное решение задачи (2.1) для уравнения с единичной диффузией и гладким сносом в размерности $d = 1$ и $d = 2$. В размерности $d \geq 3$ подобные примеры неединственности существуют (см. [34]).

В данной главе рассматриваются следующие вопросы:

(I) Существование решений при очень слабых локальных условиях на коэффициенты. Для произвольного открытого множества D (не обязательно ограниченного, например, можно взять $D = \mathbb{R}^d$) и произвольной вероятностной меры ν в D на $[0, T]$ строится семейство субвероятностных мер μ_t на D таких, что $d\mu = d\mu_t\, dt$ есть решение задачи (2.1) и неравенство

$$\mu_t(D) \leq \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x, s)\, \mu_s(dx)\, ds \tag{2.2}$$

выполнено $t \in (0, T)$.

(II) Условия, при которых в неравенстве (2.2) достигается равенство. Если $c = 0$, это означает сохранение полной меры пространства $\mu_t(D) = 1$. Оказывается, что естественным (с вероятностной точки зрения) достаточным условием является существование функции Ляпунова.

(III) Единственно ли решение задачи Коши (2.1) в классе мер, заданных семействами субвероятностных мер с условием (2.2)?

Рассмотрим простой пример: $D = (0, 1)$ и $\partial_t\mu = \partial_{xx}\mu$. Очевидно, что решений несколько (т.к. нет граничных условий). Но если заменить $(0, 1)$ на все пространство, то, как доказано в [78], неотрицательное решение единственно без дополнительных предположений о поведении μ на бесконечности. Значит, если нет граничных условий на $\partial D \times [0, T]$, то единственность зависит от D и L. Возникает вопрос: какова эта зависимость? Оказывается, ответ может быть сформулирован в терминах функции Ляпунова. Точнее, если коэффициенты оператора гладкие и существует функция Ляпунова, то задача Коши имеет единственное решение.

Раздел 1 посвящен существованию решения, в разделе 2 приведены результаты о единственности решений. Эти результаты содержатся в работах [16]. Раздел 3 содержит примеры использования и применений полученных результатов.

Перейдем к определениям и точным утверждениям.

Зафиксируем $T > 0$. Пусть D – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что вместе с областью D задана последовательность таких расширяющихся открытых множеств D_k, что для каждого k замыкание $\overline{D_k}$ множества D_k лежит в

D_{k+1} и $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$. Например, если $D = \mathbb{R}^d$, то можно взять в качестве D_k центрированные шары радиуса k.

Будем говорить, что локально конечная борелевская мера μ на полосе $D \times (0,T)$ задана семейством борелевских мер $(\mu_t)_{t\in(0,T)}$, если для каждого борелевского множества $B \subset D$ отображение $t \mapsto \mu_t(B)$ измеримо и имеет место равенство

$$\int_{D\times(0,T)} u\,d\mu = \int_0^T \int_D u(x,t)\,\mu_t(dx)\,dt$$

для каждой функции $u \in C_0^\infty(D \times (0,T))$. Последнее равенство очевидно распространяется на все фукции вида fu, где u – как выше, а f μ-интегрируема на каждом компакте в $D \times (0,T)$.

Положим

$$L\varphi = a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi + b^i\partial_{x_i}\varphi + c\varphi,$$

где a^{ij}, b^i, c – борелевские функции на $D \times [0,T]$ и $A = (a^{ij})$ есть симметричная неотрицательно определенная матрица, т.е. $a^{ij} = a^{ji}$, $(A(x,t)y,y) \ge 0$ для всех $(x,t) \in D \times [0,T]$ и всех $y \in \mathbb{R}^d$. Далее эта матрица называется матрицей диффузии. Отображение b называется коэффициентом сноса, а c потенциалом.

Пусть ν – вероятностная мера на D. Будем говорить, что мера $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,T)}$ является решением задачи Коши (2.1), если a^{ij}, b^i и c принадлежат $L^1(\overline{D_k} \times J, |\mu|)$ для каждого множества D_k и каждого интервала $J \subset (0,T)$, и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ выполнено

$$\int_D \varphi d\mu_t - \int_D \varphi d\nu = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^t \int_D L\varphi d\mu_s ds \qquad (2.3)$$

для п.в. $t \in (0,T)$. Вообще говоря, множество точек t, для которых выполнено (2.3), зависит от φ. Если функция $t \mapsto \displaystyle\int_D \varphi\,d\mu_t$ непрерывна на $(0,T)$, то тождество (2.3) выполнено для всех $t \in [0,T)$. Если $L\varphi \in L^1(D \times [0,T])$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^t \int_D L\varphi d\mu_s ds = \int_0^t \int_D L\varphi d\mu_s ds.$$

Часто оказывается полезным следующее определение решения, эквивалентное (2.3) (см. [34]): меры $\mu = (\mu_t)_{0<t<T}$ является решением уравнения $\partial_t\mu = L^*\mu$, если

$$\int_0^T \int_D (\partial_t u + Lu)\,d\mu_t\,dt = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(D \times (0,T)).$$

Мера $\mu = (\mu_t)_{0<t<T}$ удовлетворяет начальному условию $\mu|_{t=0} = \nu$, если для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ существует множество $J_\varphi \subset (0,T)$ полной меры Лебега такое, что

$$\lim_{t\to 0, t\in J_\varphi} \int_D \varphi\,d\mu_t = \int_D \varphi\,d\nu.$$

Как и выше, если отображение $t \mapsto \displaystyle\int_D \varphi\,d\mu_t$ непрерывно на $(0,T)$, то $J_\varphi = (0,T)$.

В данной главе всегда будем считать, что $c \le 0$. Это предположение может быть ослаблено до предположения $c \le c_0$ с некоторой константой c_0. Чтобы свести этот случай к $c_0 = 0$, достаточно рассмотреть меры $e^{-c_0 t}\mu_t$ вместо μ_t.

Мы будем изучать существование и единственность решений в классе $\mathcal{M}_\nu$ мер μ, заданных семействами неотрицательных мер $(\mu_t)_{0<t<T}$ таких, что μ есть решение задачи Коши (2.1), $c \in L^1(D\times(0,T),\mu)$ и для п.в. $t\in(0,T)$ выполнено (2.2).

2.1 Существование решений

Оказывается, решение существует при довольно слабых ограничениях на коэффициенты. В статьях [16, 64] С.В. Шапошниковым доказано следующее достаточное условие существования решений:

Теорема 2.1. *Пусть $c \le 0$, для каждого $k\in\mathbb{N}$ коэффициенты a^{ij}, b^i и c ограничены на $D_k\times[0,T]$ и существуют положительные числа m_k и M_k, такие что неравенство*

$$m_k|y|^2 \le (A(x,t)y,y) \le M_k|y|^2$$

выполнено для всех $y\in\mathbb{R}^d$ и $(x,t)\in D_k\times[0,T]$. Тогда для кажой вероятностной меры ν на D множество $\mathcal{M}_\nu$ непусто. Более того, каждое решение μ из $\mathcal{M}_\nu$ задается плотностью $\varrho \in L^{(d+1)/d}_{loc}(D\times(0,T))$ относительно меры Лебега.

В случае невырожденной матрицы диффузии достаточные условия существования решения можно ослабить, отказавшись от ограниченности, но предполагая локальную соболевость:

Теорема 2.2. *Пусть $p > d+2$. Предположим, что $a^{ij}(\,\cdot\,,t)\in W^{1,p}_{loc}(D_k)$ для каждого k,*

$$\sup_{t\in(0,T)} \|a^{ij}(\,\cdot\,,t)\|_{W^{1,p}(D_k)} < \infty$$

и $(A(x,t)y,y) \ge m_k|y|^2$ для всех $(x,t)\in D_k\times[0,T]$, $y\in\mathbb{R}^d$ и некоторых $m_k>0$. Предположим также, что $b\in L^p(D_k\times[0,T])$ и $c\in L^{p/2}(D_k\times[0,T])$ для каждого индекса k. Тогд для любой начальной вероятностной меры ν на D множество $\mathcal{M}_\nu$ непусто.

Доказательство. 1. Положим $a^{ij}(x,t)=0$, $b^i(x,t)=0$ и $c(x,t)=0$ для $t\notin[0,T]$ или для $t\in[0,T]$, но $x\notin D$. Пусть ω – ядро усреднения, то есть

$$\omega\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}),\quad \omega\ge 0,\quad \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \omega(x,t)\,dx\,dt = 1.$$

Положим $\omega_\varepsilon(x,t)=\varepsilon^{-d-1}\omega(x\varepsilon^{-1},t\varepsilon^{-1})$. Пусть I_n – индикатор множества $D_n\times[0,T]$. Определим

$$a^{ij}_n = (a^{ij}I_n + \delta^{ij}(1-I_n))*\omega_{1/n},\quad b^i_n = (b^iI_n)*\omega_{1/n}\quad \text{и}\quad c_n = (cI_n)*\omega_{1/n}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\|a^{ij}_n - a^{ij}\|_{L^p(D_k\times[0,T])}=0,\ \lim_{n\to\infty}\|b^i_n - b^i\|_{L^p(D_k\times[0,T])}=0,\ \lim_{n\to\infty}\|c_n - c\|_{L^{p/2}(D_k\times[0,T])}=0,$$

нормы $\|a_n^{ij}\|_{L^p(D_k\times[0,T])}$, $\|b^i\|_{L^p(D_k\times[0,T])}$, $\|c_n\|_{L^{p/2}(D_k\times[0,T])}$ ограничены равномерно по n. Более того, $c_n \le 0$ и $(A_n(x,t)y,y) \ge \min\{m_k, 1\}$ для $n > k$; здесь m_k – константа, соответствующая множеству $D_k \times [0,T]$. Меру ν продолжим вне D нулем до меры на всем пространстве $\mathbb{R}^d$. Пусть $\eta_n \in C_0^\infty(D)$ – последовательность неотрицательных функций таких, что меры $\eta_n\,dx$ – вероятностные на $\mathbb{R}^d$ и слабо сходятся к ν.

Пусть $\{u_n\}$ являются гладкими ограниченными решениями задачи Коши

$$\partial_t u_n = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a_n^{ij}u_n) - \partial_{x_i}(b_n^i u_n) + c_n u_n, \quad u_n|_{t=0} = \eta_n.$$

Тогда $u_n(x,t)\,dx$ – субвероятностные меры для каждого t и

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_n(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \eta_n(x)\,dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} c_n(x,t)u_n(x,t)\,dx\,d\tau.$$

2. Выберем из $\{u_n\}$ сходящуюся подпоследовательность. В силу [31, Следствие 3.9], для каждого $k > 2$ гёльдеровская норма решения ограничена:

$$\|u_n\|_{C^\alpha(D_k\times[Tk^{-1},T(1-k^{-1})])} \le C_k,$$

где $\alpha \in (0,1)$ и C_k не зависит от n. Применяя теорему Арцела-Асколи, диагональный метод и переходя к подпоследовательности, заключаем, что последовательность $\{u_n\}$ равномерно сходится к функции u на $D_k\times[Tk^{-1},T(1-k^{-1})]$ для каждого k. Очевидно, что u является неотрицательной непрерывной функцией. Покажем, что функция u удовлетворяет (2.1).

Зафиксируем $\psi \in C_0^\infty(D)$. Тогда $\operatorname{supp}\psi \subset D_k$ для некоторого k. Равномерная сходимость $\{u_n\}$ моментально влечет

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \psi(x)u_n(x,t)dx = \int_D \psi(x)u(x,t)dx$$

для всех $t \in (0,T)$. Теперь положим $0 < s < t < T$. Заметим, что

$$\left|\int_s^t \int_D L_n\psi u_n\,dx\,d\tau - \int_s^t \int_D L\psi u\,dx\,d\tau\right| \le$$
$$\le \|L_n\psi - L\psi\|_{L^1(D_k\times[s,t])}\|u_n\|_{L^\infty(D_k\times[s,t])} + \|L\psi\|_{L^1(D_k\times[s,t])}\|u - u_n\|_{L^\infty(D_k\times[s,t])},$$

где первое слагаемое в правой части стремится к нулю из-за сходимости a_n^{ij}, b_n^i и c_n к a^{ij}, b^i и c соответственно. Равномерная сходимость $\{u_n\}$ к u влечет сходимость второго слагаемого к нулю. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^t \int_D L_n\psi u_n\,dx\,d\tau = \int_s^t \int_D L\psi u\,dx\,d\tau.$$

Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_D \psi(x)u(x,t) = \int_D \psi(x)u(x,s)\,dx + \int_s^t \int_D L\psi u\,dx\,d\tau$$

для всех $s, t \in (0, T)$.

3. Обоснуем предельный переход при $s \to 0$.

Пусть $0 < \tau < T$ и $y \in C_0^\infty(D)$. Продолжим функцию y нулем вне D. Пусть $w_{n,\tau}$ – решение сопряженной задачи

$$\partial_t w_{n,\tau} + a_n^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} w_{n,\tau} + b_n^i \partial_{x_i} w_{n,\tau} + c_n w_{n,\tau} = 0, \quad w_{n,\tau}|_{t=\tau} = y.$$

Возьмем функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\zeta(x) = 1$ при $|x| \le 1$, $\zeta(x) = 0$ при $|x| > 2$, $|\zeta| \le 1$. Умножая сопряженное уравнение на $\zeta_N u_n$, интегрируя по частям и устремляя $N \to \infty$, получим

$$\int_D y(x)u_n(x,\tau)\,dx = \int_D w_{n,\tau}(x,0)\eta_n(x)\,dx,$$

где мы учли, что $\operatorname{supp} y, \quad \operatorname{supp} \eta_n \subset D$. В силу [55, Часть III, Теорема 10.1], на каждом шаре $U \subset \mathbb{R}^d$ имеет место оценка

$$\|w_{n,\tau}(x,0) - y(x)\|_{L^\infty(U)} \le C(U)\tau^\alpha$$

с C и α, не зависящими от n. Поэтому

$$\begin{aligned}\left|\int_D y(x)u_n(x,\tau)\,dx - \int_D y\,d\nu\right| &\le \\ \le \int_D |w_{n,\tau}(x,0) - y(x)|\eta_n(x)\,dx &+ \left|\int_D y(x)\eta_n(x)\,dx - \int_D y\,d\nu\right| \le \\ &\le C\tau^\alpha + \left|\int_D y(x)\eta_n(x)\,dx - \int_D y\,d\nu\right|.\end{aligned}$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем

$$\left|\int_D y(x)u(x,\tau)\,dx - \int_D y\,d\nu\right| \le C\tau^\alpha,$$

откуда

$$\lim_{\tau\to 0}\int_D y(x)u(x,\tau)\,dx = \int_D y\,d\nu.$$

4. Покажем, что мера $u(x,t)dx\,dt$ является решением из класса $\mathcal{M}_\nu$. Напомним, что $c_n \le 0$ и меры $\eta_n\,dx$ вероятностные. Значит, для любой функции $\psi \in C_0^\infty(D)$, $0 \le \psi \le 1$ выполнено

$$\int_D \psi(x)u_n(x,t)\,dx - \int_0^t\int_D \psi(x)c_n(x,s)u_n(x,s)\,dx\,ds \le 1. \tag{2.4}$$

Пусть $\psi_N \in C_0^\infty(D)$, $0 \le \psi_N \le 1$ и $\psi_N(x) = 1$ для $x \in D_N$. Имеет место сходимость

$$\int_D \psi_N(x)u_n(x,t)\,dx \to \int_D \psi_N(x)u(x,t)\,dx.$$

Подставляя ψ_N в (2.4) и устремляя $n \to \infty$, получим

$$\int_D \psi_N(x)u(x,t)\,dx - \int_0^t\int_D \psi_N(x)c(x,s)u(x,s)\,dx\,ds \le 1.$$

Наконец, устремляя $N \to \infty$ и применяя лемму Фату, приходим к

$$\int_D u(x,t)\,dx - \int_0^t \int_D c(x,s)u(x,s)\,dx\,ds \le 1 = \nu(D).$$

Это завершает доказательство. $\square$

Замечание 2.1. Результат [31, Следствие 3.9] говорит, что в условиях теоремы 2.2 любое решение μ из $\mathcal{M}_\nu$ задается локально Гёльдеровской непрерывной плотностью ϱ относительно меры Лебега.

Теперь перейдем к случаю вырожденной матрицы A.

Теорема 2.3. *Предположим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c непрерывны по x, измеримы по t и ограничены на $D_k \times [0,T]$ для каждого k. Пусть матрица диффузии A симметрична и $(A(x,t)y,y) \ge 0$ для всех $(x,t) \in D \times [0,T]$ и $y \in \mathbb{R}^d$. Тогда для любой начальной вероятностной меры ν множество $\mathcal{M}_\nu$ непусто.*

Доказательство. Мы используем известный метод «исчезающей вязкости».

1. Введем для каждого $\varepsilon > 0$ оператор

$$L_\varepsilon := \varepsilon\Delta + L$$

и рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t \mu_t = L_\varepsilon^* \mu, \quad \mu|_{t=0} = \nu. \tag{2.5}$$

Очевидно для этой задачи выполнены условия теоремы 2.1. Значит, для каждого n задача Коши (2.5) с $\varepsilon = 1/n$ имеет решение μ^n, заданное семейством субвероятностных мер $(\mu_t^n)_{t\in(0,T)}$ на D и выполнено

$$\mu_t^n(D) \le \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\mu_s^n(dx)\,ds.$$

2. Выбираем сходящуюся подпоследовательность решений.

Существует подпоследовательность индексов n_l такая, что меры $\mu_t^{n_l}$ слабо сходятся на каждом компакте $\overline{D_k}$ для всех $t \in [0,T]$. Чтобы это доказать, достаточно применить теорему Прохорова для любого фиксированного компакта $\overline{D_k}$ и плотного счетного множества $S \in [0,T]$, используя диагональный метод. Затем та же диагональная процедура дает подпоследовательность, сходящуюся на всех компактах $\overline{D_k}$. Покажем, что построенная последовательность фундаментальна при любом $t \in [0,T]$. Пусть $t \in [0,T]$, $s \in S$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Поскольку коэффициенты оператора L ограничены на цилиндрах,

$$\begin{aligned}\left|\int_D \varphi d\mu_t^{n_p} - \int_D \varphi d\mu_t^{n_k}\right| &\le \left|\int_D \varphi d\mu_t^{n_p} - \int_D \varphi d\mu_s^{n_p}\right| + \left|\int_D \varphi d\mu_s^{n_p} - \int_D \varphi d\mu_s^{n_k}\right| + \\ &+ \left|\int_D \varphi d\mu_s^{n_k} - \int_D \varphi d\mu_t^{n_k}\right| \le 2C(\varphi)\cdot|t-s| + \left|\int_D \varphi d\mu_s^{n_p} - \int_D \varphi d\mu_s^{n_k}\right|.\end{aligned}$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать s из такой малой окрестности t, что первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Поскольку последовательность $\mu_s^{n_l}$ сходится, существует индекс N такой, что для любых $p, k > N$ второе слагаемое меньше $\varepsilon/2$. Таким образом, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ последовательность интегралов $\int_D \varphi\, d\mu_t^{n_l}$ фундаментальна, значит, сходится.

Зафиксируем k. Поскольку существует слабо сходящаяся подпоследовательность в любой подпоследовательности ограничений $\mu_t^{n_l}$ на $\overline{D_k}$, и по предыдущему шагу эти подпоследовательности имеют один и тот же предел, мы заключаем, что для каждого t последовательность $\mu_t^{n_l}$ слабо сходится к некоторой субвероятностной мере μ_t на каждом D_k.

Заметим, что для каждой непрерывной функции f отображение $t \mapsto \int_{D_k} f\, d\mu_t$ борелевское на $[0, T]$ как предел измеримых функций. Рассмотрим класс Φ ограниченных борелевских функций φ на D_k, для которых отображение $t \mapsto \int_{D_k} \varphi\, d\mu_t$ измеримо по Борелю на $[0, \tau]$. Множество Φ содержит алгебру непрерывных ограниченных функций на D_k и замкнуто относительно равномерных и монотонных пределов. По теореме о монотонных классах (см. [2, Теорема 2.2.12]) множество Φ содержит все ограниченые борелевские функции на D_k. В частности, отображение $t \mapsto \mu_t(B)$ борелевское на $[0, T]$ для каждого борелевского множества $B \subset D_k$. Поскольку k произвольно, это верно для любого борелевского подмножества D. Пусть μ – мера, заданная семейством $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$. Очевидно, что $\{\mu^{n_l}\}$ слабо сходится к μ на $D_k \times [0, T]$ для каждого k.

3. Переходя к подпоследовательности, построенной выше, заключаем, что последовательность $\mu^n = (\mu_t^n)_{t\in(0,t)}$ такова, что $\{\mu^n\}$ слабо сходится к $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,T)}$ и $\{\mu_t^n\}$ слабо сходится к μ_t для любого t.

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Для каждого n имеем

$$\int_D \varphi d\mu_t^n - \int_D \varphi d\mu_0 = \int_0^t \int_D L_{1/n}\varphi d\mu_s^n ds. \qquad (2.6)$$

Поскольку

$$\left| \int_0^t \int_D (L_{1/n} - L)\varphi d\mu_s^n ds \right| \le \frac{T}{n} \sup_D |\Delta\varphi|,$$

слабая сходимость μ^n к μ влечет

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_D L_{1/n}\varphi d\mu_s^n ds = \int_0^t \int_D L\varphi d\mu_s ds,$$

и для каждого t

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \varphi d\mu_t^n = \int_D \varphi d\mu_t.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (2.6), получим

$$\int_D \varphi d\mu_t - \int_D \varphi d\mu_0 = \int_0^t \int_D L\varphi d\mu_s ds.$$

Это означает, что μ является решением задачи Коши (2.1). Наконец, неравенство

$$\int_D u(x,t)\,dx - \int_0^t \int_D c(x,s)u(x,s)\,dx\,ds \le 1 = \nu(D)$$

обосновывается аналогично шагу 4 доказательства теоремы 2.2. □

Установим условия, при которых выполнено равенство

$$\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\,d\mu_s\,ds \tag{2.7}$$

вместо неравенства (в частности, если $c = 0$ и ν является вероятностной мерой, то μ_t тоже вероятностные меры).

Теорема 2.4. *Пусть $\mu = (\mu_t)_{0<t<T} \in \mathcal{M}_\nu$ и $c \le 0$. Предположим, что существует функция V такая, что $V \in C^{2,1}(D \times (0,T)) \bigcap C(D \times [0,T))$, для каждого интервала $[\alpha,\beta] \in (0,T)$ выполнено*

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{D_k \setminus D_{k-1} \times [\alpha,\beta]} V(x,t) = +\infty$$

и для некоторых функций $K, H \in L^1((0,T))$ с $H \ge 0$ имеет место следующая оценка:

$$\partial_t V(x,t) + LV(x,t) \le K(t) + H(t)V(x,t).$$

Предположим также, что $V(\,\cdot\,,0) \in L^1(\nu)$. Тогда для п.в. $t \in (0,T)$ выполнено

$$\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\,d\mu_s\,ds$$

и имеет место оценка

$$\int_D V(x,t)\,d\mu_t \le Q(t) + R(t)\int_D V(x,0)\,d\nu,$$

где

$$R(t) = \exp\Bigl(\int_0^t H(s)\,ds\Bigr), \quad Q(t) = R(t)\int_0^t \frac{K(s)}{R(s)}\,ds.$$

Доказательство. Пусть функция $\zeta_N \in C^2([0,+\infty))$ такова, что $0 \le \zeta' \le 1$, $\zeta'' \le 0$, где $\zeta_N(s) = s$ при $s \le N-1$ и $\zeta(s) = N$ при $s > N+1$. Зафиксируем также $\eta \in C_0^\infty((0,T))$. Для функции $u(x,t) = (\zeta_N(V(x,t)) - N)\eta(t)$ и решения $\mu = (\mu_t)_{0<t<T} \in \mathcal{M}_\nu$ выполнено тождество

$$\int_0^T \int_D (\partial_t u + Lu)\,d\mu_t\,dt = 0,$$

из которого следует, что

$$-\int_0^T \eta'(t)\int_D (\zeta_N(V(x,t)) - N)\,d\mu_t\,dt = \int_0^T \eta(t)\int_D L(\zeta_N(V(x,t)) - N)\,d\mu_t\,dt.$$

Поскольку η произвольная,

$$\frac{d}{dt}\int_D (\zeta_N(V(x,t)) - N)\, d\mu_t = \int_D L(\zeta_N(V(x,t)) - N)\, d\mu_t.$$

Отсюда следует равенство

$$\int_D \zeta_N(V(x,t))\, d\mu_t = \int_D \zeta_N(V(x,s))\, d\mu_s + \left(\mu_t(D) - \nu(D) - \int_0^t \int_D c(x,\tau)\, d\mu_\tau\, d\tau\right) N +$$
$$+\int_s^t \int_D \left(\zeta_N'(V)(\partial_t V + LV) + \zeta_N''(V)|\sqrt{A}\nabla V|^2\right) d\mu_\tau\, d\tau + \int_s^t \int_D c\left(\zeta_N(V) - \zeta_N'(V)V\right)\, d\mu_\tau\, d\tau.$$

Замечая, что $z\zeta_N'(z) \le \zeta_N(z)$, мы приходим к

$$\int_D \zeta_N(V(x,t))\, d\mu_t \le \int_D \zeta_N(V(x,s))\, d\mu_s +$$
$$\left(\mu_t(D) - \nu(D) - \int_0^t \int_D c(x,\tau)\, d\mu_\tau\, d\tau\right) N + \int_s^t K(\tau) + H(\tau) \int_D \zeta_N(V(x,\tau))\, d\mu_\tau\, d\tau.$$

Предельный переход при $s \to 0$ дает

$$\int_D \zeta_N(V(x,t))\, d\mu_t \le \int_D \zeta_N(V(x,0))\, d\nu + \left(\mu_t(D) - \nu(D) - \int_0^t \int_D c(x,\tau)\, d\mu_\tau\, d\tau\right) N +$$
$$+ \int_0^t K(\tau) + H(\tau) \int_D \zeta_N(V(x,\tau))\, d\mu_\tau\, d\tau. \quad (2.8)$$

Поскольку

$$\mu_t(D) \le \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\, d\mu_s\, ds,$$

последнее неравенство может быть переписано в следующем виде:

$$\int_D \zeta_N(V(x,t))\, d\mu_t \le \int_D \zeta_N(V(x,0))\, d\nu + \int_0^t K(\tau) + H(\tau) \int_D \zeta_N(V(x,\tau))\, d\mu_\tau\, d\tau.$$

Отсюда по неравенству Гронуолла

$$\int_D \zeta_N(V(x,t))\, d\mu_t \le Q(t) + R(t) \int_D \zeta_N(V(x,0))\, d\nu.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, мы приходим к требуемой оценке.

Более того, если $\mu_t(D) < \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\, d\mu_s\, ds$, то, устремляя $N \to \infty$ в (2.8), получим

$$\int_D V(x,t)\, d\mu_t - \int_D V(x,0)\, d\nu - \int_0^t K(\tau) + H(\tau) \int_D V(x,\tau)\, d\mu_\tau\, d\tau = -\infty,$$

что невозможно. Значит, $\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\, d\mu_s\, ds$. Теорема доказана. □

В заключение отметим, что условие $V(\,\cdot\,,0)\in L^1(\nu)$ не является ограничительным: если есть какая-то функция Ляпунова, то есть и функция Ляпунова, интегрируемая по начальному условию, а именно, верно следующее обобщение результата [29]:

Предложение 2.1. *Пусть $\mu=(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ есть решение задачи Коши $\partial_t\mu=L^*\mu$ и $\mu|_{t=0}=\nu$, где ν – вероятностная мера на D. Предположим, что существует неотрицательная функция V такая, что $V\in C^{2,1}(D\times(0,T))\bigcap C(D\times[0,T))$, для каждого интервала $[\alpha,\beta]\in(0,T)$*

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{D_k\setminus D_{k-1}\times[\alpha,\beta]}V(x,t)=+\infty$$

и для некоторых функций $K,H\in L^1((0,T))$ с $H\geq 0$ имеет место оценка

$$\partial_t V(x,t)+LV(x,t)\leq K(t)+H(t)V(x,t).$$

Тогда существует неотрицательная функция $W\in C^{2,1}(D\times(0,T))\bigcap C(D\times[0,T))$ такая, что для каждого отрезка $[\alpha,\beta]\in(0,T)$

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{D_k\setminus D_{k-1}\times[\alpha,\beta]}W(x,t)=+\infty,$$

выполнено $\partial_t W(x,t)+LW(x,t)\leq K(t)+H(t)W$ и $W(x,0)\in L^1(\nu)$.

Доказательство. Построим неотрицательную функцию $\theta\in C^2(\mathbb{R})$ со свойствами:

$$\theta(0)=0,\quad \lim_{r\to\infty}\theta(r)=+\infty,\quad 0\leq\theta'(r)\leq 1,\quad \theta''(r)\leq 0,\quad \theta(V(\,\cdot\,,0))\in L^1(\nu).$$

Для этого достаточно найти функцию θ с перечисленными свойствами и интегрируемую по мере $\sigma=\nu\circ V^{-1}(\,\cdot\,,0)$. Рассмотрим возрастающую последовательность чисел z_k такую, что $z_{k+1}-z_k\geq z_k-z_{k-1}\geq 1$ и $\sigma([z_k,\infty))\leq 2^{-k}$. Пусть θ_0 линейна на каждом отрезке $[z_k,z_{k+1}]$ и $\theta_0(z_k)=k-1$. Получили σ-интегрируемую возрастающую вогнутую функцию θ_0. Однако это не функция класса C^2. Чтобы исправить это, возьмем в качестве θ функцию

$$\theta(z)=\int_0^z g(s)ds,\quad g\in C^1(\mathbb{R}),$$

где $g'(z)\leq 0$ и $g(z)=\theta_0'(z)$ для $z\in(z_k,z_{k+1}-k^{-1})$. Далее, учитывая вогнутость θ и неположительность c, получаем

$$\partial_t\theta(V)+L\theta(V)=\theta'(V)\big(\partial_t V+LV\big)+\theta''(V)(A\nabla V,\nabla V)+c\big(\theta(V)-\theta'(V)V\big)\leq K+H\theta(V).$$

Функция $W:=\theta(V)$ искомая. □

2.2 Единственность решения

В этом разделе приводится теорема единственности и теорема существования и единственности решения задачи Коши (2.1). Обобщаются результаты работ [34, 71, 72]. Отметим, что примеры неединственности приводятся [34]. В частности, при $d=4$ и

$(a^{ij}) = \mathrm{I}$ существует гладкое векторное поле b на $\mathbb{R}^d$, не зависящее от t, такое, что задача (2.1) с $c = 0$ и некоторой вероятностной мерой ν имеет два различных решения, заданных вероятностными мерами. Подобные примеры могут быть построены в любой размерности $d \geq 3$, но неясно, существуют ли они при $d = 1$ и $d = 2$. Более того, при $d = 4$ неясно, может ли этот эффект иметь место с дираковскими начальными данными. Другой пример неединственности может быть построен при $d = 1$, если опустить условие (2.2), т.е. если рассматривать не только субвероятностные меры. Например, достаточно взять $d = 1$, $a = 1$ и $b(x) = -2x(1+x^2)^{-1} - (1+x^2)\mathrm{arctg}\, x$. Тогда $(x, b(x)) \leq 0$ и задача Коши (2.1) с $\nu = (\pi(1+x^2))^{-1}\, dx$ имеет вероятностное решение. Но существует еще и решение, заданное плотностью $e^t(\pi(1+x^2))^{-1}$.

Далее считаем, что матрица $A(x,t) = (a^{ij}(x,t))_{1\leq i,j\leq d}$ симметрична и выполнено условие

(D1) для каждого $D_k \subset D$ существуют строго положительные числа m_k и M_k такие, что оценка

$$m_k|y|^2 \leq (A(x,t)y, y) \leq M_k|y|^2$$

выполнена для всех $y \in \mathbb{R}^d$ и всех $(x,t) \in D \times (0,T)$.

Предположим, что кроме (D1) выполнено также условие

(D2) для каждого индекса k существует константа $\Lambda_k > 0$ такая, что

$$|a^{ij}(x,t) - a^{ij}(y,t)| \leq \Lambda_k |x - y|$$

для всех $x, y \in D_k$ и $t \in [0,T]$.

Напомним некоторые факты из [31]. Условие (D1) гарантирует существование у решения μ плотности ϱ относительно меры Лебега. Более того, если кроме (D1) и (D2) мы знаем, что $b \in L^p_{loc}(D \times (0,T))$ и $c \in L^{p/2}_{loc}(D \times (0,T))$ для некоторого $p > d+2$, то можно выбрать непрерывную на $D \times (0,T)$ версию ϱ и для п.в. $t \in (0,T)$ функция $\varrho(\,\cdot\,, t)$ принадлежит $W^{1,p}(U)$ для каждого замкнутого шара $U \subset D$. Поскольку для п.в. $t \in (0,T)$ мера $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\, dx$ – субвероятностная на D, в силу неравенства Харнака для каждого для каждого замкнутого шара U в D и каждого отрезка $J \subset (0,T)$ сществует константа $C > 0$ такая, что $\varrho(x,t) \geq C$ для всех $(x,t) \in U \times J$.

Далее в этом разделе мы предполагаем, что коэффициенты b и c локально интегрируемы по Лебегу на $D \times (0,T)$ в степенях p и $p/2$ соответственно для некоторого показателя $p > d+2$, а также, что условия (D1) и (D2) выполнены. Везде далее мы работаем с непрерывной версией плотности ϱ.

Более того, мы рассматриваем только решения из класса $\mathbb{M}_\nu$ мер $\mu \in \mathcal{M}_\nu$, удовлетворяющих условию

$$b \in L^2(\mu, D_k \times [0,T]) \quad \forall D_k.$$

Например, это условие выполнено для всех мер класса $\mathcal{M}_\nu$, если снос ограничен на $D_k \times [0,T]$ или в случае $b \in L^s(D_k \times [0,T])$ и $\mu = \varrho\, dx\, dt$ с $\varrho \in L^r(D_k \times [0,T])$, где $2/s + 1/r = 1$.

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 2.5. *Предположим, что выполнены условия* (D1) *и* (D2) *и*

$$b \in L^p_{loc}(D \times (0,T)), \quad c \in L^{p/2}_{loc}(D \times (0,T))$$

для некоторого показателя $p > d+2$. Предположим также, что существует функция V такая, что $V \in C^2(D)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{D_k\setminus D_{k-1}} V(x) = +\infty.$$

Предположим, что для некоторого числа $K > 0$ и всех $(x,t) \in D\times(0,T)$ выполнено неравенство

$$LV(x,t) \le K + KV(x).$$

Тогда множество $\mathbb{M}_\nu$ состоит не более, чем из одного элемента.

Следующие две технические леммы, необходимые для доказательства, были доказаны С.В. Шапошниковым в [64]:

Лемма 2.1. *Пусть два решения задачи Коши (2.1) из класса $\mathbb{M}_\nu$ заданы непрерывными строго положительными плотностями σ и ϱ относительно меры Лебега. Положим $v(x,t) = \sigma(x,t)/\varrho(x,t)$. Предположим, что для п.в. $t \in (0,T)$ имеют место оценки*

$$\int_D \varrho(x,t)\,dx = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\varrho(x,s)\,dx\,ds$$

и

$$\int_D \sigma(x,t)\,dx \le \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\sigma(x,s)\,dx\,ds.$$

Предположим также, что для каждого $\lambda > 0$ для п.в. $t \in (0,T)$

$$\int_D e^{\lambda(1-v(x,t))}\varrho(x,t)\,dx \le 1. \tag{2.9}$$

Тогда $v \equiv 1$, т.е., $\sigma = \varrho$.

Лемма 2.2. *Пусть $\psi \in C_0^\infty(D)$, $\psi \ge 0$ и $0 < t < T$. Тогда для $f = e^{\lambda(1-z)}$ или $e^{\lambda(1-z)} - e^\lambda$ имеет место оценка*

$$\int_D f(v(x,t))\varrho(x,t)\psi(x)\,dx \le f(1)\int_D \psi(x)\,d\nu + \int_0^t \int_D \varrho f(v) L\psi\,dx\,ds. \tag{2.10}$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.5.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения из $\mathbb{M}_\nu$, заданные плотностями σ и ϱ относительно меры Лебега. В соответствии с Теоремой 2.4, тождество (2.7) имеет место для обеих мер. Положим $v = \sigma/\varrho$ и рассмотрим функцию $\psi(x) = \zeta(N^{-1}V(x))$ для неотрицательной функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такой, что $\zeta(0) = 1$, $\zeta(z) = 0$ при $|z| > 1$, $0 \le \zeta \le 1$ и, более того, $\zeta'(z) \le 0$ и $\zeta''(z) \ge 0$ при $z > 0$.

Положим $f(z) = e^{\lambda(1-z)} - e^\lambda$. Тогда $f(z) \le 0$ и $|f(z)| \le 2e^\lambda$ при $z \ge 0$. Заметим, что

$$f(v)\zeta' LV \le (K+KV)f(v)\zeta',$$

поскольку $f(v)\zeta' \geq 0$. Используя оценки (2.10) из леммы 2.2, получим

$$\int_D (e^{\lambda(1-v(x,t))} - e^{\lambda})\varrho(x,t)\zeta(N^{-1}V(x))\,dx \leq (1-e^{\lambda})\int_D \zeta(N^{-1}V(x))\,d\nu +$$
$$+2e^{\lambda}MN^{-1}\int_0^t\int_{V<N}(K+KV)\varrho\,dx\,ds + \int_0^t\int_D \zeta(N^{-1}V(x))f(v(x,s))c(x,s)\varrho(x,s)\,dx\,ds.$$

Заметим, что

$$\lim_{N\to+\infty} N^{-1}\int_0^t\int_{V<N}(K+KV)\varrho\,dx\,ds = 0. \tag{2.11}$$

Действительно, возьмем $\gamma \in (0,1)$ и $N > \gamma^{-1}$. Тогда

$$N^{-1}\int_0^t\int_{V<N}(K+KV)\varrho\,dx\,ds \leq \gamma\int_0^t\int_{V<\gamma N}\varrho\,dx\,ds + K\int_0^t\int_{\gamma N<V<N}\varrho\,dx\,ds.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{N\to+\infty} N^{-1}\int_0^t\int_{V<N}(K+KV)\varrho\,dx\,ds \leq \gamma\int_0^t\int_D \varrho\,dx\,ds.$$

Устремляя $\gamma \to 0$, получим (2.11). Поэтому, устремляя $N \to +\infty$, получим

$$\int_D (e^{\lambda(1-v(x,t))} - e^{\lambda})\varrho(x,t)\,dx \leq (1-e^{\lambda})\int_D d\nu + \int_0^t\int_D (e^{\lambda(1-v)} - e^{\lambda})c(x,s)\varrho(x,s)\,dx\,ds.$$

Поскольку $c \leq 0$ и для п.в. $t \in (0,T)$ выполнено тождество

$$\int_D \varrho(x,t)\,dx = \nu(D) + \int_0^t\int_D c(x,s)\varrho(x,s)\,dx\,ds,$$

для п.в. t имеем

$$\int_D e^{\lambda(1-v(x,t))}\varrho(x,t)\,dx \leq 1.$$

Применение леммы 2.1 завершает доказательство. □

Комбинация теоремы 2.2 и теоремы 2.5 дает следующее достаточное условие существования и единственности решения:

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия* (D1) *и* (D2)*, а также*

$$c \in L^{p/2}_{loc}(D\times(0,T)), \quad b \in L^{\infty}(D_k\times[0,T])$$

для некоторого показателя $p > d+2$ *и всех* k. *Предположим, что существует функция* $V \in C^2(D)$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{D_k\setminus D_{k-1}} V(x) = +\infty$$

и для некоторой константы $K > 0$ *и всех* $(x,t) \in D\times(0,T)$ *имеет место*

$$LV(x,t) \leq K + KV(x).$$

Тогда класс $\mathcal{M}_\nu$, где ν есть вероятностная мера на D, состоит в точности из одного элемента $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,T)}$. Более того, для п.в. t выполнено тождество

$$\mu_t(D) = \nu(D) + \int_0^t \int_D c(x,s)\,d\mu_s\,ds.$$

В частности, если $c = 0$, меры μ_t вероятностные для п.в. t.

Замечание 2.2. Пусть $c = 0$, $a^{ij}, b^i \in C(D)$, и пусть $\det A > 0$. Предположим, что существует функция $V \in C^2(D)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{D_n\setminus D_{n-1}} V(x) = +\infty.$$

Предположим, что для некоторого числа $K > 0$ и индекса n имеет место оценка $LV(x) \le -KV$ для всех $x \in D \setminus D_n$. Тогда для любой вероятностной меры ν существует единственное решение $\mu = (\mu_t)_{t\in(0,+\infty)}$ задачи Коши (2.1), заданное вероятностными мерами μ_t. Более того, решение эргодично в следующем смысле: меры

$$\sigma_t(dx) = t^{-1}\int_0^t \mu_s(dx)\,ds$$

слабо сходятся при $t \to +\infty$ к вероятностному решению μ стационарного уравнения $L^*\mu = 0$ в D.

Существование и единственность решения при $(0, +\infty)$ следуют из теоремы 2.6. Решение вероятностное, поскольку $c = 0$ и существует функция Ляпунова. Повторяя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2.4, и применяя неравенство Гронуолла, получим

$$\int_D V\,d\sigma_t = t^{-1}\int_0^t \int_D V\,d\mu_s\,ds \le K_1,$$

где K_1 не зависит от t. Значит, семество мер $\{\sigma_t\}$ равномерно плотно и каждая подпоследовательность $\{\sigma_{t_n}\}$ содержит дальнейшую подпоследовательность, которая слабо сходится к мере σ. Очевидно, что σ удовлетворяет уравнению $L^*\sigma = 0$. Из единственности вероятностного решения следует, что вся подпоследовательность σ_{t_n} сходится к единственному решению (единственность для стационарного уранвения следует из существования функции Ляпунова и для произвольной области D обосновывается аналогично результату [33] для $D = \mathbb{R}^d$) .

2.3 Примеры

В заключение главы рассмотрим некоторые примеры. Начнем с примера из статьи [50], который во многом мотивировал исследование рассматриваемой задачи.

Пример 2.1. Пусть ν — вероятностная мера на $D = (-1, 1)$. Для данного $\alpha > 0$ рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\partial_{xx}\left(\left|1-|x|\right|^{2\alpha}\mu\right) - \partial_x\left(\left(\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{sign} x\right)\mu\right), \quad \mu_0 = \nu. \tag{2.12}$$

Заметим, что коэффициенты этого уравнения довольно нерегулярны. Снос имеет разрывы в точках $x = 0$, $x = 2k + 1$. Более того, при $\alpha > 1/2$ коэффициент диффузии имеет более, чем линейный рост, а при $\alpha < 1/2$ не является гёльдеровским с показателем $1/2$.

Покажем, что задача Коши (2.12) имеет единственное вероятностное решение $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ в области $D = (-1, 1)$ для всех $T > 0$.

Введем исчерпание области D множествами $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$D_k = \left(-1 + 2^{-k},\, 1 - 2^{-k}\right).$$

Заметим, что коэффициент диффузии невырожден на каждом цилиндре $D_k \times [0, T]$, а также выполнены условия локальной регулярности теоремы 2.6. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{2 - x^2}{1 - x^2}.$$

Покажем, что условия теоремы 2.6 выполнены для этой функции Ляпунова.

1) $V \in C^2(D)$, $V > 0$ в D и

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{D_k\setminus D_{k-1}} V(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{2 - \left(1 - 2^{-k}\right)^2}{1 - \left(1 - 2^{-k}\right)^2} = +\infty.$$

2) Оценка

$$LV(x) = 2^{-1}\big|1 - |x|\big|^{2\alpha} V''(x) + \big(\mathrm{tg}(-\pi x/2) + \mathrm{sgn}x\big)V'(x) \le K_1 \cdot V(x)$$

верна для некоторой константы $K_1 > 0$ и

$$\lim_{|x|\to 1} \frac{LV(x)}{V(x)} = -\infty. \tag{2.13}$$

Поэтом можно применить теорему 2.6 и получить, что задача (2.12) имеет единственное субвероятностное решение. Далее, поскольку $c = 0$, то для п.в. $t \in [0, T]$ меры μ_t вероятностные.

Более того, решение эргодическое в указанном выше смысле. Действительно, в силу (2.13) существует положительная константа K_2 и индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что на $D\setminus D_k$ выполнено $LV \le -K_2 \cdot V$. Согласно замечанию 2.2, это неравенство гарантирует слабую сходимость мер

$$\sigma_t = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_s ds \quad as \quad t \to +\infty$$

к вероятностному решению стационарного уравнения $L^*\sigma = 0$ в D.

Пример 2.2. Пусть ν – вероятностная мера на $D = \mathbb{R}^d$. Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t\mu_t = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\mu) - \partial_{x_i}(b^i\mu) + c\mu, \quad \mu|_{t=0} = \nu.$$

Предположим, что выполнены условия (D1) и (D2) и

$$c \in L^{p/2}_{loc}(\mathbb{R}^d \times (0,T)), \quad b \in L^\infty(B(0,k) \times [0,T])$$

для некоторого показателя $p > d+2$ и всех k, где $B(0,k)$ есть шар радиуса k с центром в начале координат. Положим $V(x) = |x|^2/2$. Тогда условие $LV \leq K + KV$ примет вид

$$\mathrm{tr}A(x,t) + (b(x,t),x) + |x|^2 c(x,t)/2 \leq K + K|x|^2$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$. Если это неравенство выполнено, то множество $\mathcal{M}_\nu$ состоит в точности из одного элемента.

Полученные результаты полезны и для рассмотрения уравнений, заданных на всем пространстве, но с сингулярными коэффициентами. Это можно проиллюстрировать на серии примеров, появляющихся при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений, возникающих из теории случайных точечных полей Эйри (Airy random point fields) [68]:

Пример 2.3. Рассмотрим следующие модели:

- конечномерная модель Дайсона (Dyson's model) для n частиц:

$$dX^i_t = dW^i_t + \frac{\beta}{2}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{X^i_t - X^j_t} dt - \frac{\beta}{4n} X^i_t dt, \quad 1 \leq i \leq n;$$

- формальная проекция на $\mathbb{R}^n$ бесконечномерной модели Дайсона:

$$dX^i_t = dW^i_t + \frac{\beta}{2}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{X^i_t - X^j_t} dt, \quad 1 \leq i \leq n;$$

- soft-edge scaling n-частичной динамики

$$dX^i_t = dW^i_t + \frac{\beta}{2}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{X^i_t - X^j_t} dt - \frac{\beta}{2}\left\{ n^{1/3} + \frac{1}{2n^{1/3}} X^i_t \right\} dt, \quad 1 \leq i \leq n;$$

здесь W^i_t – независимые стандартные одномерные винеровские процессы. Рассмотрим случай $\beta = 1$. Тогда этим стохастическим уравнениям соответствуют следующие уравнения ФПК для вероятностных мер μ_t на $\mathbb{R}^n$:

- конечномерная модель Дайсона:

$$\partial_t \mu_t = \frac{1}{2}\Delta \mu_t - \frac{1}{2}\partial_i \left(b_1(x)\mu_t \right), \ b^i_1 = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} - \frac{1}{2n} x_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

- формальная проекция на $\mathbb{R}^n$ бесконечномерной модели Дайсона:

$$\partial_t \mu_t = \frac{1}{2}\Delta \mu_t - \frac{1}{2}\partial_i \left(b_2(x)\mu_t \right), \ b^i_2 = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad 1 \leq i \leq n;$$

- soft-edge scaling n-частичной динамики:

$$\partial_t \mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t - \frac{1}{2}\partial_i \left(b_3(x)\mu_t\right), \ b_3^i = \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \right\} - n^{1/3} + \frac{1}{2n^{1/3}} x_i, \, 1 \leq i \leq n.$$

Рассмотрим эти задачи на открытом множестве $D := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i,j=1,i<j}^{n} \{x_i = x_j\}$. Тогда функция

$$V(x) := -\sum_{i,j=1, i<j}^{n} \log |x_i - x_j|^2$$

есть функция Ляпунова для всех приведенных задач. Действительно, если положить $L_j = \dfrac{\Delta}{2} + \langle b_j, \nabla \rangle$, где $b_j = \left(b_j^1, \dots, b_j^n\right)$, то прямое вычисление дает $L_1 V = (n-1)/4$, $L_2 V = 0$ и $L_3 V = (n-1) \cdot n^{2/3}/2$. Таким образом, применяя теорему 2.6, получим, что все указанные задачи имею единственное субвероятностное решение. Более того, поскольку $c = 0$, то для п.в. $t \in [0, T]$ мера μ_t является вероятностной.

Глава 3

Уравнения в гильбертовом пространстве

3.1 Разрешимость нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве

В данной главе исследуется разрешимость задачи Коши для нелинейного уравнения ФПК для вероятностных мер на сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\partial_t\mu_t = \partial^2_{e_ie_j}(a^{ij}(\mu, x, t)\mu_t) - \partial_{e_i}(b^i(\mu, x, t)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{3.1}$$

где ν – борелевская вероятностная мера на H. Как и в предыдущих главах, везде предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

В типичных примерах коэффициент сноса в уравнениях (3.1) имеет следующую структуру:

$$b^i(\mu, x, t) = -\lambda_i x_i + \Phi_i(\mu, x, t), \qquad a^{ij}(\mu, x, t) = \beta^j\delta^{ij},$$

где δ^{ij} – дельта-символ Кронекера. Эта структура соответствует уравнению Колмогорова для нелинейных стохастических уравнений с частными производными (SPDE)

$$dX_t = \sqrt{2}dw_t + \Big(\Lambda X_t + \Phi(\mu, X_t, t)\Big)dt,$$

где Λ – некоторый самосопряженный отрицательный оператор с собственным ортонормированным базисом $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ и собственными значениями $\{-\lambda_j\}$; w_t – винеровский процесс в H вида $w_t = \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\beta_j}\zeta_t^j e_j$, где $\{\zeta_t^j\}$, $j \in \mathbb{N}$ есть независимые одномерные стандартные винеровские процессы, а ряд сходится в среднеквадратичном. Для простоты мы считаем, что собственный базисы Λ и w_t совпадают. Это предположение облегчает доказательство с технической точки зрения, но его можно опустить. Аналогично конечномерному случаю, переходные плотности решений SPDE удовлетворяют соответствующему уравнению ФПК [40, 14.2.2].

Бесконечномерные уравнения ФПК изучены гораздо меньше, чем их конечномерные аналоги, хотя они тоже очень важны, особенно в свете растущего интереса к SPDE. Однако мало что известно о разрешимости задачи Коши (3.1) в общей постановке (линейный случай рассмотрен в [36], см. также библиографические ссылки в этой работе). Отметим работу [30], где доказано существование решений уравнений с нулевой матрицей диффузии A и некоторыми ограничениями на рост коэффициента сноса b. Работа [24] посвящена градиентной структуре уравнений определенного вида.

В данной главе приводятся достаточные условия существования и единственности решений нелинейного уравнения (3.1) в пространстве вероятностных мер на сепарабельном гильбертовом пространстве H в довольно общей ситуации. Эти результаты оказываются сильнее указанных выше. Более того, ранее не было известно результатов о единственности вероятностного решения для нелинейных уравнений общего вида в бесконечномерных пространствах. Для доказательства единственности используются методы, близкие к методу Гольмгрена (см. [36, 61, 67]), но используемые в бесконечномерном случае для нелинейных уравнений.

Данная глава состоит из 2 разделов. Первый посвящен доказательству единственности вероятностного решения в двух принципиально различных ситуациях – диффузия может вырождаться и диффузия “цилиндрическая” (с бесконечным следом). Термин "цилиндрическая диффузия"указывает на то, что соответствующий винеровский процесс цилиндрический, в частности, принимает значения в более широком пространстве. Раздел 2 посвящен существованию локального и глобального решений задачи Коши для нелинейных уравнений. В конце этого раздела также приведена теорема существования и единственности вероятностных решений для уравнений определенного вида. Результаты этой главы содержатся в работе [62].

Перейдем к определениям. Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (порождающим норму $|\cdot|$) и пусть $\{e_j\},\ j\in\mathbb{N}$ – ортонормированный базис H. Через P_N обозначим оператор ортогонального проектирования пространства H на $H_N=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_N\}\simeq\mathbb{R}^N$. Для любого вектора $c\in H$ через c_N обозначим ортогональную проекцию c на $\mathbb{R}^N$,, т.е. $c_N=P_Nc$. Для данного $x\in H$ и $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots),\ \alpha_j>0$, положим $\|x\|_\alpha^2:=\sum_{j=1}^\infty\alpha_j\langle x,e_j\rangle^2$.

Введем класс пробных функций $\mathcal{FC}_0^\infty(H)$, состоящий в точности из функций вида $\varphi(x)=\varphi_0(x_1,\dots,x_d)$, где $\varphi_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $x_j=\langle x,e_j\rangle$.

Пусть $\mathcal{P}_1(H)$ и $\mathcal{P}_2(H)$ – множества вероятностных мер на H с конечным первым и вторым моментом соответственно. Нам понадобятся следующие две метрики на пространстве мер. Полной вариацией конечной радоновской (возможно, знакопеременной) меры ρ на H называется величина

$$\|\rho\|_{TV}:=\sup\Big\{\Big|\int f(x)\rho(dx)\Big|:\ f\in\mathcal{FC}_0^\infty(H),\ |f|\le 1\Big\}. \tag{3.2}$$

Метрика Канторовича W_1 определяется на пространстве $\mathcal{P}_1(H)$ равенством

$$W_1(\mu,\sigma):=\sup\Big\{\int f(x)(\mu-\sigma)(dx):\ f\in\mathcal{FC}_0^\infty(H),\ |\nabla f|\le 1\Big\}. \tag{3.3}$$

Обычно W_1 определяется как супремум интегралов от Lip_1-функций; однако интеграл от Lip_1-функции по мере из $\mathcal{P}_1(H)$ приближается интегралами от проекции этой функции, поэтому можно брать супремум по меньшему множеству функций $\mathcal{FC}_0^\infty(H)\cap\mathrm{Lip}_1$.

Как и в конечномерном случае, мера μ на $H \times [0,T]$ задается семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ на H (будем обозначать $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$), если $\mu(dx\,dt) = \mu_t(dx)dt$, т.е.

$$\int_{H\times[0,T]} f\,d\mu = \int_0^T \int_H f\,d\mu_t\,dt.$$

Для заданной непрерывной неотрицательной функции V на H и числа $T > 0$ положим

$$M_T(V) := \Big\{\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]} \colon \sup_{t\in[0,T]} \int V(x)d\mu_t(x) < +\infty\Big\}.$$

Пусть заданы два счетных множества борелевских по (x,t) отображений

$$a^{ij}(\mu,x,t)\colon\ M_{T_0}(V) \times H \times [0,T_0] \to \mathbb{R}, \quad b^i(\mu,x,t)\colon\ M_{T_0}(V) \times H \times [0,T_0] \to \mathbb{R},\ i,j \in \mathbb{N},$$

и вероятностная мера ν на H; для них рассмотрим задачу Коши (3.1). Положим

$$L_\mu\psi := \sum_{i,j=1}^{\infty} a^{ij}(\mu,x,t)\partial^2_{e_ie_j}\psi + \sum_{i=1}^{\infty} b^i(\mu,x,t)\partial_{e_i}\psi.$$

Будем говорить, что $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ есть вероятностное решение задачи Коши (3.1), если μ_t – вероятностные меры, $\mu \in M_{T_0}(V)$ и для всех $t \in [0,T_0]$ и $\varphi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$ выполнено

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu\varphi d\mu_s ds. \tag{3.4}$$

Здесь мы считаем, что по определению $a^{ij}, b^i \in L^1(H \times [0,T_0], d\mu)$ для всех $i,j \in \mathbb{N}$, т.е. интеграл в правой части тождества корректно определен.

Иногда более удобным оказывается следующее эквивалентное определение: пусть пробная функция v зависит от конечного набора переменных $x_1,\ldots,x_k$, равна нулю вне некоторого шара в $H_k \cong \mathbb{R}^k$ и $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^k \times (0,T_0)) \bigcap C(\mathbb{R}^k \times [0,T_0))$. Тогда для всех $t \in [0,T_0]$ выполнено

$$\int v(x,t)\,d\mu_t = \int v(x,0)\,d\nu + \int_0^t \int \big[\partial_s v + L_\mu v\big]\,d\mu_s\,ds. \tag{3.5}$$

Будем говорить, что мера $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ есть локальное решение задачи (3.1), если выполнено (3.4) и условия регулярности с τ вместо T_0.

3.1.1 Единственность вероятностного решения

Начнем с установления условий единственности вероятностного решения задачи Коши

$$\partial_t\mu_t = \beta^j\partial_{jj}\mu_t - \partial_j(b^j(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_t|_{t=0} = \mu_0 \tag{3.6}$$

с постоянным диагональным диффузионным оператором $A = \mathrm{diag}(\beta^j)_{j=1}^\infty$ с $\beta^j \geq 0$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ положим $A_N = \mathrm{diag}(\beta^j)_{j=1}^N$. В данном разделе будем считать, что снос имеет следующую структуру:

$$b^i(\mu,x,t) = -\lambda_i x_i + \Phi_i(\mu,x,t), \quad \lambda_i \geq 0. \tag{3.7}$$

В этом разделе получены достаточные условия единственности вероятностного решения задачи (3.6) в двух принципиально различных случаях: диффузионный оператор A может вырождаться или он цилиндрический, т.е. $\beta^j \geq \beta_0 > 0$. Название второго случая соответствует цилиндрическому винеровскому процессу, т.е. процессу с единичным диффузионным оператором или с оператором, имеющим бесконечный след.

Начнем с первого случая. Пусть фиксирована некоторая положительная функция $V \in C^2(H)$. Предположим, что

(F0) $A(x,t) = \mathrm{diag}\{\beta^j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \beta^j \geq 0.$

В частности, этот случай включает полностью или частично вырожденные операторы с $\beta^j = 0$.

Далее мы будем рассматривать только решения задачи (3.6) из класса $\mathcal{K}_1$ мер $\mu = \mu_t dt \in M_T(V)$ с $\mu_t \in \mathcal{P}_1(H)$, такие, что

(F1) для каждого $\varepsilon > 0$, $d \in \mathbb{N}$ и каждой меры $\mu \in \mathcal{K}_1$ существует $N \geq d$ и функция $\Phi_{\mu,N} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T_0])$ такая, что $\Phi_{\mu,N} \in L^1(H, \mu+\sigma)$ для всякой $\sigma \in \mathcal{K}_1$ и

$$\int_0^T \int_H |\Phi_N(x,t,\mu) - \Phi_{\mu,N}(P_N x,t)|(\mu_t + \sigma_t)(dx)dt < \varepsilon, \tag{3.8}$$

а также

$$\sup_{x\in H} |\Phi_{\mu,N}(\mu,x,t)| \cdot (1+|x|)^{-1} \leq C_N(\mu) < \infty. \tag{3.9}$$

(F2) Для каждого решения $\mu \in \mathcal{K}_1$ существует константа $\theta = \theta(\mu)$ такая, что

$$\langle \Phi_{\mu,N}(\mu,x,t) - \Phi_{\mu,N}(\mu,y,t), x-y\rangle \leq \theta|x-y|^2 + \|x-y\|^2_{\lambda_N} \tag{3.10}$$

для всех $x, y \in H$ и $t \in [0,T_0]$.

(F3) существует непрерывная возрастающая функция G на $[0,+\infty)$ такая, что $G(0) = 0$ и

$$|\Phi(\mu,x,t) - \Phi(\sigma,x,t)| \leq V(x) G(W_1(\mu_t,\sigma_t)) \tag{3.11}$$

для всех $(x,t) \in H \times [0,T_0]$ и $\mu, \sigma \in \mathcal{K}_1$.

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнены условия* (F0), (F1), (F2), (F3). *Пусть* $\mu_0 \in \mathcal{P}_1(H)$, $V \in L^1(\mu_0)$ *и* G *есть функция Осгуда, т.е.*

$$\int_{0+} \frac{du}{G(u)} = +\infty.$$

Тогда существует не более одного решения задачи Коши (3.6) в классе $\mathcal{K}_1$. *Кроме того, для любых двух решений* $(\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ *и* $(\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$ *из класса* $\mathcal{K}_1$ *выполнено*

$$W_1(\mu_t,\sigma_t) \leq F^{-1}\Big(F(2e^{2\theta T_0} W_1(\mu_0,\sigma_0)) - Ct\Big),$$

где F^{-1} *– обратная к* $F(v) := \int_v^1 G(u)^{-1} du$ *функция. В частности, если* $G(u) = u$,

$$W_1(\mu_t,\sigma_t) \leq 2e^{2\theta T_0} W_1(\mu_0,\sigma_0) e^{Ct}.$$

Пример 3.1. Рассмотрим

$$b^i = -\lambda_i x_i + f^i(x)\int \varphi(y)d\mu_t(y).$$

Предположим, что существует последовательность ограниченных гладких функций $f_n(x,t)$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,t) = f(x,t)$ для всех x,t, а также существуют константы $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от n, такие, что

$$|f_n(x,t)| \le C_1(1+|x|), \quad \langle f_n(x,t) - f_n(y,t), x-y\rangle \le C_2|x-y|^2.$$

Предположим также, что $|\varphi(x)| \le C_2(1+|x|)$ и $\mu_0 \in \mathcal{P}_1(H)$. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем, что выполнены условия теоремы 3.1 с $V(x) = 1+|x|$. Значит, задача (3.6) имеет не более одного решения в классе $M_{T_0}(|x|)$.

Доказательство Теоремы 3.1. Рассмотрим решения $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ и $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$ задачи (3.6) из класса $\mathcal{K}_1$ с начальными условиями $\mu_0 \in \mathcal{P}_1(H)$ и $\sigma_0 \in \mathcal{P}_1(H)$ соответственно. Пусть $V \in L^1(\mu_0+\sigma_0)$. Зафиксируем такую функцию $\psi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$, что $|\nabla\psi(x)| \le 1$. Зафиксируем размерность d такую, что $\psi(x) = \psi_0(P_d x)$ (такая конечная размерность существует по определению $\mathcal{FC}_0^\infty(H)$).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу предположения (F1), существует гладкая конечномерная приближающая последовательность $\Phi_{\mu,N}$, $n \ge d$, такая, что выполнены (3.8) и (3.9). Положим

$$b_{\mu,N}(x,t) := (-\lambda_1 x_1, \ldots, -\lambda_N x_N) + \Phi_{\mu,N}(\mu,x,t), \quad Cl_N(\mu) = \max_{1\le i\le N}\lambda_i + C_N(\mu).$$

Возьмем функцию срезки $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ с $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2$; более того, предположим, что для некоторого $C > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $|\varphi''(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2 \le C\varphi(x)$. Для каждого $K \ge 1$ положим $\varphi_K(t,x) := \varphi(t/K)\cdot\varphi(|x/K|)$.

Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. "Сопряженная задача". Продолжим $b^i_{\mu,N}$ на все пространство $\mathbb{R}^{N+1}$ следующим образом: $b^i_{\mu,N}(x,t) = b^i_{\mu,N}(x,T_0)$ при $t > T_0$ и $b^i_{\mu,N}(x,t) = b^i_{\mu,N}(x,0)$ при $t < 0$. Рассмотрим задачу

$$\partial_s f + \tilde{L}f = 0, \quad f|_{s=t} = \psi, \quad \tilde{L}f := \sum_{j=1}^N \beta^j \partial^2_{x_j x_j} f + b^j_{\mu,N}\partial_{x_j} f \tag{3.12}$$

в $\mathbb{R}^N$. Эта задача допускает решение $f = f_N$ класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^N\times[0,t])$. Действительно, в силу [73], стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t^N = \sqrt{2\beta^j}dW_t^j + b_{\mu,N}(X_t^N)dt, \quad X_0^N = x$$

в $\mathbb{R}^N$ имеет решение $X_t^N, t \ge 0$ и тогда функция $f(x,s) = \mathbb{E}\Big(\psi(X_t^N)\Big|X_s^N = x\Big)$ удовлетворяет (3.12). Гладкость следует из [74, Теоремы 3.2.4, 3.2.6]. Очевидно, что

$$\sup|f| \le \max|\psi| =: C(\psi).$$

Шаг 2. Подставляя пробную функцию $v = \varphi_K f$ в тождество (3.5) для решений $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ и $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$, получим

$$\int \varphi_K(t,x)\psi(x)\,d\mu_t(x) = \int \varphi_K(0,x)f(0,x)\,d\mu_0 + \int_0^t \int \bigl[\varphi_K\langle B(\mu) - b_{\mu,N}, \nabla f\rangle \\ + 2\langle A\nabla\varphi_K, \nabla f\rangle_N + fL\varphi_K\bigr]\,d\mu_s\,ds,$$

$$\int \varphi_K(t,x)\psi(x)\,d\sigma_t(x) = \int \varphi_K(0,x)f(0,x)\,d\sigma_0 + \int_0^t \int \bigl[\varphi_K\langle B(\sigma) - b_{\mu,N}, \nabla f\rangle \\ + 2\langle A\nabla\varphi_K, \nabla f\rangle_N + fL\varphi_K\bigr]\,d\sigma_s\,ds.$$

Вычитая второе тождество из первого, приходим к

$$\int \varphi_K(t)\psi\,d(\mu_t - \sigma_t) \le \int_0^t \int \varphi_K|B(\mu) - b_{\mu,N}||\nabla f|\,d(\sigma_s + \mu_s)\,ds \\ + 2\int_0^t \int |A\nabla\varphi_K||\nabla f| + |f||L\varphi_K|d(\mu_s + \sigma_s)ds \\ + \int_0^t \int \varphi_K|B(\sigma) - B(\mu)||\nabla f|\,d\sigma_s\,ds + \Bigl(\int \varphi_K f\,d\mu_0 - \int \varphi_K f\,d\sigma_0\Bigr). \quad (3.13)$$

Шаг 3. Оценка ∇f. Получим оценку $|\nabla f|$. Для этого заметим, что (3.10) может быть записано как

$$\langle b_{\mu,N}(\mu,x,t) - b_{\mu,N}(\mu,y,t), x - y\rangle \le \theta|x - y|^2,$$

поэтому

$$\langle \mathcal{H}(x,t)y, y\rangle \le \theta(\mu)|y|^2, \qquad \text{где } \mathcal{H} = (\partial_{x_j} b^i_{\mu,N})_{i,j\le N}.$$

Положим $u = 2^{-1}\sum_{k=1}^N |\partial_{x_k} f|^2$. Дифференцируя уравнение (3.12) по x_k и умножая на $\partial_{x_k} f$, получим

$$\partial_t u + \tilde{L}u + \langle \mathcal{H}\nabla f, \nabla f\rangle - \sum_{k=1}^N \beta^j(\partial^2_{x_j x_k} f)^2 = 0.$$

Поскольку $\langle \mathcal{H}\nabla f, \nabla f\rangle \le 2\theta u$ и последнее слагаемое неотрицательно,

$$\partial_t u + \tilde{L}u + (2\theta)u \ge 0.$$

Тогда по принципу максимума (см. [74, Теорема 3.1.1]) $|u(x,s)| \le e^{2\theta(t-s)}|u(x,t)|$, т.е.

$$|\nabla f| = 2|u(x,s)| \le 2e^{2\theta(t-s)}|\nabla\phi^S(x)| \le 2e^{2\theta T_0} =: C_1. \quad (3.14)$$

Шаг 4. Предельные переходы при $K \to \infty$, $N \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Заметим, что $B(\mu) - B(\sigma) = \Phi(\mu) - \Phi(\sigma)$, $\quad B_N - b_{\mu,N} = \Phi_N - \Phi_{\mu,N}$ и

$$|L\varphi_K| = |\tilde{L}\varphi_K| + |\langle \Phi_N - \Phi_{\mu,N}, \nabla\varphi_K\rangle| \le |\tilde{L}\varphi_K| + C\cdot K^{-1}|\Phi_N - \Phi_{\mu,N}|.$$

Значит, из (3.13) и (3.14) следует, что

$$\int \psi\,d(\mu_t - \sigma_t) \le C_1\cdot\int_0^t \int |\Phi(\mu) - \Phi(\sigma)|\,d\sigma_s\,ds + R_{co} + R_{op} + R_{appr} + J_0(K,N), \quad (3.15)$$

где

$$R_{op} := C_2(\psi)\int_0^t\int |\tilde{L}\varphi_K|\, d(\mu_s+\sigma_s)\, ds,$$

$$R_{co} := 2C_1\int_0^t\int |A\nabla\varphi_K| d(\mu_s+\sigma_s)ds, \quad J_0(K,N)=\int\varphi_K f_N\, d\mu_0-\int\varphi_K f_N\, d\sigma_0,$$

$$R_{appr} := \big(C_1+C\cdot K^{-1}\big)\cdot\int_0^t\int|\Phi_N(\mu)-\Phi_{\mu,N}|\, d(\mu_s+\sigma_s)\, ds$$

Покажем, что слагаемые $R.$ малы. В силу (F1) имеем

$$|R_{appr}|\le (C_1+C)\Big(\int_0^t\int|\Phi_N(\mu)-\Phi_{\mu,N}|\, d(\mu_s+\sigma_s)\, ds\Big)\le C_3\varepsilon.$$

Оценим R_{op}. Заметим, что

$$\tilde{L}\varphi_K = K^{-1}\varphi'(|x|/K)\big\langle b_{\mu,N},\frac{x}{|x|}\big\rangle + K^{-2}\varphi''(|x|/K)|\mathrm{tr}A_N.$$

Это выражение отлично от нуля только на множестве $\gamma_K := \{x\colon\ K\le|x|\le 2K\}$. Поэтому для фиксированного N имеем

$$|\tilde{L}\varphi_K|\le C_2 I_K\Big(\frac{|b_{\mu,N}|}{1+|x|}+\frac{\mathrm{tr}A_N}{(1+|x|)^2}\Big)\overset{(F2)}{\le}(C_2\cdot Cl_N(\mu)+C_2\cdot\mathrm{tr}A_N)I_K,$$

где I_K – индикатор множества γ_K. Отсюда $R_{op}\le C_4(\psi,N)\cdot(\mu+\sigma)\{\gamma_K\times[0,t]\}$. Аналогично получаем, что $R_{co}\le C_5(N)\cdot(\mu+\sigma)\{\gamma_K\times[0,t]\}$. Очевидно $(\mu+\sigma)\{\gamma_K\times[0,t]\}$ стремится к нулю при $K\to\infty$. В силу (3.14) $f_N(x,0)\in \mathrm{Lip}_{C_1}$; значит, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$J_0(K,N)\to J_{0,N}=\int f_N\, d\mu_0-\int f_N\, d\sigma_0\quad\text{as}\quad K\to\infty.$$

Используя это и (3.11), для любых фиксированных ε, ψ и N перейдем в (3.15) к пределу при $K\to\infty$ и получим

$$\int\psi\, d(\mu_t-\sigma_t)\le C_1\int_0^t\int V(x)\cdot G(W_1(\mu_s,\sigma_s))d\sigma_s\, ds + C_3\varepsilon + J_{0,N}.$$

Перейдем к пределу при $N\to\infty$. По принципу максимума и теореме Арцела-Асколи (которая применима, т.к. $f_N\in\mathrm{Lip}_{C_1}$) получим, что последовательность $\{f_N(x,0)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся на всех компактах. В частности, при $N\to\infty$ имеет место поточечная сходимость $f_N(x,0)\to\tilde{f}(x)\in\mathrm{Lip}_{C_1}$. Поэтому

$$\int\psi\, d(\mu_t-\sigma_t)\le C_1\int_0^t\int V(x)\cdot G(W_1(\mu_s,\sigma_s))d\sigma_s\, ds + C_3\varepsilon + \int\tilde{f}\, d(\mu_0-\sigma_0). \tag{3.16}$$

Шаг 5. Итоговая оценка. Заметим, что

$$\int\tilde{f}(x)d(\mu_0-\sigma_0)\le C_1W_1(\mu_0,\sigma_0),$$

и, поскольку ε – произвольное положительное число, (3.16) влечет

$$\int \psi\, d(\mu_t - \sigma_t) \le C_1 \int_0^t G(W_1(\mu_s, \sigma_s))\Big(\int V(x) d\sigma_s\Big)\, ds + C_1 W_1(\mu_0, \sigma_0). \qquad (3.17)$$

Переходя к супремуму по $\psi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$ с $|\nabla\psi(x)| \le 1$, получаем

$$W_1(\mu_t, \sigma_t) \le C_1 W_1(\mu_0, \sigma_0) + C_1 \int_0^t G(W_1(\mu_s, \sigma_s))\Big(\int V(x) d\sigma_s\Big)\, ds.$$

Т.к. $\sigma \in M_T(V)$,

$$W_1(\mu_t, \sigma_t) \le C_1 W_1(\mu_0, \sigma_0) + C \int_0^t G(W_1(\mu_s, \sigma_s)) ds.$$

Если $W_1(\mu_0, \sigma_0) = 0$, то явное интегрирование влечет $W_1(\mu_t, \sigma_t) \equiv 0$. В общем случае по неравенству Гроноулла получим

$$W_1(\mu_t, \sigma_t) \le F^{-1}\Big(F(C_1 W_1(\mu_0, \sigma_0)) - Ct\Big),$$

где $F(v) = \int_v^1 G(u)^{-1} du$ и F^{-1} – обратная к F функция. Для завершения доказательства вспомним, что $C_1 = 2e^{2\theta T_0}$. $\square$

Перейдем к цилиндрическому случаю. Предположим, что

(T0) $\beta^j \ge \beta_0 > 0$.

Далее мы будем рассматривать только решения задачи Коши (3.6) в классе $\mathcal{K}_2$ мер $\mu = \mu_t dt \in M_T(V)$ с $\mu_t \in \mathcal{P}_2(H)$. Сформулируем условия на коэффициент сноса:

(T1) Для каждого решения $\mu \in \mathcal{K}_2$ имеем $\Phi(\mu, x, t) \in l^2$ для $\mu \times [0, T_0]$-п.в. (x, t) и $\|\Phi\|_{l^2} \in L^2(\mu)$.

(T2) Существует непрерывная возрастающая функция G на $[0, +\infty)$ такая, что $G(0) = 0$ и

$$|\Phi(\mu, x, t) - \Phi(\sigma, x, t)| \le \sqrt{V(x)} \cdot G(\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV}) \qquad (3.18)$$

для всех $(x, t) \in H \times [0, T]$ и всех решений $\mu, \sigma \in \mathcal{K}_2$.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия* (T0), (T1), (T2). *Если начальное условие $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(H)$, $\sqrt{V} \in L^1(\mu_0)$ и*

$$\int_{0+} \frac{du}{G^2(\sqrt{u})} = +\infty,$$

то существует не более одного решения задачи Коши (3.6) в классе $\mathcal{K}_2$. Кроме того, для любых двух решений $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ и $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$ из $\mathcal{K}_2$

$$\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \le F^{-1}\Big(F(\|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} - Ct\Big),$$

где F^{-1} – обратная к $F(v) = \displaystyle\int_v^1 G(\sqrt{u})^{-2} du$ функция. В частности, если $G(u) = u$, то

$$\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \le \|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} e^{Ct}.$$

Пример 3.2. Рассмотрим

$$b^i = -\lambda_i x_i + f^i(x)\int \varphi(y)d\mu_t(y), \quad \beta^j \geq \beta_0 > 0.$$

Предположим, что f растет не быстрее линейной функции и φ глобально ограничена. Предположим также, что $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(H)$. Тогда существует не более одного решения задачи (3.6) в классе $M_{T_0}(|x|^2)$.

Действительно,

$$\|\Phi\|_{l^2}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f^i|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mu_t+\sigma_t)} \leq C(1+|x|^2) < +\infty,$$

т.е. выполнено (T1), и

$$\Big|\int \varphi(y)d\mu_t(y) - \int \varphi(y)d\sigma_t(y)\Big| \leq C_1\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV},$$

т.е. выполнено также условие (T2).

Доказательство Теоремы 3.2. Рассмотрим решения $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T_0]}$ и $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T_0]}$ задачи (3.6) из класса $\mathcal{K}_2$ с начальными условиями μ_0 и σ_0 из $\mathcal{P}_2(H)$ соответственно. Предположим, что $\sqrt{V} \in L^1(\mu_0+\sigma_0)$. Зафиксируем такую функцию $\psi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$, что $|\psi| \leq 1$. Зафиксируем размерность d такую, что $\psi(x) = \psi_0(P_d x)$ (такая конечная размерность существует по определению $\mathcal{FC}_0^\infty(H)$).

Возьмем функцию срезки $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, для которой $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2$. Кроме того, предположим, что для некоторого $C > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $|\varphi''(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2 \leq C\varphi(x)$. Для каждого $K \geq 1$ положим $\varphi_K(t,x) := \varphi(t/K)\cdot\varphi(|x|/K)$.

Снова разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Конечномерная гладкая аппроксимация сноса. Если Φ удовлетворяет (T1), то для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $b_{\mu,N} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N \geq d$, такая, что

$$\int_0^{T_0}\int_H |B_N(x,t,\mu) - b_{\mu,N}(P_N x,t)|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt < \varepsilon^2$$

для всех решений μ, $\sigma \in \mathcal{K}_2$. Заметим, что достаточно проверить следующее: для каждого N существует гладкая ограниченная функция $\Phi_{\mu,N} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T_0])$, $N \geq d$ со свойством

$$\int_0^{T_0}\int_H |\Phi_N(x,t,\mu) - \Phi_{N,\mu}(P_N x,t)|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt < \varepsilon^2$$

для всех решений μ, $\sigma \in \mathcal{K}_2$. Для этого выберем $M \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\int_0^{T_0}\int |\Phi^k|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt \leq \varepsilon^2/2.$$

Далее, для каждого Φ^k существует гладкая ограниченная функция $\bar{\Phi}_k$, которая зависит только от первых n_k пространственных переменных и от t, такая, что

$$\int_0^{T_0}\int |\Phi^k - \bar{\Phi}_k|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt < \varepsilon^2(2M)^{-1}.$$

Для $k > M$ положим $\bar{\Phi}_k \equiv 0$. Положим

$$N = \max\{M, n_1, \dots, n_M\} \qquad \text{и} \qquad \Phi_{N,\mu} = (\bar{\Phi}_1, \dots \bar{\Phi}_N, 0, \dots).$$

Тогда

$$\int_0^{T_0}\int |\Phi_N(x,t,\mu) - \Phi_{N,\mu}(P_N x,t)|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt$$
$$\le \sum_{k=1}^{M}\int_0^{T_0}\int |\Phi^k - \Phi_{N,\mu}|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt + \sum_{k=M+1}^{\infty}\int_0^{T_0}\int |\Phi^k|^2(\mu_t+\sigma_t)(dx)dt < \varepsilon^2.$$

Поэтому $b_{\mu,N}(\mu,x,t) := (-\lambda_1 x_1, \dots, -\lambda_N x_N) + \Phi_{N,\mu}(\mu,x,t)$ есть искомая аппроксимирующая последовательность.

Шаг 2. "Сопряженная задача" Аналогично шагу 1 доказательства теоремы 3.1, продолжим $b^i_{\mu,N}$ до функции на всем пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$ следующим образом: $b^i_{\mu,N}(x,t) = b^i_{\mu,N}(x,T_0)$, если $t > T_0$, и $b^i_{\mu,N}(x,t) = b^i_{\mu,N}(x,0)$, если $t < 0$. Пусть $f = f_N$ – решение класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,t])$ (см. [74, Теорема 3.2.4, 3.2.6]) задачи Коши в $\mathbb{R}^N$ вида

$$\partial_s f + \tilde{L} f = 0, \quad f|_{s=t} = \psi, \quad \tilde{L} f := \sum_{j=1}^{N}\beta^j \partial^2_{x_j x_j} f + b^j_{\mu,N}\partial_{x_j} f.$$

По принципу максимума $\sup|f| \le \max|\psi| \le 1$.

Шаг 3. Аналогично доказательству Теоремы 3.1, подставим пробную функцию $\varphi_K \cdot f$ в тождество (3.5) для решений μ и σ, вычтем одно из другого:

$$\int \varphi_K(t,x)\psi(x)\,(\mu_t-\sigma_t)(dx) \le \int_0^t\int \varphi_K|B(\mu)-b_{\mu,N}|\cdot|\nabla f|\,d(\sigma_s+\mu_s)\,ds + \|\mu_0-\sigma_0\|_{TV}$$
$$+2\int_0^t\int\Big[|A\nabla\varphi_K|\cdot|\nabla f| + |f|\cdot|L\varphi_K|\Big]d(\mu_s+\sigma_s)ds + \int_0^t\int \varphi_K|B(\sigma)-B(\mu)||\nabla f|\,d\sigma_s\,ds.$$

Положим $I_f := \left(\int_0^t\int \varphi|\nabla f|^2 d\sigma_s ds\right)^{1/2}$. По неравенству Коши

$$\int \varphi_K\psi\,d(\mu_t-\sigma_t) \le \int_0^t\int \varphi\cdot|B(\mu)-B(\sigma)|\cdot|\nabla f|\,d\sigma_s\,ds + \|\mu_0-\sigma_0\|_{TV} + R_{co} + R_{op} + R_{appr}, \tag{3.19}$$

где

$$R_{op} := \int_0^t\int |\tilde{L}\varphi_K|\,d(\mu_s+\sigma_s)\,ds, \quad R_{co} := 2I_f\left(\int_0^t\int |A\nabla\varphi_K|^2 d(\mu_s+\sigma_s)ds\right)^{1/2},$$

$$R_{appr} := \Big(C\cdot K^{-1} + I_f\Big)\bigg(\int_0^t \int |B(\mu) - b_{\mu,N}|^2\, d(\mu_s + \sigma_s)\, ds\bigg)^{1/2}.$$

Шаг 4. Оценка I_f. Для того, чтобы оценить $\displaystyle\int_0^t \int \varphi|\nabla f|^2 d\sigma_s ds$, подставим пробную функцию $f^2\cdot\varphi_K$ в тождество (3.5) для решения σ:

$$\int \psi^2\varphi d\sigma_t - \int f^2(x,0)\varphi d\sigma_0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_s + L_\sigma)(f^2\varphi) d\sigma_s ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Big[2\varphi|\sqrt{A}\nabla f|^2 + 2\varphi f\langle b_{\mu,N} - B(\sigma), \nabla f\rangle + f^2 L_\sigma\varphi + 2f(A\nabla f, \nabla\varphi)\Big] d\sigma_s ds.$$

По принципу максимума

$$2\beta_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi|\nabla f|^2 d\sigma_s ds$$
$$\le 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi|\sqrt{A}\nabla f|^2 d\sigma_s ds \le 2 + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |b_{\mu,N} - B(\sigma)|\cdot|\nabla f| d\sigma_s ds + 2R_c,$$

где

$$R_c := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |L_\sigma\varphi|/2 + C_1(\psi)|A\nabla\varphi| d\sigma_s ds.$$

Используя неравенство $ab \le 2^{-1}\gamma a^2 + (2\gamma)^{-1}b^2$ с $\gamma = \beta_0^{-1}$, получим

$$2\beta_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\sigma_s ds \le 2 + \frac{1}{\beta_0}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |b_{\mu,N} - B(\sigma)|^2 d\sigma_s ds + \beta_0\int_0^t \int |\nabla f|^2 d\sigma_s ds + 2R_c,$$

т.е.

$$\beta_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\sigma_s ds \le 2 + \frac{1}{\beta_0}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |b_{\mu,N} - B(\sigma)|^2 d\sigma_s ds + 2R_c.$$

Подставляя эту оценку в (3.19) и применяя неравенство Коши, заключаем, что

$$\int \varphi_K\psi\, d(\mu_t - \sigma_t) \le R_{co} + R_{op} + R_{appr}$$
$$+ \sqrt{\int_0^t \int |B(\mu) - B(\sigma)|^2 d\sigma_s\, ds}\cdot\sqrt{2\beta_0^{-1} + \beta_0^{-2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |b_{\mu,N} - B(\sigma)|^2 d\sigma_s ds + 2R_c}.$$

Шаг 5. Предельные переходы. Итоговая оценка. Рассуждая аналогично шагу 4 доказательства Теоремы 3.1 и учитывая (3.18), можно перейти к пределу при $K\to\infty$, $N\to\infty$, и $\varepsilon\to 0$ и получить

$$\int \psi\, d(\mu_t - \sigma_t) \le \|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV}$$
$$+ \sqrt{C\int_0^t G^2(\|\mu_s - \sigma_s\|_{TV}) ds}\cdot\sqrt{2\beta_0^{-1} + \beta_0^{-2} C\int_0^t G^2(\|\mu_s - \sigma_s\|_{TV}) ds}.$$

Переходя к супремуму по $\psi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$: $|\psi| \le 1$ и замечая, что $\|\mu_s - \sigma_s\|_{TV} \le 2$ и $t \le T_0$, получим

$$\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \le \|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} + \sqrt{C\int_0^t G^2(\|\mu_s - \sigma_s\|_{TV})ds} \cdot \sqrt{2\beta_0^{-1} + \beta_0^{-2}C \cdot T_0 \cdot G^2(2)ds}$$
$$\equiv \|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} + C_{sum}\sqrt{\int_0^t G^2(\|\mu_s - \sigma_s\|_{TV})ds}.$$

Если $\|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} = 0$, то явное интегрирование влечет $\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \equiv 0$. В общем случае по неравенству Гронуолла

$$\|\mu_t - \sigma_t\|_{TV} \le F^{-1}\Big(F(\|\mu_0 - \sigma_0\|_{TV} - Ct\Big),$$

где $F(v) = \displaystyle\int_v^1 G(\sqrt{u})^{-2}$ и F^{-1} есть обратная к F функция. □

3.1.2 Существование вероятностного решения

Вопрос существования вероятностного решения задачи Коши для нелинейного уравнения оказывается в некотором смысле проще вопроса единственности. А именно, существование решения удается установить для более широкого класса уравнений

$$\partial_t\mu_t = \partial^2_{e_ie_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{e_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{3.20}$$

где μ_t, ν – борелевские вероятностные меры на H. Решение строится как предел решений конечномерных задач, то есть по сути применяется метод Галеркина. Основная часть доказательства состоит в обосновании этого предела. Существование решений для конечномерных задач следует из результатов главы 1.

Пусть дана некоторая положительная непрерывная функция V на H. Для положительной функции $\alpha \in C([0,T_0])$ и $\tau \in (0,T_0]$, рассмотрим класс $M_{\tau,\alpha}(V)$, состоящий из таких неотрицательных борелевских конечных мер $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$, что для всех $t \in [0,\tau]$ имеет место

$$\int V(x)\,d\mu_t \le \alpha(t).$$

Будем говорить, что последовательность $\mu^n = (\mu^n_t)_{t\in[0,\tau]}$ из класса $M_{\tau,\alpha}$ является V-сходящейся к $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]} \in M_{\tau,\alpha}$, если для всех $t \in [0,\tau]$

$$\lim_{n\to\infty}\int F(x)d\mu^n_t = \int F(x)d\mu_t \tag{3.21}$$

для всякой непрерывной функции F на H, для которой

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{x\in H\setminus B_R} F(x)\cdot V^{-1}(x) = 0.$$

Сформулируем условия на коэффициенты:

(H1) Существует функция V на H такая, что

$$V(x) > 0, \qquad \lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty,$$

и отображения Λ_1 и Λ_2 пространства $C^+([0,T_0])$ в $C^+([0,T_0])$ такие, что для всех $\tau \in (0,T_0]$ и всех $\alpha \in C^+([0,T_0])$ функции a^{ij} и b^i определены на $M_{\tau,\alpha} = M_{\tau,\alpha}(V)$ и для всех $\mu \in M_{\tau,\alpha}$ и $(x,t) \in H \times [0,\tau]$

$$L_\mu V(x,t) \le \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x).$$

Такую функцию V будем называть функцией Ляпунова для оператора L_μ.

(H2) Для всех $\tau \in (0,T_0]$, $\alpha \in C^+([0,T_0])$, $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $x \in H$ отображения

$$t \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma) \quad \text{и} \quad t \mapsto b^i(x,t,\sigma)$$

измеримы по Борелю на $[0,\tau]$; для каждого цилиндрического множества $K \subset H$ с конечномерным компактным основанием отображения

$$x \mapsto b^i(x,t,\sigma) \quad \text{и} \quad x \mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$$

ограничены на K равномерно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ и непрерывны на K равностепенно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$. Более того, если последовательность $\mu^n \in M_{\tau,\alpha}$ V-сходится к $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, то для каждой пары $(x,t) \in H \times [0,\tau]$

$$\lim_{n\to\infty} a^{ij}(x,t,\mu^n) = a^{ij}(x,t,\mu), \quad \lim_{n\to\infty} b^i(x,t,\mu^n) = b^i(x,t,\mu).$$

(H3) При каждом $d \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0,T_0]$, $\alpha \in C^+([0,T_0])$ и $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ конечномерная матрица $A_d(x,t,\sigma) = (a^{ij}(x,t,\sigma))_{1\le i,j\le d}$ симметрична и неотрицательно определена.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (H1) – (H3) *и* $V \in L^1(\nu)$. *Тогда*

(i) *существует* $\tau \in (0,T_0]$ *такое, что задача Коши (3.20) имеет вероятностное решение* $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ *на* $[0,\tau]$*; более того,* τ *зависит только от* Λ_1 *и* Λ_2*;*

(ii) *Если* Λ_1 *и* Λ_2 *постоянны, то задача Коши (3.20) имеет решение на всем интервале* $[0,T_0]$.

В обоих случаях

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \int V(x)d\mu_t < \infty.$$

Доказательство. Введем дополнительный класс мер: для данных $\alpha(t) \in C^+([0,T_0])$ и $\tau > 0$ через $N_{\tau,\alpha}$ обозначим класс неотрицательных мер $\mu = (\mu_t) \in M_{\tau,\alpha}$ таких, что

$$\Big|\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\mu_s\Big| \le \Lambda(\tau,\alpha,\varphi)|t-s|$$

для всех $\varphi \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$, где $\Lambda(\tau,\alpha,\varphi) := \sup\Big\{|L_\mu\varphi(x)|\colon\ x \in X,\ \mu \in M_{\tau,\alpha}\Big\}$ не зависит от $\mu \in M_{\tau,\alpha}$. По условию (H2) этот супремум конечен. Слабая сходимость μ_t^n при фиксированном t очевидно следует из V-сходимости μ^n. Множество $N_{\tau,\alpha}$ образует выпуклый компакт в пространстве конечных борелевских мер. Более того, V-сходимость мер из $N_{\tau,\alpha}$ эквивалентна слабой сходимости в следующем смысле: из каждой последовательности $\{\mu^n\} = \{\mu_t^n(dx)dt\} \in N_{\tau,\alpha}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\mu^{n_l}\}$, которая сходится слабо на $H \times [0,\tau]$ к мере μ и $\mu_t^{n_l}$ сходится слабо к μ_t на H для каждого фиксированного $t \in [0,\tau]$. Далее, если последовательность $\{\mu_t^n\} \in N_{\tau,\alpha}$ сходится слабо, то она V-сходится. Эти утверждения являются простыми обобщениями аналогичных конечномерных результатов – лемм 1.1 и 1.2.

Решение задачи (3.20) построим как предел решений конечномерных задач. Для каждого $d \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$A_d\colon\ (x,t,\mu) \mapsto (a^{ij}(P_d x,t,\mu))_{1\le i,j\le d}, \quad b_d\colon\ (x,t,\mu) \mapsto (b^i(P_d x,t,\mu))_{1\le i\le d}.$$

Положим $L_\mu^d = a_d^{ij}\partial^2_{x_ix_j} + b_d^i\partial_{x_i}$, $1 \le i,j \le d$. Тогда задача

$$\partial_t\mu_t = \partial^2_{x_ix_j}(a_d^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b_d^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu^d \tag{3.22}$$

с $\nu^d = \nu \circ P_d^{-1}$ имеет вероятностное решение $\mu^d = (\mu_t^d)_{t\in[0,\tau_d]}$ для некоторого $\tau_d > 0$ по теореме 1.1 и [15, Теорема 1]. Это следует из простого наблюдения: функция $V_d = P_d \circ V$ является функцией Ляпунова для конечномерной задачи и

$$L_\mu^d V_d \le \Lambda_1[\alpha] + \Lambda_2[\alpha]V_d$$

с теми же коэффициентами Λ_1 и Λ_2. Далее, выбор τ_d определяется исключительно отображениями Λ_1 и Λ_2. Значит можно выбрать $\tau_d \equiv \tau$ не зависящим от d. Если $\Lambda_j \equiv \mathrm{const}$, то $\tau = T_0$ [15, Следствие 4]. Рассмотрим решения $(\mu_t^d)_{t\in[0,\tau]}$ как меры на H, полагая $\mu_t^d(B) = \mu_t^d(B \cap \mathbb{R}^d)$ для каждого $B \subset H$.

Зафиксируем $\varphi(x) = \varphi_0(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{FC}_0^\infty(H)$ и через $S \subset \mathbb{R}^m$ обозначим ее носитель. Для каждого $d \ge m$ имеем

$$\int_S \varphi d\mu_t^d - \int_S \varphi d\nu^d = \int_0^t \int_S L_\mu^d \varphi d\mu_s^d ds. \tag{3.23}$$

Очевидно $\mu^d \in N_{\tau,\alpha}$. Значит, существует подпоследовательность индексов n_k таких, что μ^{n_k} V-сходится к μ на полосе $H\times[0,\tau]$ при $k\to\infty$. Более того, последовательность $\mu_t^{n_k}$ слабо сходится к μ_t для всех $t \in [0,\tau]$. Далее, ν^d слабо сходится к ν при $d \to \infty$. Условие (H2) гарантирует поточечную сходимость последовательностей $a^{ij}(x,t,\mu^{n_k})$ и $b^i(x,t,\mu^{n_k})$ и их равностепенную непрерывность. По теореме Арцела-Асколи после перенумерации индексов последовательности $a^{ij}(x,t,\mu^{n_k})$ и $b^i(x,t,\mu^{n_k})$ равномерно сходятся к $a^{ij}(x,t,\mu)$ и $b^i(x,t,\mu)$ на компактах в $H \times [0,\tau]$ соответственно. Ясно, что

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^t\int L_{\mu^{n_k}}\varphi d\mu_s^{n_k}ds - \int_0^t\int L_\mu\varphi d\mu_s ds\Big|\\ &\le \Big|\int_0^t\int_S L_{\mu^{n_k}}\varphi d\mu_s^{n_k}ds - \int_0^t\int_S L_\mu\varphi d\mu_s^{n_k}ds\Big| + \Big|\int_0^t\int_S L_\mu\varphi d\mu_s^{n_k}ds - \int_0^t\int_S L_\mu\varphi d\mu_s ds\Big|.\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $k \to \infty$ из-за слабой сходимости мер $\mu_t^{n_k}(dx)dt$, первое – из-за равномерной сходимости коэффициентов. Это позволяет перейти к пределу в (3.23) при $k \to \infty$ и получить

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int L_\mu \varphi d\mu_s ds.$$

Здесь использовалось

$$\int \varphi d\mu_t^{n_k} \to \int \varphi d\mu_t \quad \text{и} \quad \int \varphi d\nu^{n_k} \to \int \varphi d\nu \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

По определению это означает, что $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ есть решение задачи Коши (3.20). $\square$

Замечание 3.1. Как отмечено в доказательстве, на множестве $N_{\tau,\alpha}$ V-сходимость эквивалентна слабой сходимости. V-сходимость введена в основном для упрощения проверки условия (H2) для неограниченных коэффициентов. Например, условие (H2) выполняется, если снос имеет вид

$$b(\mu, x, t) = \int K(x, y) d\mu_t(y)$$

для некоторого непрерывного ядра K, и для некоторой функции V и непрерывных функций $C_1(x),\ C_2(x)$

$$|K(x, y)| \le C_1(x) + C_2(x) V^{1-\gamma}(y), \quad \gamma \in (0, 1).$$

В заключение сформулируем достаточные условия существования и единственности вероятностного решения задачи (3.6) с

$$b(\mu, x, t) = Rx + \int K(x, y) d\mu_t(y), \qquad b^j = \langle b, e_j\rangle,$$

где R есть некоторый неположительный самосопряженный оператор с собственным базисом $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ и собственными значениями $r = \{-r_j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Следующая теорема является мгновенным следствием Теоремы 3.1 и Теоремы 3.3 с $V(x) = 1 + |x|^2$.

Теорема 3.4. *Пусть $K(\cdot, \cdot)\colon\ H \times H \to H$ – некоторое непрерывное отображение и $\sum_{j=1}^\infty \beta^j < +\infty$. Предположим, что для некоторого числа $C_0 > 0$*

$$|K(x, y) - K(x, z)| \le C_0 \cdot (1 + |x|^2) \cdot |y - z|.$$

Предположим также, что существует последовательность гладких ограниченных отображений K_n такая, что для всех $(x, y) \in H \times H$ имеет место сходимость $K_n(x, y) \to K(x, y)$ при $n \to \infty$,

$$\langle K_n(x, y) - K_n(z, y), x - z\rangle \le \theta |x - z|^2 + \|x - z\|_r^2$$

и $|K_n(x, y)| \le C_4(1 + |x|)(1 + |y|^{2-\delta})$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для любой начальной меры $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(H)$ задача Коши (3.6) имеет единственное решение в классе $\mathcal{P}_2(H)$.

Заключение

В диссертации разработан функционально-аналитический подход к исследованию нелинейных уравнений ФПК общего вида для мер. В частности, этот подход включает новые условия слабой компактности некоторых классов вероятностных мер. Основные результаты состоят в следующем:

1. Найдены достаточные условия существования локальных решений нелинейных уравнений ФПК относительно мер с неограниченными коэффициентами; получены оценки времени существования решений в рассматриваемых классах мер.

2. Получены достаточные условия единственности вероятностного решения нелинейного уравнения ФПК с неограниченными коэффициентами в случаях невырожденной матрицы диффузии и возможно вырождающейся матрицы диффузии. Получены оценки в метрике Канторовича между решениями нелинейных уравнений ФПК с различными начальными данными.

3. Для линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым для мер на открытых множествах получены достаточные условия существования и достаточные условия единственности субвероятностного решения; найдены условия, при которых это решение вероятностное.

4. Изучена разрешимость задач Коши для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах, соответствующих нелинейным стохастическим уравнениям с частными производными; получены достаточные условия существования вероятностного решения. Получены оценки расстояния Канторовича и расстояния полной вариации между решениями нелинейных уравнений с различными начальными данными и, как следствие, получены достаточные условия единственности вероятностного решения для строго положительных диффузионных операторов и для возможно вырождающихся диффузионных операторов.

Список обозначений

$\mathbb{R}^d$	вещественное d-мерное евклидово пространство
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R}^1 : x \geq 0\}$
$\mathcal{B}(X)$	борелевская σ-алгебра пространства X
$\mathcal{M}(X)$	пространство конечных неотрицательных борелевских мер на X
$\mathcal{P}(X)$	пространство вероятностных мер на пространстве X
$\nabla\psi$	градиент функции ψ, т.е. вектор $(\partial_{x_1}\psi, \ldots, \partial_{x_d}\psi)$
Δ	оператор Лапласа, т.е. $\Delta = \partial^2_{x_1^2} + \ldots + \partial^2_{x_d^2}$
trace A, tr A	след матрицы или оператора A
	Функциональные пространства:
$C(D)$	пространство непрерывных функций на множестве D
$C^+(D)$	пространство неотрицательных непрерывных функций на множестве D
$C^k(D)$	пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на D
$C^{k,l}(D \times E)$	пространство функций, k раз непрерывно дифференцируемых по переменным из D и l раз по переменным из E
$C_0^\infty(D)$	пространство бесконечно дифференцируемых функций на D с компактным в D носителем

$C^{\alpha}(D)$	пространство Гёльдера с показателем $\alpha \in (0,1)$ функций на D
$\mathrm{Lip}_{\gamma}(D)$	класс Липшица с показателем $\gamma > 0$, т.е. γ – минимальная константа, для которой $\lvert f(x) - f(y)\rvert \le \gamma \lvert x - y\rvert$ для всех $x, y \in D$
$L^{p}(D)$	пространство классов эквивалентностей измеримых функций, интегрируемых по Лебегу в степени $p > 1$ относительно меры Лебега на множестве D
$L^{p}_{loc}(D)$	пространство классов эквивалентностей измеримых функций, интегрируемых по Лебегу в степени $p > 1$ относительно меры Лебега на каждом компакте внутри множества D
$L^{p}(D,\mu)$	пространство классов эквивалентностей измеримых функций, интегрируемых по Лебегу в степени $p > 1$ относительно меры μ на множестве D
$L^{p}_{loc}(D,\mu)$	пространство классов эквивалентностей измеримых функций, интегрируемых по Лебегу в степени $p > 1$ относительно меры μ на каждом компакте внутри множества D
$L^{r}([0,T], L^{p}(D))$	пространство классов эквивалентностей измеримых функций u на $[0,T] \times D$, таких, что $\lVert u(t,\cdot)\rVert_{L^{p}(D)}$ лежит в $L^{r}[0,T]$, $p, r > 1$
$W^{p,q}(D)$	Пространство Соболева функций из $L^{p}(D)$ таких, что их слабые производные до q-ого порядка включительно лежат в $L^{p}(D)$
$W^{p,q}_{loc}(D)$	Пространство функций $u \in L^{p}(D)$ таких, что $\zeta u \in W^{p,q}(D)$ для каждой функции $\zeta \in C_0^{\infty}(D)$
$\mathcal{F}\mathcal{C}_0^{\infty}(H)$	Пространство функций ϕ на гильбертовом пространстве H с базисом $\{e_j\}$ таких, что $\phi(x) = \phi_0(x_1, \ldots, x_m)$ для некоторой функции $\phi_0 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m)$, где $x_j = \langle x, e_j\rangle$

Литература

[1] Белопольская Я. И. Вероятностный подход к решению систем нелинейных параболических уравнений. *ТВП 49*, 4 (2004), 625 652.

[2] Богачев В. И. *Основы теории меры.* М.-Ижевск, 2006.

[3] Богачев В. И., Колесников А. В. Задача Монжа Канторовича: достижения, связи и перспективы. *УМН 67*, 5 (2012), 3–110.

[4] Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М. Эллиптические и параболические уравнения для мер. *УМН 64*, 6 (2009), 5–116.

[5] Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М., Шапошников, С. В. *Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.* М.-Ижевск, 2014.

[6] Богачев В. И., Рёкнер М. Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов. *ТВП 45*, 3 (2000), 417–436.

[7] Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа. *Журнал Экспер. и Теор. Физики 8*, 3 (1938), 291.

[8] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* Издательство иностранной литературы, М., 1962.

[9] Добрушин Р. Л. Уравнения Власова. *Функц. анализ и его прил. 13*, 2 (1979), 48–58.

[10] Козлов В. В. Обобщенное кинетическое уравнение Власова. *УМН 63*, 4 (2008), 93–130.

[11] Козлов В. В. Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность. *Нелинейная динам. 6*, 3 (2010), 489 512.

[12] Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. *УМН 5* (1938), 5–41.

[13] Манита О. А. Разрешимость задачи Коши для мерозначного уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в произвольной области. *Spectral Theory and Differential Equations, International conference dedicated to the centenary of B.M. Levitan* (2014), 94–96.

[14] Манита О. А. Существование решений нелинейных параболических уравнений для мер. *Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012»* (2012).

[15] Манита О.А., Шапошников С.В. Нелинейные параболические уравнения для мер. *Алгебра и Анализ 25*, 1 (2013), 64–93.

[16] Манита О. А., Шапошников, С. В. Уравнения Фоккера-Планка с потенциалом на области. *Доклады Академии наук 460* (2015), 136–139.

[17] Митидиери Э., Похожаев, С. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. *Труды Мат. Инст. Стеклова 234* (2001), 1–362.

[18] Митидиери Э., Похожаев С. Лиувиллевы теоремы для некоторых классов нелинейных нелокальных задач. *Труды Мат. Инст. Стеклова 248* (2005), 164–184.

[19] Назаров А.И., Уральцева Н.Н. Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами . *Алгебра и анализ 23*(1) (2011), 136—168.

[20] Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.* М.: Изд-во МГУ, 2010.

[21] Adams, S., Dirr, N., Peletier, M. A., and Zimmer, J. Large deviations and gradient flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society A 371*, 20120341 (2013).

[22] Ambrosio, L. Transport equation and cauchy problem for non-smooth vector fields. *Lecture Notes in Mathematics "Calculus of Variations and Non-Linear Partial Differential Equations" (CIME Series, Cetraro, 2005) 1927* (2008), 2–41.

[23] Ambrosio, L., Gigli, N., and Savaré, G. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, second ed. Lectures in Mathematics. Birkhäuser, Zürich, 2008.

[24] Ambrosio, L., and Mainini, E. Infinite-dimensional porous media equations and optimal transportation. *Journal of Evolution Equations 10*, 1 (2010), 217–246.

[25] Aronson, D., and Besala, P. Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations. *J. Math. Anal. Appl. 13* (1966), 516–526.

[26] Benachour, S., Roynette, B., Talay, D., and Vallois, P. Nonlinear self-stabilizing processes I: Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stochastic Processes and their Applications 75*, 2 (1998), 173 – 201.

[27] Benachour, S., Roynette, B., and Vallois, P. Nonlinear self-stabilizing processes II: Convergence to invariant probability. *Stochastic Processes and their Applications 75*, 2 (1998), 203 – 224.

[28] Bertozzi, A. L., Carrillo, J. A., and Laurent, T. Blow-up in multidimensional aggregation equations with mildly singular interaction kernels. *Nonlinearity 22* (2009), 683–710.

[29] Bogachev, V., Da Prato, G., and Röckner, M. On parabolic equations for measures. *Communications in Partial Differential Equations 33* (2008), 397–418.

[30] Bogachev, V., Da Prato, G., Röckner, M., and Shaposhnikov, S. Nonlinear evolution equations for measures on infinite dimensional spaces. In *Stochastic Partial Differential Equations and Applications. Quaderni di Matematica* (2010), vol. 25, pp. 51–64.

[31] Bogachev, V., Krylov, N., and Röckner, M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. *Communications in Partial Differential Equations 26*, 11 (2001), 2037–2080.

[32] Bogachev, V., Röckner, M., and Shaposhnikov, S. Nonlinear evolution and transport equations for measures. *Journal of Math. Sciences 179*, 747 (2011).

[33] Bogachev, V., Röckner, M., and Shaposhnikov, S. On uniqueness problems related to elliptic equations for measures. *Journal of Mathematical Sciences 176*, 6 (2011), 759–773.

[34] Bogachev, V., Röckner, M., and Shaposhnikov, S. On uniqueness problems related to the Fokker-Planck-Kolmogorov equation for measures. *Journal of Mathematical Sciences (New York) 179*, 1 (2011), 7–47.

[35] Bogachev, V., Röckner, M., and Shaposhnikov, S. Distances between transition probabilities of diffusions and applications to nonlinear Fokker – Planck – Kolmogorov equations. *https://www.math.uni-bielefeld.de/ bibos/preprints/15-05-486.pdf* (2015).

[36] Bogachev, V. I., Da Prato, G., Röckner, M., and Shaposhnikov, S. V. An analytic approach to infinite-dimensional continuity and Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* (2015).

[37] Bogachev, V. I., Prato, G. D., Röckner, M., and Stannat, W. Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures. *Bull. London Math. Soc. 39*, 4 (2007), 631–640.

[38] Carrillo, J., DiFrancesco, M., Figalli, A., Laurent, T., and Slepcev, D. Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations. *Duke Mathematical Journal 156*, 2 (2011), 229–271.

[39] Carrillo, J. A., McCann, R. J., and Villani, C. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy, dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Math. Iberoamericana 19* (2003), 971–1018.

[40] Da Prato, G., and Zabczyk, J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge University Press Cambridge, 1992.

[41] DiPerna, R., and Lions, P. On the fokker–planck–boltzmann equation. *Comm. in Math. Physics 120*, 1 (1988), 1–23.

[42] DiPerna, R., and Lions, P. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae 98*, 3 (1989), 511–547.

[43] Dragomir, S. Some Gronwall type inequalities and applications. *Victoria University of Technology, Australia* (2002).

[44] Escauriaza, L. Bounds for the fundamental solution of elliptic and parabolic equations in nondivergence form. *Comm. Partial Differ. Eq. 25*, 5-6 (2000), 821–845.

[45] Figalli, A. Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients. *Journal of Functional Analysis 254*, 1 (2008), 109 – 153.

[46] Fokker, A. D. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld. *Ann. Phys. 348*, 5 (1914), 810–820.

[47] Frank, T. *Nonlinear Fokker- Planck equations. Fundamentals and applications.* Springer–Verlag, Berlin, 2005.

[48] Friedman, A. *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[49] Funaki, T. A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 67*, 3 (1984), 331–348.

[50] Gyongy, I., and Krylov, N. Existence of strong solutions for Ito's stochastic equations via approximations. *Probability Theory and Related Fields 105*, 2 (1996), 143–158.

[51] Hasminskii, R. Ergodic properties of reccurent diffusion processes and stabilization of the solution of the Cauchy problem for parabolic equations. *Theory Probab. Appl. 5* (1960), 179– 196.

[52] Ishige, K., and Murata, M. Uniqueness of nonnegative solutions of the Cauchy problem for parabolic equations on manifolds or domains. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze 30*, 1 (2001), 171–223.

[53] Jordan, R., Kinderlehrer, D., and Otto, F. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal 29* (1999), 1–17.

[54] Krylov, N. V., and Priola, E. Elliptic and parabolic second-order PDEs with growing coefficients. *Communications in Partial Differential Equations 35*, 1 (2009), 1–22.

[55] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., and Uraltseva, N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, vol. 23 of *Translations of mathematical monographs.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[56] Lemle, D. L. $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$-uniqueness of weak solutions for the Fokker–Planck equation associated with a class of Dirichlet operators. *Elect. Research Announc. Math. Sci. 15* (2008), 65–70.

[57] Li, H., and Toscani, G. Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows. *Arch. Rational Mech. Anal. 172* (2004), 407–428.

[58] Lions, P.-L., and Le Bris, C. Existence and uniqueness of solutions to Fokker Planck type equations with irregular coefficients. *Communications in Partial Differential Equations 33*, 7 (2008), 1272–1317.

[59] Lorenz, T. *Mutational Analysis. A Joint Framework for Cauchy Problems in and Beyond Vector Spaces.* No. 1996 in Lecture Notes in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin, 2010.

[60] Maniglia, S. Probabilistic representation and uniqueness results for measure-valued solutions of transport equation. *J. Math. Pures Appl. 87* (2007), 601–626.

[61] Manita, O., Romanov, M., and Shaposhnikov, S. On uniqueness of solutions to nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 128* (2015), 199–226.

[62] Manita, O. A. Nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations in Hilbert spaces. *Записки научных семинаров ПОМИ 437* (2015), 184–206.

[63] Manita, O. A., and Shaposhnikov, S. V. Nonlinear parabolic equations for measures. *Doklady Mathematics 86*, 3 (2012), 857–860.

[64] Manita, O. A., and Shaposhnikov, S. V. On the Cauchy problem for Fokker-Planck-Kolmogorov equations with potential terms on arbitrary domains. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2015).

[65] McKean, H. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 56*, 6 (1966), 1907–1911.

[66] McKean, H. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. *Lecture Series in Differential Equations, Catholic Univ. 7* (1967), 177–194.

[67] Natile, L., Peletier, M., and Savare, G. Contraction of general transportation costs along solutions to Fokker–Planck equations with monotone drifts. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees 95*, 1 (2011), 18 – 35.

[68] Osada, H., and Tanemura, H. Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields. *arXiv:1408.0632* (2014).

[69] Pinchover, Y. On uniqueness and nonuniqueness of the positive Cauchy problem for parabolic equations with unbounded coefficients. *Mathematische Zeitschrift 223*, 4 (1996), 569–586.

[70] Planck, M. Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie. *Sitzungberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1917), 324–341.

[71] Shaposhnikov, S. On the uniqueness of integrable and probability solutions to the Cauchy problem for the Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *Doklady Mathematics 84*, 1 (2011), 565–570.

[72] Shaposhnikov, S. On the uniqueness of a probabilistic solution of the Cauchy problem for the Fokker–Planck–Kolmogorov equation. *Theory Probab. Appl. 56*, 1 (2012), 96–115.

[73] Skorohod, A. V. *Studies in the theory of random processes.* Addison–Wisley, 1965.

[74] Stroock, D., and Varadhan, S. *Multidimensional diffusion processes.* No. 233 in Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1979. MR:532498. Zbl:0426.60069.

[75] Tychonoff, A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Matem. Sbornik 42*, 2 (1935), 199–216.

[76] Veretennikov, A. Y. On Ergodic Measures for McKean-Vlasov Stochastic Equations. In *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004* (2006), pp. 471–486.

[77] Villani, C. *Topics in Optimal Transportation*, vol. 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[78] Widder, D. Positive temperatures on the infinite rod. *Trans. Amer. Math. Soc. 55*, 1 (1944), 85–95.

[79] Wu, L., and Zhang, Y. A new topological approach to the L^∞-uniqueness of operators and L^1-uniqueness of Fokker–Planck equations. *J. Funct. Anal. 241* (2006), 557–610.

[80] Zaal, M. On the role of cylindrical functions in Kantorovich duality. http://arxiv.org/abs/1504.02600, April 2015.