Отзыв официального оппонента

на диссертацию Маниты Оксаны Анатольевны

Нелинейные уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для мер

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Маниты Оксаны Анатольевны посвящена важным и актуальным вопросам - развитию аналитических подходов к изучению мер в конечномерных и бесконечномерных пространствах, в частности, проблемам интегрирования и построению мер в функциональных пространствах. Объект выбранный для изучения - это прямые уравнения Колмогорова или уравнения ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова) как линейные так и нелинейные. Уравнения такого типа возникают во многих задачах физики, биологии, финансовой математики и ряда других. Эта тематика тесно связана с рядом смежных специальностей, а именно: с теорией вероятностей, (в основном в диссертации рассматриваются вероятностные меры), с теорией уравнений в частных производных (уравнения ФПК используются как основной аналитический аппарат построения мер), а также функциональным анализом.

Развитие анализа в пространстве мер было инициировано в работах С.В. Фомина, Ю.Л.Далецкого, А.В. Скорохода и ряда других авторов в 60-70 годы 20 века в связи с развитием бесконечномерного анализа. Потребность в развитии теории дифференциальных уравнений как для функций, так и для мер в этом случае очевидна. Действительно, в отличие от конечномерного случая, когда уравнения в мерах можно свести к уравнениям для плотностей этих мер относительно меры Лебега, в бесконечномерном случае такое сведение невозможно ввиду отсутствия стандартной инвариантной меры типа меры Лебега. Это показало, что важно и интересно уже в конечномерном случае развивать соответствующий аналитический аппарат, который бы слабо зависел от размерности фазового пространства. Соответствующая теория представляет собой аналог теории обобщенных функций и допускает естественное продолжение на бесконечномерный случай с учетом возникающих при этом проблем таких, как отсутствие дифференцируемости мер по всем направлениям и ряда других. Развитие анализа в пространстве мер прежде всего связано с введением понятия дифференцируемости меры, которое может пониматься неоднозначно. Например, мера μ в локально выпуклом пространстве X называется дифференцируемой (по Фомину) вдоль вектора h , если для любого борелевского множества $A \subset X$ существует предел $d_h\mu = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(A+th)-\mu(A)}{t}$ и дифференцируемой (по Скороходу), если для каждой ограниченной непрерывной функции f на X функция $t \mapsto \int_X f(x+th)d\mu$ дифференцируема.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы, включающего 80 наименований.

Первая глава посвящена исследованию вопросов существования и единственности решения задачи Коши для нелинейного уравнения ФПК с растущими коэффициентами вида

$$\partial_t\mu_t = \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_ix_j}(a^{ij}(t,x,\mu)\mu_t) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}(b^i(t,x,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu. \tag{1}$$

При этом μ_t является решением задачи Коши (1) на интервале $[0,\tau]$, если для всех пробных функций выполняется соответствующее интегральное тождество.

Основной здесь является теорема 1.1, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1). Основное условие в теореме 1.1 состоит в требовании существования функции Ляпунова для генератора L_μ сопряженного эволюционного семейства, т.е. функции $V \in C^2(R^d)$, для которой $V(x) > 0, \lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = +\infty$ и $(L_\mu V)(t,x) \le \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x)$ для заданных $\Lambda_m : C^+([0,\tau] \to C^+([0,\tau], m = 1,2$ и всех $\alpha \in C^+([0,\tau_0]), \tau_0 \le \tau$.

С помощью функции V задаются классы мер $M_{\tau,\alpha}(V) = \{\mu : \int_{R^d} V(x)d\mu_t(x) \le \alpha(t)\}$ и $M_\tau(V) = \{\mu : \int_{R^d} V(x)d\mu_t(x) < \infty\}$, в которых ищется решение задачи (1).

Первый параграф главы 1 посвящен доказательству существования решения задачи (1) с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке, которое осуществляется в три этапа.

На первом этапе, используя теорему Шаудера о неподвижной точки и линейную теорию параболических уравнений для мер, диссертантка доказывает теорему 1, предполагая невырожденность и достаточную гладкcть матрицы $A = (a^{ij})$. На втором этапе, с помощью метода исчезающей вязкости, теорема доказывается в случае вырожденной и достаточно гладкой матрицы A. Наконец, на последнем этапе удается отказаться от гладкости матрицы A.

Основная причина такого поэтапного отказа от гладкости A состоит в том, что для применения теоремы Шаудера требуется единственность решения линейного уравнения, а для этого в свою очередь приходится требовать от матрицы A дополнительную регулярность.

Второй параграф этой главы посвящен исследованию условий, гарантирующих единственность решения задачи (1) в соответствующих классах. Здесь рассматривается задача (1) с матрицей диффузии не зависящей от μ

$$\partial_t\mu_t = \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_ix_j}(a^{ij}(t,x)\mu_t) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}(b^i(t,x,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{2}$$

причем отдельно рассматривается случай вырожденной и невырожденной матрицы диффузии. Для доказательства единственности важную роль играет правильный выбор топологии в пространстве мер. При этом для невырожденной матрицы диффузии непрерывность коэффициента сноса относительно топологии полной вариации, позволяет доказать, что в классе $\mathcal{M}_T(V)$ существует не более одного решения задачи (1) . В случае вырождающейся матрицы диффузии такой непрерывности недостаточно и диссертантка вводит вводит специальную метрику

$$w_W(\mu,\sigma) = \sup\{\int f d(\mu - \sigma) : f \in C_0^\infty(R^d), \|\nabla f(x)\| \le \sqrt{W}(x)\}$$

где $W \in C(R^d)$ – некоторая выпуклая функция и $W \ge 1$. В предположении непрерывности $b(t,x,\mu)$ по мере μ в этой метрике и некоторых дополнительных условиях доказана единственность решения задачи (1) и в случае вырождающейся матрицы A.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам разрешимости линейной задачи Коши

$$\partial_t\mu_t = \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_ix_j}(a^{ij}(t,x)\mu_t) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}(b^i(t,x)\mu_t) + c(t,x)\mu_t, \quad \mu_0 = \nu. \tag{3}$$

в некоторой открытой области $D \subset R^d$ без граничных условий при достаточно слабых условиях локальной соболевости коэффициентов. В первом параграфе этой главы формулируются условия, позволяющие доказать существование решения (3), а во втором - единственность решения рассматриваемой задачи.

Последняя глава диссертации посвящена рассмотрению задача Коши для нелинейных уравнений в мерах, заданных на гильбертовом пространстве H. В первом параграфе сформулированы условия при которых существует и единственно решение задачи Коши

$$\partial_t\mu_t = \sum_{i,j=1}^{\infty} \beta_j\partial^2_{x_jx_j}\mu_t) - \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{x_i}(b^i(t,x,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu \tag{4}$$

для двух различных случаев: а) $\beta_j \geq 0$ может вырождаться и б) матрица $A = (a^{ij})$ - цилиндрическая, что соответствует стохастической модели с цилиндрическим винеровским процессом. Второй параграф посвящен вопросам существования и единственности решения более общей задачи

$$\partial_t \mu_t = \sum_{i,j=1}^{\infty} \partial^2_{x_i x_j}(a^{ij}(t,x,\mu)\mu_t) - \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{x_i}(b^i(t,x)\mu_t) + c(t,x)\mu_t, \quad \mu_0 = \nu. \tag{5}$$

Диссертационная работа Маниты О.А. представляет собой серьезное научное исследование, посвященное актуальным вопросам конечномерного и бесконечномерного анализа. Результаты диссертации оригинальны и строго доказаны.

Приведем несколько замечаний.

1.Несмотря на то, что природа уравнений, изучаемых в диссертационной работе, вероятностная, диссертантка почти не использует результаты и методы теории стохастических уравнений, хотя возможно это привело бы к более глубокому пониманию полученных в диссертации результатов.

2. В работе содержится некоторое количество опечаток. Например, в формулировке следствия 1.7, вместо отсылки к условиям следствия 1.6 приведена отсылка к условия несуществующей теоремы 1.6, в начале главы 3, на стр. 78 ряд объектов не определен, есть опечатки в формулах на стр 80 и ряд других. Имеется также ряд мелких грамматических опечаток и стилистических неточностей.

Приведенные выше замечания не влияют на окончательную высокую положительную оценку данной диссертационной работы.

В диссертационной работе получен ряд новых интересных результатов, которые опубликованы в 7 статьях, 5 из которых – в журналах из списка ВАК, и докладывались на ряде международных конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в области математической и статистической физики, теории случайных процессов и бесконечномерного анализа. Они могут быть также использованы для чтения соответствующих специальных курсов в Московском и Санкт-Петербургском государственных университетах.

Диссертационное исследование Маниты О.А. "Нелинейные уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для мер"соответствует критериям, изложенным в п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации N 842 от 24 сентября 2013 года, а его автор Манита Оксана Анатольевна безусловно заслуживает присвоения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук,

профессор Белопольская Я.И.

Подпись проф. Белопольской заверяю

15.02.2016

Федеральное государственное бюджетно образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный архитектурно - строительный университет"(СПбГАСУ)

190005, Россия, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул.,4

Телефон (812)316-49-30

Адрес электронной почты matem@spbgasu.ru