Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(ПОМИ РАН)

191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru

ИНН 7825351570 КПП 784101001

27.01.2016 № 11102/33/ 02-2171

На____________ от____________________

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Федерального
государственного бюджетного
учреждения науки Санкт-
Петербургского отделения
Математического института им.
В. А. Стеклова Российской
академии наук

Член-корреспондент РАН

____________С.В.Кисляков

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук»
на диссертационную работу Маниты Оксаны Анатольевны «Нелинейные уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Исследованию параболических уравнений ${\cal L}u=f$ недивергентной структуры посвящена обширная литература. Менее исследованными являются уравнения с сопряженным оператором ${\cal L}^*v=g$ — так называемые уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, а также квазилинейные уравнения аналогичной структуры. В этой области работали и работают как отечественные, так и зарубежные ученые — Н.В. Крылов, В.И. Богачев, E.B. Fabes, D.W. Stroock, A. Figalli и многие другие. Поэтому тема диссертации О.А. Маниты безусловно является актуальной.

В диссертации доказываются теоремы существования и единственности решений уравнений ФПК в классах вероятностных и субвероятностных мер, которые естественно возникают как классы обобщенных решений в случае негладких и вырождающихся старших коэффициентов. Также изучается непрерывная зависимость решений от начальных данных в метрике Канторовича.

Диссертация состоит из введения и трех глав. В кратком введении определены цели работы, дается анализ имеющейся литературы и обзор результатов диссертации.

В первой главе исследуется вопрос о существовании и единственности вероятностных решений задачи Коши для квазилинейного ФПК во всем пространстве. Специфика подхода автора заключается в том, что требования на коэффициенты формулируются неявно, в виде условия существования т. н. функции Ляпунова. Эта идея в частных ситуациях ранее встречалась, но в качестве базовой для теорем существования она здесь выступает, по-видимому, впервые.

Кроме теорем существования для уравнений ФПК весьма общего вида, в первом разделе этой главы доказываются также оценки времени существования решения для некоторых частных классов функций Ляпунова. Существенным достижением надо признать то, что эти оценки в некоторых случаях являются точными.

Далее в первой главе изучается вопрос о единственности для уравнений ФПК с линейной главной частью. Условия единственности здесь также выговариваются в терминах подходящих функций Ляпунова.

Наконец, в последнем разделе главы 1 получены оценки для обобщенного расстояния Канторовича между решениями двух уравнений ФПК с оператором Лапласа в главной части и различными сносами. В качестве следствия получены теоремы существования и единственности для некоторого класса полулинейных уравнений ФПК.

Во второй главе диссертации изучается существование и единственность субвероятностных решений для линейных уравнений ФПК в области (не обязательно ограниченной). Во многом методы, используемые в данной главе, схожи с главой 1, и ответы также получаются в терминах функций Ляпунова.

В третьей главе результаты предыдущих глав переносятся на уравнения ФПК в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Здесь следует отметить преимущество метода, основанного на функциях Ляпунова, который с минимальными изменениями и с помощью метода Галеркина обобщается на бесконечномерный случай.

К диссертации имеются следующие замечания:

1. По-видимому, в погоне за общностью формулировок в определении H1 функции Ляпунова вводятся отображения Λ_1 и Λ_2, в то время как при любом разумном использовании эти отображения будут просто функциями, и в работе ни одного содержательного примера иного не приведено. С другой стороны, при оценке времени существования решения (следствия из леммы 1.3) рассматриваются лишь частные случаи таких функций $\Lambda_1=0$ и $\Lambda_2=0$, что выглядит очевидным недосмотром — оценка получается для любых положительных возрастающих функций Λ_1 и Λ_2.

2. Условие $\sqrt{A}\in C^2$ в параграфе 1.2 смотрится чрезвычайно странно. Можно предположить, что хватило бы гладкости C^1 или даже липшицевости.

3. В формуле (1.30) оценка градиента получается с использованием принципа максимума лишь после дополнительного преобразования, которое лучше было выписать явно. Более того, в замечании 1.8 утверждается, что рассуждения этого параграфа без изменений переносятся на случай переменных коэффициентов, что для формулы (1.30) неверно. Вместо нее нужно применять оценки градиента Бернштейновского типа, которые, по-видимому, не изменят окончательного результата.

4. Утверждение о том, что условия теоремы 2.2 слабее, чем условия теоремы 2.1, полученной ранее С.В. Шапошниковым, некорректно. Слабее здесь лишь условия на младшие коэффициенты, условия же на старшие коэффициенты сильнее. Таким образом, правильно сказать, что это просто другие достаточные условия существования. Кроме того, сами условия на старшие коэффициенты слишком ограничительны, в них можно заменить $p>d+2$ на $p>d$.

Кроме этих замечаний по существу, имеются и претензии к оформлению диссертации.

1. Текст явно собирался из нескольких статей без должной правки, в результате чего о единстве в обозначениях остается только мечтать. К примеру, для градиента имеются аж четыре различных обозначения! Также используются разные обозначения для вторых производных. В некоторых местах применяется суммирование по повторяющимся индексам, а в других — нет. В следствии 1.7 не объясняется

обозначение N, и т. д.

2. В теореме 1.3, шаг 2, функция ζ_N не выпуклая, а вогнутая.

3. В списке литературы неоднократно (ссылки 32, 33, 34, 55, 63, 71) приводятся переводы русскоязычных текстов вместо оригиналов, в том числе перевод монографии О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой.

4. При цитировании монографий следует давать более точные ссылки — на параграф или в крайнем случае на главу.

5. Необычно выглядят транслитерации некоторых иностранных фамилий. Все же в русскоязычной литературе более принято написание Хольмгрен, а не Гольмгрен, особенно если считать, что Гарнак должен быть Харнаком.

6. Возможно, стоило бы в приложении сформулировать результаты, на которые имеются ссылки и которые не являются общеизвестными, для облегчения чтения.

Имеются в диссертации также опечатки, перечисление которых смысла не имеет.

Несмотря на эти замечания, оценка диссертации в целом остается благоприятной. Автором получены оригинальные результаты, имеющие теоретическую ценность и вносящие вклад в развитие теории уравнений в частных производных и функционального анализа. Тема диссертации актуальна, а положения и выводы, содержащиеся в ней, являются новыми и полностью обоснованными. О.А. Манита проявила хороший уровень владения сложной техникой современной теории меры, функционального анализа и уравнений в частных производных, а также самостоятельность исследователя.

Результаты диссертации опубликованы в 5 статьях в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных изданий ВАК и приравненных к ним. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

С диссертацией О.А. Маниты рекомендуется ознакомиться в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах.

Диссертационная работа «Нелинейные уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова» является завершенным научным исследованием и удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор Манита Оксана Анатольевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Лаборатории математической физики Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН 28 января 2016 г.

Зав. Лабораторией математической физики
доктор физ.-мат. наук, профессор

Г.А.Серегин