

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе  
**МАНИТЫ ОКСАНЫ АНАТОЛЬЕВНЫ**  
**«Нелинейные уравнения**  
**Фоккера–Планка–Колмогорова для мер»**  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа О. А. Маниты «Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для мер» посвящена изучению условий существования и единственности решений нелинейных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (в дальнейшем, уравнений ФПК) общего вида с неограниченными коэффициентами для мер в конечномерных пространствах и в гильбертовом пространстве. Эта тематика относится к активно изучаемому разделу современного анализа, находящемуся на стыке функционального анализа, теории меры, теории уравнений с частными производными и теории случайных процессов. В частности, линейными и нелинейными уравнениями ФПК занимаются такие российские математики, как Я. И. Белопольская, В. И. Богачев, А. Ю. Веретенников, А. К. Гущин, В. Н. Денисов, В. В. Жиков, В. В. Козлов, Н. В. Крылов, А. И. Назаров, Е. В. Радкевич, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, А. В. Фурсиков, С. В. Шапошников и другие.

Обсудим кратко *содержание* рассматриваемой диссертации, состоящей из введения, трех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Диссертация изложена на 96 страницах. Список литературы включает 80 наименований.

В кратком введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы его основные цели и задачи, выделены основные элементы новизны и теоретической и практической значимости.

В первой главе диссертации в конечномерном случае изучаются условия существования и единственности вероятностных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения ФПК во всем пространстве. При этом условия на коэффициенты соответствующего уравнения формулируются автором в виде условия существования функции Ляпунова. Использование условий такого типа ранее почти не встречалось, что позволяет уже при обзоре первой главы диссертации сделать вывод об использовании автором *новых и оригинальных методов исследования*.

Кроме теорем существования для уравнений ФПК весьма общего вида, в первой главе получены оценки времени существования решения для функций Ляпунова специального вида. Отметим, что в ряде случаев эти оценки точны. В

первой главе диссертации изучают условия о единственности решений для уравнений ФПК с линейной главной частью. Ответ также дается в терминах подходов функций Ляпунова. В последнем разделе первой главы получены оценки обобщенного расстояния Канторовича между решениями двух уравнений ФПК с главной частью, являющейся оператором Лапласа (и с различными сносками). Эти оценки позволили получить теоремы существования и единственности для одного специального класса полулинейных уравнений ФПК.

Во второй главе диссертации изучается вопрос о существовании и единственности субвероятностных решений для линейных уравнений ФПК на открытых подмножествах (конечномерного) пространства. Используемые в этой главе методы и подходы похожи на те, что использовались в первой главе. Полученные результаты также формулируются в терминах функций Ляпунова.

Третья глава посвящена уравнениям ФПК в (бесконечномерном) гильбертовом пространстве. Оказалось, что использованный автором подход, основанный на применении функций Ляпунова, может быть распространен и на бесконечномерных случаях. Автором получен ряд новых достаточных условия существования и единственности решений нелинейных ФПК для мер в гильбертовых пространствах.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

*Рассмотрение диссертации позволяет сделать следующие выводы:* Диссертация О. А. Маниты «Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для мер» относится к хорошо известным специалистам и активно развивающемуся направлению современного анализа. *Таким образом, тема диссертации является актуальной.*

Основными достижениями диссертации, определяющим ее научную новизну, являются следующие результаты:

- 1) Найдены достаточные условия существования локальных решений нелинейных уравнений ФПК относительно мер с неограниченными коэффициентами; получены оценки времени существования решений в рассматриваемых классах мер.
- 2) Получены достаточные условия единственности вероятностного решения нелинейного уравнения ФПК с неограниченными коэффициентами в случаях невырожденной матрицы диффузии и возможно вырождающейся матрицы диффузии. Получены оценки в метрике Канторовича между решениями нелинейных уравнений ФПК с различными начальными данными.
- 3) Для линейных уравнений ФПК с потенциальным слагаемым для мер на открытых множествах получены достаточные условия существования и достаточные условия единственности субвероятностного решения; найдены условия, при которых это решение вероятностное.
- 4) Изучена разрешимость задач Коши для нелинейных уравнений ФПК в гильбертовых пространствах, соответствующих нелинейным стохастическим уравнениям

с частными производными; получены достаточные условия существования вероятностного решения; исследована единственность вероятностного решения для строго положительных диффузионных операторов и для возможно вырождающихся диффузионных операторов. Получены оценки расстояния Канторовича и расстояния полной вариации между решениями нелинейных уравнений с различными начальными данными.

Все полученные автором результаты обоснованы строгими и аккуратными математическими доказательствами. Это подтверждает их *достоверность*.

Отметим, что основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по бесконечномерному анализу, теории меры, стохастическому анализу. Это определяет *теоретическую ценность* результатов диссертации.

Считаю, что полученные результаты диссертации найдут дальнейшее применение в исследованиях по бесконечномерному и стохастическому анализу и стохастическим уравнениям с частными производными, проводимых в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Санкт-Петербургском государственном университете, в ПОМИ РАН, и в других математических исследовательских центрах в России и за рубежом. Это, в частности, определяет *практическую значимость* результатов диссертации.

Результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы автором в 7 работах, включая 5 статей, опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Все основные результаты диссертации были представлены на ряде семинаров и международных конференций. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

*Замечания.* По диссертации имеется ряд замечаний. В основном — это мелкие неточности и не всегда согласованные обозначения, а также опечатки и погрешности редакционного характера, а также погрешности оформления. Не приводя список этих замечаний, отметим лишь некоторые из них

- 1) Введенные в условии (H1) отображения  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  во всех примерах являются простыми функциями. Возможно стоило формулировать это условие без излишней общности (оговорив возможность обобщения при обсуждении этого условия).
- 2) Автор использует обозначение  $C^{k,l}$  для класса функций двух переменных с различной гладкостью по этим переменным, причем эти классы явно не определяются, а приводятся только в списке обозначений в конце диссертации. Это определение, как минимум, нестандартно и его следовало бы привести в начале работы. Иначе, класс  $C^{2,1}$  легко перепутать с классом функций, вторые производные которых удовлетворяют соответствующему условию Гельдера.

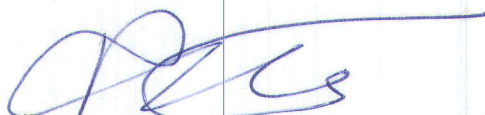
- 3) На стр. 35 автору следовало бы более аккуратно выписать условия, определяющие функцию  $\zeta_N$  (на отрезке  $[N, N + 2]$ ). Возможно, стоило бы привести явный пример.
- 4) На втором шаге доказательства теоремы 1.5 не вполне ясно: какая липшицевость операторов  $A_k^\varepsilon(\cdot, t)$  имеется в виду. Стоило бы написать явно, тем более что приведена ссылка на явные формулы для этих операторов.
- 5) На четвертом шаге доказательства теоремы 1.5 надо явно указать, какой «принцип максимума» имеется в виду. Кроме того, из текста вполне неясно, как перейти от оценки для  $g$  через  $\phi$  (и  $f$  через  $\psi$ ) к соответствующей оценке градиентов.

Можно отметить также определенную небрежность в оформлении списка литературы. Так, один и тот же журнал в ссылках [29] и [31] указан полным наименованием, а в [44] в сокращенном. Кроме того, ссылки на ряд работ, опубликованных в российских журналах приведен не на оригинальные статьи, а на их переводы.

Приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы и на научную значимость полученных результатов. Таким образом считаю, что диссертация О. А. Манита «Нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для мер» соответствует всем требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24.09.2013, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Манита Оксана Анатольевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

#### Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры Прикладной математики  
Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего  
профессионального образования «Московский  
государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана»



10.02.2016

/ Федоровский Константин Юрьевич /

Почтовый адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, стр. 1.

Телефон: (499) 263-63-26

Адрес электронной почты: [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)



«ВЕРНО»  
УПРАВЛЕНИЯ КАДР  
Н. Э. БАУМАНА  
Барышников  
В. БАРЫШНИКОВ