ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Попков Кирилл Андреевич

О проверяющих и диагностических тестах для контактов и функциональных элементов

Специальность 01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Редькин Николай Петрович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Аблаев Фарид Мансурович**, доктор физико-математических наук, профессор (ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Институт вычислительной математики и информационных технологий)
	Стеценко Владимир Алексеевич кандидат физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет», математический факультет)
Ведущая организация:	**ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»**

Защита диссертации состоится 25 марта 2016 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А), http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/12287962.

Автореферат разослан 25 февраля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Данная работа является исследованием в области математической теории контроля исправности и диагностики неисправностей управляющих систем — одного из разделов дискретной математики и математической кибернетики.

В последнее время в связи с внедрением в повседневную жизнь все большего числа различных управляющих систем активно изучаются вопросы их контроля и диагностики. Управляющая система, скажем, контактная схема или схема из функциональных элементов, представляет собой устройство с n входами, на которые подаются булевы переменные $x_1, \ldots, x_n$, реализующее некоторую булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Саму схему будем обозначать через S. Под базисными элементами схем в дальнейшем будем понимать контакты в случае контактных схем либо функциональные элементы в случае схем из функциональных элементов. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько базисных элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. (Все возможные неисправные состояния базисных элементов заранее оговариваются.) В результате этого схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x})$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x})$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x})$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях базисных элементов схемы S, будем называть *функциями неисправности* данной схемы. Устройство схемы S и, как следствие, множество всех возможных ее функций неисправности предполагаются известными.

С.В. Яблонским и И.А. Чегис[1] предложены логические способы контроля и диагностики управляющих систем, суть которых состоит в следующем. Представим, что в ходе эксперимента на входы схемы S разрешается подавать некоторые булевы наборы и наблюдать значения, выдаваемые схемой на этих наборах. Целью такого эксперимента обычно является ответ на один из следующих вопросов: 1) реализует ли схема S «правильную» функцию $f(\tilde{x})$ или же какую-то другую функцию; 2) какую именно функцию реализует данная схема. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T ее входных наборов, что для любой отличной от $f(\tilde{x})$ функции неисправности $g(\tilde{x})$ схемы S в T найдется набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T ее входных наборов, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух

[1]Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

различных функций неисправности $g_1(\tilde{x})$ и $g_2(\tilde{x})$ схемы S в T найдется набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. Тест считается *минимальным*, если он имеет наименьшую возможную длину (при заданных условиях). Нетрудно заметить, что последовательная подача всех наборов из проверяющего теста на входы схемы S позволяет однозначно ответить на вопрос 1), а из диагностического — на вопрос 2), сформулированные выше. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста для схемы S всегда можно взять множество T, состоящее из всех 2^n двоичных наборов длины n. Но при больших n длина такого теста окажется чрезмерно большой для тестирования. Поэтому возникает вопрос о построении тестов как можно меньшей длины. В то же время для наугад взятой схемы, реализующей функцию $f(\tilde{x})$, далеко не всегда удается отыскать короткие тесты. В связи с этим ставится задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданную функцию, т.е. схем, допускающих тесты малой длины.

В качестве неисправностей контактов обычно рассматривают их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его полюсами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. В качестве неисправностей функциональных элементов обычно рассматривают константные либо инверсные неисправности на входах или выходах элементов. Константная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом входе (на выходе) данного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах (выходах) элементов называются однотипными константными типа δ, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна δ, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Инверсная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом входе (на выходе) данного элемента становится противоположным значению на этом же входе (на выходе) данного элемента в случае, когда он исправен.

Если в схеме могут быть неисправны сколько угодно базисных элементов, то проверяющий (диагностический) тест для нее называется *полным проверяющим* (*полным диагностическим*) *тестом.* Если же в схеме допускается неисправность только одного базисного элемента (и только одного какого-то входа в случае неисправностей на входах элементов), то проверяющий (диагностический) тест для нее называется *единичным проверяющим* (*единичным диагностическим*) *тестом.* Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем, то есть для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого базисного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (при исправных состояниях всех ее элементов).

Пусть зафиксированы класс схем (контактные схемы или схемы из функциональных элементов, причем в последнем случае зафиксирован базис), ограничения на их структуру (если они есть), вид неисправностей базисных элементов, ограничение на максимальное число неисправностей в схеме (или отсутствие этого ограничения), а также вид теста (проверяющий или диагностический). Введем следующие обозначения: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем тестам T для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам S, реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины теста.

В задаче синтеза легкотестируемых схем ключевую роль играют величины $D(f)$ и $D(n)$. Первая из них определяет длину самого короткого возможного теста для схемы, реализующей функцию f; вторая — наименьшее число наборов, достаточное для тестирования (специальным образом построенных) схем, реализующих булевы функции от n переменных. Нахождение точного значения этих величин или их нетривиальных оценок сверху с предъявлением схем, которые дают эти оценки, позволило бы строить легкотестируемые схемы; нахождение оценок снизу этих величин указало бы на невозможность синтеза легкотестируемых схем, реализующих некоторые булевы функции и допускающих тесты сравнительно короткой длины.

К настоящему времени в теории синтеза легкотестируемых схем получен ряд существенных результатов. Первоначально основное внимание уделялось контактным схемам; в качестве неисправностей контактов обычно рассматривались их обрывы и замыкания. Уже в работе С.В. Яблонского и И.А. Чегис[1] установлена возможность построения легкотестируемых контактных схем как для произвольных булевых функциий, так и для некоторых конкретных булевых функций и операторов. В работах В.В. Глаголева[2], С.М. Вартаняна[3], Д.С. Романова[4] исследована возможность построения для неко-

[2]Глаголев В.В. Построение тестов для блочных схем // ДАН СССР. — 1962. — Т. 144, № 6. — С. 1237–1240.

[3]Вартанян С.М. Единичные диагностические тесты для последовательных блочных схем. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 1987. — 114 с.

[4]Романов Д.С. Построение тестов и оценка их параметров для некоторых классов контактных схем. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2000. — 114 с.

торых булевых функций и операторов легкотестируемых контактных схем, имеющих блочную структуру, и получены верхние оценки длин проверяющих и единичных диагностических тестов, константные и логарифмические по числу переменных у реализуемых функций и операторов.

Существенные результаты в теории синтеза легкотестируемых схем удалось получить для класса бесповторных контактных схем, в которых присутствует ровно по одному контакту каждой переменной. В работах В.В. Ваксова[5], И.В. Когана[6], Х.А. Мадатяна[7] установлено, что если булева функция от n переменных допускает бесповторную реализацию, то длины минимальных полного проверяющего и единичного диагностического тестов для нее в классе бесповторных контактных схем равны $n+1$; в то же время, длина минимального полного диагностического теста ведет себя экспоненциально по n.

Следующие оценки получены для класса произвольных контактных схем. В случае обрывов и замыканий контактов Х.А. Мадатян[7] установил точное значение функции Шеннона полного диагностического теста $D(n) = 2^n$; Н.П. Редькину[8] удалось понизить верхнюю оценку функции Шеннона длины полного проверяющего теста с тривиальной (2^n) до $\frac{15}{16} \cdot 2^n$. В случае же, когда допускаются только однотипные неисправности контактов, т.е. либо только обрывы, либо только замыкания, Н.П. Редькин[9] получил оценки соответственно $D(n) \leqslant 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$ и $D(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log_2 n}} + \frac{5}{2}}$ функции Шеннона длины полного проверяющего теста.

В дальнейшем существенное внимание стало уделяться задаче синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов. Перечислим вначале результаты, относящиеся к оценкам функции Шеннона $D(n)$ длин единичных проверяющих тестов в различных случаях. В работе С.М. Редди[10] для базиса Жегалкина $\{\&, \oplus, 1\}$ в случае произвольных константных неисправностей на выходах элементов была получена оценка $D(n) \leqslant n+3$. (Отметим, что конструкция, приведенная С.М. Редди, позволяет получить такую же оценку

[5] Ваксов В.В. О тестах для бесповторных контактных схем // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. 26, № 3. — С. 521–524.

[6] Коган И.В. О тестах для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. — 1964. — Вып. 12. — С. 39–44.

[7] Мадатян Х.А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. — 1970. — Вып. 23. — С. 103–118.

[8] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. — Т. 39. — Новосибирск, 1983. — С. 80–87.

[9] Редькин Н.П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. — Вып. 40. — Новосибирск, 1983. С. 87–99.

[10] Reddy S.M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — V. 21. — No. 1. — P. 124–141.

в случае произвольных константных неисправностей на входах элементов.) В дальнейшем результат указанной работы был обобщен С.С Колядой[11] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д.С. Романовым[12], который в случае инверсных и произвольных константных неисправностей на выходах элементов для любого функционально полного базиса получил оценку $D(n) \leqslant 4$. В случае инверсных неисправностей на выходах элементов С.В. Коваценко[13] для базиса Жегалкина установил, что $D(n) = 1$; Н.П. Редькин[14,15] для классического базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ получил оценку $D(n) \leqslant 2$, а для произвольного функционального полного конечного базиса — оценку $D(n) \leqslant 3$. Ю.В. Бородиной[16] и ей же совместно с П.А. Бородиным[17] в базисе Жегалкина для однотипных константных неисправностей на выходах элементов типа 1 и типа 0 удалось найти точное значение функции Шеннона $D(n) = 1$.

Ряд результатов был получен и для полных проверяющих тестов. В случае произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов Н. П. Редькин[18] для любого полного конечного базиса получил оценку функции Шеннона длины полного проверяющего теста $D(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$; Д.С. Романов[19] доказал, что существует базис, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, в котором для той же функции Шеннона имеют место оценки $2 \leqslant D(n) \leqslant 4$. Для базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ Н.П. Редькин[20] в случае однотипных константых неисправностей на

[11] Коляда С.С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

[12] Романов Д.С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

[13] Коваценко С.В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

[14] Редькин Н.П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 196.

[15] Редькин Н.П. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. — 2003. — Вып. 12. — С. 217–230.

[16] Бородина Ю.В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 5. — С. 49–52.

[17] Бородина Ю.В., Бородин П.А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа «0» на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

[18] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. — 1989. — Вып. 2. С. 198–222.

[19] Романов Д.С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

[20] Редькин Н.П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на вхо-

входах элементов установил, что $D(n) \lesssim 4\left(2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}\right)$; им же[21] в случае произвольных константных неисправностей на входах элементов получена оценка $D(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$. В том же базисе в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов Н.П. Редькин[22] доказал, что $D(n) \leqslant n$. Эта оценка впоследствии была улучшена Ю.В. Бородиной[23], которая установила, что $D(n) = 2$ для однотипных константных неисправностей на выходах элементов.

Для длин единичных диагностических тестов также имеются принадлежащие Н.П. Редькину[24,25] оценки функций Шеннона для базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ в случае однотипных константных неисправностей на входах и на выходах элементов — соответственно $D(n) \lesssim 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}$ и $D(n) \leqslant 2n + 1$. С.В. Коваценко[13] для базиса Жегалкина и инверсных неисправностей на выходах элементов получил оценки функции Шеннона длин единичного и полного диагностического тестов — соответственно $D(n) \leqslant n + 1$ и $D(n) \leqslant 2^{n-2}$.

Еще одним направлением теории синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов является поиск минимальных тестов для схем, реализующих индивидуальные булевы функции или некоторые классы булевых функций. В.Г. Хахулин[26] установил, что для линейной функции $f_n^{\oplus}(\tilde{x}) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ в произвольном базисе, в котором можно реализовать функции такого вида для любого $n \geqslant 1$, при наличии произвольных константных неисправностей на входах элементов имеет место оценка $n+1 \leqslant D(f_n^{\oplus}) \leqslant n+2$ длины минимального полного проверяющего теста. С.Р. Беджанова[27] получила ряд верхних и нижних оценок длин единичных и полных проверяющих и диагностических тестов для схем, реализующих функции вида $x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $\overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_k} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n$, $x_1 \& \ldots \& x_n$ и $\overline{x_1} \& \ldots \& \overline{x_k} \& x_{k+1} \& \ldots \& x_n$. Ю.В.

дах элементов // Известия вузов. Математика. — 1988. — № 7. — С. 57–64.

[21] Редькин Н.П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1997. — № 1. — С. 12–18.

[22] Редькин Н.П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — № 2. — С. 17–21.

[23] Бородина Ю.В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

[24] Редькин Н.П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.

[25] Редькин Н.П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

[26] Хахулин В.Г. О проверяющих тестах для счетчика четности // Дискретная математика. — 1995. — Т. 7, вып. 4. — С. 51–59.

[27] Беджанова С.Р. Тесты схем для некоторых классов булевых функций. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2011. — 96 с.

Бородина[28] для функции $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ в базисе $\{x \mid y\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов получила нижнюю оценку $D(f) \geqslant n + 1$ длины минимального полного проверяющего теста.

В отличие от всех приведенных выше работ, в данной диссертации изучаются вопросы тестирования базисных элементов, из которых строятся схемы, а именно контактов и функциональных элементов, а не самих схем. Предполагается, что имеется некоторое фиксированное число базисных элементов, каждый из которых может перейти в одно из неисправных состояний из заранее оговоренного списка. (В данной работе в качестве неисправностей контактов рассматриваются их обрывы и замыкания, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов.) Из имеющихся элементов можно строить схемы и наблюдать функции, реализуемые этими схемами. По указанному набору функций требуется сделать вывод о состоянии каждого базисного элемента. Под проверяющим (диагностическим) тестом будет пониматься набор схем, позволяющих однозначно определить исправность или неисправность (соответственно состояние) каждого базисного элемента; под длиной теста — число схем, входящих в тест.

Указанная постановка задачи имеет ряд отличий от описанных выше постановок задач контроля исправности и диагностики неисправностей контактных схем и схем из функциональных элементов. Перечислим их.

1. Под тестом понимается набор схем, а не множество входных наборов из нулей и единиц; под длиной теста — число схем в наборах, а не число входных наборов из нулей и единиц. Каждую схему разрешается «прозванивать» на всех возможных ее входных наборах.

2. Не требуется, чтобы схемы, участвующие в тесте, реализовывали (в случае исправности всех входящих в них базисных элементов) какие-то заданные функции. Результатом тестирования должны являться выводы о состоянии каждого базисного элемента, а не о функциях, реализуемых схемами.

3. Число базисных элементов в каждой составляемой схеме ограничено сверху общим числом имеющихся базисных элементов.

Цель работы

Основной целью работы является нахождение верхних и нижних оценок длин тестов для контактов и функциональных элементов в различных случаях.

[28] Бородина Ю.В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

Научная новизна работы

Все результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Получена верхняя оценка $k+1$ длин минимальных проверяющего и диагностического тестов для N контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и π-схем в случае, когда неисправными могут быть не более k контактов и k достаточно мало по сравнению с N.

2. Получены нижние оценки длин проверяющего и диагностического тестов для N контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и π-схем в случае, когда неисправными могут быть не более k контактов.

3. Для произвольного N найдены точные значения длин минимальных проверяющего и диагностического тестов для N контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и π-схем в случае, когда неисправными могут быть не более k контактов и $k \in \{1, N-1, N\}$.

4. Получена верхняя оценка $2k+1$ длины минимального проверяющего теста для N функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, в случае, когда неисправными могут быть не более k элементов, k достаточно мало по сравнению с N, а функция f отлична от конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Если при этом функция f нелинейна, то та же верхняя оценка $2k+1$ получена и для длины минимального диагностического теста.

5. Получена нижняя оценка k длин проверяющего и диагностического тестов для N функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и среди которых не более k неисправных. В случае, когда функция f имеет специальный вид, получены более сильные нижние оценки.

6. Для произвольного N найдены точные значения длин минимальных проверяющего и диагностического тестов для N функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и среди которых не более k неисправных, в следующих случаях:

а) $k = 1$;

б) $k \in \{2, N-1, N\}$ и выполнены некоторые ограничения на функцию f.

Все верхние оценки доказаны конструктивно.

Методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, теории чисел, теории булевых функций.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории диагностики управляющих систем. Представленные в диссертации методы синтеза могут быть использованы при практическом тестировании контактов и функциональных элементов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинаре «Диагностика управляющих систем» под руководством профессора Н.П. Редькина (МГУ, 2011–2015 гг.), на семинаре «Синтез управляющих систем» под руководством профессора О.М. Касим-Заде (МГУ, 2014 г., 2015 г.), на семинаре «Математические вопросы кибернетики» под руководством профессора О.М. Касим-Заде (МГУ, 2015 г.), на XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2014 г.), на российско-индийской конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная математика» (Москва, 2014 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» (МГУ, 2015 г.), на IX Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва — Красновидово, 2015 г.), на научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 2012 г.), в рамках Десятой молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 2015 г.).

Публикации

сновные результаты диссертации представлены в 9 работах [1—9], 7 из которых из списка ВАК, список работ приведен в конце автореферата..

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на восемь параграфов, и списка литературы из 45 наименований. Общий объем диссертации — 119 страниц, в работе содержится 12 рисунков.

Содержание диссертации

Во **введении** содержится обзор результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов диссертации.

В **главе 1** рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний контактов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении из заданных контактов произвольных двухполюсных контактных схем либо π-схем с последующим «прозваниванием» этих схем, т.е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Опишем сначала постановку задачи для случая произвольных двухполюсных контактных схем. Представим, что имеются N контактов ($N \geqslant 1$), занумерованных числами от 1 до N, из которых N_1 контактов с номерами от 1 до N_1 являются замыкающими, а N_2 контактов с номерами от $N_1 + 1$ до N — размыкающими, где $N_2 = N - N_1$ (N_1 или N_2 может быть равно 0). В исправном состоянии каждый замыкающий контакт, рассматриваемый как простейшая контактная схема, реализует между своими концами (полюсами схемы) булеву функцию x_i, а размыкающий контакт — булеву функцию $\overline{x_i}$, где x_i — отвечающая данному контакту переменная. Числа замыкающих контактов (N_1) и размыкающих контактов (N_2) предполагаются известными. В неисправном состоянии каждый контакт реализует между своими концами одну из булевых констант, т.е. 0 (при обрыве контакта) или 1 (при замыкании контакта). Предполагается, что среди данных N контактов не более k контактов могут быть неисправны, где k – заданное натуральное число, $k \leqslant N$. Можно составлять любые двухполюсные контактные схемы из данных контактов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных.

Задача заключается в том, чтобы протестировать контакты, т.е. для каждого из них определить, исправен данный контакт или неисправен (задача проверки), и, в дополнение к этому, определить тип неисправности каждого неисправного контакта (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

Диагностическим тестом назовем такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных контактов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние каждого из N контактов. Число l назовем *длиной* этого теста.

Проверяющим тестом назовем такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных контактов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить исправность или неисправность каждого из N контактов. Число l назовем *длиной* этого теста.

Отметим, что проверяющий тест, в отличие от диагностического, не обязан определять тип неисправности (обрыв или замыкание) каждого неисправного контакта.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины N всегда можно взять набор из N контактных схем, каждая из которых представляет собой один из заданных контактов.

Введем функции $L_c(N_1, N_2, k)$ и $L_d(N_1, N_2, k)$, равные длинам самых коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для N_1 замыкающих и N_2 размыкающих контактов, среди которых не более чем k неисправных. Пусть $L_c(N, k) = L_c(N, 0, k)$ и $L_d(N, k) = L_d(N, 0, k)$.

Если в определениях диагностического и проверяющего тестов заменить двухполюсные контактные схемы на π-схемы (что подразумевает сужение класса допустимых схем), то можно аналогично ввести функции $L_c^\pi(N_1, N_2, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k)$, равные длинам самых коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для N_1 замыкающих и N_2 размыкающих контактов, среди которых не более чем k неисправных, в классе π-схем, и положить $L_c^\pi(N, k) = L_c^\pi(N, 0, k)$ и $L_d^\pi(N, k) = L_d^\pi(N, 0, k)$.

Перечислим основные результаты главы 1. В §1 доказано следующее

Утверждение 1.2. *Если $N_1 + N_2 = N$, то $L_c(N_1, N_2, k) = L_c(N, 0, k)$, $L_d(N_1, N_2, k) = L_d(N, 0, k)$, $L_c^\pi(N_1, N_2, k) = L_c^\pi(N, 0, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k) = L_d^\pi(N, 0, k)$.*

Из утверждения 1.2, равенства $N_1 + N_2 = N$ и определения функций $L_c(N, k)$, $L_d(N, k)$, $L_c^\pi(N, k)$ и $L_d^\pi(N, k)$ следуют равенства

$$
\begin{aligned}
L_c(N_1, N_2, k) &= L_c(N_1 + N_2, 0, k) = L_c(N, 0, k) = L_c(N, k),\\
L_d(N_1, N_2, k) &= L_d(N_1 + N_2, 0, k) = L_d(N, 0, k) = L_d(N, k),\\
L_c^\pi(N_1, N_2, k) &= L_c^\pi(N_1 + N_2, 0, k) = L_c^\pi(N, 0, k) = L_c^\pi(N, k),\\
L_d^\pi(N_1, N_2, k) &= L_d^\pi(N_1 + N_2, 0, k) = L_d^\pi(N, 0, k) = L_d^\pi(N, k),
\end{aligned}
$$

из которых вытекает, что для нахождения величин $L_c(N_1, N_2, k)$, $L_d(N_1, N_2, k)$, $L_c^\pi(N_1, N_2, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k)$ достаточно знать $L_c(N, k)$, $L_d(N, k)$, $L_c^\pi(N, k)$ и $L_d^\pi(N, k)$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что все заданные контакты замыкающие.

В §2 получены верхние оценки для величин $L_c(N, k)$, $L_d(N, k)$, $L_c^\pi(N, k)$ и $L_d^\pi(N, k)$ при некоторых условиях на числа N и k.

Теорема 2.1. *Пусть $k\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N$ и на отрезке $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right]$ содержится хотя бы одно простое число. Тогда $L_c(N, k) \leqslant k + 1$, $L_d(N, k) \leqslant k + 1$, $L_c^\pi(N, k) \leqslant k + 1$ и $L_d^\pi(N, k) \leqslant k + 1$.*

Следствие 2.1. *Пусть $(2k - 3)\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N$. Тогда $L_c(N, k) \leqslant k + 1$, $L_d(N, k) \leqslant k + 1$, $L_c^\pi(N, k) \leqslant k + 1$ и $L_d^\pi(N, k) \leqslant k + 1$.*

В §3 для величин $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L^\pi_c(N,k)$ и $L^\pi_d(N,k)$ устанавливаются нижние оценки $\frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}$ и (при $k < N$) $\frac{k}{N-k}$. В случаях $k = N - 1$ и $k = N$ показано, что $L_c(N,k) = L_d(N,k) = L^\pi_c(N,k) = L^\pi_d(N,k) = N$.

В §4 рассмотрен случай $k = 1$, т.е. когда неисправным может оказаться не более одного контакта. Пусть $L_c(N) = L_c(N,1)$, $L_d(N) = L_d(N,1)$, $L^\pi_c(N) = L^\pi_c(N,1)$ и $L^\pi_d(N) = L^\pi_d(N,1)$. Показано, что всегда $L_d(N) = L_c(N)$ и $L^\pi_d(N) = L^\pi_c(N)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Справедливо равенство*

$$L^\pi_c(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 1, \\ 2, & \text{если } N \geqslant 2. \end{cases}$$

Теорема 4.2. *Справедливо равенство*

$$L_c(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 1 \text{ или } N \geqslant 5, \\ 2, & \text{если } N \in \{2,3,4\}. \end{cases}$$

В **главе 2** рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний функциональных элементов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении произвольных схем из заданных функциональных элементов с последующим «прозваниванием» этих схем, т.е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Представим, что имеются N функциональных элементов (N — заданное натуральное число), занумерованных числами от 1 до N. Каждый элемент, рассматриваемый как простейшая схема из функциональных элементов, имеет $n \geqslant 1$ входов и один выход и в исправном состоянии реализует на выходе заданную булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_1,\ldots,x_n$ — переменные, подаваемые на его входы (считаем, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и, как следствие, отлична от константы). В неисправном состоянии каждый элемент реализует одну из констант 0 или 1. Неисправность элемента, при которой он реализует константу 0 (1), будем называть неисправностью этого элемента типа 0 (1). Предполагается, что среди данных N функциональных элементов не более k элементов могут быть неисправны, где k – заданное натуральное число, $k \leqslant N$. Можно составлять любые схемы с одним выходом из данных функциональных элементов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных.

Задача заключается в том, чтобы протестировать функциональные элементы, т.е. для каждого из них определить, исправен данный элемент или неисправен (задача проверки), и, в дополнение к этому, определить тип неисправности каждого неисправного элемента (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

Диагностическим тестом назовем такой набор схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние каждого из N элементов. Число l назовем *длиной* этого теста.

Проверяющим тестом назовем такой набор схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить исправность или неисправность каждого из N элементов. Число l назовем *длиной* этого теста.

Отметим, что проверяющий тест, в отличие от диагностического, не обязан определять тип неисправности (0 или 1) каждого неисправного элемента.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины N всегда можно взять набор из N схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов.

Введем функции $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, равные длинам самых коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для N функциональных элементов, реализующих в исправном состоянии функцию f, среди которых не более чем k неисправных.

Перечислим основные результаты главы 2. В §5 получены верхние оценки для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ при некоторых условиях на функцию f и числа N и k.

Теорема 5.1. *Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1 \& \dots \& x_n$, $x_1 \vee \dots \vee x_n$, $\overline{x_1}$, выполнено условие $\sqrt{N} \leqslant \frac{N}{4k+2}$ и на отрезке $\left[\sqrt{N}; \frac{N}{4k+2}\right]$ содержится хотя бы одно простое число. Тогда:*

1) $L_c(f, N, k) \leqslant 2k + 1$,

2) *если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна, то $L_d(f, N, k) \leqslant 2k + 1$.*

Следствие 5.1. *Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1 \& \dots \& x_n$, $x_1 \vee \dots \vee x_n$, $\overline{x_1}$, и выполнено условие $8k + \frac{5}{2} \leqslant \sqrt{N}$. Тогда:*

1) $L_c(f, N, k) \leqslant 2k + 1$,

2) *если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейна, то $L_d(f, N, k) \leqslant 2k + 1$.*

В §6 для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ устанавливаются нижние оценки при различных f, N и k. Отметим, что для любых f, N и k выполняется неравенство $L_d(f, N, k) \geqslant L_c(f, N, k)$, поскольку любой диагностический тест, согласно определениям, является также и проверяющим. Все нижние оценки в §6 будут формулироваться для величины $L_c(f, N, k)$; в силу последнего соотношения они будут справедливы также для $L_d(f, N, k)$.

Теорема 6.1. *Для любых f, N и k выполняется неравенство $L_c(f, N, k) \geqslant k$.*

В случае, когда функция f имеет специальный вид, оценка теоремы 6.1 может быть улучшена.

Теорема 6.2. *Пусть $f \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$, $n \geqslant 1$. Тогда для любых N и k выполняется неравенство $L_c(f, N, k) \geqslant \log_2(\sum\limits_{i=0}^{k} C_N^i)$.*

Теорема 6.3. *Пусть $n = 1$ и $f(x_1) = \overline{x_1}$. Тогда для любых N и k выполняется неравенство $L_c(f, N, k) \geqslant \log_3(\sum\limits_{i=0}^{k} 2^i C_N^i)$.*

В качестве следствий из теорем 6.2, 6.3 получена нижняя оценка для величины $L_c(f, N, k)$ вида

$$\begin{cases} k(\log_2 N - \log_2 k) \text{ при } f \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}, \\ \log_3 2 \cdot k(\log_2 N - \log_2 k + 1) \text{ при } f = \overline{x_1}, \end{cases}$$

Теорема 6.4. *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид либо $x_{s_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{s_m}^{\sigma_m} \& (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee x_{s_n}^{\sigma_n})$, либо $x_{s_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{s_m}^{\sigma_m} \vee (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \& \ldots \& x_{s_n}^{\sigma_n})$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$ и $s_1, \ldots, s_n$ — попарно различные индексы от 1 до n, и выполнено одно из следующих условий:*

1) $m = n - 1$ и $k \leqslant N - 1$,

2) $m \leqslant n - 2$ и $3 \leqslant k \leqslant N - 2$.

Тогда $L_c(f, N, k) \geqslant k + 1$.

Выделим два возможных представления функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}, \tag{$*$}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}, \tag{$**$}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$.

В §7 установлены точные значения функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ в некоторых случаях. А именно, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не представима ни в одном из видов $(*)$, $(**)$ и $k \in \{1, 2, N-1, N\}$. Тогда $L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k$.*

В §8 рассмотрен случай $k = 1$, т.е. когда неисправным может оказаться не более одного функционального элемента. Пусть $L_c(f, N) = L_c(f, N, 1)$ и

$L_d(f,N) = L_d(f,N,1)$. Показано, что всегда $L_d(f,N) = L_c(f,N)$. Доказана следующая

Теорема 8.1. *Справедливо равенство*

$$L_c(f,N) = \begin{cases} 1, & \text{если функция } f \text{ не представима ни в одном из видов } (*), (**); \\ \min(2; N), & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*) \text{ или } (**), \text{ причем } n \geqslant 2 \text{ и хотя бы одно из чисел } \sigma_1, \ldots, \sigma_n \text{ равно нулю;} \\ \lceil \log_2(N+1) \rceil, & \text{если } f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}; \\ \lceil \log_3(2N+1) \rceil, & \text{если } n = 1 \text{ и } f(x_1) = \overline{x_1}. \end{cases}$$

Заключение

В диссертационной работе даны постановки задач проверки и диагностики контактов и функциональных элементов. Определены понятия проверяющего и диагностического тестов и их длин. Получены нетривиальные верхние и нижние оценки длин самых коротких проверяющих и диагностических тестов для N контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и π-схем в случае, когда неисправными могут быть не более k контактов. При $k = 1, N-1, N$ найдены точные значения указанных длин для произвольного N. Кроме того, получены нетривиальные верхние и нижние оценки длин самых коротких проверяющих и диагностических тестов для N функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, в случае, когда неисправными могут быть не более k элементов. В ряде случаев найдены точные значения указанных длин.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Николаю Петровичу Редькину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также всем сотрудникам кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и сектора теоретической кибернетики Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН за поддержку и доброжелательное отношение.

Публикации автора по теме диссертации

1. Попков К.А. Диагностика состояний контактов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 4. — С. 30–40.

2. Попков К.А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для функциональных элементов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21, № 6. — С. 73–89.

3. Попков К.А. Проверяющие и диагностические тесты для конъюнкторов, дизъюнкторов и инверторов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2014. — № 6. — С. 40–44.

4. Попков К.А. Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 83–99.

5. Попков К.А. О единичных тестах для контактов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 5. — С. 13–18.

6. Попков К.А. О единичных тестах для функциональных элементов // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, вып. 2. — С. 73–93.

7. Попков К.А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для контактов // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 2. — С. 108–121.

8. Попков К.А. О проверяющих и диагностических тестах для функциональных элементов // Материалы XVII международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2014) — Казань, Отечество, 2014. — С. 237–240.

9. Попков К.А. О единичных тестах для функциональных элементов // Материалы IX Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва — Красновидово, 2015 г.) — М.: МАКС Пресс, 2015. — С. 193–195.