

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации О.А. Маниты
«Нелинейные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для мер»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук

по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Тематика диссертации О.А. Маниты относится к активно развивающемуся направлению функционального анализа на стыке с теорией меры, уравнениями с частными производными и теорией случайных процессов, связанному с применением пространств вероятностных мер (в том числе метрик на таких пространствах) к изучению параболических уравнений типа Фоккера – Планка – Колмогорова относительно мер. Сами эти уравнения (в линейном случае) изучаются уже столетие, начиная с давних им название классических физических работ Фоккера и Планка, продолженных позже Колмогоровым. В последующие десятилетия в этих исследованиях приняли участие многие другие видные ученые, в том числе Смолуховский, Чэпмен, Петровский, Феллер, Нэш, Мозер, Хёрмандер, Ладыженская, Олейник, Фридман. После работ Власова по нелинейным уравнениям в теории плазмы стала интенсивно развиваться и теория нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова. В настоящее время основной акцент сместился именно на нелинейные уравнения. Например, из нескольких тысяч работ, выдаваемых в базе MathSciNet по запросу “Fokker–Planck” примерно 90 процентов относятся к нелинейным уравнениям. Активные группы исследователей развивают это направление во всех крупных научных центра мира. Среди известных современных российских специалистов, занимающихся линейными и нелинейными уравнениями Фоккера – Планка – Колмогорова и близкими проблемами, можно назвать Н.Н. Уральцеву, В.А. Солонникова, Е.В. Радкевича, Н.В. Крылова, Я.И. Белопольскую, А.Ю. Веретенникова, Ю.Е. Гликлиха, В.Н. Денисова, А.И. Назарова, А.А. Арсеньева, В.В. Жикова, В.В. Козлова, С.В. Шапошникова.

Представленная работа является исследованием в области теории меры, функционального анализа на стыке с теорией вероятностей и уравнениями с частными производными. Ее цель — применение теории пространств вероятностных мер, в том числе слабой компактности и метрик типа Канторовича, к изучению параболических уравнений типа Фоккера – Планка – Колмогорова относительно мер на конечномерных и бесконечномерных пространствах. Диссертация состоит из введения и 3 глав. Во введении дан исторический обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты.

Глава 1 посвящена разрешимости нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова относительно мер в конечномерных пространствах без использования конкретной структуры коэффициентов. При этом полученные результаты охватывают многие интересные примеры. Основное отличие полученных в диссертации результатов от известных ранее состоит в том, что не накладывается явных ограничений на рост коэффициентов уравнения, а предполагается лишь существование функции Ляпунова (с использованием условий компактности семейств мер), что возможно и при быстро растущих коэффициентах. Здесь также получены оценки времени существования решений. Важное достижение состоит в том, что рассмотрен сложный случай вырождающейся матрицы диффузии и для него получены достаточные условия существования и единственности решений.

В главе 2 изучается разрешимость линейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова с потенциальным слагаемым относительно мер на открытых множествах в конечномерном пространстве. Получены достаточные условия существования и единственности решений подобных уравнений, а также условия, при

которых решение оказывается вероятностным. Полученные условия и результаты охватывают значительное число конкретных примеров, возникающих в приложениях.

Глава 3 посвящена достаточным условиям существования и единственности вероятностных решений для нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова для мер в гильбертовых пространствах. Эта проблема почти не исследовалась ранее. Здесь также основную роль играют условия компактности семейств мер.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Предложены новые условия слабой компактности семейств мер, с помощью чего найдены достаточные условия существования локальных решений нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (относительно мер) с неограниченными коэффициентами; получены оценки времени существования решений в рассматриваемых классах мер.

2. Получены достаточные условия единственности вероятностных решений нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова с неограниченными коэффициентами в случаях невырожденной матрицы диффузии и вырождающейся матрицы диффузии.

3. Для линейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова с потенциальным слагаемым для мер на открытых множествах получены достаточные условия существования и достаточные условия единственности субвероятностного решения; найдены условия, при которых это решение вероятностное.

4. Изучена разрешимость задач Коши для нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова относительно мер в гильбертовых пространствах, соответствующих нелинейным стохастическим уравнениям с частными производными; получены достаточные условия существования вероятностных решений; исследована единственность вероятностного решения для строго положительных операторов диффузии и для возможно вырождающихся операторов диффузии.

Первая из этих групп результатов знаменательна тем, что охватывает многие нелинейные уравнения с быстро растущими коэффициентами. Второй результат интересен также и новизной постановки: во-первых, рассмотрены уравнения с дополнительным слагаемым, во-вторых, уравнения рассматриваются на областях, но без краевых условий, что привносит значительную специфику. Последний результат вносит заметный вклад в пока еще совершенно неизученный бесконечномерный случай.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации имеются 5 публикаций в журналах из списка ВАК, а также тезисы конференций.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева, С.В. Шапошникова (2012–2015 г.), конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2012–2014 г.), научно-исследовательском семинаре «Динамические системы и статистическая физика» под руководством Б.М. Гуревича, В.И. Оселедца, С.А. Пирогова (2013 г.), на семинаре “Probability, stochastic modelling and financial mathematics seminar” в Школе математики университета Лидса (Великобритания, 2014 г.), на международной конференции “Microscopic descriptions and mean-field equations in physics and social sciences” в университете Бата (Великобритания, 2014 г.), на международной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной

100-летию Б.М. Левитана (Москва, 2014 г.), на «Британско-японской школе по стохастическому анализу» в университете Уорика (Великобритания, 2014 г.), на международном научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный стохастический анализ» в университете Билефельда (Германия, 2014 г.).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы О.А. Маниты будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Дальневосточном федеральном университете, Техническом университете им. Н.Э. Баумана, Высшей школе экономики.

Таким образом, в диссертационной работе О.А. Маниты „Нелинейные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для мер” решен ряд важных и трудных задач теории меры и функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям „Положения о порядке присуждения ученых степеней” ВАК, а ее автор О.А. Манита заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук,
профессор

В.И. Богачев
Подпись профессора В.И. Богачева

В.И. Богачев

12.11.2015

