Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Попков Кирилл Андреевич

# О ПРОВЕРЯЮЩИХ И ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТАХ ДЛЯ КОНТАКТОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —

доктор физико-математических наук,

профессор Н.П. Редькин

МОСКВА 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

В последнее время в связи с внедрением в повседневную жизнь все большего числа различных управляющих систем активно изучаются вопросы их контроля и диагностики. Управляющая система, скажем, контактная схема [13] или схема из функциональных элементов [13, 33], представляет собой устройство с $n$ входами, на которые подаются булевы переменные $x_1, \ldots, x_n$, реализующее некоторую булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Саму схему будем обозначать через $S$. Под базисными элементами схем в дальнейшем будем понимать контакты в случае контактных схем либо функциональные элементы в случае схем из функциональных элементов. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько базисных элементов схемы $S$ могут перейти в неисправное состояние. (Все возможные неисправные состояния базисных элементов заранее оговариваются.) В результате этого схема $S$ вместо исходной функции $f(\tilde{x})$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x})$, вообще говоря, отличную от $f$. Все такие функции $g(\tilde{x})$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях базисных элементов схемы $S$, будем называть *функциями неисправности* данной схемы. Устройство схемы $S$ и, как следствие, множество всех возможных ее функций неисправности предполагаются известными.

В работе [32] предложены логические способы контроля и диагностики управляющих систем, суть которых состоит в следующем. Представим, что в ходе эксперимента на входы схемы $S$ разрешается подавать некоторые булевы наборы и наблюдать значения, выдаваемые схемой на этих наборах. Целью такого эксперимента обычно является ответ на один из следующих вопросов: 1) реализует ли схема $S$ "правильную" функцию $f(\tilde{x})$ или же какую-то другую функцию; 2) какую именно функцию реализует данная схема. *Проверяющим тестом* для схемы $S$ называется такое множество $T$ ее входных наборов, что для любой отличной от $f(\tilde{x})$ функции неисправности $g(\tilde{x})$ схемы $S$ в $T$ найдется набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ [34, 35, 16]. *Диагностическим тестом* для схемы $S$ называется такое множество $T$ ее входных наборов, что $T$ является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x})$ и $g_2(\tilde{x})$ схемы $S$ в $T$ найдется набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$ [34, 35, 16]. Число наборов в $T$ называется *длиной* теста. Тест считается *минимальным*, если он имеет наименьшую возможную длину (при заданных условиях). Нетрудно заметить, что последовательная подача всех наборов из проверяющего теста на входы схемы $S$ позволяет однозначно ответить на вопрос 1), а из диагностического — на вопрос 2), сформулированные выше. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста для схемы $S$ всегда можно взять множество $T$, состоящее из всех $2^n$ двоичных наборов длины $n$. Но при больших $n$ длина такого теста окажется чрезмерно большой для тестирования. Поэтому возникает вопрос о построении тестов как можно меньшей длины. В то же время для наугад взятой схемы, реализующей функцию $f(\tilde{x})$, далеко не всегда удается отыскать короткие тесты. В связи с этим ставится задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданную функцию, т.е. схем, допускающих тесты малой длины.

В качестве неисправностей контактов обычно рассматривают их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его полюсами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. В качестве неисправностей функциональных элементов обычно рассматривают константные либо инверсные неисправности на входах или выходах элементов. Константная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом входе (на выходе) данного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах (выходах) элементов называются однотипными константными типа $\delta$, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна $\delta$, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Инверсная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом входе (на выходе) данного элемента становится противоположным значению на этом же входе (на выходе) данного элемента в случае, когда он исправен.

Если в схеме могут быть неисправны сколько угодно базисных элементов, то проверяющий (диагностический) тест для нее называется *полным проверяющим* (*полным диагностическим*) *тестом*. Если же в схеме допускается неисправность только одного базисного элемента (и только одного какого-то входа в случае неисправностей на входах элементов), то проверяющий (диагностический) тест для нее называется *единичным проверяющим* (*единичным диагностическим*) *тестом*. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [16], то есть для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого базисного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (при исправных состояниях всех ее элементов).

Пусть зафиксированы класс схем (контактные схемы или схемы из функциональных элементов, причем в последнем случае зафиксирован базис), ограничения на их структуру (если они есть), вид неисправностей базисных элементов, ограничение на максимальное число неисправностей в схеме (или отсутствие этого ограничения), а также вид теста (проверяющий или диагностический). Введем следующие обозначения [34, 35, 16]: $D(T)$ — длина теста $T$; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем тестам $T$ для схемы $S$; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам $S$, реализующим функцию $f$; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям $f$ от $n$ переменных. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины теста.

В задаче синтеза легкотестируемых схем ключевую роль играют величины $D(f)$ и $D(n)$. Первая из них определяет длину самого короткого возможного теста для схемы, реализующей функцию $f$; вторая — наименьшее число наборов, достаточное для тестирования (специальным образом построенных) схем, реализующих булевы функции от $n$ переменных. Нахождение точного значения этих величин или их нетривиальных оценок сверху с предъявлением схем, которые дают эти оценки, позволило бы строить легкотестируемые схемы; нахождение оценок снизу этих величин указало бы на невозможность синтеза легкотестируемых схем, реализующих некоторые булевы функции и допускающих тесты сравнительно короткой длины.

К настоящему времени в теории синтеза легкотестируемых схем получен ряд существенных результатов. Первоначально основное внимание уделялось контактным схемам; в качестве неисправностей контактов обычно рассматривались их обрывы и замыкания. Уже в работе [32] установлена возможность построения легкотестируемых контактных схем как для произвольных булевых функций, так и для некоторых конкретных булевых функций и операторов. В работах В.В. Глаголева [9], С.М. Вартаняна [7], Д.С. Романова [29] исследована возможность построения для некоторых булевых функций и операторов легкотестируемых контактных схем, имеющих блочную структуру, и получены верхние оценки длин проверяющих и единичных диагностических тестов, константные и логарифмические по числу переменных у реализуемых функций и операторов.

Существенные результаты в теории синтеза легкотестируемых схем удалось получить для класса бесповторных контактных схем, в которых присутствует ровно по одному контакту каждой переменной. В работах В.В. Ваксова [6], И.В. Когана [11], Х.А. Мадатяна [14] установлено, что если булева функция от $n$ переменных допускает бесповторную реализацию, то длины минимальных полного проверяющего и единичного диагностического тестов для нее в классе бесповторных контактных схем равны $n+1$; в то же время, длина минимального полного диагностического теста ведет себя экспоненциально по $n$.

Следующие оценки получены для класса произвольных контактных схем. В случае обрывов и замыканий контактов Х.А. Мадатян в [14] установил точное значение функции Шеннона полного диагностического теста $D(n) = 2^n$, совпадающее с длиной тривиального теста, причем оценка $D(n) \geqslant 2^n$ достигается на линейной булевой функции от $n$ переменных. В той же постановке Н.П. Редькину в [19] удалось понизить верхнюю оценку функции Шеннона длины полного проверяющего теста с тривиальной $(2^n)$ до $\frac{15}{16} \cdot 2^n$. В случае же, когда допускаются только однотипные неисправности контактов, т.е. либо только обрывы, либо только замыкания, Н.П. Редькин в [24] получил оценки соответственно $D(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ и $D(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log_2 n}}+\frac{5}{2}}$ функции Шеннона длины полного проверяющего теста.

В дальнейшем существенное внимание стало уделяться задаче синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов. Перечислим вначале результаты, относящиеся к оцениванию функции Шеннона $D(n)$ длин единичных проверяющих тестов в различных случаях. В работе С.М. Редди [36] для базиса Жегалкина $\{\&, \oplus, 1\}$ в случае произвольных константных неисправностей на выходах элементов была получена оценка $D(n) \leqslant n+3$. (Отметим, что конструкция, приведенная С.М. Редди, позволяет получить такую же оценку в случае произвольных константных неисправностей на входах элементов.) В дальнейшем результат работы [36] был обобщен С.С Колядой в [12] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д.С. Романовым, который в [27] в случае инверсных и произвольных константных неисправностей на выходах элементов для любого функционально полного базиса получил оценку $D(n) \leqslant 4$. В случае инверсных неисправностей на выходах элементов С.В. Коваценко в [10] для базиса Жегалкина установил, что $D(n) = 1$; Н.П. Редькин в [18] для классического базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ получил оценку $D(n) \leqslant 2$, а в [15] для произвольного функционального полного конечного базиса — оценку $D(n) \leqslant 3$. Ю.В. Бородиной в базисе Жегалкина для однотипных константных неисправностей на выходах элементов типа 1 [3] и типа 0 [4] (совместно с П.А. Бородиным) удалось найти точное значение функции Шеннона $D(n) = 1$.

Ряд результатов был получен и для полных проверяющих тестов. В случае произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов Н. П. Редькин в [20, 21] для любого полного конечного базиса получил оценку функции Шеннона длины полного проверяющего теста $D(n) \leqslant 2\left(2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} + n\right)$; Д.С. Романов в [28] доказал, что существует базис, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, в котором для той же функции Шеннона имеют место оценки $2 \leqslant D(n) \leqslant 4$. Для базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ Н.П. Редькин в [23] в случае однотипных константных неисправностей на входах элементов установил, что $D(n) \lesssim 4\left(2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}\right)$; им же в [22] в случае произвольных константных неисправностей на входах элементов получена оценка $D(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$. В том же базисе в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов Н.П. Редькин в [26] доказал, что $D(n) \leqslant n$. Эта оценка впоследствии была улучшена Ю.В. Бородиной, которая в [2] установила, что $D(n) = 2$ для однотипных константных неисправностей на выходах элементов.

Для длин единичных диагностических тестов также имеются принадлежащие Н.П. Редькину оценки функций Шеннона для базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ в случае однотипных константных неисправностей на входах [25] и на выходах [17] элементов — соответственно $D(n) \lesssim 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}$ и $D(n) \leqslant 2n + 1$. В работе [10] С.В. Коваценко для базиса Жегалкина и инверсных неисправностей на выходах элементов получил оценки функции Шеннона длин единичного и полного диагностического тестов — соответственно $D(n) \leqslant n + 1$ и $D(n) \leqslant 2^{n-2}$.

Еще одним направлением теории синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов является поиск минимальных тестов для схем, реализующих индивидуальные булевы функции или некоторые классы булевых функций. В.Г. Хахулин в [31] установил, что для линейной функции $f_n^{\oplus}(\tilde{x}) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ в произвольном базисе, в котором можно реализовать функции такого вида для любого $n \geqslant 1$, при наличии произвольных константных неисправностей на входах элементов имеет место оценка $n + 1 \leqslant D(f_n^{\oplus}) \leqslant n + 2$ длины минимального полного проверяющего теста. С.Р. Беджанова в [1] получила ряд верхних и нижних оценок длин единичных и полных проверяющих и диагностических тестов для схем, реализующих дизъюнкцию $n$ переменных $x_1 \vee \ldots \vee x_n$, а также для схем, реализующих обобщенную дизъюнкцию $n$ переменных вида $\overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_k} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n$. Там же показано, что все результаты работы [1] остаются справедливы и для двойственных функций $x_1\&\ldots\&x_n$ и $\overline{x_1}\&\ldots\&\overline{x_k}\&x_{k+1}\&\ldots\&x_n$ соответственно. Ю.В. Бородина в [5] для функции $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ в базисе $\{x \mid y\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов получила нижнюю оценку $D(f) \geqslant n+1$ длины минимального полного проверяющего теста.

В отличие от всех приведенных выше работ, в данной диссертации изучаются вопросы тестирования базисных элементов, из которых строятся схемы, а именно контактов и функциональных элементов, а не самих схем. Предполагается, что имеется некоторое фиксированное число базисных элементов, каждый из которых может перейти в одно из неисправных состояний из заранее оговоренного списка. (В данной работе в качестве неисправностей контактов рассматриваются их обрывы и замыкания, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов.) Из имеющихся элементов можно строить схемы и наблюдать функции, реализуемые этими схемами. По указанному набору функций требуется сделать вывод о состоянии каждого базисного элемента. Под проверяющим (диагностическим) тестом будет пониматься набор схем, позволяющих однозначно определить исправность или неисправность (соответственно состояние) каждого базисного элемента; под длиной теста — число схем, входящих в тест.

Указанная постановка задачи имеет ряд отличий от описанных выше постановок задач контроля исправности и диагностики неисправностей контактных схем и схем из функциональных элементов. Перечислим их.

1. Под тестом понимается набор схем, а не множество входных наборов из нулей и единиц; под длиной теста — число схем в наборах, а не число входных наборов из нулей и единиц. Каждую схему разрешается "прозванивать" на всех возможных ее входных наборах.

2. Не требуется, чтобы схемы, участвующие в тесте, реализовывали (в случае исправности всех входящих в них базисных элементов) какие-то заданные функции. Результатом тестирования должны являться выводы о состоянии каждого базисного элемента, а не о функциях, реализуемых схемами.

3. Число базисных элементов в каждой составляемой схеме ограничено сверху общим числом имеющихся базисных элементов.

**Цель работы**

Основной целью работы является нахождение верхних и нижних оценок длин тестов для контактов и функциональных элементов в различных случаях.

**Научная новизна работы**

Все результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Получена верхняя оценка $k+1$ длин минимальных проверяющего и диагностического тестов для $N$ контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и $\pi$-схем в случае, когда неисправными могут быть не более $k$ контактов и $k$ достаточно мало по сравнению с $N$.

2. Получены нижние оценки длин проверяющего и диагностического тестов для $N$ контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и $\pi$-схем в случае, когда неисправными могут быть не более $k$ контактов.

3. Для произвольного $N$ найдены точные значения длин минимальных проверяющего и диагностического тестов для $N$ контактов в классах произвольных двухполюсных контактных схем и $\pi$-схем в случае, когда неисправными могут быть не более $k$ контактов и $k \in \{1, N-1, N\}$.

4. Получена верхняя оценка $2k+1$ длины минимального проверяющего теста для $N$ функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, в случае, когда неисправными могут быть не более $k$ элементов, $k$ достаточно мало по сравнению с $N$, а функция $f$ отлична от конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Если при этом функция $f$ нелинейна, то та же верхняя оценка $2k+1$ получена и для длины минимального диагностического теста.

5. Получена нижняя оценка $k$ длин проверяющего и диагностического тестов для $N$ функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и среди которых не более $k$ неисправных. В случае, когда функция $f$ имеет специальный вид, получены более сильные нижние оценки.

6. Для произвольного $N$ найдены точные значения длин минимальных проверяющего и диагностического тестов для $N$ функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и среди которых не более $k$ неисправных, в следующих случаях:

а) $k = 1$;

б) $k \in \{2, N-1, N\}$ и выполнены некоторые ограничения на функцию $f$.

Все верхние оценки доказаны конструктивно.

**Методы исследования**

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, теории чисел, теории булевых функций.

**Теоретическая и практическая ценность**

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории диагностики управляющих систем. Представленные в диссертации методы синтеза могут быть использованы при практическом тестировании контактов и функциональных элементов.

**Структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на восемь параграфов, заключения и списка литературы из 45 наименований. Общий объем диссертации — 119 страниц, в работе содержится 12 рисунков. В каждом параграфе принята сквозная нумерация теорем, лемм, формул и рисунков.

## Содержание диссертации

В главе 1 рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний контактов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении из заданных контактов произвольных двухполюсных контактных схем либо $\pi$-схем [13, 33] с последующим "прозваниванием" этих схем, т.е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Опишем сначала постановку задачи для случая произвольных двухполюсных контактных схем. Представим, что имеются $N$ контактов ($N \geqslant 1$), занумерованных числами от 1 до $N$, из которых $N_1$ контактов с номерами от 1 до $N_1$ являются замыкающими, а $N_2$ контактов с номерами от $N_1 + 1$ до $N$ — размыкающими, где $N_2 = N - N_1$ ($N_1$ или $N_2$ может быть равно 0). В исправном состоянии каждый замыкающий контакт, рассматриваемый как простейшая контактная схема, реализует между своими концами (полюсами схемы) булеву функцию $x_i$, а размыкающий контакт — булеву функцию $\overline{x_i}$, где $x_i$ — отвечающая данному контакту переменная. Числа замыкающих контактов ($N_1$) и размыкающих контактов ($N_2$) предполагаются известными. В неисправном состоянии каждый контакт реализует между своими концами одну из булевых констант, т.е. 0 (при обрыве контакта) или 1 (при замыкании контакта). Замыкание, или, как еще иногда говорят, короткое замыкание здесь рассматривается как разновидность неисправности контакта (а не как функционирование исправного контакта, т.е. изменение его проводимости с нулевой на единичную). Предполагается, что среди данных $N$ контактов не более $k$ контактов могут быть неисправны, где $k$ – заданное натуральное число, $k \leqslant N$. Можно составлять любые двухполюсные контактные схемы из данных контактов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных. При этом предполагается, что в каждой из построенных схем разным контактам может отвечать одна и та же переменная, а в разных схемах одному и тому же контакту могут отвечать разные переменные; таким образом, вовсе не обязательно, чтобы в каждой схеме контакту с номером $n$ отвечала переменная $x_n$. (Например, в одной и той же схеме двум или более контактам может отвечать переменная $x_1$, а одному и тому же контакту в одной схеме может отвечать переменная $x_1$, в другой — $x_2$ и т.д.)

Задача заключается в том, чтобы протестировать контакты, т.е. для каждого из них определить, исправен данный контакт или неисправен (задача проверки), и, в дополнение к этому, определить тип неисправности каждого неисправного контакта (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

Предполагается, что в процессе экспериментирования исправные контакты остаются исправными, неисправные контакты — неисправными и тип неисправности каждого неисправного контакта сохраняется.

*Неисправностью системы контактов* будем называть любое множество неисправностей заданных контактов при условии, что число неисправных контактов не больше $k$. (В частности, случай, когда все $N$ контактов исправны, является одним из видов неисправности системы контактов.)

Неисправность любого контакта можно представить в виде упорядоченной пары $(n, \delta)$, где $n$ — номер этого контакта, $\delta$ — булева константа, которую он реализует (между своими концами). Соответственно, любую неисправность системы контактов можно представить в виде множества $\{(n_1, \delta_1), \ldots, (n_s, \delta_s)\}$, где $s$ – число неисправных контактов, $n_1, \ldots, n_s$ — номера неисправных контактов, $\delta_j$ – булева константа, которую реализует контакт с номером $n_j$.

*Диагностическим тестом* назовем такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \ldots,$ $S_l$, составленных из заданных контактов, что для любых двух различных неисправностей системы контактов наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают (т.е. существует схема $S_i$ такая, что реализуемая этой схемой функция при первой неисправности не совпадает с реализуемой этой же схемой функцией при второй неисправности). Число $l$ назовем *длиной* этого теста.

*Проверяющим тестом* назовем такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных контактов, что для любых двух неисправностей системы контактов, при которых множества неисправных контактов различны, наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают. Число $l$ назовем *длиной* этого теста.

Содержательный смысл данных определений состоит в следующем: диагностический (проверяющий) тест — это такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных $N$ контактов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние (соответственно исправность или неисправность) каждого из $N$ контактов. При этом проверяющий тест не обязан определять тип неисправности (обрыв или замыкание) каждого неисправного контакта.

Введем функции $L_c(N_1, N_2, k)$ и $L_d(N_1, N_2, k)$, равные длинам самых коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для $N_1$ замыкающих и $N_2$ размыкающих контактов, среди которых не более чем $k$ неисправных. Пусть $L_c(N, k) = L_c(N, 0, k)$ и $L_d(N, k) = L_d(N, 0, k)$.

Если в определениях диагностического и проверяющего тестов заменить двухполюсные контактные схемы на $\pi$-схемы (что подразумевает сужение класса допустимых схем), то можно аналогично ввести функции $L_c^\pi(N_1, N_2, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k)$, равные длинам самого коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для $N_1$ замыкающих и $N_2$ размыкающих контактов, среди которых не более чем $k$ неисправных, в классе $\pi$-схем, и положить $L_c^\pi(N, k) = L_c^\pi(N, 0, k)$ и $L_d^\pi(N, k) = L_d^\pi(N, 0, k)$.

Основной задачей в главе 1 будет нахождение оценок величин $L_c(N_1, N_2, k)$, $L_d(N_1, N_2, k)$, $L_c^\pi(N_1, N_2, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k)$ при различных $N_1$, $N_2$ и $k$.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины $N$ всегда можно взять набор из $N$ контактных схем (являющихся также $\pi$-схемами), каждая из которых представляет собой один из заданных контактов.

Перечислим основные результаты главы 1. В §1 доказано следующее

**Утверждение 1.2.** *Если* $N_1 + N_2 = N$, *то* $L_c(N_1, N_2, k) = L_c(N, 0, k)$, $L_d(N_1, N_2, k) =$

$L_d(N,0,k)$, $L_c^\pi(N_1,N_2,k) = L_c^\pi(N,0,k)$ *и* $L_d^\pi(N_1,N_2,k) = L_d^\pi(N,0,k)$.

Из утверждения 1.2, равенства $N_1 + N_2 = N$ и определения функций $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$ следуют равенства

$$L_c(N_1,N_2,k) = L_c(N_1+N_2,0,k) = L_c(N,0,k) = L_c(N,k),$$

$$L_d(N_1,N_2,k) = L_d(N_1+N_2,0,k) = L_d(N,0,k) = L_d(N,k),$$

$$L_c^\pi(N_1,N_2,k) = L_c^\pi(N_1+N_2,0,k) = L_c^\pi(N,0,k) = L_c^\pi(N,k),$$

$$L_d^\pi(N_1,N_2,k) = L_d^\pi(N_1+N_2,0,k) = L_d^\pi(N,0,k) = L_d^\pi(N,k),$$

из которых вытекает, что для нахождения величин $L_c(N_1,N_2,k)$, $L_d(N_1,\, N_2,k)$, $L_c^\pi(N_1,N_2,k)$ и $L_d^\pi(N_1,N_2,k)$ достаточно знать $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что все заданные контакты замыкающие.

В §2 получены верхние оценки для величин $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$ при некоторых условиях на числа $N$ и $k$.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $k\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N$ *и на отрезке* $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right]$ *содержится хотя бы одно простое число. Тогда* $L_c(N,k) \leqslant k+1$, $L_d(N,k) \leqslant k+1$, $L_c^\pi(N,k) \leqslant k+1$ *и* $L_d^\pi(N,k) \leqslant k+1$.

**Следствие 2.1.** *Пусть* $(2k-3)\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N$. *Тогда* $L_c(N,k) \leqslant k+1$, $L_d(N,k) \leqslant k+1$, $L_c^\pi(N,k) \leqslant k+1$ *и* $L_d^\pi(N,k) \leqslant k+1$.

В §3 для величин $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$ устанавливаются нижние оценки $\frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}$ и (при $k < N$) $\frac{k}{N-k}$. В случаях $k = N-1$ и $k = N$ показано, что $L_c(N,k) = L_d(N,k) = L_c^\pi(N,k) = L_d^\pi(N,k) = N$.

В §4 рассмотрен случай $k = 1$, т.е. когда неисправным может оказаться не более одного контакта. Пусть $L_c(N) = L_c(N,1)$, $L_d(N) = L_d(N,1)$, $L_c^\pi(N) = L_c^\pi(N,1)$ и $L_d^\pi(N) = L_d^\pi(N,1)$. Показано, что всегда $L_d(N) = L_c(N)$ и $L_d^\pi(N) = L_c^\pi(N)$. Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 4.1.** *Справедливо равенство*

$$L_c^\pi(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 1, \\ 2, & \text{если } N \geqslant 2. \end{cases}$$

**Теорема 4.2.** *Справедливо равенство*

$$L_c(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 1 \text{ или } N \geqslant 5, \\ 2, & \text{если } N \in \{2,3,4\}. \end{cases}$$

В главе 2 рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний функциональных элементов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении произвольных схем из заданных функциональных элементов с последующим "прозваниванием" этих схем, т.е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Представим, что имеются $N$ функциональных элементов ($N$ — заданное натуральное число), занумерованных числами от 1 до $N$. Каждый элемент, рассматриваемый как простейшая схема из функциональных элементов, имеет $n \geqslant 1$ входов $v_1, \ldots, v_n$ и один выход и в исправном состоянии реализует на выходе заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, подаваемые на его входы $v_1, \ldots, v_n$ соответственно (считаем, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и, как следствие, отлична от константы). В неисправном состоянии каждый элемент реализует одну из констант 0 или 1. Неисправность элемента, при которой он реализует константу 0 (1), будем называть *неисправностью этого элемента типа* 0 (1). Предполагается, что среди данных $N$ функциональных элементов не более $k$ элементов могут быть неисправны, где $k$ – заданное натуральное число, $k \leqslant N$. Можно составлять любые схемы с одним выходом из данных функциональных элементов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных.

Задача заключается в том, чтобы протестировать функциональные элементы, т.е. для каждого из них определить, исправен данный элемент или неисправен (задача проверки), и, в дополнение к этому, определить тип неисправности каждого неисправного элемента (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

Предполагается, что в процессе экспериментирования исправные элементы остаются исправными, неисправные элементы — неисправными и тип неисправности каждого неисправного элемента сохраняется.

*Неисправностью системы элементов* будем называть любое множество неисправностей заданных функциональных элементов при условии, что число неисправных элементов не больше $k$. (В частности, случай, когда все элементы исправны, является одним из видов неисправности системы элементов.)

Неисправность любого элемента можно представить в виде упорядоченной пары $(i, \delta)$, где $i$ – номер этого элемента, $\delta$ – булева константа, которую он реализует. Соответственно, любую неисправность системы элементов можно представить в виде множества $\{(i_1, \delta_1), \ldots, (i_s, \delta_s)\}$, где $s$ — число неисправных элементов, $i_1, \ldots, i_s$ — номера неисправных элементов, $\delta_j$ — булева константа, которую реализует элемент с номером $i_j$.

*Диагностическим тестом* назовем такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух различных неисправностей системы элементов наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают (т.е. существует схема $S_i$ такая, что реализуемая этой схемой функция при первой неисправности не совпадает с реализуемой этой же схемой функцией при второй неисправности). Число $l$ назовем *длиной* этого теста.

*Проверяющим тестом* назовем такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что для любых двух неисправностей системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны, наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают. Число $l$ назовем *длиной* этого теста.

Содержательный смысл этих определений состоит в следующем: диагностический (проверяющий) тест — это такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных $N$ функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние (соответственно исправность или неисправность) каждого из $N$ элементов. При этом проверяющий тест не обязан определять тип неисправности (0 или 1) каждого неисправного элемента.

Введем функции $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, равные длинам самых коротких соответственно проверяющего и диагностического тестов для $N$ функциональных элементов, реализующих в исправном состоянии функцию $f$, среди которых не более чем $k$ неисправных. Основной задачей в главе 2 будет нахождение оценок величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ при различных $f$, $N$ и $k$.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины $N$ всегда можно взять набор из $N$ схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов.

Перечислим основные результаты главы 2. В §5 получены верхние оценки для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ при некоторых условиях на функцию $f$ и числа $N$ и $k$.

**Теорема 5.1.** *Пусть булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1 \& \ldots \& x_n$, $x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $\overline{x_1}$, выполнено условие $\sqrt{N} \leqslant \frac{N}{4k+2}$ и на отрезке $\left[\sqrt{N}; \frac{N}{4k+2}\right]$ содержится хотя бы одно простое число. Тогда:*

1) $L_c(f, N, k) \leqslant 2k + 1$,

2) *если функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *нелинейна, то* $L_d(f, N, k) \leqslant 2k + 1$.

**Следствие 5.1.** *Пусть булева функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *не совпадает ни с одной из функций* $x_1 \& \ldots \& x_n$, $x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $\overline{x_1}$, *и выполнено условие* $8k + \frac{5}{2} \leqslant \sqrt{N}$. *Тогда:*

1) $L_c(f, N, k) \leqslant 2k + 1$,

2) *если функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *нелинейна, то* $L_d(f, N, k) \leqslant 2k + 1$.

В §6 для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ устанавливаются нижние оценки при различных $f$, $N$ и $k$. Отметим, что для любых $f$, $N$ и $k$ выполняется неравенство $L_d(f, N, k) \geqslant L_c(f, N, k)$, поскольку любой диагностический тест, согласно определениям, является также и проверяющим. Все нижние оценки в §6 будут формулироваться для величины $L_c(f, N, k)$; в силу последнего соотношения они будут справедливы также для $L_d(f, N, k)$.

**Теорема 6.1.** *Для любых* $f$, $N$ *и* $k$ *выполняется неравенство* $L_c(f, N,\ k) \geqslant k$.

В случае, когда функция $f$ имеет специальный вид, оценка теоремы 6.1 может быть улучшена.

**Теорема 6.2.** *Пусть* $f \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$, $n \geqslant 1$. *Тогда для любых* $N$ *и* $k$ *выполняется неравенство* $L_c(f, N, k) \geqslant \log_2(\sum\limits_{i=0}^{k} C_N^i)$.

**Теорема 6.3.** *Пусть* $n = 1$ *и* $f(x_1) = \overline{x_1}$. *Тогда для любых* $N$ *и* $k$ *выполняется неравенство* $L_c(f, N, k) \geqslant \log_3(\sum\limits_{i=0}^{k} 2^i C_N^i)$.

В качестве следствий из теорем 6.2, 6.3 получена нижняя оценка для величины $L_c(f, N, k)$ вида

$$\begin{cases} k(\log_2 N - \log_2 k) \text{ при } f \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}, \\ \log_3 2 \cdot k(\log_2 N - \log_2 k + 1) \text{ при } f = \overline{x_1}. \end{cases}$$

**Теорема 6.4.** *Пусть* $n \geqslant 2$, *функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет вид либо* $x_{s_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{s_m}^{\sigma_m} \& (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee x_{s_n}^{\sigma_n})$, *либо* $x_{s_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{s_m}^{\sigma_m} \vee (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \& \ldots \& x_{s_n}^{\sigma_n})$, *где* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant m \leqslant n - 1$ *и* $s_1, \ldots, s_n$ *— попарно различные индексы от 1 до* $n$, *и выполнено одно из следующих условий:*

1) $m = n - 1$ *и* $k \leqslant N - 1$,

2) $m \leqslant n - 2$ *и* $3 \leqslant k \leqslant N - 2$.

*Тогда* $L_c(f, N, k) \geqslant k + 1$.

Выделим два возможных представления функции $f$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}, \tag{$*$}$$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}, \qquad (**)$$

где $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \{0,1\}$.

В §7 установлены точные значения функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ в некоторых случаях. А именно, справедлива следующая

**Теорема 7.1.** *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ не представима ни в одном из видов* $(*)$, $(**)$ *и $k \in \{1,\ 2,\ N-1,\ N\}$. Тогда $L_c(f,N,k) = L_d(f,N,k) = k$.*

В §8 рассмотрен случай $k = 1$, т.е. когда неисправным может оказаться не более одного функционального элемента. Пусть $L_c(f,N) = L_c(f,N,1)$ и $L_d(f,N) = L_d(f,N,1)$. Показано, что всегда $L_d(f,N) = L_c(f,N)$. Доказана следующая

**Теорема 8.1.** *Справедливо равенство*

$$L_c(f,N) = \begin{cases} 1, & \text{если функция } f \text{ не представима ни в} \\ & \text{одном из видов } (*),\ (**); \\ \min(2;N), & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*) \\ & \text{или } (**),\text{ причем } n \geqslant 2 \text{ и хотя бы одно} \\ & \text{из чисел } \sigma_1,\ldots,\sigma_n \text{ равно нулю;} \\ \lceil \log_2(N+1) \rceil, & \text{если } f(x_1,\ldots,x_n) \in \{x_1\&\ldots\&x_n,\ x_1 \vee \ldots \\ & \vee x_n\}; \\ \lceil \log_3(2N+1) \rceil, & \text{если } n = 1 \text{ и } f(x_1) = \overline{x_1}. \end{cases}$$

**Апробация работы**

Результаты диссертации докладывались на семинаре "Диагностика управляющих систем" под руководством профессора Н.П. Редькина (МГУ, 2011–2015 гг.), на семинаре "Синтез управляющих систем" под руководством профессора О.М. Касим-Заде (МГУ, 2014 г., 2015 г.), на семинаре "Математические вопросы кибернетики" под руководством профессора О.М. Касим-Заде (МГУ, 2015 г.), на XVII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 2014 г.), на российско-индийской конференции "Алгебра, теория чисел, дискретная математика" (Москва, 2014 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2015" (МГУ, 2015 г.), на IX Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва — Красновидово, 2015 г.), на научной конференции "Ломоносовские чтения"

(МГУ, 2012 г.), в рамках Десятой молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 2015 г.).

**Публикации**

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 11 печатных работах [37–45], из них 7 [37–43] в научных журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ.

**Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Николаю Петровичу Редькину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также всем сотрудникам кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и сектора теоретической кибернетики Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН за поддержку и доброжелательное отношение.

# Глава 1. Проверяющие и диагностические тесты для контактов

Рассматриваются задачи проверки исправности и диагностики состояний $N_1$ замыкающих и $N_2$ размыкающих контактов, где числа $N_1$ и $N_2$ и тип каждого контакта предполагаются известными и $N_1 + N_2 = N$, путем составления из них двухполюсных контактных схем либо $\pi$-схем и наблюдения выдаваемых этими схемами значений на любых входных наборах значений переменных. Допускаются обрывы и замыкания контактов; при этом предполагается, что не более $k$ контактов неисправны, где $k$ – заданное натуральное число, не превосходящее $N$. Требуется минимизировать число схем, необходимых для проверки исправности и определения состояний всех контактов.

Отметим следующее обстоятельство: если в исходной постановке задачи в качестве неисправностей контактов допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), т.е. неисправности контактов предполагаются однотипными, то для диагностики контактов достаточно одной схемы, состоящей из $N$ параллельно (соответственно последовательно) соединенных заданных контактов, в которой контакту с номером $n$, $n = 1, \dots, N$, отвечает переменная $x_n$. Действительно, при любой неисправности системы контактов функция, реализуемая этой схемой, представляет собой дизъюнкцию (соответственно конъюнкцию) переменных, отвечающих исправным замыкающим контактам, и отрицаний переменных, отвечающих исправным размыкающим контактам, откуда следует, что состояние каждого контакта определяется по этой функции однозначно. Ввиду тривиальности этого случая, больше на нем останавливаться не будем.

Множество всех $N$ заданных контактов будем обозначать через $M$.

## §1. Сведение задач проверки и диагностики контактов к случаю замыкающих контактов

Покажем, что при нахождении оценок величин $L_c(N_1, N_2, k)$, $L_d(N_1, N_2, k)$, $L_c^\pi(N_1, N_2, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k)$ можно, не теряя общности, ограничиться случаем, когда все заданные контакты являются замыкающими.

**Утверждение 1.1.** *Пусть набор контактных схем ($\pi$-схем) $S_1, \ldots,$ $S_l$ является диагностическим (проверяющим) тестом. Тогда существует набор контактных схем (соответственно $\pi$-схем) $S'_1, \ldots, S'_l$, также являющийся диагностическим (соответственно проверяющим) тестом, такой, что в каждой из схем $S'_1, \ldots, S'_l$ каждому контакту с номером $n$, $n = 1, \ldots, N$, отвечает переменная $x_n$.*

*Доказательство.* Рассмотрим любую схему $S_i$ из схем $S_1, \ldots, S_l$. Всевозможные переменные, участвующие в этой схеме, обозначим через $x_{i,1}$, $x_{i,2}, \ldots, x_{i,n_i}$. Так как общее число контактов, содержащихся в схеме $S_i$, не может превосходить $N$, то $n_i \leqslant N$. Определим множества $M_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, как множества всех контактов, которым в схеме $S_i$ отвечает переменная $x_{i,j}$. Перенумеруем отвечающие контактам в этой схеме переменные так, чтобы каждому контакту с номером $n$, $n = 1, \ldots, N$, отвечала переменная $x_n$. Полученную схему обозначим $S'_i$. В итоге получим набор схем $S'_1, \ldots, S'_l$. Заметим, что если схемы $S_1, \ldots, S_l$ были $\pi$-схемами, то и схемы $S'_1, \ldots, S'_l$ будут $\pi$-схемами. Докажем, что если $(S_1, \ldots, S_l)$ — диагностический тест, то и $(S'_1, \ldots, S'_l)$ — диагностический тест (соответствующее утверждение для проверяющих тестов доказывается аналогично). Рассмотрим любые две различные неисправности системы контактов. Так как $(S_1, \ldots, S_l)$ – диагностический тест, то существует схема $S_i$ такая, что функции, реализуемые схемой $S_i$ при этих неисправностях, не совпадают. Но если в схеме $S'_i$ для любого $j$ от 1 до $n_i$ отождествить все переменные, отвечающие контактам из множества $M_{i,j}$, с переменной $x_{i,j}$, то схема $S'_i$, очевидно, будет функционировать в точности как схема $S_i$ как при отсутствии неисправностей контактов, так и при их наличии. Таким образом, функции, реализуемые схемой $S'_i$ при рассматриваемых двух неисправностях, будут совпадать с соответствующими функциями для схемы $S_i$ и, следовательно, различаться между собой. Однако эти функции получаются из исходных функций, реализуемых схемой $S'_i$ при рассматриваемых двух неисправностях, путем отождествления переменных с последующим их переименованием; таким образом, схема $S'_i$ реализует при этих неисправностях различные функции. Отсюда следует, что $(S'_1, \ldots, S'_l)$ — диагностический тест. Утверждение 1.1 доказано.

**Утверждение 1.2.** *Если $N_1 + N_2 = N$, то $L_c(N_1, N_2, k) = L_c(N, 0, k)$, $L_d(N_1, N_2, k) = L_d(N, 0, k)$, $L_c^\pi(N_1, N_2, k) = L_c^\pi(N, 0, k)$ и $L_d^\pi(N_1, N_2, k) = L_d^\pi(N, 0, k)$.*

*Доказательство.* Докажем вначале равенство $L_d(N_1, N_2, k) = L_d(N,\ 0, k)$. В силу утверждения 1.1 для $N_1$ замыкающих и $N_2$ размыкающих контактов, среди которых не более чем

$k$ неисправных, существует диагностический тест $(S_1, \ldots, S_l)$ длины $l = L_d(N_1, N_2, k)$, такой, что в каждой входящей в него схеме контакту с номером $n$, $n = 1, \ldots, N$, отвечает переменная $x_n$. В каждой из схем $S_1, \ldots, S_l$ заменим каждый размыкающий контакт на замыкающий контакт с тем же номером (переменные, отвечающие контактам, сохраняются). Получим набор схем $S'_1, \ldots, S'_l$. Покажем, что данный набор является диагностическим тестом для $N$ замыкающих контактов, среди которых не более чем $k$ неисправных. Пусть $H'_1$ и $H'_2$ — две произвольные различные неисправности системы контактов для $N$ замыкающих контактов. Рассмотрим следующие две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы контактов для $N_1$ замыкающих и $N_2$ размыкающих контактов: пусть при неисправности $H_1$ неисправны в точности контакты с теми же номерами, что и при $H'_1$, и тип неисправности у контактов с одинаковыми номерами одинаковый; аналогично для $H_2$ и $H'_2$. Так как $(S_1, \ldots, S_l)$ – диагностический тест, то существует такая схема $S_i$, что функции, реализуемые этой схемой при неисправностях $H_1$ и $H_2$ (обозначим их для краткости $f_{S_i,H_1}$ и $f_{S_i,H_2}$), не совпадают. Легко видеть, что функции, реализуемые схемой $S'_i$ при неисправностях $H'_1$ и $H'_2$ (обозначим их $f_{S'_i,H'_1}$ и $f_{S'_i,H'_2}$), получаются из функций соответственно $f_{S_i,H_1}$ и $f_{S_i,H_2}$ заменой всех переменных, отвечающих в схеме $S_i$ размыкающим контактам, их отрицаниями. Отсюда и из того, что $f_{S_i,H_1}$ не совпадает с $f_{S_i,H_2}$, следует несовпадение функций $f_{S'_i,H'_1}$ и $f_{S'_i,H'_2}$. Это означает, что набор схем $S'_1, \ldots, S'_l$ является диагностическим тестом для $N$ замыкающих контактов, среди которых не более чем $k$ неисправных. Таким образом, $L_d(N, 0, k) \leqslant l = L_d(N_1, N_2, k)$. Аналогично можно показать, что $L_d(N_1, N_2, k) \leqslant L_d(N, 0, k)$. Следовательно, $L_d(N_1, N_2, k) = L_d(N, 0, k)$. Доказательства трех других равенств из утверждения 1.2 проводятся аналогичным образом. При этом достаточно заметить, что при описанном переходе от набора схем $(S_1, \ldots, S_l)$ к набору схем $(S'_1, \ldots, S'_l)$ $\pi$-схемы остаются $\pi$-схемами (для величин $L^\pi_c$ и $L^\pi_d$), а если множества неисправных контактов различаются при неисправностях $H'_1$ и $H'_2$, то они будут различаться и при неисправностях $H_1$ и $H_2$, и воспользоваться определением проверяющего теста вместо определения диагностического теста (для величин $L_c$ и $L^\pi_c$). Утверждение 1.2 доказано.

Из утверждения 1.2, равенства $N_1 + N_2 = N$ и определения функций $L_c(N, k)$, $L_d(N, k)$, $L^\pi_c(N, k)$ и $L^\pi_d(N, k)$ следуют равенства

$$L_c(N_1, N_2, k) = L_c(N_1 + N_2, 0, k) = L_c(N, 0, k) = L_c(N, k),$$

$$L_d(N_1, N_2, k) = L_d(N_1 + N_2, 0, k) = L_d(N, 0, k) = L_d(N, k),$$

$$L_c^\pi(N_1,N_2,k)=L_c^\pi(N_1+N_2,0,k)=L_c^\pi(N,0,k)=L_c^\pi(N,k),$$
$$L_d^\pi(N_1,N_2,k)=L_d^\pi(N_1+N_2,0,k)=L_d^\pi(N,0,k)=L_d^\pi(N,k),$$

из которых вытекает, что для нахождения величин $L_c(N_1,N_2,k)$, $L_d(N_1,\,N_2,k)$, $L_c^\pi(N_1,N_2,k)$ и $L_d^\pi(N_1,N_2,k)$ достаточно знать $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что все заданные контакты замыкающие. В дальнейшем будем рассматривать только схемы, в которых каждому контакту с номером $n$, $n=1,\dots,N$, отвечает переменная $x_n$; в силу утверждения 1.1 такое ограничение не влияет на величины $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$. При построении схем указанное свойство дополнительно оговаривать не будем.

Отметим, что для любых $N$ и $k$ выполняются неравенства

$$L_c(N,k)\leqslant L_d(N,k)\leqslant L_d^\pi(N,k), \tag{1.1}$$
$$L_c(N,k)\leqslant L_c^\pi(N,k)\leqslant L_d^\pi(N,k), \tag{1.2}$$

поскольку любой диагностический тест, согласно определениям, является также и проверяющим, а класс всех $\pi$-схем уже класса всех двухполюсных контактных схем.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины $N$, очевидно, всегда можно взять набор из $N$ контактных схем, каждая из которых представляет собой один из заданных контактов. Отсюда и из того, что каждая из указанных схем является $\pi$-схемой, следует, что

$$L_c(N,k)\leqslant N, \tag{1.3}$$
$$L_d(N,k)\leqslant N, \tag{1.4}$$
$$L_c^\pi(N,k)\leqslant N, \tag{1.5}$$
$$L_d^\pi(N,k)\leqslant N. \tag{1.6}$$

## §2. Верхние оценки длин тестов для контактов

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, позволяющая в ряде случаев существенно улучшить верхние оценки для величин $L_c(N,k)$, $L_d(N,k)$, $L_c^\pi(N,k)$ и $L_d^\pi(N,k)$ в (1.3)–(1.6).

**Теорема 2.1.** *Пусть $k\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil\leqslant N$ и на отрезке $\left[k;\frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right]$ содержится хотя бы одно простое число. Тогда $L_c(N,k)\leqslant k+1$, $L_d(N,k)\leqslant k+1$, $L_c^\pi(N,k)\leqslant k+1$ и $L_d^\pi(N,k)\leqslant k+1$.*

**Следствие 2.1.** *Пусть* $(2k-3)\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N$. *Тогда* $L_c(N,k) \leqslant k+1$, $L_d(N,k) \leqslant k+1$, $L_c^\pi(N,k) \leqslant k+1$ *и* $L_d^\pi(N,k) \leqslant k+1$.

Сначала покажем, как следствие 2.1 выводится из теоремы 2.1. Рассмотрим два случая.

1. Либо $k = N = 1$, либо $k = 2$ и $N \leqslant 3$. Тогда верхние оценки в следствии 2.1 следуют из оценок (1.3)–(1.6).

2. Отрицание случая 1: либо $k = 1$ и $N \geqslant 2$, либо $k = 2$ и $N \geqslant 4$, либо $k \geqslant 3$. Достаточно показать, что из неравенства

$$(2k-3)\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N \tag{2.1}$$

следует существование простого числа $p$ такого, что

$$k \leqslant p \leqslant \frac{N}{\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим три подслучая.

2.1. Пусть $k = 1$ и $N \geqslant 2$. Тогда соотношение (2.2) принимает вид $1 \leqslant p \leqslant N$ и можно взять $p = 2$.

2.2. Пусть $k = 2$ и $N \geqslant 4$. Тогда соотношение (2.2) принимает вид $2 \leqslant p \leqslant \frac{N}{2}$ и можно взять $p = 2$.

2.3. Пусть $k \geqslant 3$. Тогда на отрезке $[k;\ 2k-3]$ содержится хотя бы одно простое число (в случае $k = 3$ это проверяется непосредственно, а при $k \geqslant 4$ — следует из постулата Бертрана: см., например, [8, с. 30]). Пусть $p$ — любое простое число из этого отрезка. В силу (2.1) имеем $k \leqslant p \leqslant 2k-3 \leqslant \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}$, т.е. соотношение (2.2) выполняется, что и требовалось показать.

*Доказательство теоремы 2.1* распадается на ряд этапов; некоторые из них представлены в виде лемм. В силу (1.1), (1.2) достаточно доказать только неравенство $L_d^\pi(N,k) \leqslant k+1$.

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и хотя бы одно из условий* $N \neq 5$, $k \neq 2$. *Тогда на отрезке* $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right]$ *можно выбрать такое простое число* $p$, *что* $p \geqslant \sqrt{N}$.

**Замечание 2.1.** В дальнейшем для краткости условие $N = 5$ и $k = 2$ будем записывать как $(N;k) = (5;2)$, а выполнение хотя бы одного из условий $N \neq 5$, $k \neq 2$ — как $(N;k) \neq (5;2)$.

*Доказательство леммы 2.1.* Если $k \geqslant \sqrt{N}$, то в качестве $p$, очевидно, можно взять любое простое число из указанного отрезка. Пусть $k < \sqrt{N}$. Согласно постулату Бертрана, для любого натурального $n > 3$ на интервале $(n; 2n-2)$ содержится хотя бы одно простое число. Отсюда следует, что для любого (не обязательно целого) $x \geqslant 1$ на отрезке $[x; 2x]$ содержится хотя бы одно простое число. Действительно, если $1 \leqslant x \leqslant 2$, то $2 \in [x; 2x]$; если $2 < x \leqslant 3$, то $3 \in [x; 2x]$. Если же $x > 3$, то $\lceil x \rceil > 3$, $x \leqslant \lceil x \rceil$ и $2\lceil x \rceil - 2 < 2(x+1) - 2 = 2x$, откуда следует, что на интервале $(\lceil x \rceil; 2\lceil x \rceil - 2)$ содержится хотя бы одно простое число, а сам этот интервал содержится в отрезке $[x; 2x]$. Таким образом, на отрезке $[x; 2x]$ содержится хотя бы одно простое число.

Рассмотрим сначала случай $\frac{N}{2\lceil\sqrt{k}\rceil} \geqslant \sqrt{N}$. Тогда $\frac{N}{2\lceil\sqrt{k}\rceil} \geqslant 1$, поэтому на отрезке $\left[\frac{N}{2\lceil\sqrt{k}\rceil}; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right]$ содержится хотя бы одно простое число. Возьмем в качестве $p$ любое простое число из этого отрезка, тогда $p \leqslant \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}$ и $p \geqslant \frac{N}{2\lceil\sqrt{k}\rceil} \geqslant \sqrt{N} > k$. Получаем, что $p \in \left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right]$ и $p \geqslant \sqrt{N}$, т.е. в этом случае лемма доказана.

Пусть теперь $\frac{N}{2\lceil\sqrt{k}\rceil} < \sqrt{N}$. Тогда $\sqrt{N} < 2\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil$; с другой стороны, $k < \sqrt{N}$. Отсюда $k < 2\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil$. Легко проверить, что это неравенство выполняется только при $k = 1, 2, 3, 5$. Из соотношения $k < \sqrt{N} < 2\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil$ следует, что $k^2 < N < 4\left(\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil\right)^2$. Рассмотрим отдельно случаи $k = 1, 2, 3, 5$.

1. Пусть $k = 1$. Тогда $1 < N < 4(\lceil\sqrt{1}\rceil)^2 = 4$, т.е. $2 \leqslant N \leqslant 3$; кроме того, $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right] = [1; N]$. Легко проверить, что условиям леммы удовлетворяет $p = 2$.

2. Пусть $k = 2$. Тогда $4 < N < 4(\lceil\sqrt{2}\rceil)^2 = 16$, т.е. $5 \leqslant N \leqslant 15$; кроме того, $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right] = \left[2; \frac{N}{2}\right]$. Заметим, что в этом случае по условиям леммы $N \neq 5$. Легко проверить, что в случае $6 \leqslant N \leqslant 9$ условиям леммы удовлетворяет $p = 3$, а в случае $10 \leqslant N \leqslant 15$ таковым является $p = 5$.

3. Пусть $k = 3$. Тогда $9 < N < 4(\lceil\sqrt{3}\rceil)^2 = 16$, т.е. $10 \leqslant N \leqslant 15$; кроме того, $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right] = \left[3; \frac{N}{2}\right]$. Легко проверить, что условиям леммы удовлетворяет $p = 5$.

4. Пусть $k = 5$. Тогда $25 < N < 4(\lceil\sqrt{5}\rceil)^2 = 36$, т.е. $26 \leqslant N \leqslant 35$; кроме того, $\left[k; \frac{N}{\lceil\sqrt{k}\rceil}\right] = \left[5; \frac{N}{3}\right]$. Легко проверить, что условиям леммы удовлетворяет $p = 7$. Лемма 2.1 доказана.

В случае $(N; k) \neq (5; 2)$ возьмем простое число $p$, удовлетворяющее условиям леммы 2.1. Тогда для него выполнены соотношения

$$p \geqslant \sqrt{N}, \tag{2.3}$$

$$p \geqslant k, \tag{2.4}$$

$$p \leqslant \frac{N}{\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil}. \tag{2.5}$$

Если же $(N;k) = (5;2)$, то положим $p = 3$. Тогда для него выполнены соотношения (2.3), (2.4). Для выбранного $p$ введем следующие подмножества множества $M$: пусть $A_{i,j}$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,p$ — множества, состоящие из всех контактов, номера которых представимы в виде $pm + 1 + ((j-1+m(i-1)) \bmod p)$, где $m$ — целое неотрицательное число; $A_{k+1,j}$, $j = 1,\ldots,\left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil$ — множества, состоящие из всех контактов, номера которых представимы в виде $p(j-1)+t$, где $t$ — натуральное число от 1 до $p$. (Отметим, что $|A_{k+1,j}| = p$ для $j \leqslant \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$; если $N$ не делится на $p$, то $\left|A_{k+1,\left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil}\right| < p$.)

**Пример 2.1.** Вид множеств $A_{i,j}$ для $N = 46, k = 3, p = 7$.

$$A_{1,1} = \{1,8,15,22,29,36,43\} \qquad A_{2,1} = \{1,9,17,25,33,41\}$$
$$A_{1,2} = \{2,9,16,23,30,37,44\} \qquad A_{2,2} = \{2,10,18,26,34,42,43\}$$
$$A_{1,3} = \{3,10,17,24,31,38,45\} \qquad A_{2,3} = \{3,11,19,27,35,36,44\}$$
$$A_{1,4} = \{4,11,18,25,32,39,46\} \qquad A_{2,4} = \{4,12,20,28,29,37,45\}$$
$$A_{1,5} = \{5,12,19,26,33,40\} \qquad A_{2,5} = \{5,13,21,22,30,38,46\}$$
$$A_{1,6} = \{6,13,20,27,34,41\} \qquad A_{2,6} = \{6,14,15,23,31,39\}$$
$$A_{1,7} = \{7,14,21,28,35,42\} \qquad A_{2,7} = \{7,8,16,24,32,40\}$$

$$A_{3,1} = \{1,10,19,28,30,39\} \qquad A_{4,1} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$A_{3,2} = \{2,11,20,22,31,40\} \qquad A_{4,2} = \{8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$A_{3,3} = \{3,12,21,23,32,41,43\} \qquad A_{4,3} = \{15,16,17,18,19,20,21\}$$
$$A_{3,4} = \{4,13,15,24,33,42,44\} \qquad A_{4,4} = \{22,23,24,25,26,27,28\}$$
$$A_{3,5} = \{5,14,16,25,34,36,45\} \qquad A_{4,5} = \{29,30,31,32,33,34,35\}$$
$$A_{3,6} = \{6,8,17,26,35,37,46\} \qquad A_{4,6} = \{36,37,38,39,40,41,42\}$$
$$A_{3,7} = \{7,9,18,27,29,38\} \qquad A_{4,7} = \{43,44,45,46\}$$

(Для удобства контакт с номером $n$ обозначаем просто $n$, где $n = 1, 2, \ldots, 46$.)
Графически это можно изобразить так, как показано на рис. 1.

**Лемма 2.2.** *Пусть $i \in \{1,\ldots,k\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $K \in A_{i,j}$ — контакт с номером $n$ и $m$ — произвольное целое неотрицательное число. Тогда $pm+1 \leqslant n \leqslant pm+p \Longleftrightarrow n = pm + 1 + ((j-1+m(i-1)) \bmod p)$.*

*Доказательство.* Следствие в левую сторону очевидно с учетом того, что $(j-1+m(i-1)) \bmod p \in \{0,1,\ldots,p-1\}$. Докажем следствие в правую сторону. Так как $K \in A_{i,j}$ и

$i \in \{1, \ldots, k\}$, то $n = pm' + 1 + ((j - 1 + m'(i-1)) \bmod p)$, где $m'$ — целое неотрицательное число, в силу определения множеств $A_{i,j}$. Тогда по доказанному следствию в левую сторону $pm' + 1 \leqslant n \leqslant pm' + p$. Это соотношение может выполняться одновременно с соотношением $pm + 1 \leqslant n \leqslant pm + p$ в том и только том случае, когда $m' = m$, так как весь натуральный ряд можно разбить на попарно непересекающиеся отрезки вида $[pm'' + 1; pm'' + p]$, где $m'' = 0, 1, 2, \ldots$. Получаем, что $n = pm + 1 + ((j - 1 + m(i-1)) \bmod p)$. Лемма 2.2 доказана.

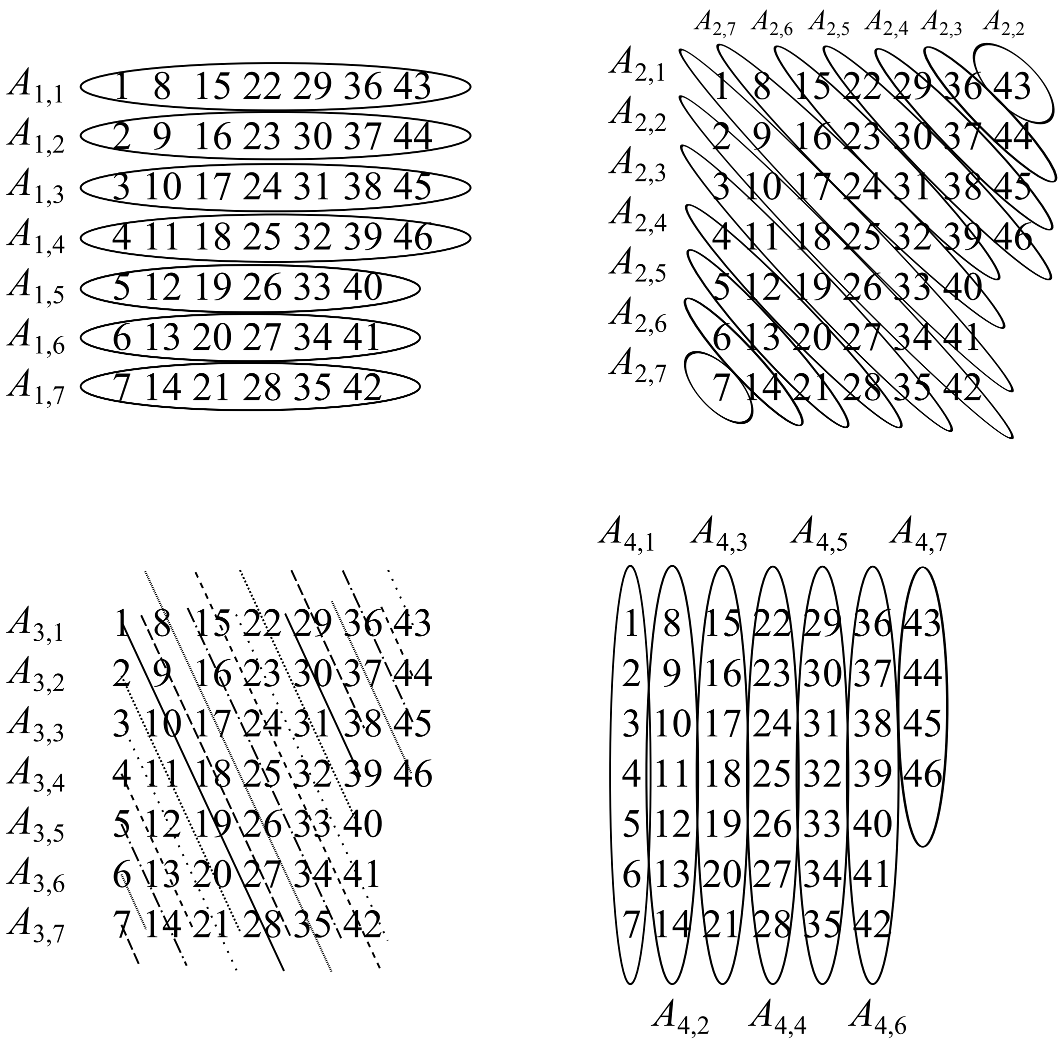



Рис. 1

Введем для удобства функцию

$$q(i) = \begin{cases} p & \text{при } i = 1, \ldots, k, \\ \left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil & \text{при } i = k+1, \end{cases}$$

равную числу множеств $A_{i,j}$ для заданного $i$.

**Лемма 2.3.** *Справедливы следующие утверждения:*

1) *для любых* $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, q(i)\}$ *таких, что* $j_1 \neq j_2$, $A_{i,j_1} \cap A_{i,j_2} = \varnothing$;

2) *для любого* $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ *выполняется соотношение* $\bigcup\limits_{j=1}^{q(i)} A_{i,j} = M$;

3) *для любых* $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k+1\}$, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, q(i)\}$ *таких, что* $i_1 \neq i_2$, *множества* $A_{i_1,j_1}$ *и* $A_{i_2,j_2}$ *пересекаются не более чем по одному контакту;*

4) *для любых* $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$ *множество* $A_{i,j}$ *содержит ровно* $\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$ *контактов с номерами от* 1 *до* $p \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$.

*Доказательство.* Докажем утверждение 1). В случае $i = k+1$ оно следует из определения множеств $A_{k+1,j}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, k\}$. Предположим, что некоторый контакт с номером $n$ принадлежит одновременно множествам $A_{i,j_1}$ и $A_{i,j_2}$ при $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$ и $j_1 \neq j_2$. Пусть $m$ — такое целое неотрицательное число, что $pm + 1 \leqslant n \leqslant pm + p$. Тогда, применяя лемму 2.2 при $j = j_1$ и $j = j_2$, получим, что $n = pm + 1 + ((j_1 - 1 + m(i-1)) \bmod p) = pm + 1 + ((j_2 - 1 + m(i-1)) \bmod p)$, откуда $(j_1 - 1 + m(i-1)) \bmod p = (j_2 - 1 + m(i-1)) \bmod p$. Это означает, что число $(j_1 - 1 + m(i-1)) - (j_2 - 1 + m(i-1)) = j_1 - j_2$ делится на $p$. Но $j_1$ и $j_2$ — различные натуральные числа от 1 до $p$, поэтому $0 < |j_1 - j_2| \leqslant p - 1$ и число $j_1 - j_2$ не может делиться на $p$. Полученное противоречие доказывает утверждение 1).

Докажем утверждение 2). В случае $i = k+1$ оно следует из определения множеств $A_{k+1,j}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, k\}$. Возьмем произвольный контакт $K$ с номером $n$ из множества $M$. Пусть $m$ — такое целое неотрицательное число, что $pm + 1 \leqslant n \leqslant pm + p$. Тогда $n = pm + 1 + d$, где $d \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Ясно, что при $j = 1, \ldots, p$ числа $j - 1 + m(i-1)$ образуют полную систему вычетов по модулю $p$, поэтому существует такое $j \in \{1, \ldots, p\}$, что $(j - 1 + m(i-1)) \bmod p = d$. Тогда $n = pm + 1 + ((j - 1 + m(i-1)) \bmod p)$, а это означает, что $K \in A_{i,j}$. Таким образом, выполняется включение $M \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p} A_{i,j}$. Обратное включение выполняется по определению множеств $A_{i,j}$. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Если $A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \varnothing$, то оно справедливо. Пусть некоторый контакт $K$ с номером $n$ принадлежит множеству $A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2}$. Рассмотрим сначала случай, когда одно из чисел $i_1$, $i_2$ (без ограничения общности $i_1$) равно $k + 1$. Так как $K \in A_{k+1,j_1}$, то $n = pm + t$, где $m = j_1 - 1$ и $t \in \{1, \ldots, p\}$. Отсюда $pm + 1 \leqslant n \leqslant pm + p$. Так как $K \in A_{i_2,j_2}$, то по лемме 2.2 имеем $n = pm + 1 + ((j_2 - 1 + m(i_2 - 1)) \bmod p)$. В силу того, что число $m$ определено однозначно, контакт $K \in A_{k+1,j_1} \cap A_{i_2,j_2}$ единственен, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k\}$. Так как $K \in A_{i_1,j_1}$ и $K \in A_{i_2,j_2}$, то

$$n = pm + 1 + ((j_1 - 1 + m(i_1 - 1)) \bmod p) = pm' + 1 + ((j_2 - 1 + m'(i_2 - 1)) \bmod p), \tag{2.6}$$

где $m$ и $m'$ — целые неотрицательные числа, а тогда $pm + 1 \leqslant n \leqslant pm + p$ и $pm' + 1 \leqslant n \leqslant pm' + p$ по лемме 2.2. Одновременное выполнение этих соотношений означает, что $m = m'$, откуда $pm + 1 + ((j_1 - 1 + m(i_1 - 1)) \bmod p) = pm + 1 + ((j_2 - 1 + m(i_2 - 1)) \bmod p)$ и $(j_1 - 1 + m(i_1 - 1)) \bmod p = (j_2 - 1 + m(i_2 - 1)) \bmod p$. Это означает, что число $(j_1 - 1 + m(i_1 - 1)) - (j_2 - 1 + m(i_2 - 1)) = j_1 - j_2 + m(i_1 - i_2)$ делится на $p$. Из (2.6) вытекает, что $m < \frac{n}{p}$. Покажем, что число $m$, удовлетворяющее последним двум условиям, единственно. Пусть для некоторого другого целого неотрицательного числа $m''$, меньшего $\frac{n}{p}$, число $j_1 - j_2 + m''(i_1 - i_2)$ делится на $p$. Тогда и число $j_1 - j_2 + m(i_1 - i_2) - (j_1 - j_2 + m''(i_1 - i_2)) = (m - m'')(i_1 - i_2)$ делится на $p$. Но $i_1$ и $i_2$ — различные натуральные числа от 1 до $k$, поэтому $0 < |i_1 - i_2| \leqslant k - 1 < p$ в силу (2.4), следовательно, числа $i_1 - i_2$ и $p$ взаимно просты. Отсюда и из простоты $p$ заключаем, что $m - m''$ делится на $p$. Так как $m \neq m'$, то большее из чисел $m$, $m''$ (без ограничения общности $m''$) не меньше $p$. Тогда $p \leqslant m'' < \frac{n}{p}$, откуда $p^2 < n$ и $p < \sqrt{n}$. Но $n \leqslant N$, так как контакт $K$ не может иметь номер, больший $N$. Следовательно, $p < \sqrt{N}$, что противоречит неравенству (2.3). Полученное противоречие показывает, что число $m$ определено однозначно и контакт $K \in A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2}$ единственен. Утверждение 3) доказано.

Докажем утверждение 4). Номера всех контактов, принадлежащих множеству $A_{i,j}$, имеют вид $pm + 1 + ((j - 1 + m(i - 1)) \bmod p)$. Для $m = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - 1$ число $n = pm + 1 + ((j - 1 + m(i - 1)) \bmod p)$ принадлежит отрезку $[pm + 1; pm + p]$ и выполнено соотношение $1 \leqslant n \leqslant p\left(\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - 1\right) + p = p\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \leqslant N$, поэтому контакты с номерами $pm + 1 + ((j - 1 + m(i - 1)) \bmod p)$ при $m = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - 1$ попарно различны и принадлежат множеству $A_{i,j}$; число этих контактов равно $\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$. Если же $m \geqslant \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$, то $pm + 1 + ((j - 1 + m(i - 1)) \bmod p) \geqslant p\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + 1$ и такие контакты (если они существуют) имеют номер, больший $p\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$. Утверждение 4), а вместе с ним и лемма 2.3 доказаны.

Введем обозначение $d = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$. В силу (2.5) при $(N; k) \neq (5; 2)$ верно неравенство $\frac{N}{p} \geqslant \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$, следовательно,

$$d \geqslant \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil. \tag{2.7}$$

В случае же $(N; k) = (5; 2)$ имеем $p = 3$ (согласно выбору этого числа), а тогда $d = 1$. В обоих случаях получаем, что

$$d \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Перейдем к построению схем $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$, которые составят диагностический тест. Для любого $i$ от 1 до $k+1$ построим схему $S_i$ следующим образом. Для каждого множества $A_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, q(i)$, составим цепь из всех контактов, входящих в это множество, и поставим ее в соответствие этому множеству (порядок контактов в цепи может быть произвольным). По утверждению 1) леммы 2.3 эти $p$ цепей попарно не пересекаются ни по одному контакту, а по утверждению 4) той же леммы и в силу (2.8) каждая цепь содержит хотя бы один контакт. Затем соединим все эти $q(i)$ цепей параллельно. Полюсами схемы объявим общие для всех цепей вершины.

Очевидно, что построенные схемы $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$ являются $\pi$-схемами. Заметим, что по утверждению 2) леммы 2.3 в каждой из этих схем содержатся все $N$ контактов. Кроме того, по построению выполнено следующее утверждение (i): каждому множеству $A_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, $j = 1, 2, \ldots, q(i)$, соответствует какая-то цепь в схеме $S_i$ и наоборот.

Вид схем $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$ при $N = 46, k = 3, p = 7$ показан на рис. 2.

Идея дальнейших рассуждений состоит в следующем. При любой неисправности системы контактов среди схем $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$ можно выделить "достаточно много" схем, которые не содержат цепей между полюсами, целиком состоящих из неисправных замкнутых контактов, и, соответственно, реализуют функции, отличные от тождественной единицы. Можно показать, что для любого исправного или неисправного замкнутого контакта хотя бы в одной схеме из числа выделенных схем в цепи, содержащей этот контакт, ни один контакт не оборван и хотя бы один контакт исправен. Далее уже нетрудно получить критерии того, что произвольный заданный контакт исправен, замкнут или оборван.

Отметим, что при фиксированной неисправности системы контактов любая из схем $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$ реализует тождественную единицу тогда и только тогда, когда в ней содержится цепь между полюсами, целиком состоящая из неисправных замкнутых контактов. Действительно, если бы такой цепи не было, то при подаче вместо всех переменных схемы нулей все исправные контакты были бы разомкнуты и проводимость схемы была бы нулевой.

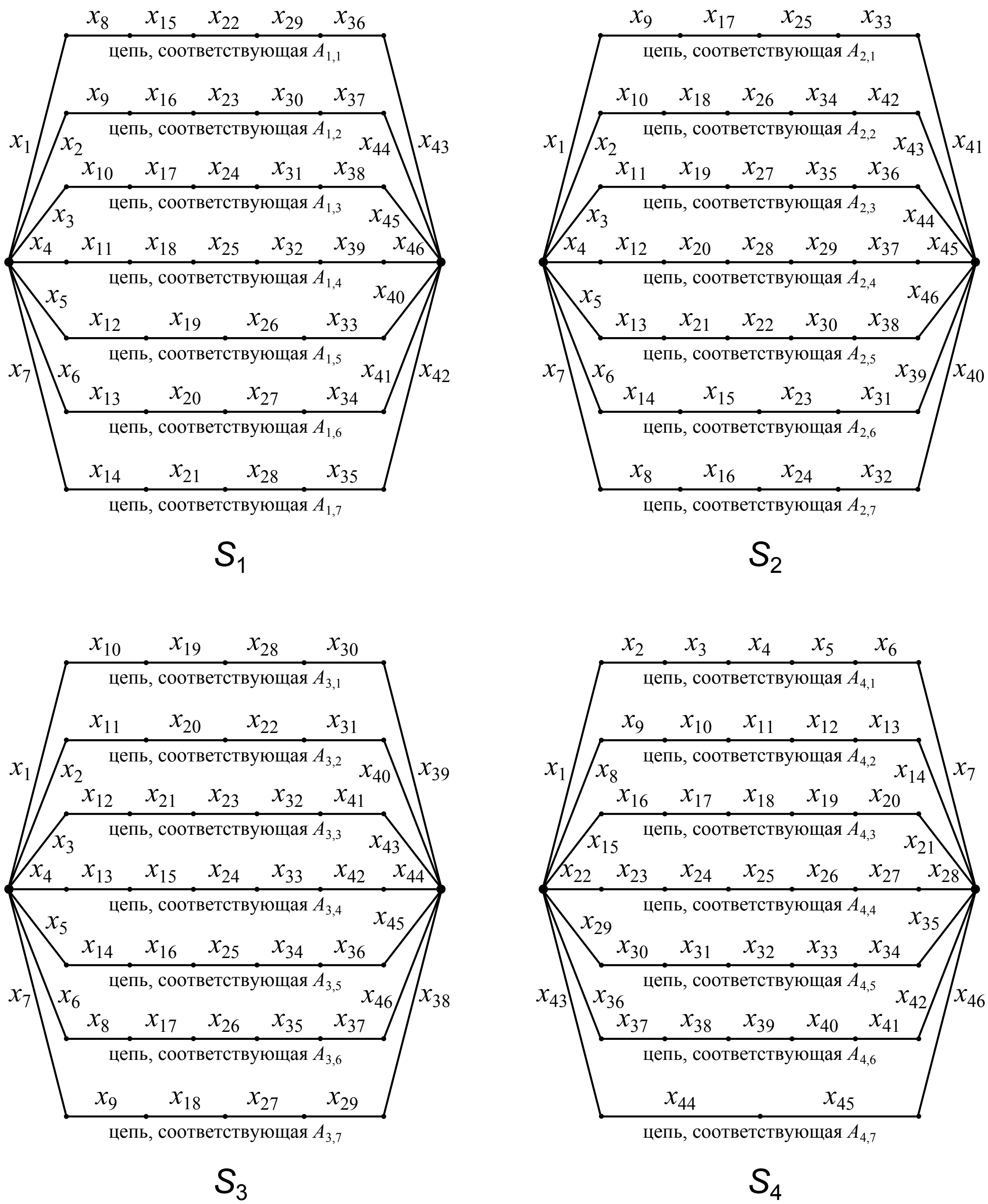



Рис. 2

**Лемма 2.4.** *Пусть* $(N; k) \neq (5; 2)$ *и при некоторой неисправности системы контактов среди контактов с номерами от* 1 *до* $pd$ *ровно* $r'$ *замкнутых. Тогда не более* $r'$ *схем из числа* $S_1, S_2, \ldots, S_k$ *реализуют тождественную единицу.*

*Доказательство.* При $r' = k$ справедливость леммы очевидна. Пусть $r' < k$. Предположим, что утверждение леммы не выполнено, т.е. некоторые схемы $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{r'+1}}$ реализуют тождественную единицу, где $i_1, i_2, \ldots, i_{r'+1}$ — попарно различные индексы от 1 до $k$.

Выберем из них произвольную схему $S_{i_t}$, $t=1,\ldots,r'+1$. Так как она реализует тождественную единицу, то в ней существует цепь, состоящая целиком из неисправных замкнутых контактов. Этой цепи в силу утверждения (i) соответствует некоторое множество $A_{i_t,j_t}$, которое также целиком состоит из неисправных замкнутых контактов. В нем определим подмножество $A'_{i_t,j_t}$, содержащее в точности все контакты из $A_{i_t,j_t}$ с номерами от 1 до $pd$. Тогда все контакты в $A'_{i_t,j_t}$ замкнуты и $|A'_{i_t,j_t}|=d$ по утверждению 4) леммы 2.3. В силу (2.8) в $A'_{i_t,j_t}$ содержится хотя бы один замкнутый контакт, откуда следует, что $r'\geqslant 1$.

Так как $t$ — произвольный индекс от 1 до $r'+1$, то определены множества $A'_{i_1,j_1}, A'_{i_2,j_2},\ldots$, $A'_{i_{r'+1},j_{r'+1}}$. Пусть $n_1,n_2,\ldots,n_{r'}$ — номера всех замкнутых контактов среди контактов с номерами от 1 до $pd$. Очевидно, что каждый контакт в каждом из множеств $A'_{i_1,j_1}, A'_{i_2,j_2},\ldots$, $A'_{i_{r'+1},j_{r'+1}}$ имеет один из номеров $n_1,n_2,\ldots,n_{r'}$. Пусть контакт с номером $n_s$, $s=1,\ldots,r'$, принадлежит ровно $\varphi(s)$ множествам из числа $A'_{i_1,j_1}, A'_{i_2,j_2},\ldots$, $A'_{i_{r'+1},j_{r'+1}}$. Пусть

$$\chi_n(A)=\begin{cases}1, & \text{если множество } A \text{ содержит контакт с номером } n,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{s=1}^{r'}\varphi(s)=\sum_{s=1}^{r'}\sum_{t=1}^{r'+1}\chi_{n_s}(A'_{i_t,j_t})=\sum_{t=1}^{r'+1}\sum_{s=1}^{r'}\chi_{n_s}(A'_{i_t,j_t})=\sum_{t=1}^{r'+1}|A'_{i_t,j_t}|=d(r'+1),$$

откуда следует, что хотя бы для одного $s$ выполняется соотношение

$$\varphi(s)\geqslant\left\lceil\frac{d(r'+1)}{r'}\right\rceil=d+\left\lceil\frac{d}{r'}\right\rceil\geqslant d+1,$$

т.е. контакт с номером $n_s$ принадлежит по крайней мере $d+1$ множеству из числа $A'_{i_1,j_1}, A'_{i_2,j_2}$, $\ldots, A'_{i_{r'+1},j_{r'+1}}$. Обозначим это $d+1$ множество для краткости через $A'_1,A'_2,\ldots,A'_{d+1}$, а контакт с номером $n_s$ через $K$. По построению, каждое из этих множеств содержит ровно $d$ замкнутых контактов с номерами от 1 до $pd$, одним из которых является $K$. Так как индексы $i_1,i_2,\ldots,i_{r'+1}$ попарно различны, то по утверждению 3) леммы 2.3 любые два из множеств $A'_{i_1,j_1}, A'_{i_2,j_2},\ldots,A'_{i_{r'+1},j_{r'+1}}$, в том числе любые два из множеств $A'_1,A'_2,\ldots,A'_{d+1}$, пересекаются не более чем по одному контакту. Но по построению контакт $K$ лежит в каждом из множеств $A'_1,A'_2,\ldots,A'_{d+1}$. Отсюда следует, что множества $A'_1, A'_2\setminus\{K\}, A'_3\setminus\{K\},\ldots,A'_{d+1}\setminus\{K\}$ попарно не пересекаются. В объединении этих множеств лежат

$$|A'_1|+|A'_2|-1+|A'_3|-1+\ldots+|A'_{d+1}|-1=d+d(d-1)$$
$$=d^2\geqslant(\text{см. (2.7)})\geqslant\left(\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil\right)^2\geqslant k>r'$$

замкнутых контактов с номерами от 1 до $pd$. С другой стороны, общее число замкнутых контактов с такими номерами равно $r'$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.4.

**Лемма 2.5.** *Пусть при некоторой неисправности системы контактов замкнуто ровно $r$ контактов. Тогда не более $r$ схем из числа $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$ реализуют тождественную единицу.*

*Доказательство.* Рассмотрим два случая.

1. Пусть $(N;k) = (5;2)$. В этом случае по построению $p = 3$, $A_{1,1} = \{1,4\}$, $A_{1,2} = \{2,5\}$, $A_{1,3} = \{3\}$, $A_{2,1} = \{1,5\}$, $A_{2,2} = \{2\}$, $A_{2,3} = \{3,4\}$, $A_{3,1} = \{1,2,3\}$, $A_{3,2} = \{4,5\}$ (для удобства, контакт с номером $n$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$, обозначаем здесь просто $n$). Вид схем $S_1, S_2, S_3$ при $(N;k) = (5;2)$ показан на рис. 3. Утверждение леммы в случае 1 проверяется непосредственно, исходя из вида этих схем и того, что $r \leqslant k = 2$. Стоит лишь отметить, что в случае $r = 2$ при замыкании контактов с номерами 4 и 5 схема $S_1$ (и $S_2$), а при остальных возможных неисправностях системы контактов — схема $S_3$ реализует функцию, отличную от тождественной единицы.

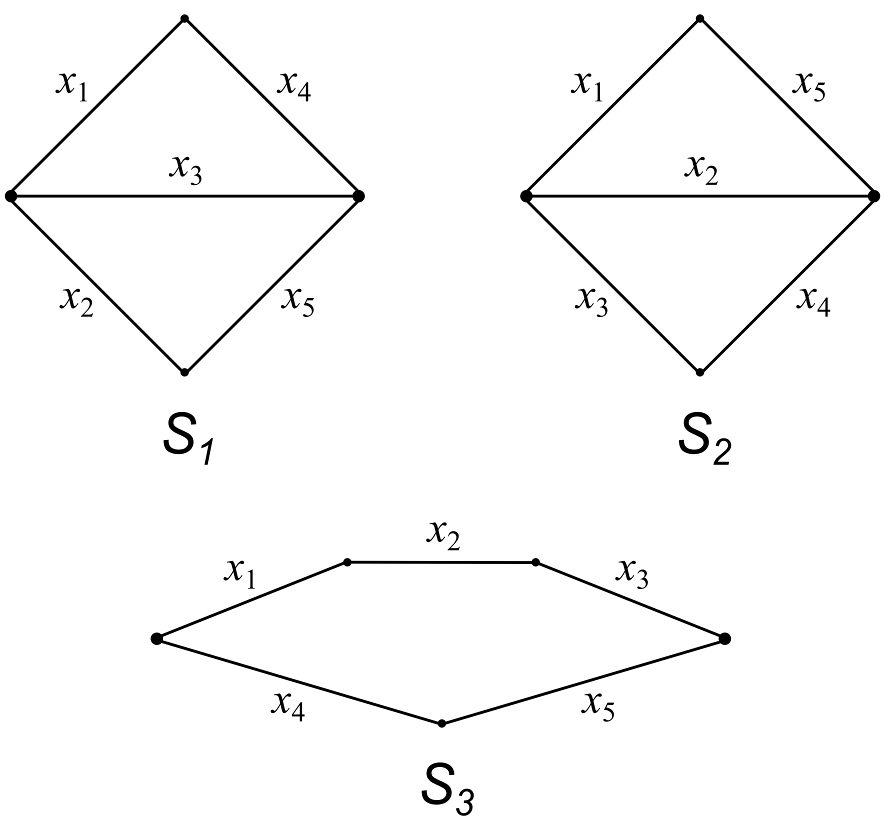



Рис. 3

2. Пусть $(N;k) \neq (5;2)$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть замкнут хотя бы один контакт с номером, большим $pd$. Тогда $r \geqslant 1$ и среди контактов с номерами от 1 до $pd$ замкнуто не более $r-1$ контакта. В силу леммы 2.4 не более $r-1$ схемы из числа $S_1, S_2, \dots, S_k$ реализуют тождественную единицу. В таком случае, вне зависимости от того, какую функцию реализует схема $S_{k+1}$, не более $r$ схем из числа $S_1, S_2, \dots, S_{k+1}$ реализуют тождественную единицу, что и требовалось доказать.

2.2. Пусть все замкнутые контакты имеют номера от 1 до $pd$. В силу леммы 2.4 не более $r$ схем из числа $S_1, S_2, \dots, S_k$ реализуют тождественную единицу. Если схема $S_{k+1}$ реализует функцию, отличную от тождественной единицы, то утверждение леммы 2.5 очевидно. Пусть схема $S_{k+1}$ реализует тождественную единицу. Тогда в ней содержится цепь, целиком состоящая из неисправных замкнутых контактов. Этой цепи в силу утверждения (i) соответствует некоторое множество $A_{k+1,j}$, состоящее целиком из неисправных замкнутых контактов. При этом, так как среди контактов с номерами, большими $pd$, нет ни одного замкнутого, $j \leqslant d$. Из построения множеств $A_{k+1,j}$ видно, что $|A_{k+1,j}| = p$ при $j \leqslant d$. С другой стороны, в силу неравенств $r \leqslant k \leqslant p$ (см. (2.4)) множество $A_{k+1,j}$ может содержать $p$ замкнутых контактов только в том случае, если

$$r = k = p. \tag{2.9}$$

Но тогда в этом множестве содержатся все неисправные контакты при рассматриваемой неисправности системы контактов. Так как $r = k$, то для доказательства леммы 2.5 достаточно доказать, что хотя бы одна из схем $S_1, \dots, S_k$, например, $S_1$, реализует функцию, отличную от тождественной единицы.

Предположим, что это не так. Тогда в схеме $S_1$ содержится цепь, состоящая целиком из неисправных замкнутых контактов, а значит, какое-то множество $A_{1,j'}$ состоит целиком из неисправных замкнутых контактов. По утверждению 3) леммы 2.3 множества $A_{1,j'}$ и $A_{k+1,j}$ пересекаются не более чем по одному контакту, а по утверждению 4) этой же леммы $|A_{1,j}| \geqslant \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor = d$. Но $d \geqslant \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{p} \right\rceil \geqslant \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2$ в силу (2.7), (2.9), поэтому $|A_{1,j'}| \geqslant 2$. Значит, $A_{1,j'}$ содержит хотя бы один контакт, не принадлежащий $A_{k+1,j}$ и, следовательно, исправный. Противоречие. Лемма 2.5 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Докажем, что построенный набор схем $S_1, S_2, \dots, S_{k+1}$ является диагностическим тестом.

Зафиксируем некоторую неисправность системы контактов. Пусть при ней замкнуто ровно $r$ контактов. Возьмем контакт с произвольным номером $n \in \{1, \ldots, N\}$ и обозначим его через $K$. Из леммы 2.5 следует, что из схем $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$ можно выбрать $k+1-r$ схем, имеющих функцию проводимости, отличную от тождественной единицы. Обозначим эти схемы через $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k+1-r}}$. Возьмем из них произвольную схему $S_{i_t}$. По утверждению 2) леммы 2.3 имеем $K \in \bigcup\limits_{j=1}^{q(i_t)} A_{i_t,j}$, т.е. $K$ принадлежит какому-то $A_{i_t,j_t}$, где $j_t$ — натуральное число от 1 до $q(i_t)$. Таким образом определены множества $A_{i_1,j_1}, A_{i_2,j_2}, \ldots, A_{i_{k+1-r},j_{k+1-r}}$. Согласно утверждению 3) леммы 2.3, любые два из этих множеств пересекаются не более чем по одному контакту. Но по построению они пересекаются по контакту $K$. Значит, множества $A_{i_1,j_1} \setminus \{K\}, A_{i_2,j_2} \setminus \{K\}, \ldots, A_{i_{k+1-r},j_{k+1-r}} \setminus \{K\}$ попарно не пересекаются. Число этих множеств равно $k+1-r$. С другой стороны, поскольку $r$ контактов замкнуты, то оборваны не более $k-r$ контактов. Таким образом, хотя бы в одном из этих множеств ни один контакт не оборван. Если теперь к этому множеству добавим контакт $K$, то получим одно из множеств $A_{i_1,j_1}, A_{i_2,j_2}, \ldots, A_{i_{k+1-r},j_{k+1-r}}$, в котором ни один контакт, кроме, быть может, $K$, не оборван. Этому множеству в силу утверждения (i) соответствует некоторая цепь $C$ из контактов в какой-то из схем $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k+1-r}}$ (обозначим эту схему через $S$), причем $K$ принадлежит $C$ и всякий отличный от $K$ контакт в этой цепи либо исправен, либо замкнут. Заметим, что в любой цепи между полюсами схемы $S$ присутствует хотя бы один незамкнутый контакт, так как иначе эта схема обладала бы тождественно единичной проводимостью, что неверно в силу выбора схем $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k+1-r}}$ и, в частности, схемы $S$. Предположим, что вместо всех переменных, отвечающих контактам, не входящим в цепь $C$, поданы нули. Тогда очевидно, что все остальные цепи между полюсами этой схемы будут обладать тождественно нулевой проводимостью. Значит, функция проводимости всей схемы будет равна функции проводимости цепи $C$, т.е. конъюнкции переменных, отвечающих исправным (незамкнутым) контактам в этой цепи, если контакт $K$ не оборван, либо тождественному нулю, если он оборван. Если контакт $K$ (имеющий, напомним, номер $n$) исправен, то эта функция существенно зависит от переменной $x_n$. Отсюда получаем, что и исходная функция, реализуемая схемой $S$ (до подачи вместо части переменных нулей), существенно зависит от $x_n$. Итак, если контакт $K$ исправен, то среди схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ хотя бы одна реализует функцию, существенно зависящую от $x_n$. Если же контакт $K$ неисправен, то очевидно, что ни одна из схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ не обладает этим свойством. Таким образом, по набору функций, реализуемых схемами

$S_1, \ldots, S_{k+1}$, можно определить, исправен контакт $K$ или нет.

Далее, если контакт $K$ неисправен и при этом замкнут, то в цепи $C$ есть хотя бы один исправный контакт и функция, реализуемая схемой $S$, существенно зависит от переменной, отвечающей этому контакту. Следовательно, в этом случае среди схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ можно выделить такую схему и такой контакт, находящийся в этой схеме в одной цепи с $K$, что функция проводимости этой схемы существенно зависит от переменной, отвечающей выделенному контакту. Если же $K$ неисправен и при этом оборван, то очевидно, что для любой схемы из числа $S_1, \ldots, S_{k+1}$ и любого контакта $K'$, находящегося в этой схеме в одной цепи с $K$, функция проводимости этой схемы не зависит существенно от переменной, отвечающей выбранному контакту $K'$ (так как проводимость этой цепи тождественно нулевая). Таким образом, зная, что контакт $K$ неисправен, по набору функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_{k+1}$, можно определить, замкнут он или оборван. В результате указанной процедуры состояние контакта $K$ определяется однозначно. Но в качестве $K$ можно взять любой контакт. Следовательно, по набору функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_{k+1}$, можно однозначно определить состояние каждого из $N$ контактов, т.е. $(S_1, \ldots, S_{k+1})$ — диагностический тест. Так как $S_1, \ldots, S_{k+1}$ — $\pi$-схемы, то $L_d^\pi(N, k) \leqslant k + 1$. Теорема 2.1 доказана.

## §3. Нижние оценки длин тестов для контактов

В данном параграфе устанавливаются некоторые нижние оценки для величин $L_c(N, k)$, $L_d(N, k)$, $L_c^\pi(N, k)$ и $L_d^\pi(N, k)$ при различных $N$ и $k$. В теореме 3.1 и следствиях 3.1, 3.2 эти оценки будут формулироваться для величины $L_c(N, k)$; в силу (1.1), (1.2) они будут справедливы также для $L_d(N, k)$, $L_c^\pi(N, k)$ и $L_d^\pi(N, k)$. Прежде всего заметим, что

$$L_c(N, k) \geqslant 1 \tag{3.1}$$

(пустой набор схем не может быть проверяющим тестом).

Пусть числа $N$ и $k$ зафиксированы. Введем следующую последовательность чисел: $r_1 = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$, $r_{i+1} = \left\lfloor \sqrt{N - \sum\limits_{j=1}^{i} r_j} \right\rfloor$ для $i \geqslant 1$, если $\sum\limits_{j=1}^{i} r_j < N$.

**Теорема 3.1.** *Если $t$ — такое натуральное число, что все числа $r_1, \ldots, r_t$ определены и $\sum\limits_{i=1}^{t} r_i \leqslant k - 1$, то $L_c(N, k) \geqslant t + 1$.*

**Следствие 3.1.** *Для любых $N$ и $k$ справедливо неравенство $L_c(N, k) \geqslant \frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}$.*

Сначала покажем, как следствие 3.1 выводится из теоремы 3.1. Если $\frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \leqslant 1$, то следствие очевидно в силу (3.1). Пусть $\frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} > 1$, тогда $\frac{k-1}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \geqslant 1$ в силу того, что на интервале $\left(\frac{k-1}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}; \frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}\right)$ не могут содержаться целые числа и, в частности, единица. Возьмем в условии теоремы 3.1 в качестве $t$ число $\left\lfloor\frac{k-1}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}\right\rfloor$, тогда $t \geqslant 1$. Из определения чисел $r_i$ имеем, что $r_i \leqslant \left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor$ для любого $i \geqslant 1$, если только $r_i$ определено. Для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{i} r_j \leqslant i\left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor \leqslant t\left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor \leqslant \frac{k-1}{\left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor}\left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor = k-1 < N, \tag{3.2}$$

а тогда по индукции число $r_{i+1}$ определено и, кроме того, из (3.2) при $i = t$ следует, что $\sum\limits_{i=1}^{t} r_i \leqslant k-1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1 и $L_c(N,k) \geqslant t+1 = \left\lfloor\frac{k-1}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}\right\rfloor + 1 > \frac{k-1}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}$, но тогда $L_c(N,k) \geqslant \frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}$ опять же в силу того, что на интервале $\left(\frac{k-1}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}; \frac{k}{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}\right)$ не могут содержаться целые числа. Следствие 3.1 доказано.

Доказательству теоремы 3.1 предпошлем два вспомогательных утверждения. Пусть $S$ — произвольная двухполюсная контактная схема с полюсами $A$ и $B$, содержащая не более чем $n$ контактов, где $0 \leqslant n \leqslant N$. Для каждого контакта $K$ в схеме $S$ введем функцию $d(K)$, равную длине самой короткой цепи, содержащей данный контакт, одним из концов которой является полюс $A$, если такая цепь существует. (Под длиной цепи понимается число содержащихся в ней контактов.) В противном случае полагаем, что значение $d(K)$ не определено. Очевидно, что $d(K) = 1$ для всех контактов, инцидентных $A$. Через $A - K_{(1)} - \ldots - K_{(m)} - A'$ будем обозначать цепь в схеме $S$ с концами $A$ и $A'$, содержащую последовательно контакты $K_{(1)}, \ldots, K_{(m)}$ при движении от полюса $A$ к вершине $A'$.

**Лемма 3.1.** Пусть $A - K_{(1)} - \ldots - K_{(m)} - A'$ — цепь в схеме $S$ и $m \geqslant 2$. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ значения $d(K_{(i)})$, $d(K_{(i+1)})$ определены и $d(K_{(i+1)}) \leqslant d(K_{(i)}) + 1$.

*Доказательство.* Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Контакты $K_{(i)}$ и $K_{(i+1)}$ содержатся в цепи $A - K_{(1)} - \ldots - K_{(m)} - A'$, одним из концов которой является $A$, откуда следует, что значения $d(K_{(i)})$, $d(K_{(i+1)})$ определены. Далее, если к самой короткой цепи, содержащей контакт $K_{(i)}$, одним из концов которой является $A$, добавить контакт $K_{(i+1)}$, то получится цепь длины не более $d(K_{(i)}) + 1$, содержащая контакт $K_{(i+1)}$, одним из концов которой является $A$, так как контакты $K_{(i)}$ и $K_{(i+1)}$ имеют в схеме $S$ хотя бы одну общую вершину. Отсюда

$d(K_{(i+1)}) \leqslant d(K_{(i)}) + 1$. Лемма 3.1 доказана.

Множество контактов схемы $S$ назовем *сечением*, если оно имеет хотя бы один общий контакт с любой цепью, соединяющей полюса $A$ и $B$ схемы $S$.

**Лемма 3.2.** В схеме $S$ существует либо цепь между полюсами, содержащая не более $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ контактов, либо сечение, содержащее не более $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ контактов.

*Доказательство.* В случае $n = 0$ утверждение леммы очевидно. Пусть $n \geqslant 1$ и $r = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, тогда $r \geqslant 1$. Предположим, что утверждение леммы не выполнено, т.е. любая цепь между полюсами схемы $S$ и любое сечение данной схемы содержат не менее $r+1$ контакта. В схеме $S$ должна существовать хотя бы одна цепь между полюсами, так как иначе пустое множество было бы ее сечением, что неверно в силу неравенства $0 < r + 1$. Пусть $M_i$, $i = 1, \ldots, r + 1$ — множества, состоящие из всех контактов $K_j$, для каждого из которых $d(K_j) = i$. Очевидно, что множества $M_i$ попарно не пересекаются и состоят только из контактов, принадлежащих схеме $S$. Докажем, что каждое из них является сечением схемы $S$. Пусть $A - K_{(1)} - \ldots - K_{(m)} - B$ — произвольная цепь между ее полюсами. Тогда $d(K_{(1)}) = 1$. Из принадлежности контакта $K_{(m)}$ данной цепи следует, что значение $d(K_{(m)})$ определено и $d(K_{(m)}) \leqslant m$. С другой стороны, контакт $K_{(m)}$ не может содержаться в схеме $S$ в цепи длины менее $r + 1$, одним из концов которой является полюс $A$, так как в противном случае в $S$ существовала бы цепь между полюсами $A$ и $B$ длины менее $r + 1$, что невозможно по предположению. Таким образом, $d(K_{(m)}) \geqslant r+1$ и, как следствие, $m \geqslant r+1 \geqslant 2$. Из соотношений $d(K_{(1)}) = 1$, $d(K_{(m)}) \geqslant r+1$ и $d(K_{(i+1)}) \leqslant d(K_{(i)})+1$ для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ (последнее верно в силу леммы 3.1) следует, что среди чисел $d(K_{(1)}), d(K_{(2)}), \ldots, d(K_{(m)})$ встречаются все целые числа от 1 до $r + 1$. Это означает, что каждому множеству $M_i$, $i = 1, \ldots, r + 1$, принадлежит хотя бы один контакт из числа $K_{(1)}, K_{(2)}, \ldots, K_{(m)}$, откуда следует, что каждое из этих множеств является сечением схемы $S$.

Поскольку любое сечение схемы $S$ по предположению содержит не менее $r + 1$ контакта, для любого $i \in \{1, \ldots, r + 1\}$ верно неравенство $|M_i| \geqslant r + 1$. В силу того, что множества $M_i$ попарно не пересекаются, выполняется соотношение

$$\left|\bigcup_{i=1}^{r+1} M_i\right| = \sum_{i=1}^{r+1} |M_i| \geqslant (r+1)^2 = \left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1\right)^2 > \left(\sqrt{n}\right)^2 = n.$$

Получаем, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{r+1} M_i$, состоящее только из контактов, принадлежащих схеме

$S$, имеет мощность не менее $n+1$. Однако в схеме $S$ содержится не более $n$ контактов. Полученное противоречие доказывает лемму 3.2.

*Доказательство теоремы 3.1.* Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т.е. $l = L_c(N,k) \leqslant t$ и существует набор контактных схем $S_1^1, \ldots, S_l^1$, являющийся проверяющим тестом. Опишем по индукции некоторую процедуру, содержащую $l$ шагов. Считаем перед началом процедуры, что построены схемы $S_1^1, \ldots, S_l^1$. Предположим, что уже построены схемы $S_i^i, \ldots, S_l^i$, где $i \in \{1, \ldots, l\}$, и множества контактов $M_j$ для любого натурального $j$ такого, что $j \leqslant i-1$, причем множества $M_j$ попарно не пересекаются при различных $j$, $|M_j| = r_j$ и ни в одной из схем $S_i^i, \ldots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству $M_j$. При $i=1$ все эти условия, очевидно, выполнены. Так как $|M_j| = r_j$ для $1 \leqslant j \leqslant i-1$, то схема $S_i^i$ состоит не более чем из $N - \sum\limits_{j=1}^{i-1} r_j$ контактов, поэтому по лемме 3.2 при $n = N - \sum\limits_{j=1}^{i-1} r_j$ возможны два случая.

1. В схеме $S_i^i$ существует цепь между полюсами, содержащая не более $\left\lfloor \sqrt{N - \sum\limits_{j=1}^{i-1} r_j} \right\rfloor = r_i$ контактов. Пусть это контакты $K_1^i, \ldots, K_{m_i}^i$, $m_i \leqslant r_i$. Если $m_i < r_i$, то пусть $K_{m_i+1}^i, \ldots, K_{r_i}^i$ — произвольные $r_i - m_i$ контактов, отличные от контактов $K_1^i, \ldots, K_{m_i}^i$ и принадлежащие множеству $M \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} M_j$ (такие контакты существуют, так как $\sum\limits_{j=1}^{i} r_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{t} r_j \leqslant k-1 < N$ и поэтому $\left| M \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} M_j \right| = N - \sum\limits_{j=1}^{i-1} r_j > r_i$). Пусть $M_i = \{K_1^i, \ldots, K_{r_i}^i\}$. Так как ни в одной из схем $S_i^i, \ldots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству $M_j$, где $1 \leqslant j \leqslant i-1$, то множество $M_i$ не пересекается ни с одним из множеств $M_j$ при $1 \leqslant j \leqslant i-1$. Предположим, что все контакты из множества $M_i$ неисправны и при этом замкнуты. Тогда в схеме $S_i^i$ существует цепь между полюсами, обладающая тождественно единичной проводимостью, а в этом случае схема $S_i^i$, вне зависимости от состояний остальных $N - \sum\limits_{j=1}^{i} r_j$ контактов, реализует тождественную единицу.

2. В схеме $S_i^i$ существует сечение, содержащее не более $\left\lfloor \sqrt{N - \sum\limits_{j=1}^{i-1} r_j} \right\rfloor = r_i$ контактов. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1 с той разницей, что все контакты из множества $M_i$ предполагаются оборванными. Тогда в схеме $S_i^i$ существует сечение, состоящее целиком из оборванных контактов, а в этом случае, согласно определению сечения, в $S_i^i$ не может быть ни одной проводящей цепи между полюсами, т.е., вне зависимости от состояний

остальных $N - \sum\limits_{j=1}^{i} r_j$ контактов, данная схема реализует тождественный нуль.

Получаем, что в каждом из двух случаев при соответствующих неисправностях контактов из множества $M_i$ схема $S_i^i$ реализует некоторую булеву константу $\delta_i$. Если $i = l$, то процедуру остановим. Если же $i < l$, то при данных неисправностях контактов каждая из схем $S_j^i$, $j = i+1, \ldots, l$, может содержать некоторые контакты из множества $M_i$, которые либо замкнуты, либо оборваны. В обоих случаях удалим все неисправные контакты из $M_i$ из схемы $S_j^i$, а в случае, если неисправные контакты были замкнуты, изменим топологию схемы $S_j^i$, стянув две вершины (концы) каждого замкнутого контакта в одну (эта операция хорошо известна в теории контактных схем). При этом схема $S_j^i$ перейдет в некоторую двухполюсную контактную схему $S_j^{i+1}$, функционирующую в точности как схема $S_j^i$ как в случае, когда все контакты из множества $M \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i} M_j$ исправны, так и в случае неисправности некоторых контактов из этого множества. На этом считаем $i$-й шаг процедуры завершенным и заменяем $i$ на $i+1$.

В результате $l$ шагов указанной процедуры строятся набор схем $S_j^i$, $i = 1, \ldots, l$, $j = i, \ldots, l$, попарно непересекающиеся множества $M_1, \ldots, M_l$ такие, что $|M_j| = r_j$, и булевы константы $\delta_1, \ldots, \delta_l$ такие, что при соответствующих неисправностях контактов из множества $\bigcup\limits_{j=1}^{l} M_j$ каждая из схем $S_j^i$, $i = 1, \ldots, l$, $j = i, \ldots, l$, функционирует в точности как схема $S_j^1$, а каждая из схем $S_i^i$, $i = 1, \ldots, l$, реализует булеву константу $\delta_i$. Отсюда следует, что и каждая из схем $S_i^1$, $i = 1, \ldots, l$, реализует при рассматриваемых неисправностях контактов булеву константу $\delta_i$. Общее число неисправных контактов равно $\left|\bigcup\limits_{j=1}^{l} M_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{l} |M_j| = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{t} r_j \leqslant k-1$ по условию теоремы, в то время как общее число контактов равно $N \geqslant k$. Значит, существует некоторый контакт $K$, принадлежащий множеству $M \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{l} M_j)$. Однако по набору функций, реализуемых схемами $S_1^1, \ldots, S_l^1$, невозможно определить, исправен контакт $K$ или, скажем, оборван, так как в обоих этих случаях данный набор функций равен $(\delta_1, \ldots, \delta_l)$. Осталось заметить, что оба этих случая представляют собой допустимые неисправности системы контактов, поскольку общее число неисправных контактов не превосходит $\left|\bigcup\limits_{j=1}^{l} M_j\right| + 1 \leqslant k-1+1 = k$. Получено противоречие, так как $(S_1^1, \ldots, S_l^1)$ — проверяющий тест. Теорема 3.1 доказана.

Следствия 2.1 и 3.1 позволяют утверждать, что при выполнении условия

$$(2k-3)\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil \leqslant N \tag{3.3}$$

справедливы неравенства

$$\frac{k}{\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor} \leqslant L_c(N,k) \leqslant k+1 \tag{3.4}$$

и аналогичные неравенства для величин $L_d(N,k)$, $L_c^{\pi}(N,k)$ и $L_d^{\pi}(N,k)$. В общем случае нижняя и верхняя оценки для $L_c(N,k)$ в (3.4) достаточно далеки друг от друга. Покажем, что при некотором дополнительном условии на числа $k$ и $N$ нижняя оценка, подобно верхней, становится степенной по $k$. Пусть $c_1$, $c_2$, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — константы, удовлетворяющие условиям $0 < c_1 < c_2$, $\frac{3}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < 2$, и $N = ck^{\alpha}$, где $c \in [c_1; c_2]$ и $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$. Проверим вначале для таких $N$ и $k$ выполнение условия (3.3). В силу соотношения $\alpha \geqslant \alpha_1 > \frac{3}{2}$ имеем

$$(2k-3)\left\lceil \sqrt{k} \right\rceil \leqslant 2k(\sqrt{k}+1) \leqslant 2k \cdot 2\sqrt{k} = 4k^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqslant (\text{при достаточно больших } k) \leqslant c_1 k^{\alpha_1} \leqslant ck^{\alpha} = N,$$

т.е. для достаточно больших $k$ условие (3.3) выполняется. Тогда из (3.4) получаем, что

$$L_c(N,k) \geqslant \frac{k}{\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor} = \frac{k}{\left\lfloor \sqrt{ck^{\alpha}} \right\rfloor} \geqslant \frac{k}{\sqrt{ck^{\alpha}}} = \frac{k^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{c}} \geqslant \frac{k^{1-\frac{\alpha_2}{2}}}{\sqrt{c_2}},$$

где $1 - \frac{\alpha_2}{2} > 0$ в силу того, что $\alpha_2 < 2$, т.е нижняя оценка становится степенной по $k$, что и требовалось показать.

**Теорема 3.2.** *Пусть $k < N$ и $r = \left\lfloor \frac{k-1}{N-k} \right\rfloor$. Тогда $L_c(N,k) \geqslant r + L_c(N-r(N-k), k-r(N-k))$ и $L_d(N,k) \geqslant r + L_d(N-r(N-k), k-r(N-k))$.*

**Следствие 3.2.** *Если $k < N$, то $L_c(N,k) \geqslant \frac{k}{N-k}$.*

**Следствие 3.3.** *Пусть либо $N \geqslant 2$ и $k = N-1$, либо $k = N$. Тогда $L_c(N,k) = L_d(N,k) = L_c^{\pi}(N,k) = L_d^{\pi}(N,k) = N$.*

Сначала покажем, как следствия 3.2 и 3.3 выводятся из теоремы 3.2.

*Доказательство следствия 3.2.* Пусть $r = \left\lfloor \frac{k-1}{N-k} \right\rfloor$. Тогда

$$N - r(N-k) \geqslant k - r(N-k) = k - \left\lfloor \frac{k-1}{N-k} \right\rfloor (N-k) \geqslant k - \frac{k-1}{N-k}(N-k) = 1$$

и в силу теоремы 3.2 и (3.1)

$$L_c(N,k) \geqslant r + L_c(N-r(N-k), k-r(N-k)) \geqslant r+1 > \frac{k-1}{N-k},$$

а в таком случае $L_c(N,k) \geqslant \frac{k}{N-k}$ в силу того, что на интервале $\left(\frac{k-1}{N-k}; \frac{k}{N-k}\right)$ не может содержаться целых чисел. Следствие 3.2 доказано.

*Доказательство следствия 3.3.* В силу соотношений (1.3)–(1.6) имеем $L_c(N,k) \leqslant N$, $L_d(N,k) \leqslant N$, $L_c^\pi(N,k) \leqslant N$ и $L_d^\pi(N,k) \leqslant N$. В силу (1.1), (1.2) достаточно получить оценку $L_c(N,k) \geqslant N$. В случае $N = k = 1$ она следует из (3.1). Пусть $N \geqslant 2$ и $k \in \{N-1,\ N\}$. Очевидно, что $L_c(N,N) \geqslant L_c(N,N-1)$, поэтому достаточно доказать неравенство $L_c(N,N-1) \geqslant N$. В условиях теоремы 3.2 при $k = N-1$ имеем $r = N-2$, а тогда по этой теореме $L_c(N,N-1) \geqslant N-2+L_c(2,1)$. Покажем, что $L_c(2,1) \geqslant 2$. Предположим противное, т.е. что $L_c(2,1) = 1$ и существует схема $S$, составляющая проверяющий тест длины 1 для двух контактов, среди которых не более одного может быть неисправно. Каждый из двух контактов обязан содержаться в этой схеме в некоторой несамопересекающейся цепи, соединяющей ее полюса. Действительно, в противном случае при, скажем, обрыве соответствующего контакта схема реализовывала бы ту же функцию, что и в случае, когда оба контакта исправны. Но тогда схема $S$, очевидно, представляет собой либо последовательное, либо параллельное соединение двух контактов, а в каждом из этих случаев нетрудно убедиться, что она не может являться проверяющим тестом. Полученное противоречие доказывает следствие 3.3.

*Доказательство теоремы 3.2.* Докажем вначале неравенство $L_c(N,\ k) \geqslant r + L_c(N - r(N-k), k - r(N-k))$. Предположим, что оно не выполнено, т.е. $l = L_c(N,k) \leqslant r + L_c(N - r(N-k), k - r(N-k)) - 1$ и существует набор контактных схем $S_1^1, \dots, S_l^1$, являющийся проверяющим тестом. Будем считать, что

$$l = r + L_c(N - r(N-k), k - r(N-k)) - 1 \tag{3.5}$$

(в противном случае можно дополнить тест произвольными схемами так, чтобы полученный набор схем имел длину $r + L_c(N - r(N-k), k - r(N-k)) - 1$; очевидно, что он также будет проверяющим тестом). Тогда $k - r(N-k) \geqslant k - \frac{k-1}{N-k}(N-k) = 1$, $N - r(N-k) > k - r(N-k) \geqslant 1$, $L_c(N - r(N-k), k - r(N-k)) \geqslant 1$ и $l \geqslant r$. Опишем по индукции некоторую процедуру, содержащую $q$ шагов, где

$$0 \leqslant q \leqslant r. \tag{3.6}$$

Считаем перед началом процедуры, что построены схемы $S_1^1, \dots, S_l^1$. Предположим, что уже построены схемы $S_i^i, \dots, S_l^i$, где $i \in \{1, \dots, r\}$, и множества контактов $M_j$ для любого натурального $j$ такого, что $j \leqslant i-1$, причем множества $M_j$ попарно не пересекаются при различных $j$ и ни в одной из схем $S_i^i, \ldots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству $M_j$. При $i = 1$ все эти условия, очевидно, выполнены. Далее, если ни в одной из схем $S_i^i, \ldots, S_l^i$ не существует цепи, соединяющей ее полюса, длины не более $N - k$, или если $i = r + 1$, то положим $q = i - 1$ и процедуру остановим. В противном случае проделаем $i$-й шаг процедуры следующим образом. Среди схем $S_i^i, \ldots, S_l^i$ выберем схему $S_{j_i}^i$, содержащую цепь между полюсами минимально возможной длины $m_i$ (если таких схем несколько, выберем ту из них, у которой индекс $j_i$ наименьший). Без ограничения общности $j_i = i$ (от перенумерации схем проверяющий тест, очевидно, остается проверяющим тестом). Пусть $M_i$ — множество контактов указанной цепи, тогда

$$|M_i| = m_i \leqslant N - k. \tag{3.7}$$

Так как ни в одной из схем $S_i^i, \ldots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству $M_j$, где $1 \leqslant j \leqslant i - 1$, то множество $M_i$ не пересекается ни с одним из множеств $M_j$ при $1 \leqslant j \leqslant i - 1$. Предположим, что все контакты из множества $M_i$ неисправны и при этом замкнуты. В таком случае в схеме $S_i^i$ существует цепь между полюсами, обладающая тождественно единичной проводимостью, значит, данная схема вне зависимости от состояний остальных содержащихся в ней контактов реализует тождественную единицу. При указанных неисправностях контактов каждая из схем $S_j^i$, где $i+1 \leqslant j \leqslant l$, может содержать замкнутые контакты из множества $M_i$. Удалим все такие контакты из схемы $S_j^i$, стягивая при этом две вершины каждого замкнутого контакта в одну. При этом схема $S_j^i$ перейдет в некоторую двухполюсную контактную схему $S_j^{i+1}$, функционирующую в точности как схема $S_j^i$ как в случае, когда все контакты, содержащиеся в схеме $S_j^{i+1}$, исправны, так и в случае неисправности некоторых из этих контактов. На этом считаем $i$-й шаг процедуры завершенным и заменяем $i$ на $i + 1$.

В результате $q$ шагов указанной процедуры строятся набор схем $S_j^i$, $i = 1, \ldots, q + 1$, $i \leqslant j \leqslant l$, и попарно непересекающиеся множества $M_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, такие, что $|M_i| = m_i$ и при замыкании всех контактов из множества $M' = \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} M_i$ каждая из схем $S_j^i$, $i = 1, \ldots, q + 1$, $i \leqslant j \leqslant l$, функционирует в точности как схема $S_j^1$, а каждая из схем $S_i^i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, реализует тождественную единицу. Отсюда следует, что и каждая из схем $S_i^1$, $1 \leqslant i \leqslant q$, реализует при рассматриваемых неисправностях контактов тождественную единицу. Общее число неисправных контактов $s = |M'|$ в силу (3.6), (3.7) равно

$$\left|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} M_i\right| = \sum_{1\leqslant i\leqslant q} |M_i| = \sum_{1\leqslant i\leqslant q} m_i \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant r} (N-k) = r(N-k) \leqslant \frac{k-1}{N-k}(N-k) = k-1, \quad (3.8)$$

т.е.

$$s \leqslant k-1. \quad (3.9)$$

Рассмотрим два случая.

1.Пусть $q < r$. Тогда, согласно описанию рассмотренной выше процедуры, ни в одной из схем $S_{q+1}^{q+1}, \ldots, S_l^{q+1}$ не существует цепи, соединяющей ее полюса, длины не более $N-k$, при этом ни в одной из этих схем не содержится ни одного контакта, принадлежащего множеству $M'$. Число контактов во множестве $M \setminus M'$ равно $N-s \geqslant k+1-s$, так как $k < N$ по условию теоремы; при этом $k+1-s \geqslant 2$ в силу (3.9). Следовательно, во множестве $M \setminus M'$ можно выбрать подмножество $M''$ из $k+1-s$ контактов, а в нем — два различных контакта $K$ и $K'$. Рассмотрим следующие две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы контактов: $H_1$ заключается в замыкании всех контактов из множества $M'$ и обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K\}$, $H_2$ заключается в замыкании всех контактов из множества $M'$ и обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K'\}$. Очевидно, что множества неисправных контактов при данных двух неисправностях различны; кроме того, как при $H_1$, так и при $H_2$ неисправны не более $|M'| + |M''-1| = s + (k-s) = k$ контактов. Докажем, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1^1, \ldots, S_l^1$ при неисправностях $H_1$ и $H_2$, совпадают, а именно, что оба этих набора равны $(\underbrace{1,\ldots,1}_{q}, \underbrace{0,\ldots,0}_{l-q})$. Действительно, так как все контакты во множестве $M' = \bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant q} M_i$ замкнуты и при $H_1$, и при $H_2$, то в силу построения множеств $M_i$ каждая из схем $S_i^1$, $1 \leqslant i \leqslant q$, реализует тождественную единицу. Далее, ни в одной из схем $S_{q+1}^{q+1}, \ldots, S_l^{q+1}$ не существует цепи, соединяющей ее полюса, длины не более $N-k$, и это свойство, очевидно, сохранится как при обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K\}$ (при неисправности $H_1$), так и при обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K'\}$ (при неисправности $H_2$). Однако в каждом из этих случаев исправными останутся только $N - |M'| - |M''-1| = N-k$ контактов, откуда следует, что ни в одной из схем $S_{q+1}^{q+1}, \ldots, S_l^{q+1}$ не будет существовать и цепи между ее полюсами длины более $N-k$, т.е. вообще никакой цепи между полюсами. Это означает, что каждая из схем $S_{q+1}^{q+1}, \ldots, S_l^{q+1}$, а значит, и каждая из схем $S_{q+1}^1, \ldots, S_l^1$ как при неисправности $H_1$, так и при неисправности $H_2$ будет реализовывать тождественный нуль, что и требовалось доказать. Из доказанного получаем, что набор схем $S_1^1, \ldots, S_l^1$ не может быть проверяющим тестом. Случай 1 разобран.

2. Пусть $q = r$. Из (3.8) следует, что $s \leqslant r(N-k)$. Дополним множество $M'$ до множества $M'''$ произвольными $r(N-k)-s$ контактами из множества $M \setminus M'$. Тогда $|M'''| = r(N-k)$. Будем считать, что все контакты из множества $M'''$ неисправны и при этом замкнуты. Тогда, в частности, все контакты из множества $M'$ замкнуты, а это означает, что схемы $S_1^1, \ldots, S_r^1$ реализуют тождественную единицу. Так как $S_1^1, \ldots, S_l^1$ — проверяющий тест, то по набору функций, реализуемых схемами $S_j^1$, где $r+1 \leqslant j \leqslant l$, можно определить исправность или неисправность оставшихся $N - |M'''| = N - r(N-k)$ контактов, среди которых может быть не более $k - r(N-k)$ неисправных. Отсюда $L_c(N - r(N-k), k - r(N-k)) \leqslant l - r$, но это противоречит равенству (3.5). Случай 2 разобран.

Для доказательства неравенства $L_d(N,k) \geqslant r + L_d(N - r(N-k), k - r(N-k))$ повторяем дословно приведенное рассуждение с заменой понятия "проверяющий тест" на понятие "диагностический тест". Теорема 3.2 доказана.

## §4. Единичные тесты для контактов

Всюду в данном параграфе будем предполагать, что $k = 1$, т.е. неисправным может оказаться не более одного контакта. Диагностический (проверяющий) тест в этом случае будем также называть единичным диагностическим (проверяющим) тестом для $N$ контактов. Вместо $L_c(N,1)$, $L_d(N,1)$, $L_c^\pi(N,1)$ и $L_d^\pi(N,1)$ будем для краткости писать соответственно $L_c(N)$, $L_d(N)$, $L_c^\pi(N)$ и $L_d^\pi(N)$.

**Утверждение 4.1.** *Множества единичных проверяющих и единичных диагностических тестов для $N$ контактов совпадают как в классе произвольных двухполюсных контактных схем, так и в классе $\pi$-схем.*

**Следствие 4.1.** *Справедливы равенства $L_c(N) = L_d(N)$ и $L_c^\pi(N) = L_d^\pi(N)$.*

*Доказательство утверждения 4.1* проводится одинаково для рассматриваемых двух классов схем; проведем его для класса произвольных двухполюсных контактных схем. Из определений следует, что любой диагностический тест является проверяющим. Докажем обратное утверждение. Пусть $(S_1, \ldots, S_l)$ — проверяющий тест. Согласно определениям диагностического и проверяющего тестов, достаточно доказать, что для любого $n \in \{1, \ldots, N\}$

наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_l$ при неисправностях системы контактов $\{(n, 0)\}$ и $\{(n, 1)\}$, не совпадают. Легко видеть, что неисправность $\{(n, 0)\}$ получается из неисправности $\varnothing$ путем подачи вместо переменной $x_n$ значения 0 во всех схемах, где эта переменная присутствует. Так как $(S_1, \ldots, S_l)$ — проверяющий тест, то функция, реализуемая хотя бы одной схемой $S_i$ из числа $S_1, \ldots, S_l$, должна от этого измениться, поэтому данная функция существенно зависит от переменной $x_n$ (в случае, когда все контакты исправны). Но это означает, что при обрыве и при замыкании контакта с номером $n$ схема $S_i$ реализует различные функции, откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_l$ при неисправностях $\{(n, 0)\}$ и $\{(n, 1)\}$, не совпадают. Утверждение 4.1 доказано.

**Замечание 4.1.** В силу следствия 4.1 для нахождения величин $L_d(N)$ и $L_d^\pi(N)$ достаточно знать только $L_c(N)$ и $L_c^\pi(N)$. Поэтому после введения обозначений $L(N) = L_c(N)$ и $L^\pi(N) = L_c^\pi(N)$ можно формулировать основные результаты параграфа 3 в терминах величин $L(N)$ и $L^\pi(N)$.

**Замечание 4.2.** Если в некоторой контактной схеме $S$, входящей в проверяющий или диагностический тест, содержится изолированная вершина, отличная от полюса, или петля (контакт, концы которого совпадают), то такую вершину (контакт) можно удалить, и функция, реализуемая схемой, очевидно, от этого не изменится вне зависимости от того, есть ли среди контактов неисправный или нет. Если же полюс является изолированной вершиной схемы $S$, то такая схема при любой неисправности системы контактов реализует, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль, и поэтому ее можно удалить из теста. Кроме того, если полюса схемы $S$ совпадают, то такая схема при любой неисправности системы контактов реализует, очевидно, тождественную единицу, и ее также можно удалить из теста. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что в рассматриваемых нами схемах нет петель и изолированных вершин, а полюса каждой схемы не совпадают между собой.

Основными результатами параграфа 4 являются следующие утверждения.

**Теорема 4.1.** *Справедливо равенство*

$$L^\pi(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 1, \\ 2, & \text{если } N \geqslant 2. \end{cases}$$

**Теорема 4.2.** *Справедливо равенство*

$$L(N) = \begin{cases} 1, & \textit{если } N = 1 \textit{ или } N \geqslant 5, \\ 2, & \textit{если } N \in \{2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Докажем вначале одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.1.** *Пусть $S$ — контактная схема, составляющая единичный проверяющий тест длины 1 для $N$ контактов. Тогда для нее справедливы следующие утверждения:*

1) *в ней содержатся все $N$ контактов;*

2) *в ней не могут содержаться два параллельно соединенных контакта;*

3) *любая отличная от полюсов вершина схемы $S$ инцидентна по крайней мере трем контактам.*

*Доказательство.* Утверждение 1) очевидно, так как, если бы в схеме $S$ не содержалось некоторого контакта $K$, то невозможно было бы отличить случай, когда все контакты исправны, от случая, когда все контакты, кроме $K$, исправны, а контакт $K$ неисправен (тип его неисправности здесь не важен).

Докажем утверждение 2). Предположим, что в схеме $S$ содержатся два параллельно соединенных контакта с номерами $n$ и $n'$, соединяющие вершины $a$ и $b$. Рассмотрим следующие две неисправности системы контактов $H_1$ и $H_2$: $H_1 = \{(n, 1)\}$, $H_2 = \{(n', 1)\}$. Функция проводимости между вершинами $a$ и $b$ схемы $S$, очевидно, равна тождественной единице как при $H_1$, так и при $H_2$, а поскольку все остальные контакты схемы $S$ исправны и при $H_1$, и при $H_2$, то функции проводимости между любыми двумя вершинами схемы $S$, в том числе между ее полюсами, одинаковы при $H_1$ и $H_2$. Но это противоречит тому, что $(S)$ — проверяющий тест, с учетом того, что множества неисправных контактов при неисправностях $H_1$ и $H_2$ различны. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Предположим, что оно не выполнено, т.е. существует отличная от полюсов схемы $S$ вершина $a$, инцидентная не более чем двум контактам. Так как мы рассматриваем схемы без изолированных вершин, то возможны два случая.

1. Вершина $a$ инцидентна ровно одному контакту $K$. В таком случае очевидно, что не существует ни одной несамопересекающейся цепи между полюсами схемы $S$, содержащей контакт $K$. Отсюда следует, что при обрыве контакта $K$ схема $S$ будет реализовывать ту же функцию, что и в случае, когда все контакты исправны. Но это противоречит тому, что $(S)$ — проверяющий тест.

2. Вершина $a$ инцидентна ровно двум контактам $K$ и $K'$ с номерами $n$ и $n'$. Пусть $S'$ — контактная схема, получающаяся из $S$ удалением контактов $K$ и $K'$. Рассмотрим следующие две неисправности системы контактов $H_1$ и $H_2$: $H_1 = \{(n, 0)\}$, $H_2 = \{(n', 0)\}$. При каждой из неисправностей $H_1$ и $H_2$ вершина $a$ в схеме $S$ становится инцидентной только одному контакту, и можно применить рассуждения, приведенные в случае 1. Из них следует, что после удаления этого контакта функция, реализуемая схемой, не изменится. Однако получающаяся после его удаления схема совпадает со схемой $S'$, откуда следует, что функции, реализуемые схемой $S$ при неисправностях $H_1$ и $H_2$, совпадают с функцией, реализуемой схемой $S'$ и, следовательно, совпадают между собой. Но это противоречит тому, что $(S)$ — проверяющий тест, с учетом того, что множества неисправных контактов при неисправностях $H_1$ и $H_2$ различны. Утверждение 3), а вместе с ним лемма 4.1 доказаны.

*Доказательство теоремы 4.1.* Очевидно, что всегда $L^{\pi}(N) \geqslant 1$. Если $N = 1$, то $L^{\pi}(N) = 1$ в силу (1.5). Пусть $N \geqslant 2$. Сначала докажем, что $L^{\pi}(N) \leqslant 2$. Рассмотрим следующие две схемы $S_1$ и $S_2$: $S_1$ получается последовательным, а $S_2$ — параллельным соединением всех $N$ контактов (порядок контактов в схемах $S_1$ и $S_2$ не важен). Очевидно, что обе данные схемы являются $\pi$-схемами. Если некоторый контакт неисправен и при этом замкнут, а все остальные контакты исправны, то схема $S_1$, очевидно, реализует конъюнкцию переменных, отвечающих исправным контактам, а схема $S_2$ — тождественную единицу. Если некоторый контакт оборван, а все остальные контакты исправны, то схема $S_1$, очевидно, реализует тождественный нуль, а схема $S_2$ — дизъюнкцию переменных, отвечающих исправным контактам. Если же все контакты исправны, то схемы $S_1$ и $S_2$ реализуют соответственно конъюнкцию и дизъюнкцию всех $N$ переменных. Отсюда следует, что по функциям, реализуемым схемами $S_1$ и $S_2$, можно однозначно определить исправность или неисправность каждого из $N$ контактов, т.е. $(S_1, S_2)$ — проверяющий тест и $L^{\pi}(N) \leqslant 2$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что $L^{\pi}(N) \geqslant 2$. Предположим, что $L^{\pi}(N) = 1$ для некоторого $N \geqslant 2$, т.е. существует $\pi$-схема $S$, составляющая проверяющий тест длины 1 для $N$ контактов. По утверждению 1) леммы 4.1 в ней содержатся все $N$ контактов. Любая $\pi$-схема, содержащая хотя бы один контакт, может быть получена из простейших $\pi$-схем, состоящих из одного контакта, применением конечного числа операций последовательного и параллельного соединения двух схем (это следует, например, из соответствия между $\pi$-схемами и формулами специального вида в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, описанного в [13, с. 62–63]). В схеме $S$ содержится более одного контакта, поэтому она получена из простейших $\pi$-схем с помощью ненулевого числа таких операций. Будем считать, что число указанных операций, необходимых для построения схемы $S$, выбрано минимально возможным. В результате первой из этих операций получается схема $S_{(2)}$, представляющая собой либо последовательное, либо параллельное соединение двух контактов. Так как число операций для построения схемы $S$ выбрано минимально возможным, то схема $S_{(2)}$ обязана входить в качестве подсхемы в схему $S$ (иначе первая операция была бы бесполезной и ее можно было бы не проводить). Схема $S_{(2)}$ не может представлять собой параллельное соединение двух контактов в силу утверждения 2) леммы 4.1. Значит, схема $S_{(2)}$ представляет собой последовательное соединение двух контактов. Пусть $a$ — единственная отличная от полюсов вершина схемы $S_{(2)}$, тогда $a$ инцидентна обоим контактам схемы $S_{(2)}$, которые мы обозначим $K$ и $K'$. В процессе построения схемы $S$ к схеме $S_{(2)}$ могут подсоединяться другие схемы только последовательно или параллельно, т.е. через один или два полюса схемы $S_{(2)}$, но не через ее вершину $a$. Таким образом, в получающейся схеме $S$ вершина $a$ инцидентна по-прежнему только двум контактам $K$ и $K'$ и не является полюсом. Однако это противоречит утверждению 3) леммы 4.1. Полученное противоречие доказывает неравенство $L^{\pi}(N) \geqslant 2$ для любого $N \geqslant 2$, а вместе с ним и теорему 4.1.

*Доказательство теоремы 4.2.* Очевидно, что всегда $1 \leqslant L(N) \leqslant L^{\pi}(N)$ (второе неравенство следует из (1.2) при $k = 1$). Отсюда и из теоремы 4.1 имеем, что $L(1) = 1$ и, кроме того, $1 \leqslant L(N) \leqslant 2$ при $N \geqslant 2$. Таким образом, достаточно доказать, что $L(N) \geqslant 2$ при $N \in \{2, 3, 4\}$ и $L(N) \leqslant 1$ при $N \geqslant 5$.

Пусть вначале $N \in \{2, 3, 4\}$. Предположим, что $L(N) = 1$ для некоторого $N \in \{2, 3, 4\}$, т.е. существует схема $S$, составляющая проверяющий тест длины 1 для $N$ контактов. По утверждению 1) леммы 4.1 в схеме $S$ содержатся все $N$ контактов, а по утверждению 2) этой же леммы не более одного контакта может соединять полюса схемы $S$. Отсюда с учетом отсутствия петель в $S$ и неравенства $N \geqslant 2$ получаем, что в $S$ содержится некоторый контакт, хотя бы один конец $a$ которого отличен от полюсов данной схемы. По утверждению 3) леммы 4.1 вершина $a$ инцидентна по крайней мере трем контактам, которые мы обозначим $K_1$, $K_2$, $K_3$. Пусть $b$, $b'$, $b''$ — вторые концы контактов $K_1$, $K_2$, $K_3$ соответственно, тогда по утверждению 2) леммы 4.1 эти три вершины попарно различны, и ни одна из них не совпадает с $a$ ввиду отсутствия петель в схеме $S$. Поэтому хотя бы одна из этих вершин (без ограничения общности $b$) отлична от $a$ и от полюсов $S$. Снова по утверждению 3) леммы 4.1 вершина $b$ инцидентна по крайней мере трем контактам, которые мы обозначим $K_4$, $K_5$, $K_6$. Ни один из контактов $K_4$, $K_5$, $K_6$ не может совпадать ни с одним из контактов $K_2$, $K_3$, так как концами контактов $K_2$ и $K_3$ являются вершины $a, b'$ и $a, b''$ соответственно, ни одна из которых не совпадает с $b$. Получаем, что контакты $K_2$, $K_3$, $K_4$, $K_5$, $K_6$, содержащиеся в схеме $S$, попарно различны, однако это противоречит тому, что общее число контактов равно $N \leqslant 4$. Таким образом, $L(N) \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $N \geqslant 5$. Для каждого такого $N$ построим схему $S_{(N)}$ рекурсивно следующим образом. Пусть $S_{(5)}$ — схема, изображенная на рис. 4, с полюсами $A$ и $B$ (напомним, что для любого $n \in \{1, \ldots, N\}$ переменная $x_n$ отвечает контакту с номером $n$). Предположим, что уже построена схема $S_{(N_0)}$, где $N_0 \geqslant 5$. Схема $S_{(N_0+1)}$ получается из схемы $S_{(N_0)}$ следующим образом:

1) если $N_0$ нечетно, то к полюсу $B$ схемы $S_{(N_0)}$ подсоединяется контакт с номером $N_0+1$, второй конец которого не совпадает ни с одной из вершин схемы $S_{(N_0)}$ и объявляется полюсом $B$ схемы $S_{(N_0+1)}$; полюс $A$ схемы $S_{(N_0+1)}$ совпадает с полюсом $A$ схемы $S_{(N_0)}$;

2) если $N_0$ четно, то к схеме $S_{(N_0)}$ параллельно подсоединяется контакт с номером $N_0+1$, соединяющий полюса $A$ и $B$, и полученная схема объявляется схемой $S_{(N_0+1)}$ (полюса схемы $S_{(N_0+1)}$ совпадают с соответствующими полюсами схемы $S_{(N_0)}$).

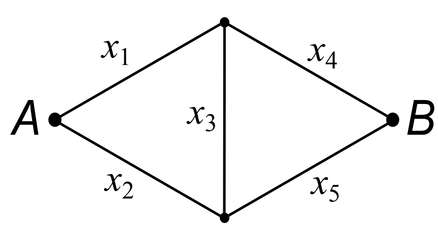



Рис. 4

Таким образом, для каждого $N \geqslant 5$ построена схема $S_{(N)}$. Достаточно доказать, что $(S_{(N)})$ — проверяющий тест для любого $N \geqslant 5$.

**Лемма 4.2.** *Пусть $N \geqslant 5$ и имеет место некоторая неисправность системы контактов. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $N$ нечетно, то схема $S_{(N)}$ реализует функцию, отличную от тождественного нуля;*

2) *если $N$ четно, то схема $S_{(N)}$ реализует функцию, отличную от тождественной единицы.*

*Доказательство.* Докажем утверждение 1). В случае $N = 5$ оно проверяется непосредственно, с учетом того, что неисправно не более одного контакта. Пусть $N \geqslant 7$. По построению схема $S_{(N)}$ получается из схемы $S_{(N-1)}$ параллельным подсоединением к ней контакта с номером $N$. Если данный контакт не оборван, то при подстановке вместо переменной $x_N$ значения 1 схема $S_{(N)}$ будет, очевидно, реализовывать тождественную единицу. Если же он оборван, то все остальные контакты в схеме $S_{(N)}$ исправны и она, очевидно, реализует такую же функцию, что и схема $S_{(N-1)}$ в случае, если все входящие в нее контакты исправны. Но при $x_1 = \ldots = x_{N-1} = 1$ схема $S_{(N-1)}$, а значит, и схема $S_{(N)}$, выдаст значение 1, так как все контакты в схеме $S_{(N-1)}$ замыкающие и по построению данной схемы в ней существует цепь между полюсами. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Ясно, что $N - 1 \geqslant 5$. По построению схема $S_{(N)}$ получается из схемы $S_{(N-1)}$ последовательным подсоединением к ней контакта с номером $N$. Если данный контакт не замкнут, то при подстановке вместо переменной $x_N$ значения 0 схема $S_{(N)}$ будет, очевидно, реализовывать тождественный нуль. Если же он замкнут, то все остальные контакты в схеме $S_{(N)}$ исправны и она, очевидно, реализует такую же функцию, что и схема $S_{(N-1)}$ в случае, когда все входящие в нее контакты исправны. Но при $x_1 = \ldots = x_{N-1} = 0$ схема $S_{(N-1)}$, а значит, и схема $S_{(N)}$, выдаст значение 0, так как все контакты в схеме $S_{(N-1)}$ замыкающие. Утверждение 2), а вместе с ним и лемма 4.2 доказаны.

Докажем по индукции, что для любого $N \geqslant 5$ схема $S_{(N)}$ составляет проверяющий тест длины 1 для $N$ контактов. Для $N = 5$ это утверждение проверяется непосредственно, исходя из вида схемы $S_{(5)}$. При этом достаточно заметить, что при неисправности любого контакта в схеме $S_{(5)}$ функция, реализуемая данной схемой, не зависит существенно от переменной, отвечающей неисправному контакту, и существенно зависит от всех переменных, отвечающих исправным контактам, а в случае, когда все контакты исправны, данная функция существенно зависит от всех переменных $x_1$–$x_5$. Пусть утверждение доказано для $N = N_0 \geqslant 5$; докажем его для $N = N_0 + 1$. Пусть имеет место некоторая неисправность системы контактов. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $N$ четно. Если контакт с номером $N$ исправен, то функция, реализуемая схемой $S_{(N)}$, очевидно, равна конъюнкции переменной $x_N$ и функции, реализуемой схемой $S_{(N-1)}$,

которая, с одной стороны, не зависит существенно от переменной $x_N$, а с другой стороны, в силу утверждения 1) леммы 4.2 и того, что среди контактов с номерами от 1 до $N-1$ может быть не более одного неисправного, отлична от тождественного нуля. Отсюда следует, что функция, реализуемая схемой $S_{(N)}$, существенно зависит от переменной $x_N$. Если же контакт с номером $N$ неисправен, то функция, реализуемая схемой $S_{(N)}$, очевидно, не зависит существенно от переменной $x_N$. Таким образом, по функции, реализуемой схемой $S_{(N)}$, можно однозначно определить, исправен контакт с номером $N$ или нет. Далее, если уже определено, что контакт с номером $N$ исправен, то будем считать, что вместо переменной $x_N$ подано значение 1. Тогда среди контактов с номерами от 1 до $N-1$ не более одного контакта неисправно, а функция, реализуемая схемой $S_{(N)}$, очевидно, совпадает с функцией, реализуемой схемой $S_{(N-1)}$ при рассматриваемой неисправности системы контактов. По предположению индукции $(S_{(N-1)})$ — проверяющий тест для $N-1$ контакта, откуда следует, что по функции, реализуемой схемой $S_{(N-1)}$, можно однозначно определить исправность или неисправность каждого контакта с номером от 1 до $N-1$. В результате указанной процедуры исправность или неисправность каждого из $N$ контактов определяется однозначно, т.е. $(S_{(N)})$ — проверяющий тест для $N$ контактов, что и требовалось доказать.

2. Пусть $N$ нечетно, тогда $N = N_0 + 1 \geqslant 7$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 1 с заменой всех 0 на 1, 1 на 0, конъюнкции на дизъюнкцию и с использованием утверждения 2) леммы 4.2 вместо утверждения 1) той же леммы. Теорема 4.2 доказана.

# Глава 2. Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов

Рассматриваются задачи проверки исправности и диагностики состояний $N$ функциональных элементов ($N$ — заданное натуральное число), реализующих в исправном состоянии заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, путем составления из них схем с одним выходом и наблюдения выдаваемых этими схемами значений на любых входных наборах значений переменных. Допускаются произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов; при этом предполагается, что не более $k$ элементов неисправны, где $k$ — заданное натуральное число, не превосходящее $N$. Требуется минимизировать число схем, необходимых для проверки исправности и определения состояний всех функциональных элементов.

Множество всех $N$ заданных функциональных элементов будем обозначать через $B$.

## §5. Верхние оценки длин тестов для функциональных элементов

Отметим, что для любых $f, N$ и $k$ выполняется соотношение

$$L_d(f, N, k) \geqslant L_c(f, N, k), \tag{5.1}$$

поскольку любой диагностический тест, согласно определениям, является также и проверяющим.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины $N$, очевидно, всегда можно взять набор из $N$ схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов. Отсюда для любых $f, N$ и $k$ получаем оценки

$$L_c(f, N, k) \leqslant N, \tag{5.2}$$

$$L_d(f, N, k) \leqslant N. \tag{5.3}$$

Пусть функциональный элемент $E$ имеет два входа и реализует в исправном состоянии функцию вида $x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2}$ или $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2}$, где $\sigma_1, \sigma_2$ — некоторые булевы константы. Тогда назовем его вход, отвечающий переменной $x_i$, $i = 1, 2$, *прямым*, если $\sigma_i = 1$, и *инверсионным*, если $\sigma_i = 0$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, позволяющая в ряде случаев существенно улучшить верхние оценки для величин $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ в (5.2), (5.3).

**Теорема 5.1.** *Пусть булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1\&\ldots\&x_n$, $x_1\vee\ldots\vee x_n$, $\overline{x_1}$, выполнено условие $\sqrt{N}\leqslant\frac{N}{4k+2}$ и на отрезке $\left[\sqrt{N};\frac{N}{4k+2}\right]$ содержится хотя бы одно простое число. Тогда:*

1) $L_c(f,N,k)\leqslant 2k+1$,

2) *если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ нелинейна, то $L_d(f,N,k)\leqslant 2k+1$.*

**Следствие 5.1.** *Пусть булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ не совпадает ни с одной из функций $x_1\&\ldots\&x_n$, $x_1\vee\ldots\vee x_n$, $\overline{x_1}$, и выполнено условие $8k+\frac{5}{2}\leqslant\sqrt{N}$. Тогда:*

1) $L_c(f,N,k)\leqslant 2k+1$,

2) *если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ нелинейна, то $L_d(f,N,k)\leqslant 2k+1$.*

Сначала покажем, как следствие 2.1 выводится из теоремы 2.1. Достаточно показать, что из неравенства

$$8k+\frac{5}{2}\leqslant\sqrt{N} \tag{5.4}$$

следует существование простого числа $p$ такого, что

$$\sqrt{N}\leqslant p\leqslant\frac{N}{4k+2}. \tag{5.5}$$

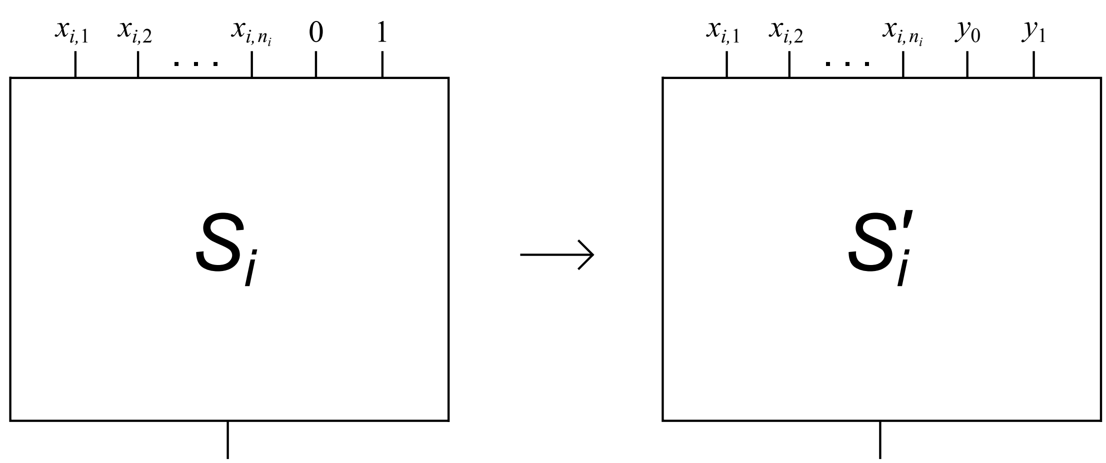
Из условия (5.4) следует, что $\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil\geqslant 11$. Отсюда и из постулата Бертрана (см., например, [8, с. 30]) можно получить, что на интервале $\left(\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil-\ 1; 2\left(\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil-1\right)-2\right)$, т.е. на отрезке $\left[\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil; 2\left\lceil\sqrt{N}\right\rceil-5\right]$, содержится хотя бы одно простое число. Обозначим через $p$ любое простое число из этого отрезка. Тогда в силу (5.4) имеем

$$2\sqrt{N}+3\geqslant 2\left(8k+\frac{5}{2}\right)+3=16k+8,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\leqslant p\leqslant 2\lceil\sqrt{N}\rceil-5<2(\sqrt{N}+1)-5=2\sqrt{N}-3&\\ =\frac{4N-9}{2\sqrt{N}+3}<\frac{4N}{2\sqrt{N}+3}\leqslant\frac{4N}{16k+8}=\frac{N}{4k+2},&\end{aligned}$$

т.е. соотношение (5.5) выполняется, что и требовалось показать.

*Доказательство теоремы 5.1* распадается на ряд этапов; некоторые из них представлены в виде лемм. Отметим вначале, что если на входы схем, составленных из заданных функциональных элементов, разрешить подавать наряду с переменными константы 0 и 1, то значения функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ от этого не изменятся. В самом деле, поскольку класс допустимых схем будет расширен, то эти значения не увеличатся. С другой стороны, пусть некоторый набор схем $S_1,\dots,S_l$ из этого расширенного класса является диагностическим (проверяющим) тестом, и пусть $y_0$ и $y_1$ — переменные, отличные от всех переменных всех схем $S_1,\dots,S_l$ и различные между собой. Подадим на все те входы схем $S_1,\dots,S_l$, на которые подавались константы 0 и 1, переменные $y_0$ и $y_1$ соответственно. Полученный набор схем (обозначим его $(S'_1,\dots,S'_l)$) будет уже допустимым в исходной постановке задачи (см. рис. 5). Но он также будет диагностическим (проверяющим) тестом. Действительно, при тестировании схем $S'_1,\dots,S'_l$ можно ограничиться только теми входными наборами значений переменных, на которых $y_0=0$ и $y_1=1$. В этом случае схемы $S'_1,\dots,S'_l$ будут очевидным образом функционировать в точности как схемы $S_1,\dots,S_l$, а значит, по их выходным функциям (которые являются подфункциями функций, реализуемых схемами $S'_1,\dots,S'_l$, при подстановке в них вместо переменных $y_0$ и $y_1$ констант 0 и 1 соответственно) можно будет однозначно определить состояние (соответственно исправность или неисправность) каждого функционального элемента. Отсюда ясно, что набор $(S'_1,\dots,S'_l)$ является диагностическим (проверяющим) тестом в исходной постановке задачи. Таким образом, для каждого диагностического (проверяющего) теста в расширенном классе схем можно построить соответствующий тест такой же длины в исходной постановке задачи, откуда следует, что после расширения класса схем значения функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ не уменьшатся.




($i$ — любое число от 1 до $l$)

Рис. 5

В итоге получаем, что если на входы схем, составленных из заданных функциональных элементов, разрешить подавать наряду с переменными константы 0 и 1, то значения функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ от этого не изменятся. Поскольку теорема 5.1 устанавливает неравенства на величины $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, в ходе ее доказательства будем без ограничения общности считать, что на входы схем разрешается подавать константы 0 и 1.

По условию рассматриваемой задачи функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и отлична от константы; из условий теоремы 5.1 следует, что $f$ отлична также от функций $x_1$, $\overline{x_1}$. Отсюда $n \geqslant 2$.

**Лемма 5.1.** *Из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ отождествлением и переименованием переменных и подстановкой вместо некоторых переменных констант 0 и 1 можно получить функции $f_D(x, y)$ и $f_K(x, y)$, существенно зависящие от обеих своих переменных и такие, что $f_D(x, y)$ не совпадает с $x \vee y$, а $f_K(x, y)$ не совпадает с $x \& y$.*

*Доказательство.* Рассмотрим два случая.

1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ монотонна. По условию теоремы 5.1 данная функция не совпадает ни с одной из функций $x_1 \& \ldots \& x_n$, $x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Воспользуемся известным фактом о том, что из монотонной функции, существенно зависящей по крайней мере от двух переменных и не являющейся конъюнкцией, путем отождествления и переименования переменных и подстановки вместо некоторых переменных константы 1 можно получить функцию $x \vee y$ (см., например, [30, с. 19, утверждение 4]). По принципу двойственности (см., например, [30, с. 19, утверждение 3]) из этого факта следует, что из монотонной функции, существенно зависящей по крайней мере от двух переменных и не являющейся дизъюнкцией, путем отождествления и переименования переменных и подстановки вместо некоторых переменных константы 0 можно получить функцию $x \& y$. Тогда, положив $f_K(x, y) = x \vee y$, а $f_D(x, y) = x \& y$, получим утверждение леммы.

2. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ немонотонна. Тогда существуют два соседних набора $\tilde{\sigma}_0 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, такие, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 1$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 0$. Без ограничения общности $i = n$, т.е. $\tilde{\sigma}_0 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 0)$, $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 1)$. Рассмотрим следующую последовательность функций:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f_2(x_2, \ldots, x_n) = f(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$f_3(x_3, \ldots, x_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n),$$

$$\ldots$$

$$f_n(x_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, x_n).$$

Для любого $i$ от 1 до $n$ выполняются равенства

$$f_i(\sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1,$$

$$f_i(\sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}, 1) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 1) = 0.$$

(В случае $i = n$ эти равенства имеют вид $f_n(0) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$, $f_n(1) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$.) Отсюда каждая из функций $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_n)$ существенно зависит от переменной $x_n$. Так как $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит по крайней мере от двух переменных, а $f_n(x_n)$ существенно зависит от одной переменной, то существует такое натуральное число $m$ на отрезке от 1 до $n-1$, что $f_m(x_m, \ldots, x_n)$ существенно зависит по крайней мере от двух переменных, а $f_{m+1}(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ существенно зависит только от одной переменной (и эта переменная, очевидно, $x_n$). Из равенств

$$f_{m+1}(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = 1,$$

$$f_{m+1}(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$$

получаем, что $f_{m+1}(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \overline{x_n}$. Разложим функцию $f_m(x_m, \ldots, x_n)$ по переменной $x_m$:

$$f_m(x_m, \ldots, x_n) = x_m^{\sigma_m} f_m(\sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} f_m(\overline{\sigma_m}, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Заметим, что $f_m(\sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = f_{m+1}(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \overline{x_n}$, поэтому

$$f_m(x_m, \ldots, x_n) = x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} f_m(\overline{\sigma_m}, x_{m+1}, \ldots, x_n). \tag{5.6}$$

Функция $f_m(\overline{\sigma_m}, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ не может быть тождественно равна $\overline{x_n}$, поскольку в этом случае равенство (5.6) приняло бы вид $f_m(x_m, \ldots, x_n) = x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} \overline{x_n} = \overline{x_n}$ и функция $f_m(x_m, \ldots, x_n)$ зависела бы существенно только от одной переменной. Поэтому существуют такие булевы константы $\delta_{m+1}, \ldots, \delta_{n-1}$, что функция $\psi(x_n) = f_m(\overline{\sigma_m}, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_{n-1}, x_n)$ не совпадает с $\overline{x_n}$. Отсюда и из (5.6) получаем, что

$$f_m(x_m, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_{n-1}, x_n) = x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} f_m(\overline{\sigma_m}, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_{n-1}, x_n) = x_m^{\sigma_m} \overline{x_n} \vee x_m^{\overline{\sigma_m}} \psi(x_n),$$

где $\psi(x_n)$ — одна из функций 0, 1, $x_n$. Но это означает, как нетрудно заметить, что подстановкой констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_{n-1}$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_{m-1}$, $x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}$ и переименованием переменных $x_m$ и $x_n$ из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно получить функцию $\varphi(x, y)$, существенно зависящую от обеих переменных и не совпадающую ни с одной из функций $x \vee y$, $x\&y$. Тогда, положив $f_K(x, y) = f_D(x, y) = \varphi(x, y)$, получим утверждение леммы. Лемма 5.1 доказана.

Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ линейна, то из нее можно переименованием переменных и подстановкой вместо всех ее переменных, кроме двух, константы 0 (для определенности) получить линейную функцию $f_\oplus(x, y)$, существенно зависящую от обеих своих переменных. Если же $f$ нелинейна, то воспользуемся известным фактом о том, что из любой нелинейной булевой функции путем переименования переменных и подстановки вместо некоторых переменных констант 0 и 1 можно получить нелинейную функцию $f_L(x, y)$ от двух переменных, существенно зависящую от обеих своих переменных (см., например, [33, с. 39]; в качестве нелинейной функции от двух переменных достаточно взять функцию $\varphi(x_1, x_2)$). Пусть $f_D(x, y)$ и $f_K(x, y)$ — функции, определяемые утверждением леммы 5.1. Определим функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ следующим образом:

- если функция $f$ нелинейна и среди функций $f_D(x, y), f_K(x, y), f_L(x, y)$ есть функция $f'(x, y)$, не совпадающая ни с одной из функций $x \vee y$, $x\&y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$, то положим $f_1(x, y) = f_2(x, y) = f'(x, y)$ и назовем этот случай $A_1$;

- если функция $f$ нелинейна, каждая из функций $f_D(x, y), f_K(x, y)$, $f_L(x, y)$ совпадает с одной из функций $x \vee y$, $x\&y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$ и среди функций $f_D(x, y), f_K(x, y)$ есть линейная функция $f''(x, y)$, то положим $f_1(x, y) = f_L(x, y), f_2(x, y) = f''(x, y)$ и назовем этот случай $A_2$ (очевидно, что в данном случае $f_L(x, y)$ — это одна из функций $x\&y$, $x \vee y$);

- если функция $f$ нелинейна, каждая из функций $f_D(x, y), f_K(x, y)$, $f_L(x, y)$ совпадает с одной из функций $x \vee y$, $x\&y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$ и среди функций $f_D(x, y), f_K(x, y)$ нет линейной функции, то очевидно, что $f_D(x, y) = x\&y, f_K(x, y) = x \vee y$ (других вариантов быть не может); положим тогда $f_1(x, y) = x\&y, f_2(x, y) = x \vee y$ и назовем этот случай $A_3$;

- если функция $f$ линейна, то положим $f_1(x, y) = f_2(x, y) = f_\oplus(x, y)$ и назовем этот случай $A_4$.

Из условий теоремы 5.1 следует, что существует простое число $p$, для которого выполнены неравенства

$$p \geqslant \sqrt{N} \tag{5.7}$$

и

$$p(4k+2) \leqslant N. \tag{5.8}$$

Кроме того, из условия $\sqrt{N} \leqslant \frac{N}{4k+2}$ заключаем, что $2k+1 \leqslant 4k+2 \leqslant \sqrt{N}$, а отсюда и из (5.7) следует неравенство

$$p \geqslant 2k+1. \tag{5.9}$$

Введем следующие подмножества множества $B$: пусть $D_{i,j}$, $i = 1, \ldots, 2k+1$, $j = 1, \ldots, p$ — множества, состоящие из всех элементов, номера которых представимы в виде $pm + 1 + ((j-1+m(i-1)) \bmod p)$, где $m$ — целое неотрицательное число; $G_s$, $s = 1, \ldots, 4k+2$ — множества, состоящие из всех элементов, номера которых представимы в виде $p(s-1)+t$, где $t$ — натуральное число от 1 до $p$; $R_i = G_{2i-1} \cup G_{2i}$, $i = 1, \ldots, 2k+1$. Отметим, что множества $G_s$ попарно не пересекаются при различных $s$, а множества $R_i$ попарно не пересекаются при различных $i$; кроме того, $|G_s| = p$ для любого $s$ от 1 до $4k+2$ в силу (5.8).

**Пример 5.1.** Вид множеств $D_{i,j}$, $G_s$, $R_i$ для $N = 46, k = 1, p = 7$.

$D_{1,1} = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43\}$ $\quad D_{2,1} = \{1, 9, 17, 25, 33, 41\}$ $\quad D_{3,1} = \{1, 10, 19, 28, 30, 39\}$

$D_{1,2} = \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}$ $\quad D_{2,2} = \{2, 10, 18, 26, 34, 42, 43\}$ $\quad D_{3,2} = \{2, 11, 20, 22, 31, 40\}$

$D_{1,3} = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$ $\quad D_{2,3} = \{3, 11, 19, 27, 35, 36, 44\}$ $\quad D_{3,3} = \{3, 12, 21, 23, 32, 41, 43\}$

$D_{1,4} = \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}$ $\quad D_{2,4} = \{4, 12, 20, 28, 29, 37, 45\}$ $\quad D_{3,4} = \{4, 13, 15, 24, 33, 42, 44\}$

$D_{1,5} = \{5, 12, 19, 26, 33, 40\}$ $\quad D_{2,5} = \{5, 13, 21, 22, 30, 38, 46\}$ $\quad D_{3,5} = \{5, 14, 16, 25, 34, 36, 45\}$

$D_{1,6} = \{6, 13, 20, 27, 34, 41\}$ $\quad D_{2,6} = \{6, 14, 15, 23, 31, 39\}$ $\quad D_{3,6} = \{6, 8, 17, 26, 35, 37, 46\}$

$D_{1,7} = \{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$ $\quad D_{2,7} = \{7, 8, 16, 24, 32, 40\}$ $\quad D_{3,7} = \{7, 9, 18, 27, 29, 38\}$

$G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\quad R_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

$G_2 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

$G_3 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$ $\quad R_2 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$

$G_4 = \{22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$

$G_5 = \{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$ $\qquad$ $R_3 = \{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$

$G_6 = \{36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$

(Для удобства, функциональный элемент с номером $n$ обозначаем просто $n$, где $n = 1, 2, \ldots, 46$.)

Графически это можно изобразить так, как показано на рис. 6. Здесь четко видна аналогия с рис. 1.

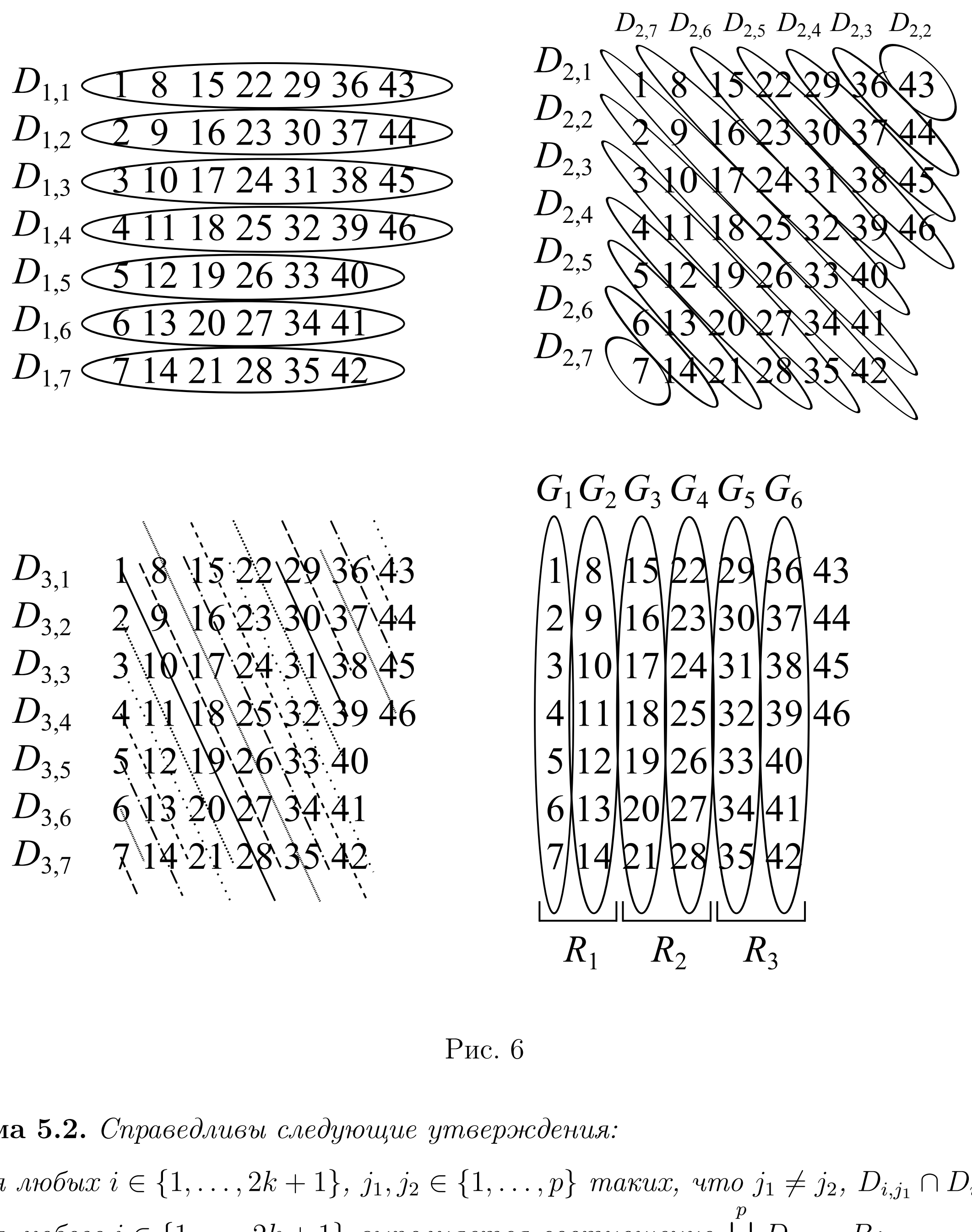



Рис. 6

**Лемма 5.2.** *Справедливы следующие утверждения:*

1) *для любых* $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$ *таких, что* $j_1 \neq j_2$, $D_{i,j_1} \cap D_{i,j_2} = \varnothing$*;*

2) *для любого* $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$ *выполняется соотношение* $\bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i,j} = B$*;*

3) *для любых* $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$ *таких, что* $i_1 \neq i_2$, *множества* $D_{i_1,j_1}$ *и* $D_{i_2,j_2}$ *пересекаются не более чем по одному элементу;*

4) *для любых* $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $s \in \{1, \ldots, 4k+2\}$ *множество* $D_{i,j} \cap G_s$ *содержит ровно один элемент;*

5) *для любых* $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$ *и* $j \in \{1, \ldots, p\}$ *выполняется неравенство* $|D_{i,j}| \geqslant 3$.

*Доказательство.* В построении множеств $D_{i,j}$, $G_s$ четко прослеживается аналогия с построением множеств соответственно $A_{i,j}$, $A_{k+1,j}$ из доказательства теоремы 2.1. Отличия этих множеств заключаются лишь в том, что множества $D_{i,j}$, $G_s$ состоят из функциональных элементов, а множества $A_{i,j}$, $A_{k+1,j}$ — из контактов, и числе этих множеств при фиксированном $j$ (фиксированном $s$). С использованием этой аналогии утверждения 1)–3) леммы 5.2 доказываются аналогично утверждениям соответственно 1)–3) леммы 2.3; при этом в доказательстве утверждения 3) леммы 5.2 используется неравенство (5.9) вместо неравенства (2.4), так как число построенных множеств $D_{i,j}$ при фиксированном $j$ равно $2k+1$, и неравенство (5.7), совпадающее с неравенством (2.3). Утверждение 4) леммы 5.2 можно разбить на два утверждения: $|D_{i,j} \cap G_s| \leqslant 1$ и $|D_{i,j} \cap G_s| \geqslant 1$. Первое из них доказывается аналогично утверждению 3) леммы 2.3 в случае, когда одно из чисел $i_1$, $i_2$ равно $k+1$ (см. с. 27, строки 6–1 снизу). Для доказательства второго достаточно заметить, что элемент с номером $p(s-1)+1+((j-1+(s-1)(i-1)) \bmod p)$ существует, так как $p(s-1)+1+((j-1+(s-1)(i-1)) \bmod p) \leqslant p(s-1)+p = ps \leqslant p(4k+2) \leqslant N$ в силу (5.8), и принадлежит каждому из множеств $D_{i,j}$, $G_s$ по определениям этих множеств. Для доказательства утверждения 5) леммы 5.2 достаточно воспользоваться утверждением 4) этой же леммы и теми фактами, что множества $G_s$, $s = 1, \ldots, 4k+2$, попарно не пересекаются, а их число равно $4k+2 \geqslant 3$. Лемма 5.2 доказана.

Перейдем к построению схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$, которые составят проверяющий, а в случае, когда функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ нелинейна — и диагностический тест. Для любого $i$ от 1 до $2k+1$ построим схему $S_i$ следующим образом. По утверждению 4) леммы 5.2 для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ множества $D_{i,j} \cap G_{2i-1}$ и $D_{i,j} \cap G_{2i}$ содержат ровно по одному элементу. Обозначим эти два элемента через $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$ соответственно. По утверждению 1) леммы 5.2 и в силу того, что $G_{2i-1} \cap G_{2i} = \varnothing$, все элементы $E^1_{i,1}, \ldots, E^1_{i,p}, E^2_{i,1}, \ldots, E^2_{i,p}$ попарно различны. Кроме того,

$$\{E^1_{i,1}\} \cup \ldots \cup \{E^1_{i,p}\} = (D_{i,1} \cap G_{2i-1}) \cup \ldots \cup (D_{i,p} \cap G_{2i-1}) = (\bigcup_{j=1}^{p} D_{i,j}) \cap G_{2i-1}$$
$$= B \cap G_{2i-1} = G_{2i-1}, \quad (5.10)$$

$$\{E^2_{i,1}\} \cup \ldots \cup \{E^2_{i,p}\} = (D_{i,1} \cap G_{2i}) \cup \ldots \cup (D_{i,p} \cap G_{2i}) = (\bigcup_{j=1}^{p} D_{i,j}) \cap G_{2i}$$

$$= B \cap G_{2i} = G_{2i} \quad (5.11)$$

по утверждению 2) леммы 5.2.

Так как функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной $x_n$, то существуют такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ (напомним, что $n \geqslant 2$), что функция $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, x_n)$ совпадает с одной из функций $x_n$, $\overline{x_n}$. Пусть $j$ — произвольный индекс от 1 до $p$. Из множества $D_{i,j} \setminus (\{E^1_{i,j}\} \cup \{E^2_{i,j}\})$ (оно непусто по утверждению 5) леммы 5.2) возьмем все функциональные элементы и составим из них цепь следующим образом. Сначала возьмем из него произвольный элемент и подадим на его входы $v_1, \ldots, v_{n-1}$ константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ соответственно, а на его вход $v_n$ — переменную $x_j$. Затем возьмем из рассматриваемого множества любой другой элемент (если он существует) и подадим на его входы $v_1, \ldots, v_{n-1}$ константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ соответственно, а его вход $v_n$ соединим с выходом предыдущего элемента. Затем возьмем из рассматриваемого множества любой элемент, отличный от первых двух (если он существует), и подадим на его входы $v_1, \ldots, v_{n-1}$ константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ соответственно, а его вход $v_n$ соединим с выходом предыдущего элемента, и.т.д. В итоге получим цепь, содержащую все элементы из $D_{i,j} \setminus (\{E^1_{i,j}\} \cup \{E^2_{i,j}\})$. Обозначим эту цепь через $L_{i,j}$. Из ее построения нетрудно заметить, что функция, реализуемая на выходе ее нижнего элемента (в случае, если все элементы из $L_{i,j}$ исправны), совпадает с одной из функций $x_j$, $\overline{x_j}$.

Отметим, что для любых $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$ таких, что $j_1 \neq j_2$, множества $D_{i,j_1} \setminus (\{E^1_{i,j_1}\} \cup \{E^2_{i,j_1}\})$ и $D_{i,j_2} \setminus (\{E^1_{i,j_2}\} \cup \{E^2_{i,j_2}\})$ не пересекаются по утверждению 1) леммы 5.2. Таким образом, построенные нами цепи элементов $L_{i,1}, \ldots, L_{i,p}$ попарно не пересекаются.

Далее, для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ рассмотрим элементы $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$. Ни один из них не входит ни в одну из построенных ранее цепей $L_{i,1}, \ldots, L_{i,p}$ (для цепи $L_{i,j}$ это верно по построению, для всех остальных цепей — по определению элементов $E^1_{i,j}$, $E^2_{i,j}$ и утверждению 1) леммы 5.2). Путем отождествления некоторых входов и подачи на некоторые входы констант 0 и 1 из $E^1_{i,j}$ можно получить элемент $E'_{i,j}$, имеющий два входа $v_1$ и $v_2$ и реализующий (в случае, если $E^1_{i,j}$ исправен) функцию $f_1(x, y)$, а из $E^2_{i,j}$ — элемент $E''_{i,j}$, имеющий два входа $v_1$ и $v_2$ и реализующий (в случае, если $E^2_{i,j}$ исправен) функцию $f_2(x, y)$, где $x, y$ — переменные, подаваемые на входы $v_1$ и $v_2$ этих элементов соответственно, что мы и сделаем для построения схемы $S_i$ (определение функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ см. на с. 57). У элемента $E''_{i,j}$

выделим "правый" вход (в дальнейшем, кавычки при слове "правый" будем опускать) так:

- в случае $A_1$ функция $f_2(x, y) \in \{x\&\overline{y}, \overline{x}\&y, \overline{x}\&\overline{y}, x \vee \overline{y}, \overline{x} \vee y, \overline{x} \vee \overline{y}\}$. Тогда по определению элемент $E''_{i,j}$ имеет хотя бы один инверсионный вход. Будем считать его правым входом любой из его инверсионных входов.

- в случаях $A_2$, $A_3$, $A_4$ считаем правым входом элемента $E''_{i,j}$ любой из его входов.

По построению, других случаев быть не может.

Теперь соединим вход $v_1$ элемента $E'_{i,j}$ с выходом нижнего элемента цепи $L_{i,j}$, а на вход $v_2$ элемента $E'_{i,j}$ подадим переменную $y_j$. Затем соединим правый вход элемента $E''_{i,j}$ с выходом элемента $E'_{i,j}$; другой вход элемента $E''_{i,j}$ (будем его считать левым) соединим:

- со входом схемы, отвечающим переменной $z$, если $j = 1$;

- с выходом элемента $E''_{i,j-1}$, если $j > 1$.

Будем говорить, что элемент $E^1_{i,j}$ принадлежит *верхнему слою*, а элемент $E^2_{i,j}$ — *нижнему слою* схемы $S_i$. В силу (5.10), (5.11) объединение верхнего и нижнего слоев $S_i$ совпадает с $G_{2i-1} \cup G_{2i} = R_i$. Выход элемента $E''_{i,p}$ будем считать выходом $S_i$. Все переменные $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p, z$ считаем попарно различными.

Построение схемы $S_i$ показано на рис. 7. Очевидно, что данная схема удовлетворяет определению схемы из функциональных элементов, на входы которой могут подаваться константы 0 и 1. Кроме того, по построению ни один из элементов из множества $B$ не входит в нее дважды. Таким образом, схема $S_i$ является допустимой в рассматриваемой задаче. Заметим также, что любой элемент из $B$ входит в $S_i$. Действительно, для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ все элементы из множества $D_{i,j} \setminus (\{E^1_{i,j}\} \cup \{E^2_{i,j}\})$ по построению принадлежат цепи $L_{i,j}$, а элементы $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$ — верхнему и нижнему слою $S_i$ соответственно, поэтому в силу утверждения 2) леммы 5.2 любой элемент из множества $B$ входит в $S_i$.

Будем считать, что для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ любому элементу из множества $D_{i,j}$ в схеме $S_i$ соответствует переменная $x_j$. Тогда по утверждению 2) леммы 5.2 любому элементу из множества $B$ в схеме $S_i$ соответствует какая-то переменная из числа $x_1, \ldots, x_p$.

Так как $i$ — любое натуральное число от 1 до $2k + 1$, то построен набор схем $(S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1})$, каждая из которых является допустимой в рассматриваемой задаче. Для доказательства утверждения 1) теоремы 5.1 достаточно доказать, что $(S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1})$ — проверяющий тест.

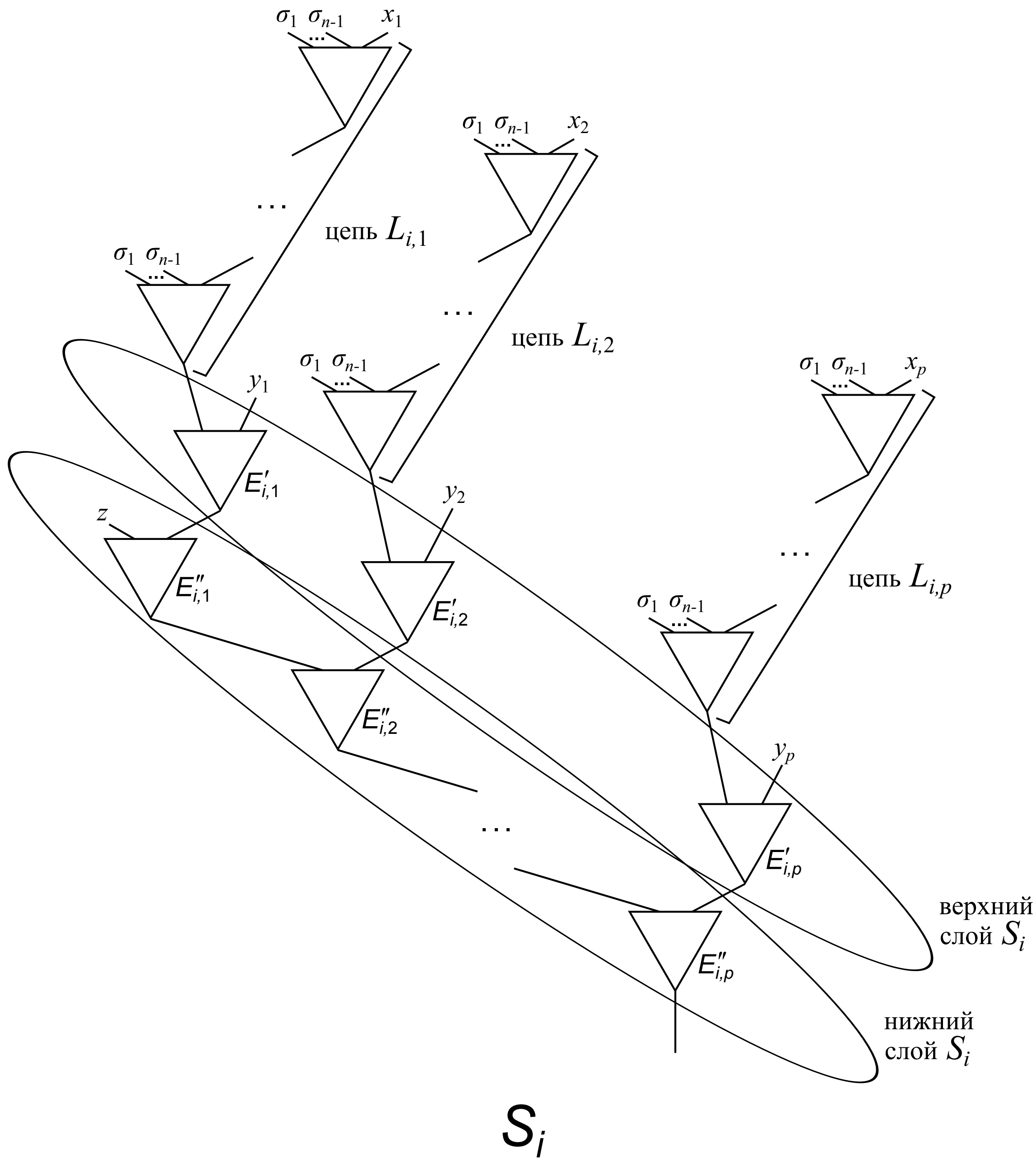



Рис. 7

Отметим, что по построению в каждой из схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ каждому элементу соответствует какая-то переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_p\}$.

Идея дальнейших рассуждений состоит в следующем. При любой неисправности системы элементов среди схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ можно выделить "достаточно много" схем (а именно $k+1$ схему), в каждой из которых все элементы верхнего и нижнего слоев исправны. Можно показать, что для любого исправного элемента $E$ найдется схема $S$ из числа выделенных, в которой в (единственной) цепи $L_{i,j}$, соединяющей вход этой схемы, отвечающий соответствующей элементу $E$ в этой схеме переменной $x_j$, с ее выходом, все элементы исправны, а отсюда будет следовать, что функция, реализуемая схемой $S$, существенно зависит от переменной $x_j$. Если же элемент $E$ неисправен, то ни одна из схем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ не реализует функцию, существенно зависящую от $x_j$, с учетом того, что в каждой из этих схем элемент $E$ по построению содержится в единственной цепи, связывающей вход "$x_j$" рассматриваемой схемы с ее выходом. Таким образом, можно получить критерий исправности каждого элемента из множества $B$.

Опишем вышеизложенные идеи более подробно. Зафиксируем некоторую неисправность системы элементов. Множества $R_1, \ldots,\ R_{2k+1}$ попарно не пересекаются, поэтому среди них есть хотя бы $k+1$ множеств, в каждом из которых все элементы исправны (так как неисправны не более $k$ элементов). Обозначим эти $k+1$ множеств через $R_{i_1}, \ldots, R_{i_{k+1}}$. Пусть $S_i$ — произвольная схема из числа $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k+1}}$. Рассмотрим любое $j$ от 1 до $p$. По построению, на выходе цепи $L_{i,j}$ схемы $S_i$ реализуется функция, зависящая от одной переменной $x_j$ (зависимость существенная, если все элементы в $L_{i,j}$ исправны), которая подается на один из входов элемента $E'_{i,j}$; на другой вход этого элемента подается переменная $y_j$, а выход этого элемента соединяется с правым входом элемента $E''_{i,j}$, причем элементы $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ двухвходовые. Так как все элементы из множества $R_i$ исправны, то все элементы, принадлежащие верхнему и нижнему слоям $S_i$, исправны, т.е. элементы $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$ исправны. Значит, и полученные из них путем отождествления входов и подачи на некоторые входы констант 0 и 1 элементы $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ исправны. По построению, эти элементы реализуют функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ соответственно, где $x, y$ — переменные, подаваемые на их входы.

**Лемма 5.3.** *Для любого $j \in \{1, \ldots, p\}$ и для любой схемы $S_i$ из числа $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k+1}}$ на входы этой схемы вместо $x_j$ и $y_j$ можно подать такие значения, что функция на выходе элемента $E''_{i,j}$ будет равна одной из функций $g, \overline{g}$, где $g$ — функция, подаваемая на левый вход этого элемента.*

*Доказательство.* Подадим на вход схемы $S_i$ вместо $x_j$ нуль. Тогда на выходе цепи $L_{i,j}$ этой схемы будет реализована, очевидно, некоторая константа $\delta$, которая будет подаваться на вход $v_1$ элемента $E'_{i,j}$; на вход $v_2$ этого элемента подается переменная $y_j$. Рассмотрим отдельно случаи $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$.

Пусть выполнен случай $A_1$. Тогда $f_2(x,y) \in \{x\&\overline{y}, \overline{x}\&y, \overline{x}\&\overline{y}, x\vee\overline{y}, \overline{x}\vee y, \overline{x}\vee\overline{y}\}$, а $f_1(x,y) =$

$f_2(x, y)$. Рассмотрим два подслучая.

1. $f_2(x, y)$ имеет вид $x^{\sigma_1} \& y^{\sigma_2}$, где $\sigma_1, \sigma_2$ — некоторые булевы константы. Подадим на вход схемы $S_i$ вместо переменной $y_j$ значение $\overline{\sigma_2}$. Тогда, в силу того, что $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована функция $\delta^{\sigma_1} \& \overline{\sigma_2}^{\sigma_2}$, т.е. тождественный нуль. Он будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, который по построению инверсионный. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g^{\sigma} \& \overline{0} = g^{\sigma}$, где $g$ — функция, подаваемая на его левый вход, а $\sigma$ — булева константа, равная 1, если его левый вход прямой, и 0, если он инверсионный.

2. $f_2(x, y)$ имеет вид $x^{\sigma_1} \vee y^{\sigma_2}$, где $\sigma_1, \sigma_2$ — некоторые булевы константы. Подадим на вход схемы $S_i$ вместо переменной $y_j$ значение $\sigma_2$. Тогда, в силу того, что $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована функция $\delta^{\sigma_1} \vee \sigma_2^{\sigma_2}$, т.е. тождественная единица. Она будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, который по построению инверсионный. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g^{\sigma} \vee \overline{1} = g^{\sigma}$, где $g$ — функция, подаваемая на его левый вход, а $\sigma$ — булева константа, равная 1, если его левый вход прямой, и 0, если он инверсионный.

Других подслучаев, очевидно, нет.

Пусть выполнен один из случаев $A_2$, $A_4$. Тогда $f_2(x, y)$ — функция вида $x \oplus y \oplus \sigma$, где $\sigma$ — некоторая булева константа, а $f_1(x, y)$ — одна из функций $x \& y$, $x \vee y$, $x \oplus y \oplus \sigma$. Подадим на вход схемы $S_i$ вместо переменной $y_j$ нуль. Тогда на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована одна из функций $\delta \& 0$, $\delta \vee 0$, $\delta \oplus 0 \oplus \sigma$, т.е. некоторая булева константа $\delta'$. Она будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, реализующего функцию вида $x \oplus y \oplus \sigma$. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g \oplus \delta' \oplus \sigma$, т.е. либо $g$, либо $\overline{g}$, где $g$ — функция, подаваемая на его левый вход.

Пусть выполнен случай $A_3$. Тогда $f_1(x, y) = x \& y$, $f_2(x, y) = x \vee y$. Подадим на вход схемы $S_i$ вместо переменной $y_j$ нуль. Тогда на выходе элемента $E'_{i,j}$ будет реализована функция $\delta \& 0$, т.е. тождественный нуль. Он будет подаваться на правый вход элемента $E''_{i,j}$, реализующего дизъюнкцию своих входов. Это означает, что функция на выходе $E''_{i,j}$ будет равна $g \vee 0 = g$, где $g$ — функция, подаваемая на его левый вход. Все случаи разобраны, лемма 5.3 доказана.

**Лемма 5.4.** *При любой неисправности системы элементов для любого исправного элемента $E$ из множества $B$ существует схема $S_i, i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, такая, что реализуемая этой схемой функция существенно зависит от соответствующей $E$ в этой схеме* *переменной.*

*Доказательство.* Как было отмечено ранее, любой элемент из множества $B$, в том числе и элемент $E$, входит в каждую из схем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$. Из схем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ выберем схемы $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k+1}}$ с исправными элементами в верхнем и нижнем слоях (см. с. 64, строки 10–13 сверху). По утверждениям 1) и 2) леммы 5.2 для любого $s \in \{1, \ldots, k+1\}$ элемент $E$ принадлежит ровно одному множеству из числа $D_{i_s,1}, \ldots, D_{i_s,p}$ (пусть это множество — $D_{i_s,j_s}$). По утверждению 3) леммы 5.2 для любых $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, k+1\}$ таких, что $s_1 \neq s_2$, множества $D_{i_{s_1},j_{s_1}}$ и $D_{i_{s_2},j_{s_2}}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Так как данные множества пересекаются по элементу $E$, то множества $D_{i_{s_1},j_{s_1}} \setminus \{E\}$ и $D_{i_{s_2},j_{s_2}} \setminus \{E\}$ попарно не пересекаются при $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, k+1\}$ и $s_1 \neq s_2$. Число множеств $D_{i_s,j_s} \setminus \{E\}$, $s = 1, \ldots, k+1$, равно $k+1$, поэтому среди них есть хотя бы одно, в котором все элементы исправны. Пусть это множество — $D_{i_t,j_t} \setminus \{E\}$. Тогда и во множестве $D_{i_t,j_t}$ все элементы исправны.

Пусть $i = i_t, j = j_t$. Рассмотрим схему $S_i$. По построению все элементы из множества $D_{i,j} \setminus (\{E^1_{i,j}\} \cup \{E^2_{i,j}\})$ расположены в ней в одной цепи $L_{i,j}$, на один из входов верхнего элемента которой подается переменная $x_j$. Получаем, что все элементы в данной цепи исправны, а тогда функция, реализуемая на выходе данной цепи, существенно зависит от $x_j$ (обозначим эту функцию через $\varphi$; из построения цепи $L_{i,j}$ следует, что она совпадает с одной из функций $x_j$, $\overline{x_j}$). Затем по построению выход цепи $L_{i,j}$ соединяется со входом $v_1$ двухвходового элемента $E'_{i,j}$, который исправен (в силу того, что он получен из элемента $E^1_{i,j}$, принадлежащего $R_i$, а в данном множестве, согласно выбору схемы $S_i$, все элементы исправны) и, следовательно, реализует функцию, существенно зависящую от обеих своих переменных. На вход $v_2$ элемента $E'_{i,j}$ подается переменная $y_j$, значит, вместо нее можно подать такое значение, чтобы на выходе $E'_{i,j}$ была реализована либо функция $\varphi$, либо функция $\overline{\varphi}$, т.е. либо $x_j$, либо $\overline{x_j}$, что мы и сделаем. По лемме 5.3 вместо всех переменных, отличных от $x_j$, $y_j$, $z$, можно подать такие значения, чтобы каждый элемент из нижнего слоя, отличный от $E''_{i,j}$, реализовывал либо функцию, подаваемую на левый вход этого элемента, либо отрицание этой функции, что мы и сделаем. Так как на левый вход $E''_{i,1}$ подается переменная $z$, то при $j > 1$ на выходе $E''_{i,1}$ будет реализована одна из функций $z$, $\overline{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход $E''_{i,2}$, значит, при $j > 2$ и на выходе $E''_{i,2}$ будет реализована одна из функций $z$, $\overline{z}$, и.т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,j-1}$ будет реализована одна из двух функций $z$, $\overline{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход элемента $E''_{i,j}$, а правый вход данного элемента соединяется с выходом элемента $E'_{i,j}$, на котором, как было показано, реализуется одна из двух функций $x_j$ и $\overline{x_j}$. Пусть $\psi(z, x_j)$ — функция, реализуемая на выходе $E''_{i,j}$, тогда $\psi(z, x_j)$ существенно зависит от $x_j$, так как элемент $E''_{i,j}$ реализует функцию, существенно зависящую от обеих своих переменных (в силу того, что данный элемент получен из элемента $E^2_{i,j}$, принадлежащего $R_i$, и, следовательно, исправен). Далее, функция $\psi(z, x_j)$ при $j < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+1}$, значит, на выходе $E''_{i,j+1}$ будет реализована одна из функций $\psi(z, x_j)$, $\overline{\psi(z, x_j)}$. Эта функция при $j + 1 < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+2}$, значит, и на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована одна из функций $\psi(z, x_j)$, $\overline{\psi(z, x_j)}$, и.т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,p}$, т.е. на выходе схемы $S_i$, будет реализована одна из функций $\psi(z, x_j)$ и $\overline{\psi(z, x_j)}$, каждая из которых существенно зависит от переменной $x_j$. Это означает, что функция, реализуемая схемой $S_i$ при рассматриваемой неисправности системы элементов, при подстановке вместо некоторых переменных констант существенно зависит от $x_j$, значит, эта функция и без подстановок вместо ее переменных констант существенно зависит от $x_j$.

Осталось заметить, что элементу $E$ в схеме $S_i$ соответствует именно переменная $x_j$. Действительно, по построению элемент $E$ лежит во множестве $D_{i,j}$, а каждому элементу этого множества в схеме $S_i$ соответствует переменная $x_j$. Лемма 5.4 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 5.1. Покажем, что по набору выходных функций схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ можно однозначно определить все исправные и все неисправные элементы из множества $B$. Действительно, пусть $E$ — произвольный элемент из $B$. Если ни для одной схемы из числа $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ функция, реализуемая этой схемой, не зависит существенно от соответствующей $E$ в этой схеме переменной, то по лемме 5.4 элемент $E$ неисправен. Пусть теперь хотя бы для одной схемы из числа $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ функция, реализуемая этой схемой, существенно зависит от соответствующей $E$ в этой схеме переменной. Обозначим эту схему через $S'$, а переменную, соответствующую в ней $E$, через $x'$ (по построению $x'$ может быть одной из переменных $x_1, \dots, x_p$). Согласно выбору в схеме $S'$ соответствующей $E$ переменной, единственная цепь из функциональных элементов, соединяющая вход $S'$, отвечающий переменной $x'$, с выходом $S'$, проходит через $E$. Отсюда в силу того, что выходная функция $S'$ существенно зависит от $x'$, элемент $E$ не может реализовывать константу, т.е. исправен.

Таким образом, набор схем $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ позволяет определить все исправные и все неисправные элементы из множества $B$ и, следовательно, является проверяющим тестом.

Его длина равна $2k+1$, откуда следует справедливость утверждения 1) теоремы 5.1.

Пусть теперь функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ нелинейна. Докажем, что набор схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ является диагностическим тестом. Так как уже доказано, что он является проверяющим тестом, то достаточно доказать, что для любых двух различных неисправностей $H_1$ и $H_2$ системы элементов, при которых множества неисправных элементов совпадают, наборы выходных функций схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ различаются.

Так как неисправности $H_1$ и $H_2$ различны, а множества неисправных элементов при них совпадают, то существует такой элемент $E$ из $B$, что при $H_1$ он неисправен и выдает константу $\delta$, а при $H_2$ он неисправен и выдает константу $\overline{\delta}$. Множества $R_1, \ldots, R_{2k+1}$ попарно не пересекаются, поэтому среди них есть хотя бы $k+1$ множество, в каждом из которых все элементы исправны и при $H_1$, и при $H_2$ (так как неисправны не более $k$ элементов). Обозначим эти $k+1$ множеств через $R_{i_1}, \ldots, R_{i_{k+1}}$. По утверждениям 1) и 2) леммы 5.2 для любого натурального $s \in \{1, \ldots, k+1\}$ элемент $E$ принадлежит ровно одному множеству из числа $D_{i_s,1}, \ldots, D_{i_s,p}$ (пусть это множество — $D_{i_s,j_s}$). По утверждению 3) леммы 5.2 для любых $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, k+1\}$, таких, что $s_1 \neq s_2$, множества $D_{i_{s_1},j_{s_1}}$ и $D_{i_{s_2},j_{s_2}}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Так как данные множества пересекаются по элементу $E$, то множества $D_{i_{s_1},j_{s_1}} \setminus \{E\}$ и $D_{i_{s_2},j_{s_2}} \setminus \{E\}$ попарно не пересекаются при $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, k+1\}$ и $s_1 \neq s_2$. Число множеств $D_{i_s,j_s} \setminus \{E\}, s = 1, \ldots, k+1$, равно $k+1$, поэтому среди них есть хотя бы одно, в котором все элементы исправны (пусть это множество — $D_{i_t,j_t} \setminus \{E\}$). Тогда во множестве $D_{i_t,j_t}$ единственный неисправный элемент — $E$.

Пусть $i = i_t, j = j_t$. Рассмотрим схему $S_i$. Элемент $E$ неисправен, поэтому он не принадлежит $R_i$ и, следовательно, не совпадает ни с одним из элементов $E^1_{i,j}$, $E^2_{i,j}$. Таким образом, элемент $E$ принадлежит множеству $D_{i,j} \setminus (\{E^1_{i,j}\} \cup \{E^2_{i,j}\})$, т.е. цепи $L_{i,j}$, и является единственным неисправным элементом в данной цепи (так как все остальные элементы из множества $D_{i,j}$ исправны). По построению, если бы все элементы в цепи $L_{i,j}$ были исправны, то при изменении значения $x_j$ с 0 на 1 значение на выходе любого элемента данной цепи (в том числе $E$) менялось. Отсюда при изменении значения на выходе элемента $E$ с $\delta$ на $\overline{\delta}$ значение на выходе цепи $L_{i,j}$ меняется с 0 на 1 или с 1 на 0. Затем по построению выход $L_{i,j}$ соединяется со входом $v_1$ двухвходового элемента $E'_{i,j}$, на другой вход которого подается переменная $y_j$; выход $E'_{i,j}$ соединяется с правым входом элемента $E''_{i,j}$. Заметим, что элементы $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$ исправны, так как они оба принадлежат $R_i$.

Так как функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ нелинейна, то имеет место один из случаев $A_1$, $A_2$, $A_3$. В каждом из данных случаев элемент $E'_{i,j}$ реализует функцию вида либо $x^{\sigma_1} \& y^{\sigma_2}$, либо $x^{\sigma_1} \vee y^{\sigma_2}$, где $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — некоторые булевы константы. Как мы выяснили, при изменении значения на выходе элемента $E$ с $\delta$ на $\overline{\delta}$ значение на выходе цепи $L_{i,j}$ (которое затем подается на вход $v_1$ элемента $E'_{i,j}$) меняется с 0 на 1 или с 1 на 0. Воспользуемся очевидным свойством элемента, реализующего функцию одного из видов $x^{\sigma_1} \& y^{\sigma_2}, x^{\sigma_1} \vee y^{\sigma_2}$: при подаче одного из значений 0 или 1 на вход $v_1$ элемента $E'_{i,j}$ на выходе $E'_{i,j}$ будет реализована одна из функций $y_j$, $\overline{y_j}$, а при подаче другого значения на тот же вход $E'_{i,j}$ — одна из функций 0, 1. Таким образом, при одной из неисправностей $H_1$ и $H_2$ (без ограничения общности при $H_1$) на выходе $E'_{i,j}$ реализуется одна из функций $y_j$, $\overline{y_j}$, а при другой ($H_2$) — одна из функций 0, 1. Так как переменная $y_j$ подается в схеме $S_i$ только на вход элемента $E'_{i,j}$, то при неисправности $H_2$ функция, реализуемая схемой $S_i$, не будет зависеть существенно от переменной $y_j$.

Далее, пусть имеет место неисправность $H_1$. Применим лемму 5.3 и вместо всех переменных, отличных от $x_j, y_j, z$, подадим такие значения, чтобы каждый элемент из нижнего слоя, отличный от $E''_{i,j}$, реализовывал либо функцию, подаваемую на левый вход этого элемента, либо отрицание этой функции. Так как на левый вход $E''_{i,1}$ подается переменная $z$, то при $j > 1$ на выходе $E''_{i,1}$ будет реализована одна из функций $z$, $\overline{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход $E''_{i,2}$, значит, при $j > 2$ и на выходе $E''_{i,2}$ будет реализована одна из функций $z$, $\overline{z}$, и.т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,j-1}$ будет реализована одна из двух функций $z$, $\overline{z}$. Эта функция будет подаваться на левый вход элемента $E''_{i,j}$, а правый вход данного элемента соединяется с выходом элемента $E'_{i,j}$, на котором при $H_1$ реализуется одна из функций $y_j, \overline{y_j}$. Отсюда получаем, что на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована некоторая функция $\phi(z, y_j)$, существенно зависящая от $y_j$, так как элемент $E''_{i,j}$ реализует функцию, существенно зависящую от обеих своих переменных. Далее, функция $\phi(z, y_j)$ при $j < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+1}$, значит, на выходе $E''_{i,j+1}$ будет реализована одна из функций $\phi(z, y_j)$, $\overline{\phi(z, y_j)}$. Эта функция при $j + 1 < p$ будет подаваться на левый вход $E''_{i,j+2}$, значит, и на выходе $E''_{i,j}$ будет реализована одна из функций $\phi(z, y_j)$, $\overline{\phi(z, y_j)}$, и.т.д. В итоге, на выходе $E''_{i,p}$, т.е. на выходе схемы $S_i$, будет реализована функция, существенно зависящая от $y_j$. Это означает, что функция, реализуемая схемой $S_i$ при неисправности $H_1$, при подстановке вместо некоторых переменных констант существенно зависит от $y_j$, откуда следует, что эта функция и без подстановок вместо ее переменных констант существенно зависит от $y_j$. Таким образом, функции, реализуемые схемой $S_i$ при неисправностях $H_1$ и $H_2$, различаются (одна из них существенно зависит от $y_j$, а другая — нет). Поэтому и наборы выходных функций схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ при $H_1$ и $H_2$ различаются, что и требовалось доказать.

В итоге получаем, что набор схем $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ является диагностическим тестом. Его длина равна $2k+1$, откуда следует справедливость утверждения 2) теоремы 5.1. Таким образом, теорема 5.1 полностью доказана.

## §6. Нижние оценки длин тестов для функциональных элементов

В данном параграфе устанавливаются некоторые нижние оценки для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ при различных $f$, $N$ и $k$. Все эти оценки будут формулироваться для величины $L_c(f, N, k)$; в силу (5.1) они будут справедливы также для $L_d(f, N, k)$.

**Замечание 6.1.** Если в некоторой схеме $S$, входящей в проверяющий или диагностический тест, не содержится выходного элемента, то выход этой схемы обязан совпадать с одним из ее входов, а в таком случае схема $S$ при любой неисправности системы элементов реализует, очевидно, одну и ту же (тождественную) функцию и ее можно удалить из теста, при этом оставшийся набор содержит на одну схему меньше и также является проверяющим (диагностическим) тестом. Если же некоторый функциональный элемент в некоторой схеме не является выходным и его выход ни с чем не соединен, то такой элемент можно удалить и функции на выходах всех оставшихся элементов (в том числе выходного) в этой схеме останутся неизменными. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что в каждой из рассматриваемых схем содержится выходной элемент, а выход каждого элемента, не являющегося выходным, соединен со входом по крайней мере одного элемента.

**Теорема 6.1.** *Для любых $f$, $N$ и $k$ выполняется неравенство $L_c(f, N,\ k) \geqslant k$.*

*Доказательство.* Пусть для некоторых $f$, $N$ и $k$ выполняется соотношение $L_c(f, N, k) = l < k$. Тогда существует набор схем $S_1, \ldots, S_l$, являющийся проверяющим тестом. Пусть $M$ — множество выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_l$. Поскольку $l < k \leqslant N$, то существует элемент $E$ из множества $B$, не совпадающий ни с одним из элементов из $M$. Тогда при неисправности всех элементов из $M$ типа 0 каждая из схем будет реализовывать ту же функцию, что и при неисправности всех элементов из $M$ и элемента $E$ типа 0 — тождественный нуль, причем в обоих случаях неисправны не более $k$ элементов, а множества неисправных элементов при этих двух неисправностях различны. Противоречие, так как $(S_1, \dots, S_l)$ — проверяющий тест. Теорема 6.1 доказана.

**Теорема 6.2.** *Пусть* $f \in \{x_1 \& \dots \& x_n,\ x_1 \vee \dots \vee x_n\}$, $n \geqslant 1$. *Тогда для любых* $N$ *и* $k$ *выполняется неравенство* $L_c(f, N, k) \geqslant \log_2(\sum\limits_{i=0}^{k} C_N^i)$.

**Замечание 6.2.** В случае $n = 1$ получаем, что $f(x_1) = x_1$, т.е. элементы из множества $B$ в исправном состоянии реализуют тождественную функцию. Хотя такие элементы, как правило, не рассматриваются, теоретически такой случай возможен.

*Доказательство теоремы 6.2* проведем для $f = x_1 \& \dots \& x_n$ (случай $f = x_1 \vee \dots \vee x_n$ рассматривается двойственным образом). Пусть для некоторых $N$ и $k$ выполняется соотношение

$$L_c(f, N, k) = l < \log_2(\sum_{i=0}^{k} C_N^i). \tag{6.1}$$

Тогда существует набор схем $S_1, \dots, S_l$, являющийся проверяющим тестом.

Пусть $R_0$ — множество таких неисправностей системы элементов, при которых каждый неисправный элемент реализует константу 0. Найдем мощность множества $R_0$. Для любого $i$ от 0 до $k$ из заданных $N$ функциональных элементов можно выбрать $i$ неисправных $C_N^i$ способами. Каждому такому выбору соответствует ровно одна неисправность системы элементов из $R_0$ (так как тип неисправности каждого неисправного элемента фиксирован, а именно 0). Таким образом,

$$|R_0| = \sum_{i=0}^{k} C_N^i. \tag{6.2}$$

Зафиксируем произвольную неисправность системы элементов из $R_0$ и обозначим ее через $H$. Для каждой схемы $S_j$, $j = 1, \dots, l$, возможны два случая.

1. В схеме $S_j$ не содержится ни одного неисправного элемента. Пусть на выходе $S_j$ в данном случае реализуется булева функция $f_j$. Очевидно, что $f_j$ представляет собой конъюнкцию переменных, подаваемых на входы $S_j$; однако для дальнейшего изложения существенно только то обстоятельство, что функция $f_j$ не равна тождественному нулю.

2. В схеме $S_j$ содержится хотя бы один неисправный элемент (обозначим его $E_j^0$). Тогда в силу того, что $H \in R_0$, элемент $E_j^0$ реализует на выходе константу 0. Так как по нашему предположению выход каждого элемента, отличного от выходного, соединен со входом по

крайней мере одного элемента, то существует цепь, соединяющая $E_j^0$ с выходом схемы $S_j$. Тогда каждый элемент этой цепи будет реализовывать на выходе константу 0 вне зависимости от того, исправен он или нет, поскольку при подаче вместо любой переменной на вход элемента, реализующего функцию $x_1 \& \ldots \& x_n$, значения 0 на выходе этого элемента будет реализована константа 0 как при исправности этого элемента, так и при его неисправности типа 0. Таким образом, схема $S_j$ реализует тождественный нуль.

Получаем, что при любой неисправности системы элементов из $R_0$ каждая схема $S_j$, $j = 1, \ldots, l$, реализует одну из двух функций — либо $f_j$, либо тождественный нуль. Отсюда общее число наборов функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_l$ при различных неисправностях из $R_0$, не превосходит $2^l$. Но $2^l < 2^{\log_2(\sum\limits_{i=0}^{k} C_N^i)} = \sum\limits_{i=0}^{k} C_N^i = |R_0|$ в силу (6.1), (6.2). Значит, существуют такие две различные неисправности из $R_0$, при которых наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_l$, совпадают. Осталось заметить, что при любых двух различных неисправностях из $R_0$ множества неисправных элементов различны. Получено противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_l)$ — проверяющий тест. Теорема 6.2 доказана.

Пусть $S$ — произвольная схема из функциональных элементов, $E$ и $E'$ — элементы, содержащиеся в этой схеме. Будем говорить, что элемент $E$ находится в схеме $S$ *ниже* элемента $E'$ (соответственно, $E'$ — *выше* $E$), если в $S$ существует ориентированный путь от $E'$ к $E$.

**Теорема 6.3.** *Пусть $n = 1$ и $f(x_1) = \overline{x_1}$. Тогда для любых $N$ и $k$ выполняется неравенство $L_c(f, N, k) \geqslant \log_3(\sum\limits_{i=0}^{k} 2^i C_N^i)$.*

*Доказательство.* Пусть для некоторых $N$ и $k$ выполняется соотношение

$$L_c(f, N, k) = l < \log_3(\sum_{i=0}^{k} 2^i C_N^i). \tag{6.3}$$

Тогда существует набор схем $S_1, \ldots, S_l$, являющийся проверяющим тестом. Так как каждый из заданных $N$ функциональных элементов имеет один вход и один выход, то каждая из схем $S_1, \ldots, S_l$ представляет собой, очевидно, цепь элементов, связывающих единственный вход схемы с ее выходом.

**Лемма 6.1.** *В указанных предположениях набор схем $S_1, \ldots, S_l$ является диагностическим тестом.*

**Доказательство**. Так как данный набор является проверяющим тестом, то достаточно доказать, что для любых двух различных неисправностей $H_1$ и $H_2$ системы элементов, при которых множества неисправных элементов совпадают, наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$, различаются.

Обозначим множество неисправных элементов при неисправности $H_1$ (и, соответственно, при $H_2$), через $M$. Ясно, что $|M| \leqslant k$. Так как неисправности $H_1$ и $H_2$ различны, то существует такой элемент $E$ из $M$, что при $H_1$ и $H_2$ он реализует различные константы. Рассмотрим следующие две неисправности $H'$ и $H''$ системы элементов: $H'$ — это неисправность типа 0 всех элементов из $M$, а $H''$ — неисправность типа 0 всех элементов из множества $M \setminus \{E\}$. Поскольку набор схем $S_1, \dots, S_l$ является проверяющим тестом, а множества неисправных элементов при $H'$ и $H''$ различны, то существует схема $S_j$, $j \in \{1, \dots, l\}$, такая, что функции, реализуемые этой схемой при $H'$ и $H''$, не совпадают. Отсюда следует, что элемент $E$ содержится в $S_j$, так как состояния всех остальных элементов одинаковы при $H'$ и $H''$. Кроме того, ни один из элементов, находящихся в схеме $S_j$ ниже $E$ (напомним, что схема $S_j$ представляет собой цепь элементов, связывающих единственный вход этой схемы с ее выходом), не принадлежит $M$, поскольку в противном случае при неисправности всех элементов из $M \setminus \{E\}$ типа 0 изменение состояния элемента $E$ с исправного на неисправное типа 0 (т.е. переход от неисправности $H'$ к неисправности $H''$) никак не отразилось бы на функции, реализуемой схемой $S_j$, что невозможно. Но тогда при переходе от неисправности $H_1$ к неисправности $H_2$ значение на выходе элемента $E$, а значит и на выходе всех элементов ниже $E$ (так как все эти элементы не принадлежат $M$ и, следовательно, исправны как при $H_1$, так и при $H_2$), меняется, т.е. функция, реализуемая схемой $S_j$, меняется. Это означает, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$ при неисправностях $H_1$ и $H_2$, не совпадают, откуда следует справедливость леммы 6.1.

Вернемся к доказательству теоремы 6.3. Найдем общее число возможных неисправностей системы элементов (обозначим это число через $s$). Для любого $i$ от 0 до $k$ из заданных $N$ функциональных элементов можно выбрать $i$ неисправных $C_N^i$ способами. Каждому такому выбору соответствует $2^i$ различных неисправностей системы элементов (так как тип неисправности каждого неисправного элемента может быть одним из двух — либо 0, либо 1). Таким образом,

$$s = \sum_{i=0}^{k} 2^i C_N^i. \tag{6.4}$$

Переменную, подаваемую на вход каждой схемы из $S_1, \dots, S_l$, обозначим через $x$. Пусть имеет место некоторая неисправность системы элементов. Для каждой схемы $S_j$, $j = 1, \dots, l$, возможны два случая.

1. В схеме $S_j$ не содержится ни одного неисправного элемента. Пусть на выходе $S_j$ в данном случае реализуется булева функция $f_j$. Очевидно, что $f_j = x$ или $f_j = \overline{x}$.

2. В схеме $S_j$ содержится хотя бы один неисправный элемент (обозначим его $E_j^0$). Тогда в силу того, что элемент $E_j^0$ реализует на выходе константу, а единственная цепь в $S_j$, соединяющая вход данной схемы с ее выходом, проходит через $E_j^0$, то функция, реализуемая на выходе $S_j$, не зависит существенно от $x$, а значит, равна либо тождественному нулю, либо тождественной единице.

Получаем, что при любой неисправности системы элементов каждая схема $S_j$, $j = 1, \dots, l$, реализует одну из трех функций — либо $f_j$, либо тождественный нуль, либо тождественную единицу. Отсюда общее число наборов функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$ при различных неисправностях системы элементов, не превосходит $3^l$. Но $3^l < 3^{\log_3(\sum\limits_{i=0}^{k} 2^i C_N^i)} = \sum\limits_{i=0}^{k} 2^i C_N^i = s$ в силу (6.3), (6.4). Значит, существуют такие две различные неисправности системы элементов, при которых наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$, совпадают. Получено противоречие, так как $(S_1, \dots, S_l)$ — диагностический тест в силу леммы 6.1. Теорема 6.3 доказана.

В качестве следствия из теорем 6.2, 6.3 можно получить следующие нижние оценки для функции $L_c(f, N, k)$ при $f \in \{x_1 \& \dots \& \, x_n, \; x_1 \vee \dots \vee x_n, \; \overline{x_1}\}$:

$$L_c(f, N, k) > \begin{cases} k(\log_2 N - \log_2 k) \text{ при } f \in \{x_1 \& \dots \& x_n, \; x_1 \vee \dots \vee x_n\}, \\ \log_3 2 \cdot k(\log_2 N - \log_2 k + 1) \text{ при } f = \overline{x_1}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Действительно, используя неравенство $\frac{N-m}{k-m} \geqslant \frac{N}{k}$ для $0 \leqslant m < k$, получаем

$$\log_2(C_N^k) = \log_2\left(\frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}\right) \geqslant \log_2\left(\left(\frac{N}{k}\right)^k\right) = k(\log_2 N - \log_2 k).$$

Из последнего соотношения находим, что

$$\log_2(\sum_{i=0}^{k} C_N^i) > \log_2(C_N^k) \geqslant k(\log_2 N - \log_2 k),$$

$$\log_3(\sum_{i=0}^{k} 2^i C_N^i) > \log_3(2^k C_N^k) = \log_3 2 \cdot (\log_2(C_N^k) + k) \geqslant \log_3 2 \cdot k(\log_2 N - \log_2 k + 1),$$

откуда следуют требуемые оценки.

Пусть $k$ фиксировано, $N > (8k+\frac{5}{2})^2$ и возрастает. Следствие 5.1 и теоремы 6.2, 6.3 позволяют установить, что при $f \notin \{x_1\&\ldots\&x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n, \overline{x_1}\}$ функции $L_c(f,N,k)$ и — при дополнительном условии, что $f$ нелинейна — $L_d(f,N,k)$ ограничены сверху величиной $2k+1$; в то же время, при $f \in \{x_1\&\ldots\&x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n, \overline{x_1}\}$ данные функции в силу (6.5), (5.1) ограничены снизу величиной $c(f)k(\log_2 N - \log_2 k)$, растущей с ростом $N$ (при фиксированном $k$). Таким образом, видна принципиальная разница в поведении функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ в двух случаях:

1) когда $f$ — либо конъюнкция, либо дизъюнкция, либо инверсия,

2) когда $f$ — любая другая неконстантная булева функция (за исключением, быть может, поведения величины $L_d(f,N,k)$ в случае, когда $f$ — линейная функция от двух или более переменных).

**Теорема 6.4.** *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет вид либо $x_{s_1}^{\sigma_1}\&\ldots\&x_{s_m}^{\sigma_m}\&(x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee x_{s_n}^{\sigma_n})$, либо $x_{s_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{s_m}^{\sigma_m} \vee (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}}\&\ldots\&x_{s_n}^{\sigma_n})$, где $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \{0,1\}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$ и $s_1,\ldots,s_n$ — попарно различные индексы от 1 до $n$, и выполнено одно из следующих условий:*

*1) $m = n-1$ и $k \leqslant N-1$,*

*2) $m \leqslant n-2$ и $3 \leqslant k \leqslant N-2$.*

*Тогда $L_c(f,N,k) \geqslant k+1$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности $s_1 = 1$, $s_2 = 2, \ldots,$ $s_n = n$ (в противном случае можно соответствующим образом перенумеровать входы каждого элемента). Доказательство теоремы 6.4 проведем для

$$f = x_1^{\sigma_1}\&\ldots\&x_m^{\sigma_m}\&(x_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) \tag{6.6}$$

(случай $f = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_m^{\sigma_m} \vee (x_{m+1}^{\sigma_{m+1}}\&\ldots\&x_n^{\sigma_n})$ рассматривается двойственным образом). Пусть $L_c(f,N,k) \leqslant k$. Из теоремы 6.1 следует, что $L_c(f,N,k) \geqslant k$, значит, $L_c(f,N,k) = k$. Тогда существует набор схем $S_1,\ldots,S_k$, являющийся проверяющим тестом. Нижеследующие леммы 6.2–6.5 будут сформулированы именно в этом предположении. Пусть $M$ — множество выходных элементов схем $S_1,\ldots,S_k$.

**Лемма 6.2.** *Выходные элементы схем $S_1,\ldots,S_k$ попарно различны.*

*Доказательство.* Предположим, что это не так, т.е. некоторый элемент из $B$ является выходным элементом по крайней мере двух схем из числа $S_1,\ldots,S_k$. Тогда $|M| \leqslant k-1$. Так как $|B| = N > k$, то существует элемент $E \in B \setminus M$. Тогда при неисправности всех элементов из $M$ типа 0 каждая из схем будет реализовывать ту же функцию, что и при неисправности всех элементов из $M$ и элемента $E$ типа 0 — тождественный нуль, причем в обоих случаях неисправны не более $k$ элементов. Осталось заметить, что при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны. Противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест. Лемма 6.2 доказана.

**Лемма 6.3.** *В каждой из схем $S_1, \ldots, S_k$ содержатся все функциональные элементы из множества $B \setminus M$.*

*Доказательство.* Предположим, что это не так, т.е. в некоторой схеме $S_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, не содержится некоторый элемент $E$ из множества $B \setminus M$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$, а $H_2$ заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ и элемента $E$. Так как $E \notin M$, т.е. $E$ не является выходным элементом ни одной схемы из числа $S_1, \ldots, S_k$, то эти неисправности различны. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ при $H_1$ и при $H_2$ будет реализовывать, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль. Схема же $S_i$ будет реализовывать одинаковую функцию при $H_1$ и $H_2$, так как состояние каждого элемента, содержащегося в $S_i$, при $H_1$ и $H_2$ одинаково (в силу того, что $E$ не входит в $S_i$). Таким образом, при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны, очевидно, не более $k$ элементов. Противоречие, так как при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны, а $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест. Лемма 6.3 доказана.

Пусть выполнено условие 1) теоремы 6.4 и $m = n - 1$, а равенство (6.6) имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}. \tag{6.7}$$

Рассмотрим схему $S_1$. Пусть $E_0$ — ее выходной элемент. Из соотношения $k \leqslant N-1$ следует, что множество $B \setminus M$ непусто. Выберем любой элемент $E'$ из этого множества. По лемме 6.3 данный элемент содержится в каждой из схем $S_1, \ldots, S_k$, в том числе в схеме $S_1$. Так как $E_0 \in M$, то элементы $E_0$ и $E'$ не совпадают, откуда получаем, что в схеме $S_1$ содержатся по крайней мере два элемента. Это означает, что хотя бы один вход элемента $E_0$ в схеме $S_1$ соединяется с выходом $w$ некоторого другого функционального элемента $E$ (элементы $E$ и $E'$ могут совпадать). Пусть $w$ соединяется со входом $v_t$ элемента $E_0$, $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности всех элементов из множества $(M \setminus \{E_0\}) \cup \{E\}$ типа $\overline{\sigma_t}$, а $H_2$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M \setminus \{E_0\}$ типа $\overline{\sigma_t}$ и неисправности элемента $E_0$ типа 0. Каждая из схем $S_2, \ldots, S_k$ при $H_1$ и при $H_2$ будет реализовывать одну и ту же функцию — константу $\overline{\sigma_t}$, так как выходные элементы этих схем лежат во множестве $M \setminus \{E_0\}$ в силу леммы 6.2. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — функции, подаваемые в схеме $S_i$ при неисправности $H_1$ на 1-й, ..., $n$-й входы элемента $E_0$ соответственно. Тогда по построению $g_t = \overline{\sigma_t}$. Отсюда и из (6.7) получаем, что функция, реализуемая на выходе $E_0$, т.е. схемы $S_1$, при $H_1$ равна

$$f(g_1, \ldots, g_n) = g_1^{\sigma_1} \& \ldots \& g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \& (\overline{\sigma_t})^{\sigma_t} \& g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \& \ldots \& g_n^{\sigma_n}$$
$$= g_1^{\sigma_1} \& \ldots \& g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \& 0 \& g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \& \ldots \& g_n^{\sigma_n} = 0,$$

т.е. равна функции, реализуемой на выходе $E_0$ при неисправности $H_2$. Таким образом, при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны, очевидно, не более $k$ элементов. Осталось заметить, что при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны. Противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест. Таким образом, в случае выполнения условия 1) теорема 6.4 доказана.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы 6.4. Пусть $S$ — произвольная схема из числа $S_1, \ldots, S_k$, а $E$ — произвольный функциональный элемент, содержащийся в этой схеме. Будем говорить, что $E$ является *собирающим элементом* схемы $S$, если входы элемента $E$ соединяются с выходами по крайней мере двух различных функциональных элементов, а входы любого элемента, находящегося в $S$ ниже $E$, соединяются с выходом ровно одного функционального элемента (см. рис. 8).

Очевидно, что если в схеме $S$ собирающий элемент существует, то он в ней единственен. Очевидно также, что для любого элемента $E'$ схемы $S$, находящегося в ней не ниже собирающего элемента, любая цепь, соединяющая этот элемент с выходом $S$, проходит через собирающий элемент.

**Лемма 6.4.** *Пусть в схеме $S_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, существует собирающий элемент $E$ и все функциональные элементы, выходы которых соединены со входами элемента $E$, принадлежат множеству $M$. Тогда любой элемент из множества $B \setminus M$ либо совпадает с $E$, либо находится в схеме $S_i$ ниже $E$.*

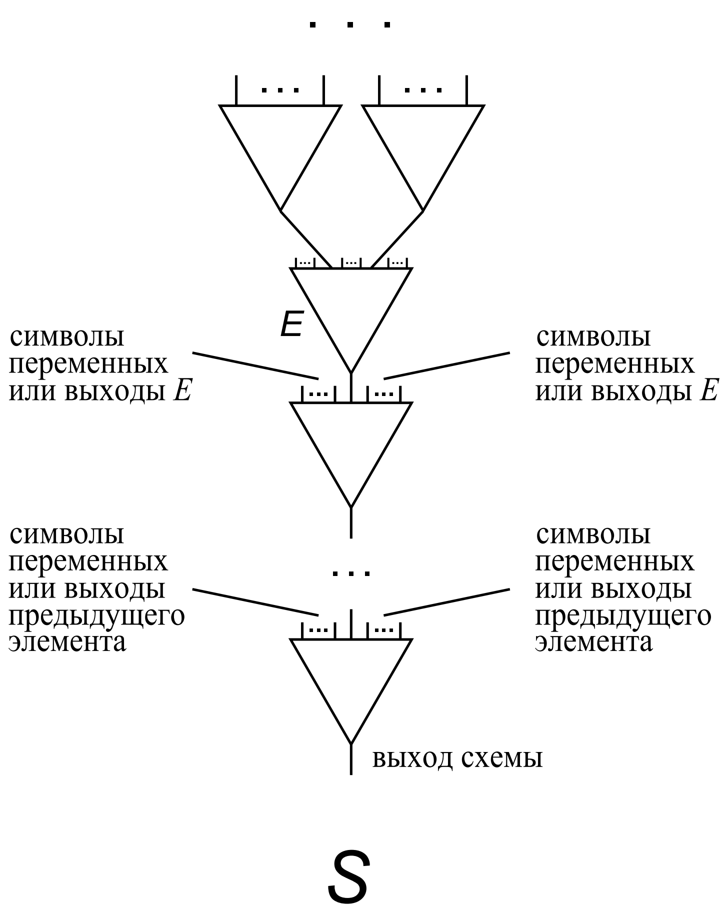



Рис. 8

*Доказательство.* Предположим, что это не так, т.е. существует такой элемент $E' \in B \backslash M$, что $E'$ не совпадает с $E$ и не находится в схеме $S_i$ ниже $E$. В силу леммы 6.3, $E'$ содержится в $S_i$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$, а $H_2$ заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ и элемента $E'$. Так как $E' \notin M$, т.е. $E'$ не является выходным элементом ни одной схемы из числа $S_1, \ldots, S_k$, то эти неисправности различны. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ при $H_1$ и при $H_2$ будет реализовывать, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль. Рассмотрим схему $S_i$. В ней элемент $E'$ находится не ниже собирающего элемента $E$, откуда следует, что любая цепь, соединяющая $E'$ с выходом $S_i$, проходит через $E$. Так как $E'$ не совпадает с $E$, а все функциональные элементы, выходы которых соединены со входами элемента $E$, принадлежат $M$, то эта цепь проходит через некоторый элемент $E''$ из множества $M$, выход которого соединен с одним или несколькими входами элемента $E$. Более того, так как $E' \notin M$, а $E'' \in M$, то $E''$ не совпадает с $E'$ и, следовательно, находится в данной цепи ниже $E'$. Заметим также, что элемент $E''$ не совпадает с выходным элементом схемы $S_i$, поэтому $E''$ совпадает с одним из выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$. Таким образом, в любой цепи, соединяющей элемент $E'$ с выходом схемы $S_i$, присутствует хотя бы один элемент, являющийся выходным элементом одной из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ и находящийся в этой цепи ниже $E'$. Отсюда при неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ изменение состояния элемента $E'$ с исправного на неисправность типа 0, т.е. переход от неисправности $H_1$ к неисправности $H_2$, никак не отразится на функции, реализуемой схемой $S_i$. Таким образом, при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны, очевидно, не более $k$ элементов. Осталось заметить, что при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны. Противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест. Лемма 6.4 доказана.

**Лемма 6.5.** *Существует такая схема $S_i$ из числа $S_1, \ldots, S_k$ и такой функциональный элемент $E$ из множества $B$, что $E$ является собирающим элементом в $S_i$ и по крайней мере один из входов элемента $E$ в $S_i$ соединен с выходом функционального элемента из множества $B \setminus M$.*

*Доказательство.* Предположим, что это не так. Тогда для каждой схемы $S_i$, $i = 1, \ldots, k$, выполнен один из двух случаев:

а) В схеме $S_i$ нет собирающего элемента. Предположим, что в $S_i$ существует такой элемент, что его входы соединены с выходами по крайней мере двух различных функциональных элементов. Из всех элементов с указанным свойством выберем такой, ниже которого в $S_i$ не существует элемента с таким свойством (очевидно, это можно сделать). Ясно, что выбранный элемент будет собирающим элементом в $S_i$. Противоречие, откуда следует, что входы любого элемента схемы $S_i$ соединены с выходом не более чем одного функционального элемента. Легко видеть, что $S_i$ в таком случае представляет собой цепь из функциональных элементов, причем в силу леммы 6.3 в этой цепи содержатся все элементы из множества $B \setminus M$.

б) В схеме $S_i$ существует собирающий элемент $E$ и все функциональные элементы, выходы которых соединены со входами элемента $E$, принадлежит множеству $M$. В этом случае выполнены условия леммы 6.4, откуда получаем, что любой элемент из множества $B \setminus M$ либо совпадает с $E$, либо находится в схеме $S_i$ ниже $E$.

В каждом из случаев а) и б) очевидно, что для каждого элемента из множества $B \setminus M$ существует единственная цепь, соединяющая этот элемент с выходом схемы $S_i$, $i = 1, \ldots, k$, причем эта цепь проходит через все элементы, находящиеся в $S_i$ не выше этого элемента. Так как выполнено условие 2) теоремы 6.4, то $N \geqslant k + 2$, откуда следует, что $|B \setminus M| \geqslant 2$. Выберем любые два элемента $E'$ и $E''$ из этого множества. Получаем, что в каждой из схем $S_1, \ldots, S_k$ либо элемент $E'$ расположен ниже элемента $E''$ в указанной цепи, либо наоборот. Пусть число схем, в которых $E'$ расположен ниже $E''$, равно $n_1$, а число схем, в которых $E''$ расположен ниже $E'$, равно $n_2$. Тогда $n_1 + n_2 = k \geqslant 3$ в силу условия 2) теоремы 6.4, откуда получаем, что хотя бы одно из этих чисел (без ограничения общности $n_1$) не меньше 2. Это означает, что среди схем $S_1, \ldots, S_k$ существуют такие две схемы (без ограничения общности $S_1$ и $S_2$), в каждой из которых элемент $E'$ расположен в цепи ниже $E''$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_3, \ldots, S_k$ и элемента $E'$, а $H_2$ заключается в неисправности типа 0 всех выходных элементов схем $S_3, \ldots, S_k$, элемента $E'$ и элемента $E''$. Каждая из схем $S_3, \ldots, S_k$ при $H_1$ и при $H_2$ будет реализовывать, очевидно, одну и ту же функцию — тождественный нуль. В то же время, в каждой из схем $S_1$, $S_2$ элемент $E'$, реализующий константу 0 как при $H_1$, так и при $H_2$, находится ниже элемента $E''$ в единственной цепи, соединяющей $E''$ с выходом схемы. Поэтому изменение состояния элемента $E''$ с исправного на неисправность типа 0 (т.е. переход от неисправности $H_1$ к неисправности $H_2$) никак не отразится на функциях, реализуемой схемами $S_1$ и $S_2$. В итоге получаем, что при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны, очевидно, не более $k$ элементов. Противоречие, так как при данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны, а $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест. Лемма 6.5 доказана.

Рассмотрим схему $S_i$ из числа $S_1, \ldots, S_k$ и функциональный элемент $E$ из множества $B$, определяемые условиями леммы 6.5. Пусть $s$ — наименьший номер входа элемента $E$, соединенный с выходом какого-то элемента $E'$ из множества $B \setminus M$. Так как $E$ — собирающий элемент в схеме $S_i$, то существует элемент, отличный от $E'$, выход которого соединен хотя бы с одним входом элемента $E$. Пусть $t$ — наименьший номер входа элемента $E$, соединенный с выходом какого-то элемента $E''$, отличного от $E'$. Пусть $M_i$ — множество, состоящее из выходных элементов схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$. Так как $E' \notin M$, то $E' \notin M_i$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $E \in M_i$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности типа 0 всех элементов из $M_i$, а $H_2$ заключается в неисправности типа 0 всех элементов из $M_i$ и элемента $E'$. Так как $E' \notin M_i$ , то эти неисправности различны. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ при $H_1$ и при $H_2$ будет реализовывать одну и ту же функцию — тождественный нуль. В схеме же $S_i$ элемент $E'$ находится не ниже собирающего элемента $E$, откуда следует, что любая цепь, соединяющая $E'$ с выходом $S_i$, проходит через $E$. Но $E \in M_i$. Это означает, что при неисправности типа 0 всех элементов из множества $M_i$ изменение состояния элемента $E'$ с исправного на неисправность типа 0, т.е. переход от неисправности $H_1$ к неисправности $H_2$, никак не отразится на функции, реализуемой схемой $S_i$. Таким образом, при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны не более $k$ элементов. При данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны. Противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест.

2. Пусть $E \notin M_i$. Рассмотрим три подслучая.

2.1. Пусть $s \leqslant m$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i \cup \{E'\}$ типа $\overline{\sigma_s}$, а $H_2$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i$ типа $\overline{\sigma_s}$ и неисправности элемента $E$ типа 0. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ как при $H_1$, так и при $H_2$ будет реализовывать одну и ту же функцию — константу $\overline{\sigma_s}$. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — функции, подаваемые в схеме $S_i$ при неисправности $H_1$ на 1-й, $\ldots, n$-й входы элемента $E$ соответственно. Тогда $g_s = \overline{\sigma_s}$, так как $s$-й вход элемента $E$ по построению соединен с выходом элемента $E'$. Отсюда и из (6.6) получаем, что функция, реализуемая на выходе $E$, при $H_1$ равна

$$
\begin{aligned}
f(g_1, \ldots, g_n) = g_1^{\sigma_1} \& \ldots \& g_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \& (\overline{\sigma_s})^{\sigma_s} \& g_{s+1}^{\sigma_{s+1}} \& \ldots \& g_m^{\sigma_m} \& (g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \\
\vee\, g_n^{\sigma_n}) = g_1^{\sigma_1} \& \ldots \& g_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \& 0 \& g_{s+1}^{\sigma_{s+1}} \& \ldots \& g_m^{\sigma_m} \& (g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee g_n^{\sigma_n}) = 0,
\end{aligned}
$$

т.е. равна функции, реализуемой на выходе $E$ при неисправности $H_2$. Но тогда и функция, реализуемая схемой $S_i$, одинакова при $H_1$ и $H_2$, так как состояние всех элементов, находящихся в $S_i$ ниже $E$, одинаково при этих двух неисправностях. Таким образом, при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны, очевидно, не более $k$ элементов. При данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны. Получаем противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест.

2.2. Пусть $s \geqslant m+1$ и $t \leqslant m$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i \cup \{E''\}$ типа $\overline{\sigma_t}$, а $H_2$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i$ типа $\overline{\sigma_t}$ и неисправности элемента $E$ типа 0. Рассуждая аналогично случаю 2.1, получаем, что набор схем $S_1, \ldots, S_k$ не может быть проверяющим тестом.

2.3. Пусть $s \geqslant m+1$ и $t \geqslant m+1$. Рассмотрим две неисправности $H_1$ и $H_2$ системы элементов: $H_1$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i \cup \{E''\}$ типа $\sigma_t$, а $H_2$ заключается в неисправности всех элементов из множества $M_i$ типа $\sigma_t$ и неисправности элемента $E'$ типа $\sigma_s$. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$ как при $H_1$, так и при $H_2$ будет реализовывать константу $\sigma_t$. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — функции, подаваемые в схеме $S_i$ при неисправности $H_1$ на 1-й, $\ldots, n$-й входы элемента $E$ соответственно. Согласно определению чисел $s$ и $t$, 1-й, $\ldots, m$-й входы элемента $E$ не могут соединяться с выходами функциональных элементов. Отсюда $g_j = y_j$ для $j = 1, \ldots, m$, где $y_1, \ldots, y_m$ — некоторые входные переменные схемы $S_i$ (часть из них может совпадать). Кроме того, $g_t = \sigma_t$, так как $t$-й вход элемента $E$ по построению соединен с выходом элемента $E''$. Отсюда и из (6.6) получаем, что на выходе элемента $E$ при $H_1$ реализуется функция

$$\begin{aligned} f(g_1, \ldots, g_n) &= y_1^{\sigma_1} \& \ldots \& y_m^{\sigma_m} \& (g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \vee \sigma_t^{\sigma_t} \vee g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \vee \ldots \vee g_n^{\sigma_n}) \\ &= y_1^{\sigma_1} \& \ldots \& y_m^{\sigma_m} \& (g_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee g_{t-1}^{\sigma_{t-1}} \vee 1 \vee g_{t+1}^{\sigma_{t+1}} \vee \ldots \vee g_n^{\sigma_n}) = y_1^{\sigma_1} \& \ldots \& y_m^{\sigma_m}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $h_1, \ldots, h_n$ — функции, подаваемые в схеме $S_i$ соответственно на 1-й, $\ldots, n$-й входы элемента $E$ при неисправности $H_2$. Аналогично случаю неисправности $H_1$ получаем, что $h_j = y_j$ для $j = 1, \ldots, m$, $h_s = \sigma_s$. Отсюда и из (6.6) получаем, что на выходе элемента $E$ при $H_2$ реализуется функция

$$\begin{aligned} f(h_1, \ldots, h_n) &= y_1^{\sigma_1} \& \ldots \& y_m^{\sigma_m} \& (h_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee h_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \vee \sigma_s^{\sigma_s} \vee h_{s+1}^{\sigma_{s+1}} \vee \ldots \vee h_n^{\sigma_n}) \\ &= y_1^{\sigma_1} \& \ldots \& y_m^{\sigma_m} \& (h_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee h_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \vee 1 \vee h_{s+1}^{\sigma_{s+1}} \vee \ldots \vee h_n^{\sigma_n}) = y_1^{\sigma_1} \& \ldots \& y_m^{\sigma_m}, \end{aligned}$$

равная функции, реализуемой на выходе $E$ при неисправности $H_1$. Но тогда и функция, реализуемая схемой $S_i$, одинакова при $H_1$ и $H_2$, так как состояние всех элементов, находящихся в $S_i$ ниже $E$, одинаково при этих двух неисправностях. Таким образом, при $H_1$ и $H_2$ наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, совпадают, причем в обоих случаях неисправны, очевидно, не более $k$ элементов. При данных двух неисправностях множества неисправных элементов различны (это следует из того, что $E' \notin M_i$). Противоречие, так как $(S_1, \ldots, S_k)$ — проверяющий тест.

Во всех случаях получено противоречие, откуда следует, что $L_c(f, N, k) \geqslant k+1$. Теорема 6.4 доказана.

Следствие 5.1 и теорема 6.1 позволяют утверждать, что при условиях $8k + \frac{5}{2} \leqslant \sqrt{N}$ и $f \notin \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n, \overline{x_1}\}$ выполняются неравенства $k \leqslant L_c(f, N, k) \leqslant 2k+1$ и (при дополнительном условии, что $f$ нелинейна) $k \leqslant L_d(f, N, k) \leqslant 2k+1$. Теорема 6.4 позволяет в ряде случаев повысить нижние оценки для величин $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ в этих неравенствах с $k$ до $k+1$.

## §7. Точные значения длин тестов для функциональных элементов

Всюду ниже функциональный элемент из множества $B$, имеющий номер $j$, $j = 1, \ldots, N$, будем обозначать через $E_j$.

Основным результатом данного параграфа является следующая

**Теорема 7.1.** *Пусть $n \geqslant 2$, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не представима в виде $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$ или $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — какие-то булевы константы, и $k \in \{1,\ 2,\ N-1,\ N\}$. Тогда $L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k$.*

*Доказательство.* В силу теоремы 6.1 и (5.1) выполняются неравенства $L_c(f, N, k) \geqslant k$ и $L_d(f, N, k) \geqslant k$. В силу (5.1) достаточно доказать неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$.

**Лемма 7.1** *Существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что ни одна из функций $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ не равна тождественно константе.*

*Доказательство.* Предположим, что это не так, т.е. для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ существуют такие булевы константы $\alpha_j$, $\beta_j$, что

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv \beta_j.$$

Отметим, что для любого $j \in \{2, \ldots, n\}$ выполняются тождества

$$f(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \beta_1 \equiv f(\alpha_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv \beta_j \equiv f(\alpha_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

откуда $\beta_j = \beta_1$.

Рассмотрим произвольный булев набор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, не совпадающий с набором $(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})$. Тогда существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $\gamma_j \neq \overline{\alpha_j}$, т.е. $\gamma_j = \alpha_j$. Но в таком случае $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \alpha_j, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_n) = \beta_1$ в силу того, что $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv \beta_j = \beta_1$. Таким образом, на всех наборах длины $n$, кроме, быть может, набора $(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})$, значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ равно $\beta_1$. Очевидно, что $f(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) = \overline{\beta_1}$, так как в противном случае функция $f$ была бы тождественно равна константе, что противоречит условию рассматриваемой задачи. Нетрудно проверить, что выполняются тождества

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1^{\overline{\alpha_1}} \& \ldots \& x_n^{\overline{\alpha_n}} \text{ при } \beta_1 = 0,$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n} \text{ при } \beta_1 = 1,$$

однако по условию теоремы 7.1 функция $f$ не может представлена ни в одном из этих двух видов. Получено противоречие, откуда следует справедливость леммы 7.1.

По лемме 7.1 существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что ни одна из функций $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ не равна тождественно константе. Без ограничения общности $j = 1$.

Если $k = N$, то $L_d(f, N, k) \leqslant k$ в силу (5.3). Пусть $k = N - 1$, т.е. $N = k + 1$. Для каждого $i$ от 1 до $k$ построим схему $S_i$ следующим образом. Пусть эта схема содержит ровно два элемента: $E_i$ и $E_{k+1}$; на входы $v_1, \ldots, v_n$ элемента $E_{k+1}$ подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, а выход элемента $E_{k+1}$ соединяется со входом $v_1$ элемента $E_i$. Пусть на входы $v_2, \ldots, v_n$ элемента $E_i$ подаются переменные $y_2, \ldots, y_n$ соответственно, а выход $E_i$ совпадает с выходом схемы $S_i$ (см. рис. 9). Все переменные $x_1, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n$ считаем попарно различными. Докажем, что набор схем $S_1, \ldots, S_k$ является диагностическим тестом.

**Лемма 7.2** *Схема $S_i$, $i = 1, \ldots, k$, реализует константу $\delta_i$ тогда и только тогда, когда элемент $E_i$ неисправен и реализует константу $\delta_i$.*

*Доказательство.* Зафиксируем некоторую неисправность системы элементов. Если при ней элемент $E_i$ неисправен и реализует константу $\delta_i$, то и схема $S_i$, очевидно, реализует константу $\delta_i$. Пусть теперь $E_i$ исправен. Предположим, что на входы схемы $S_i$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ поданы нули. Тогда на выходе элемента $E_{k+1}$ в этой схеме будет, очевидно, реализована некоторая константа (обозначим ее $\varepsilon_i$) вне зависимости от того, исправен этот элемент или неисправен. В таком случае, так как элемент $E_i$ исправен, то функция, реализуемая на выходе $E_i$, а значит, и на выходе схемы $S_i$, будет равна $f(\varepsilon_i, y_2, \ldots, y_n)$. Но в силу леммы 7.1 данная функция не равна тождественно константе. Это означает, что и исходная функция, реализуемая схемой $S_i$ (до подачи нулей вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$), отлична от константы, откуда следует справедливость леммы 7.2.

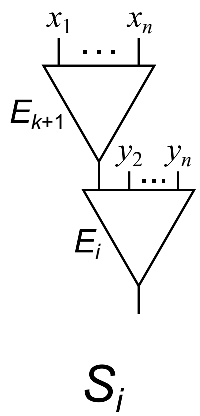



Рис. 9

Пусть имеет место некоторая неисправность системы элементов. Возможны два случая.

1. Каждая из схем $S_1, \ldots, S_k$ реализует константу. По лемме 7.2 это означает, что каждый из элементов $E_1, \ldots, E_k$ неисправен и реализует соответствующую константу. Таким образом, в данном случае обнаружены $k$ неисправных элементов, откуда следует, что элемент $E_{k+1}$ исправен и состояние каждого элемента определено однозначно.

2. Некоторая схема $S_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, реализует функцию, отличную от константы. В силу леммы 7.2 по набору функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, можно однозначно определить состояние каждого из элементов $E_1, \ldots, E_k$, причем элемент $E_i$ обязан быть исправным. Так как функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной $x_1$, то вместо переменных $x_2, \ldots, x_n$ на входы схемы $S_i$ можно подать такие значения, чтобы функция, реализуемая на выходе элемента $E_{k+1}$ при исправном функционировании этого элемента, была равна $x_1^\sigma$, где $\sigma$ — некоторая булева константа. Тогда функция, реализуемая на выходе элемента $E_i$, а значит и на выходе схемы $S_i$, будет равна $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где

$$y_1 = \begin{cases} x_1^\sigma, & \text{если элемент } E_{k+1} \text{ исправен,} \\ 0 & \text{при неисправности элемента } E_{k+1} \text{ типа 0,} \\ 1 & \text{при неисправности элемента } E_{k+1} \text{ типа 1.} \end{cases}$$

В силу существенной зависимости функции $f$ от своей первой переменной никакие две из функций $f(x_1^\sigma, y_2, \ldots, y_n)$, $f(0, y_2, \ldots, y_n)$, $f(1, y_2, \ldots, y_n)$ не совпадают между собой. Отсюда следует, что по функции, реализуемой схемой $S_i$, можно однозначно определить состояние элемента $E_{k+1}$.

В итоге получаем, что по набору функций, реализуемых схемами $S_1, \ldots, S_k$, можно однозначно определить, какой из случаев 1 и 2 имеет место, а в каждом из этих случаев — однозначно определить состояние каждого элемента. Это означает, что набор схем $S_1, \ldots, S_k$ является диагностическим тестом, откуда следует требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$. Таким образом, в случае $k \in \{N-1,\, N\}$ теорема 7.1 доказана.

Пусть теперь $k \in \{1,\, 2\}$. Построим схему $S_1$ следующим образом. Пусть на входы $v_1, \ldots, v_n$ элемента $E_1$ подаются переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}$ соответственно, а выход элемента $E_1$ соединяется со входом $v_1$ элемента $E_2$. Пусть для любого $s$ от 2 до $N$ на входы $v_2, \ldots, v_n$ элемента $E_s$ подаются переменные $x_{s,2}, \ldots, x_{s,n}$ соответственно, а выход элемента $E_s$ соединяется со входом $v_1$ элемента $E_{s+1}$, если $s < N$, и совпадает с выходом схемы $S_1$, если $s = N$. (Напомним, что $n \geqslant 2$ по условиям теоремы 7.1.)

В случае $k = 2$ построим схему $S_2$ следующим образом. Пусть на входы $v_1, \ldots, v_n$ элемента $E_N$ подаются переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}$ соответственно, а выход элемента $E_N$ соединяется со входом $v_1$ элемента $E_{N-1}$. Пусть для любого $s$ от 2 до $N$ на входы $v_2, \ldots, v_n$ элемента $E_{N-s+1}$ подаются переменные $x_{s,2}, \ldots, x_{s,n}$ соответственно, а выход элемента $E_{N-s+1}$ соединяется со входом $v_1$ элемента $E_{N-s}$, если $s < N$, и совпадает с выходом схемы $S_2$, если $s = N$.

Все переменные $x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n}, \ldots, x_{N,2}, \ldots, x_{N,n}$ считаем попарно различными. Вид схем $S_1$, $S_2$ показан на рис. 10. Очевидно, что любой элемент из множества $B$ содержится в каждой из схем $S_1$, $S_2$, причем для любых двух элементов $E_{s_1}$ и $E_{s_2}$ из $B$ в любой из этих схем либо $E_{s_1}$ находится ниже $E_{s_2}$, либо $E_{s_2}$ — ниже $E_{s_1}$.

Пусть $S$ — произвольная схема из числа $S_1$, $S_2$, а $E$ — функциональный элемент, содержащийся в этой схеме. Тогда, если элемент $E$ неисправен, а все элементы, расположенные в схеме $S$ ниже $E$, исправны, то $E$ будем называть *нижним неисправным элементом* в схеме $S$.

С учетом леммы 7.1 и существенной зависимости функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех переменных нетрудно заметить, что если $E_i$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ — нижний неисправный элемент в схеме $S_1$, то в этом и только в этом случае реализуемая схемой $S_1$ функция не зависит существенно от переменных, подаваемых на входы элемента $E_i$, и существенно зависит от переменных, подаваемых на входы элементов, лежащих в $S_1$ ниже $E_1$. А если известно, что $E_i$ — нижний неисправный элемент в $S_1$, то с учетом существенной зависимости $f$ от всех своих переменных по функции, реализуемой схемой $S_1$, можно однозначно указать, какую константу выдает элемент $E_i$. Аналогичные рассуждения можно провести и для схемы $S_2$. Таким образом, справедлива

**Лемма 7.3.** *Пусть имеет место некоторая неисправность системы элементов. Тогда для любой из схем $S_1$, $S_2$ по функции, реализуемой этой схемой, можно однозначно определить, есть ли среди элементов из множества $B$ хотя бы один неисправный, и если такой элемент существует, то можно однозначно указать нижний неисправный элемент в этой схеме и тип его неисправности.*

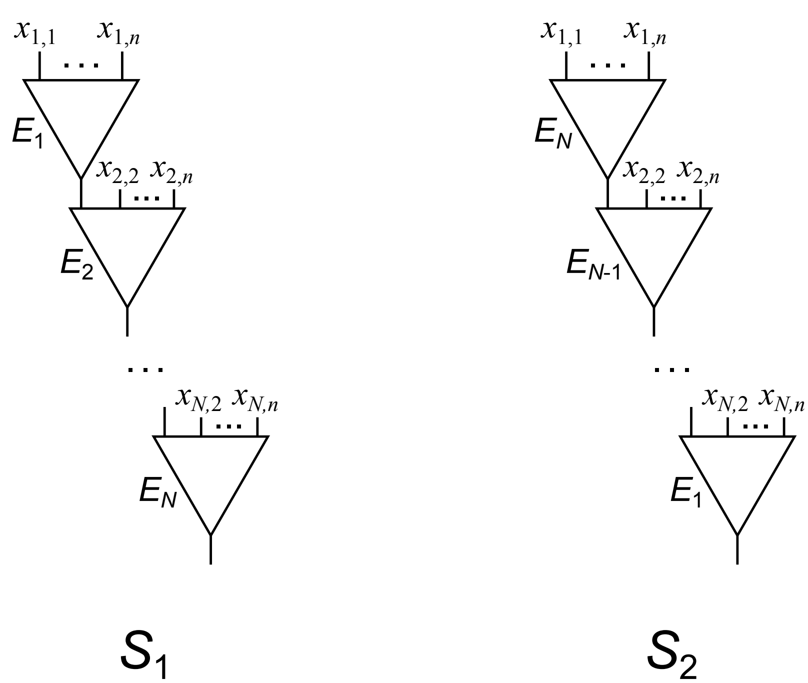



Рис. 10

Перейдем к завершению доказательства теоремы 7.1. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $k = 1$. В силу леммы 7.3 по функции, реализуемой схемой $S_1$, можно однозначно определить, есть ли среди элементов из множества $B$ хотя бы один неисправный, и если такой элемент существует, то можно однозначно указать нижний неисправный элемент в этой схеме и тип его неисправности. Но тогда, если такой элемент найден, то все остальные

элементы из множества $B$ исправны, так как $k = 1$. Отсюда следует, что по функции, реализуемой схемой $S_1$, состояние каждого элемента из $B$ определяется однозначно, т.е. $(S_1)$ — диагностический тест. Его длина равна $k = 1$, откуда следует требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$.

2. Пусть $k = 2$. В силу леммы 7.3 для любой из схем $S_1$, $S_2$ по функции, реализуемой этой схемой, можно однозначно определить, есть ли среди элементов из множества $B$ хотя бы один неисправный, и если такой элемент существует, то можно однозначно указать нижний неисправный элемент в этой схеме и тип его неисправности. Пусть среди элементов из множества $B$ хотя бы один неисправен и $E_{t_1}$ и $E_{t_2}$ — нижние неисправные элементы в схемах $S_1$ и $S_2$ соответственно. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть $t_1 = t_2$. Если некоторый элемент $E_{t_3}$ из множества $B$, отличный от элемента $E_{t_1}$, неисправен, то при $t_3 > t_1$ этот элемент находится ниже $E_{t_1}$ в схеме $S_1$, а при $t_3 < t_1$ — в схеме $S_2$, поэтому элемент $E_{t_1}$ не является нижним неисправным элементом по крайней мере в одной из схем $S_1$, $S_2$. Противоречие. Следовательно, все элементы из множества $B$, кроме $E_{t_1}$, исправны. Для элемента же $E_{t_1}$ можно указать также тип его неисправности в силу леммы 7.3.

2.2. Пусть $t_1 \neq t_2$. Так как $k = 2$, а элементы $E_{t_1}$ и $E_{t_2}$ различны и неисправны, то все остальные элементы из множества $B$ исправны. Для элементов же $E_{t_1}$ и $E_{t_2}$ можно указать также типы их неисправностей в силу леммы 7.3.

В итоге получаем, что $(S_1, S_2)$ — диагностический тест. Его длина равна $k = 2$, откуда следует требуемое неравенство $L_d(f, N, k) \leqslant k$. Теорема 7.1 доказана.

Из теорем 6.1, 6.4, 7.1 для функций $f$ вида $x_{s_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{s_m}^{\sigma_m} \& (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \vee \ldots \vee x_{s_n}^{\sigma_n})$ или $x_{s_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{s_m}^{\sigma_m} \vee (x_{s_{m+1}}^{\sigma_{m+1}} \& \ldots \& x_{s_n}^{\sigma_n})$, где $n \geqslant 2$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$ и $s_1, \ldots, s_n$ — попарно различные индексы от 1 до $n$, следуют необходимые и достаточные условия того, что $L_c(f, N, k) = k$ и $L_d(f, N, k) = k$. А именно: $L_c(f, N, k) = k$ тогда и только тогда, когда либо $m \leqslant n-2$ и $k \in \{1,\ 2,\ N-1,\ N\}$, либо $m = n-1$ и $k = N$; для равенства $L_d(f, N, k) = k$ необходимые и достаточные условия те же самые. Действительно, в силу теоремы 7.1, если $m \leqslant n-2$ и $k \in \{1,\ 2,\ N-1,\ N\}$, то $L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k$. Если $m = n-1$ и $k = N$, то $L_c(f, N, k) = L_d(f, N, k) = k$ в силу (5.1)–(5.3) и теоремы 6.1. Если же $m \leqslant n-2$, но $k \notin \{1,\ 2,\ N-1,\ N\}$, или же если $m = n-1$ и $k \leqslant N-1$, то $L_c(f, N, k) \geqslant k+1$ и $L_d(f, N, k) \geqslant k+1$ в силу теоремы 6.4. Таким образом, для функций $f$ специального вида получен критерий того, что $L_c(f, N, k) = k$ и $L_d(f, N, k) = k$.

## §8. Единичные тесты для функциональных элементов

Всюду в данном параграфе будем предполагать, что $k = 1$, т.е. неисправным может оказаться не более одного функционального элемента. Диагностический (проверяющий) тест в этом случае будем также называть единичным диагностическим (проверяющим) тестом для $N$ элементов. Вместо $L_c(f, N, 1)$ и $L_d(f, N, 1)$ будем для краткости писать соответственно $L_c(f, N)$ и $L_d(f, N)$.

**Утверждение 8.1.** *Множества единичных проверяющих и единичных диагностических тестов для $N$ функциональных элементов, каждый из которых реализует в исправном состоянии булеву функцию $f$, совпадают.*

**Следствие 8.1.** *Справедливо равенство $L_c(f, N) = L_d(f, N)$.*

*Доказательство утверждения 8.1.* Из определений следует, что любой диагностический тест является проверяющим; докажем обратное утверждение. Пусть $(S_1, \dots, S_l)$ — проверяющий тест. Достаточно доказать, что для любого $i \in \{1, \dots, N\}$ для неисправностей $H_0 = \{(i, 0)\}$ и $H_1 = \{(i, 1)\}$ системы элементов наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$, не совпадают. Рассмотрим неисправность системы элементов $H = \varnothing$. Так как элемент $E_i$ исправен при $H$ и неисправен при $H_0$, а $(S_1, \dots, S_l)$ — проверяющий тест, то наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$ при неисправностях $H$ и $H_0$, не совпадают. Это означает, что функции, реализуемые некоторой схемой $S$ из $S_1, \dots, S_l$ при неисправностях $H$ и $H_0$, различаются. Обозначим эти функции через $f_{S,H}$ и $f_{S,H_0}$ соответственно, а функцию, реализуемую схемой $S$ при неисправности $H_1$ — через $f_{S,H_1}$. Тогда существует такой набор $\tilde{\alpha}$ значений входных переменных схемы $S$, что

$$f_{S,H}(\tilde{\alpha}) \neq f_{S,H_0}(\tilde{\alpha}). \tag{8.1}$$

Отсюда следует, что при неисправности $H$ на входном наборе $\tilde{\alpha}$ значение на выходе элемента $E_i$ в схеме $S$ равно 1, так как в случае равенства этого значения нулю изменение состояния элемента $E_i$ с исправного на неисправное типа 0, т.е. переход от неисправности $H$ к неисправности $H_0$, никак не отразилось бы на значении, выдаваемом схемой $S$ на входном наборе $\tilde{\alpha}$, что невозможно в силу (8.1). Но тогда изменение состояния элемента $E_i$ с исправного на неисправное типа 1, т.е. переход от неисправности $H$ к неисправности $H_1$, никак не отразится на значении, выдаваемом схемой $S$ на входном наборе $\tilde{\alpha}$, т.е.

$$f_{S,H}(\tilde{\alpha}) = f_{S,H_1}(\tilde{\alpha}). \tag{8.2}$$

Из (8.1) и (8.2) следует, что $f_{S,H_1}(\tilde{\alpha}) \neq f_{S,H_0}(\tilde{\alpha})$, откуда заключаем, что функции $f_{S,H_0}$ и $f_{S,H_1}$ различаются. Следовательно, наборы функций, реализуемых схемами $S_1, \dots, S_l$ при неисправностях $H_0$ и $H_1$, не совпадают. Утверждение 8.1 доказано.

**Замечание 8.1.** В силу следствия 8.1 для нахождения величины $L_d(f,\ N)$ достаточно знать только $L_c(f, N)$. Поэтому после введения обозначения $L(f, N) = L_c(f, N)$ можно формулировать основные результаты параграфа 8 в терминах величины $L(f, N)$.

Напомним, что, согласно предположениям, сделанным в постановке задачи, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих $n$ переменных, где $n \geqslant 1$. Выделим два возможных представления функции $f$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}, \tag{$*$}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}, \tag{$**$}$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$.

Основным результатом параграфа 6 является следующая

**Теорема 8.1.** *Справедливо равенство*

$$L(f, N) = \begin{cases} 1, & \text{если функция } f \text{ не представима ни в} \\ & \text{одном из видов } (*),\ (**); \\ \min(2; N), & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*) \\ & \text{или } (**), \text{ причем } n \geqslant 2 \text{ и хотя бы одно} \\ & \text{из чисел } \sigma_1, \dots, \sigma_n \text{ равно нулю;} \\ \lceil \log_2(N+1) \rceil, & \text{если } f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1 \& \dots \& x_n,\ x_1 \vee \dots \\ & \vee x_n\}; \\ \lceil \log_3(2N+1) \rceil, & \text{если } n = 1 \text{ и } f(x_1) = \overline{x_1}. \end{cases}$$

**Замечание 8.2.** Легко видеть, что четыре случая, указанные в формулировке теоремы 8.1, охватывают все возможные случаи.

*Доказательство теоремы 8.1.* Для удобства пронумеруем указанные четыре случая цифрами I–IV в том порядке, в каком они идут в формулировке теоремы. Тогда соотношение $L(f,N)=1$ в случае I следует из теоремы 7.1 при $k=1$. Соотношение $L(f,N)=\min(2;N)$ в случае II для $N=1$ следует из (5.2) и теоремы 6.1 при $k=1$. Оценка $L(f,N)\geqslant\min(2;N)$ в случае II для $N\geqslant 2$ следует из теоремы 6.4 при $m=n-1$ и $k=1$. Оценки $L(f,N)\geqslant \lceil\log_2(N+1)\rceil$ в случае III и $L(f,N)\geqslant\lceil\log_3(2N+1)\rceil$ в случае IV следуют из теорем соответственно 6.2 и 6.3 при $k=1$. Таким образом, достаточно получить оценки $L(f,N)\leqslant\min(2;N)$ в случае II для $N\geqslant 2$, $L(f,N)\leqslant\lceil\log_2(N+1)\rceil$ в случае III и $L(f,N)\leqslant\lceil\log_3(2N+1)\rceil$ в случае IV.

Пусть выполнен случай II и

$$N\geqslant 2. \tag{8.3}$$

По предположению этого случая функция $f$ представима в виде (*) или (**), причем $n\geqslant 2$ и хотя бы одно из чисел $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ равно нулю. Без ограничения общности

$$\sigma_1=0 \tag{8.4}$$

(в противном случае можно соответствующим образом перенумеровать входы каждого элемента). Построим схему $S_1$ следующим образом. Пусть для каждого $s=1,\dots,N$ на входы $v_2,\dots,v_n$ элемента $E_s$ подаются переменные $x_{s,2},\dots,x_{s,n}$ соответственно, а на его вход $v_1$ подается переменная $x_{1,1}$, если $s=1$, либо этот вход соединяется с выходом элемента $E_{s-1}$, если $s\geqslant 2$. Выход элемента $E_N$ будем считать выходом схемы $S_1$. Далее построим схему $S_2$ следующим образом. Пусть для каждого $s=1,\dots,\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$ на входы $v_2,\dots,v_n$ элемента $E_{2s}$ подаются переменные $x_{s,2},\dots,x_{s,n}$ соответственно, а на его вход $v_1$ подается переменная $x_{1,1}$, если $s=1$, либо этот вход соединяется с выходом элемента $E_{2s-2}$, если $s\geqslant 2$. Выход элемента $E_{2\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor}$ будем считать выходом схемы $S_2$; вид схем $S_1$, $S_2$ показан на рис. 11.

Ограничимся рассмотрением случая, когда функция $f$ имеет вид (*) (случай, когда $f$ имеет вид (**), рассматривается двойственным образом).

**Лемма 8.1.** *Пусть $H_1$ и $H_2$ — две такие неисправности системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны, а функции, реализуемые схемой $S_1$,* *совпадают. Тогда при $H_1$ неисправен некоторый элемент $E_{i_1}$, а при $H_2$ — некоторый элемент $E_{i_2}$, причем $|i_1 - i_2| = 1$.*

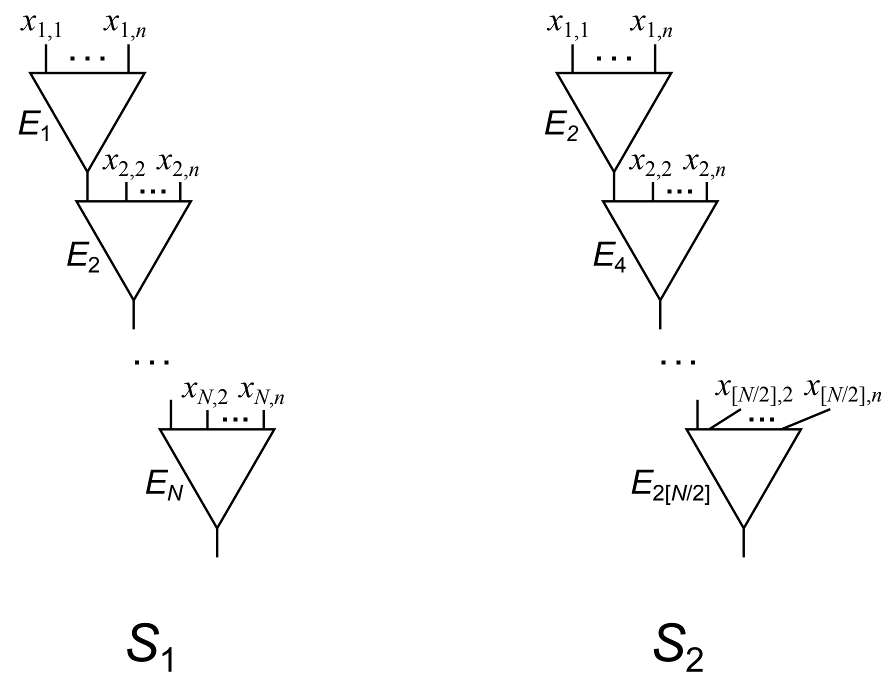



Рис. 11

*Доказательство.* Пусть $g$ — функция, реализуемая схемой $S_1$ при неисправности $H_1$ (а значит, и при $H_2$). Предположим сначала, что при одной из неисправностей $H_1$ и $H_2$ (без ограничения общности при $H_1$) все элементы исправны. Тогда с учетом построения схемы $S_1$ и существенной зависимости функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех своих переменных нетрудно заметить, что функция $g$ существенно зависит от переменной $x_{1,1}$. С другой стороны, в силу условия леммы 8.1, при неисправности $H_2$ некоторый элемент обязан быть неисправным и реализовывать константу. Этот элемент, очевидно, содержится в единственной цепи, связывающей вход "$x_{1,1}$" схемы $S_1$ (отвечающий переменной $x_{1,1}$) с ее выходом. Отсюда заключаем, что функция $g$, реализуемая схемой $S_1$ при неисправности $H_2$, не может зависеть существенно от переменной $x_{1,1}$. Получено противоречие, следовательно, исходное предположение неверно и при неисправности $H_1$ неисправен некоторый элемент $E_{i_1}$, а при $H_2$ — некоторый элемент $E_{i_2}$. Из условия леммы 8.1 следует, что $i_1 \neq i_2$. Предположим, что $|i_1 - i_2| \geqslant 2$. Без ограничения общности $i_1 > i_2$, а тогда

$$i_1 - i_2 \geqslant 2. \tag{8.5}$$

По построению схемы $S_1$ единственная цепь, связывающая вход "$x_{i_1,2}$" этой схемы с ее выходом, проходит через элемент $E_{i_1}$. При неисправности $H_1$ данный элемент неисправен и реализует константу, откуда заключаем, что функция $g$ не может зависеть существенно от переменной $x_{i_1,2}$. С другой стороны, пусть имеет место неисправность $H_2$. Тогда в силу (8.5) $i_1 - 1 \geqslant i_2 + 1 > i_2$, откуда следует, что элемент $E_{i_1-1}$ и все элементы с номерами, большими $i_1 - 1$, исправны. Предположим, что на вход схемы $S_1$ вместо переменной $x_{i_1-1,2}$ подано значение $\overline{\sigma_2}$. Тогда на вход $v_2$ элемента $E_{i_1-1}$ в схеме $S_1$ подается константа $\overline{\sigma_2}$ и вне зависимости от того, какие функции подаются на остальные входы этого элемента, на его выходе будет реализована функция $\ldots \& \overline{\sigma_2}^{\sigma_2} \& \ldots = 0$ в силу того, что функция $f$ имеет вид (*), и исправности элемента $E_{i_1-1}$. В таком случае на вход $v_1$ элемента $E_{i_1}$ будет подаваться константа 0 и функция, реализуемая на выходе этого элемента, в силу (8.4) и исправности элемента $E_{i_1}$ будет равна $f(0, x_{i_1,2} \ldots, x_{i_1,n}) = 0^{\sigma_1} \& x_{i_1,2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_1,n}^{\sigma_n} = x_{i_1,2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_1,n}^{\sigma_n}$. Отсюда с учетом построения схемы $S_1$, существенной зависимости функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех своих переменных и исправности всех элементов с номерами, большими $i_1$ (если такие есть) нетрудно заметить, что функция, реализуемая схемой $S_1$ при неисправности $H_2$, будет существенно зависеть от переменной $x_{i_1,2}$. Это означает, что и исходная функция, реализуемая схемой $S_1$ при неисправности $H_2$ (до подачи вместо переменной $x_{i_1-1,2}$ значения $\overline{\sigma_2}$), т.е. функция $g$, существенно зависит от переменной $x_{i_1,2}$, однако ранее было показано, что это невозможно. Полученное противоречие доказывает равенство $|i_1 - i_2| = 1$, а вместе с ним и лемму 8.1.

**Лемма 8.2.** *Набор* $(S_1,\ S_2)$ *является проверяющим тестом.*

*Доказательство.* Пусть $H_1$ и $H_2$ — две произвольные неисправности системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны. Надо доказать, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1$, $S_2$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Если схема $S_1$ реализует при $H_1$ и $H_2$ различные функции, то утверждение доказано. Пусть данная схема реализует при этих неисправностях одну и ту же функцию. Тогда выполнены все условия леммы 8.1, из которой заключаем, что при $H_1$ неисправен некоторый элемент $E_{i_1}$, а при $H_2$ — некоторый элемент $E_{i_2}$, причем $|i_1 - i_2| = 1$. Из последнего равенства следует, что ровно одно из чисел $i_1$, $i_2$ (без ограничения общности $i_1$) четно. По построению схемы $S_2$ в единственной цепи, связывающей вход "$x_{1,1}$" этой схемы с ее выходом, содержатся все элементы с четными номерами, в том числе и элемент $E_{i_1}$, который при неисправности $H_1$ неисправен и реализует константу. Это означает, что функция, реализуемая на выходе схемы $S_2$ при неисправности $H_1$, не может зависеть существенно от переменной $x_{1,1}$. С другой стороны, пусть имеет место неисправность $H_2$. По построению схемы $S_2$ в ней не содержится ни одного элемента с нечетным номером, в том числе элемента $E_{i_2}$, так как $i_2$ нечетно. Но $E_{i_2}$ — единственный неисправный элемент при неисправности $H_2$, откуда следует, что все элементы, содержащиеся в схеме $S_2$, исправны. Тогда с учетом построения схемы $S_2$ и существенной зависимости функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех своих переменных нетрудно заметить, что функция, реализуемая на выходе схемы $S_2$, существенно зависит от переменной $x_{1,1}$. В итоге получаем, что на выходе этой схемы при неисправностях $H_1$ и $H_2$ реализуются различные функции (одна из них зависит существенно от переменной $x_{1,1}$, а другая — нет), а значит, наборы функций, реализуемых схемами $S_1$, $S_2$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Лемма 8.2 доказана.

Из леммы 8.2 и (8.3) получаем соотношение $L(f, N) \leqslant 2 = \min(2; N)$. Случай II разобран.

Пусть теперь выполнен случай III, т.е. $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$. Введем обозначение $m = \lceil \log_2(N+1) \rceil$. Для каждого $j$ от 1 до $m$ построим схему $S'_j$ следующим образом. Пусть $M_j$ — множество таких заданных функциональных элементов, в $j$-м справа разряде двоичной записи номера которых стоит единица. Например, множество $M_1$ состоит из всех элементов с нечетными номерами. Отметим, что множество $M_j$ непусто, так как в нем содержится элемент $E_{2^{j-1}}$. Действительно, в $j$-м справа разряде двоичной записи числа $2^{j-1}$ стоит единица; с другой стороны, $1 \leqslant 2^{j-1} \leqslant 2^{m-1} = 2^{\lceil \log_2(N+1) \rceil - 1} < 2^{\log_2(N+1)} = N+1$, откуда следует, что $1 \leqslant 2^{j-1} \leqslant N$ и элемент $E_{2^{j-1}}$ существует. Возьмем любой элемент из множества $M_j$ и подадим на все его $n$ входов переменную $x$. Далее, возьмем любой другой элемент из множества $M_j$ (если такой элемент существует) и соединим все его $n$ входов с выходом предыдущего элемента. Затем возьмем любой элемент из множества $M_j$, отличный от первых двух (если такой элемент существует) и соединим все его $n$ входов с выходом предыдущего элемента, и т.д. В итоге получим цепь, содержащую все элементы из множества $M_j$. Выход нижнего элемента этой цепи будем считать выходом схемы $S'_j$. Из вида этой схемы и того, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1 \& \ldots \& x_n,\ x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$, непосредственно вытекает

**Лемма 8.3.** *Пусть имеет место некоторая неисправность системы элементов. Тогда* *функция, реализуемая схемой* $S'_j$*, равна*

$$\begin{cases} x, & \textit{если все элементы в схеме } S'_j \textit{ исправны;} \\ 0, & \textit{если некоторый элемент в схеме } S'_j \textit{ неисправен и выдает 0;} \\ 1, & \textit{если некоторый элемент в схеме } S'_j \textit{ неисправен и выдает 1.} \end{cases}$$

В итоге построены схемы $S'_1, \ldots, S'_m$. Отметим, что

$$N = 2^{\log_2(N+1)} - 1 \leqslant 2^{\lceil \log_2(N+1) \rceil} - 1 = 2^m - 1. \tag{8.6}$$

**Лемма 8.4.** *Набор* $(S'_1, \ldots, S'_m)$ *является проверяющим тестом.*

*Доказательство.* Пусть $H_1$ и $H_2$ — две произвольные неисправности системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны. Надо доказать, что наборы функций, реализуемых схемами $S'_1, \ldots, S'_m$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Предположим сначала, что при одной из неисправностей $H_1$ и $H_2$ (без ограничения общности при $H_1$) все элементы исправны. Тогда при неисправности $H_2$ некоторый элемент $E_i$ неисправен. Так как $1 \leqslant i \leqslant N \leqslant 2^m - 1$ в силу (8.6), то существует такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, что в $j$-м справа разряде двоичной записи числа $i$ стоит единица. Это означает, что $E_i \in M_j$ и, следовательно, элемент $E_i$ содержится в схеме $S'_j$. Тогда в силу леммы 8.3 схема $S'_j$ реализует функцию $x$ при неисправности $H_1$ и некоторую булеву константу при неисправности $H_2$, откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S'_1, \ldots, S'_m$ при этих двух неисправностях, не совпадают.

Пусть теперь при неисправности $H_1$ неисправен некоторый элемент $E_{i_1}$, а при неисправности $H_2$ — некоторый элемент $E_{i_2}$. Тогда $i_1 \neq i_2$. Так как $i_1 \leqslant N \leqslant 2^m - 1$ и $i_2 \leqslant N \leqslant 2^m - 1$ в силу (8.6), то существует такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, что в $j$-м справа разряде двоичной записи одного из чисел $i_1$, $i_2$ (без ограничения общности $i_1$) стоит единица, а другого ($i_2$) — нуль. Это означает, что $E_{i_1} \in M_j$ и $E_{i_2} \notin M_j$, т.е. в схеме $S'_j$ содержится элемент $E_{i_1}$ и не содержится элемента $E_{i_2}$. Тогда в силу леммы 8.3 схема $S'_j$ реализует некоторую булеву константу при неисправности $H_1$ и функцию $x$ при неисправности $H_2$, откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S'_1, \ldots, S'_m$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Лемма 8.4 доказана.

Из леммы 8.4 получаем соотношение $L(f, N) \leqslant m = \lceil \log_2(N+1) \rceil$. Случай III разобран.

Осталось получить оценку $L(f,N) \leqslant \lceil \log_3(2N+1) \rceil$ в случае IV. Докажем предварительно две общие леммы, которые могут использоваться в отдельности от доказываемой теоремы 8.1. Для того, чтобы подчеркнуть этот факт, будем использовать в этих леммах независимую систему обозначений, которые частично могут пересекаться с обозначениями, используемыми при постановке задачи и доказательстве теоремы 8.1.

**Лемма 8.5.** *Пусть $N$ — натуральное число, $r = \lceil \log_3(2N+1) \rceil$. Тогда существуют такие целые неотрицательные числа $n_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$, что $\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{C_r^i} n_{i,j} = N$, причем каждое $n_{i,j}$ не превосходит $2^{i-1}$ и $n_{1,1} = n_{1,2} = \ldots = n_{1,r} = 1$.*

*Доказательство.* Из определения числа $r$ легко видеть, что всегда $N \geqslant r$ и $3^r \geqslant 2N+1$, откуда

$$r \leqslant N \leqslant \frac{3^r - 1}{2}. \tag{8.7}$$

Далее, пусть

$$n'_{i,j} = 2^{i-1}, i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, C_r^i. \tag{8.8}$$

Тогда $n'_{1,1} = n'_{1,2} = \ldots = n'_{1,r} = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{C_r^i} n'_{i,j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{C_r^i} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{r} C_r^i 2^{i-1} = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{r} C_r^i 2^i - 1) = \frac{1}{2}((1+2)^r - 1) = \frac{3^r - 1}{2},$$

откуда

$$\sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{C_r^i} n'_{i,j} = \frac{3^r - 1}{2} - \sum_{j=1}^{C_r^1} n'_{1,j} = \frac{3^r - 1}{2} - \sum_{j=1}^{r} 1 = \frac{3^r - 1}{2} - r.$$

Из последнего соотношения и (8.7) получаем неравенства

$$\sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{C_r^i} n'_{i,j} \geqslant N - r \geqslant 0. \tag{8.9}$$

Из (8.9) нетрудно заключить, что существуют такие целые неотрицательные числа $n_{i,j}$, $i = 2, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$, что

$$n_{i,j} \leqslant n'_{i,j} \tag{8.10}$$

и

$$\sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{C_r^i} n_{i,j} = N - r \tag{8.11}$$

(действительно, последовательно уменьшая на единицу те из чисел $n'_{i,j}$, которые больше нуля, можно добиться того, чтобы сумма этих чисел стала равна $N-r$). Пусть $n_{1,1}=n_{1,2}=\ldots=n_{1,r}=1$. Тогда отсюда и из (8.8), (8.10) следует, что $n_{i,j}\leqslant 2^{i-1}$, $i=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,C_r^i$, а из (8.11) — что

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{C_r^i} n_{i,j}=\sum_{j=1}^{C_r^1} n_{1,j}+\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{C_r^i} n_{i,j}=\sum_{j=1}^{r}1+N-r=N.$$

Лемма 8.5 доказана.

Пусть $h$ — произвольное натуральное число, $A_1,\ldots,A_h$ — произвольные множества. Через $A_1\sqcup\ldots\sqcup A_h$ будем обозначать объединение множеств $A_1,\ldots,A_h$ при условии, что эти множества попарно не пересекаются. Таким образом, значок $\sqcup$ будет иметь смысл обычного объединения множеств, дополнительно указывая, что множества, между которыми стоит один или несколько таких значков, попарно не пересекаются. Будем использовать также обозначение $\bigsqcup\limits_{i=1}^{h} A_i=A_1\sqcup\ldots\sqcup A_h$.

**Лемма 8.6.** *Пусть $A$ — конечное множество, $|A|=n\geqslant 1$, $s=\lceil\log_2 n\rceil+1$. Тогда существуют $2s$ множеств $A_{1,1},A_{1,2},A_{2,1},A_{2,2},\ldots,A_{s,1},A_{s,2}$, обладающих следующими свойствами:*

1) *для любого $i\in\{1,\ldots,s-1\}$ выполнено неравенство $\big||A_{i,1}|-|A_{i,2}|\big|\leqslant 1$;*

2) *$\big||A_{s,1}|-|A_{s,2}|\big|\leqslant 2$;*

3) *для любого $i\in\{1,\ldots,s\}$ выполнено соотношение $A=A_{i,1}\sqcup A_{i,2}$;*

4) *для любого двухэлементного подмножества $B$ множества $A$ существуют такие индексы $i_1,i_2\in\{1,\ldots,s\}$, что $B\subseteq A_{i_1,1}$ или $B\subseteq A_{i_1,2}$ и при этом $B\nsubseteq A_{i_2,1}$, $B\nsubseteq A_{i_2,2}$.*

**Замечание 8.3.** Лемма 8.6 допускает переформулировку на языке теории графов. А именно, пусть $D_n$ — полный граф на $n$ вершинах, где $n\geqslant 1$; $s=\lceil\log_2 n\rceil+1$. Тогда существуют такие $s$ раскрасок вершин графа $D_n$ в черный и белый цвета, что при каждой из них, кроме $s$-й, число черных вершин отличается от числа белых вершин не более чем на 1, а при $s$-й — не более чем на 2 и при этом любое ребро графа $D_n$ хотя бы при одной раскраске имеет одноцветные вершины и хотя бы при одной раскраске имеет разноцветные вершины.

*Доказательство леммы 8.6.* Пусть $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. (Напомним, что в лемме 8.6 используется независимая система обозначений; в частности, число $n$ не имеет отношения к числу $n$ в постановке задачи как к числу переменных у функции $f$.) Определим множество $A_{s,1}$ как множество всех элементов из $A$, номера которых имеют вид $2k-1$ или

$2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2k+2$, где $k=1,\dots,\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil$. (В случае $n=1$ множество $A_{s,1}$ окажется пустым.) Так как $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2k+2\leqslant 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\leqslant n$ при $k\geqslant 1$ и для любых $k_1,\ k_2\in\left\{1,\dots,\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil\right\}$ выполняются соотношения

$$2k_1-1\leqslant 2\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil-1\leqslant 2\cdot\frac{\lfloor n/2\rfloor+1}{2}-1=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,$$

аналогично

$$2k_2-1\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

и, как следствие,

$$2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2k_2+2=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1-(2k_2-1)\geqslant 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1>2k_1-1,$$

то $|A_{s,1}|=2\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil$.

Пусть $A_{s,2}=A\setminus A_{s,1}$. Тогда $A=A_{s,1}\sqcup A_{s,2}$ и

$$\big||A_{s,1}|-|A_{s,2}|\big|=\big||A_{s,1}|-|A|+|A_{s,1}|\big|=\left|4\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil-n\right|\leqslant 2,$$

так как

$$4\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil\leqslant 4\cdot\frac{\lfloor n/2\rfloor+1}{2}=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\leqslant n+2 \tag{8.12}$$

и

$$4\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil\geqslant 4\cdot\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\geqslant 2\cdot\frac{n-1}{2}=n-1.$$

(Отметим, кстати, что равенство $\big||A_{s,1}|-|A_{s,2}|\big|=2$ может достигаться только при обращении обоих неравенств в (8.12) в равенства, т.е. только при $\left\lceil\frac{\lfloor n/2\rfloor}{2}\right\rceil=\frac{\lfloor n/2\rfloor+1}{2}$ и $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=n$, а это означает, что число $n$ должно быть представимо в виде $4k-2$, где $k$ — натуральное число. Для всех остальных $n$ справедливо неравенство $\big||A_{s,1}|-|A_{s,2}|\big|\leqslant 1$.)

Далее, в случае $s\geqslant 2$ определим множество $A_{s-1,1}$ как множество всех элементов из $A$, номера которых имеют вид $2k-1$, где $k=1,\dots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Тогда $|A_{s-1,1}|=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Пусть $A_{s-1,2}=A\setminus A_{s-1,1}$. Тогда $A=A_{s-1,1}\sqcup A_{s-1,2}$ и

$$\big||A_{s-1,1}|-|A_{s-1,2}|\big|=\big||A_{s-1,1}|-|A|+|A_{s-1,1}|\big|=\left|2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-n\right|\leqslant 1.$$

В случае $s\geqslant 3$ определим по индукции целые числа $m_{i,j}$ для $i=1,\dots,s-2$, $j=1,\dots,2^i$. Положим

$$m_{1,1}=m_{1,2}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor. \tag{8.13}$$

Пусть уже определены целые числа $m_{i-1,j}$, $i \in \{2, \dots, s-2\}$, $j = 1, \dots, 2^{i-1}$. Для каждого $j \in \{1, \dots, 2^{i-2}\}$ положим

$$m_{i,2j-1} = m_{i,2^i-2j+2} = \left\lfloor \frac{m_{i-1,j}}{2} \right\rfloor, \tag{8.14}$$

$$m_{i,2j} = m_{i,2^i-2j+1} = \left\lceil \frac{m_{i-1,j}}{2} \right\rceil. \tag{8.15}$$

Легко видеть, что таким образом определены целые числа $m_{i,j}$ для каждых $i = 1, \dots, s-2$ и $j = 1, \dots, 2^i$, причем для любых $i \in \{1, \dots, s-2\}$, $j \in \{1, \dots, 2^i\}$ выполняется соотношение

$$m_{i,j} = m_{i,2^i-j+1}. \tag{8.16}$$

Кроме того, для любых $i \in \{2, \dots, s-2\}$, $j \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$ справедливо равенство

$$m_{i,2j-1} + m_{i,2j} = m_{i-1,j}. \tag{8.17}$$

Действительно, если $j \in \{1, \dots, 2^{i-2}\}$, то это верно в силу (8.14), (8.15), а если $j \in \{2^{i-2} + 1, \dots, 2^{i-1}\}$, то, вводя обозначение $j' = 2^{i-1} - j + 1$, получим, что $j' \in \{1, \dots, 2^{i-2}\}$ и

$$m_{i,2j-1} + m_{i,2j} = m_{i,2^i-2j+2} + m_{i,2^i-2j+1} = m_{i,2j'} + m_{i,2j'-1} = m_{i-1,j'} = m_{i-1,2^{i-1}-j+1} = m_{i-1,j}$$

в силу (8.14)–(8.16).

Отметим также, что для любого $i \in \{1, \dots, s-2\}$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{2^i} m_{i,j} = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \tag{8.18}$$

В самом деле, для $i = 1$ это верно в силу (8.13); если (8.18) выполняется для $i = t-1 \in \{1, \dots, s-3\}$, то

$$\sum_{j=1}^{2^t} m_{t,j} = \sum_{j=1}^{2^{t-1}} (m_{t,2j-1} + m_{t,2j}) = \sum_{j=1}^{2^{t-1}} m_{t-1,j} = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

в силу (8.17), и поэтому (8.18) справедливо и для $i = t$.

Для каждых $i \in \{1, \dots, s-2\}$ и $j \in \{1, \dots, 2^i\}$ определим множество $B_{i,j}$ как множество всех элементов из $A$, номера которых принадлежат отрезку $\left[\sum\limits_{t=1}^{j-1} m_{i,t} + 1; \sum\limits_{t=1}^{j} m_{i,t}\right]$. (Здесь и далее будем полагать, что $\sum\limits_{t=1}^{0} m_{i,t} = 0$.) Например, $B_{i,1} = \{a_1, \dots, a_{m_{i,1}}\}$, $B_{i,2} = \{a_{m_{i,1}+1}, \dots, a_{m_{i,1}+m_{i,2}}\}$ и т.д. Ясно, что множества $B_{i,j}$ попарно не пересекаются при различных $j$ (при фиксированном $i$). Из (8.18) следует, что $\sum\limits_{t=1}^{2^i} m_{i,t} = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant n = |A|$, откуда заключаем, что

$$|B_{i,j}| = m_{i,j} \tag{8.19}$$

и

$$\bigsqcup_{j=1}^{2^i} B_{i,j} = \{a_1, \ldots, a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}. \tag{8.20}$$

Пусть

$$A_{i,2} = \bigsqcup_{j=1}^{2^{i-1}} B_{i,2j} \tag{8.21}$$

для $i = 1, \ldots, s-2$. Тогда в силу (8.16), (8.18), (8.19) имеем

$$|A_{i,2}| = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} |B_{i,2j}| = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} m_{i,2j} = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{2^{i-1}} m_{i,2j} + \sum_{j=1}^{2^{i-1}} m_{i,2^i-2j+1})$$
$$= \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{2^{i-1}} m_{i,2j} + \sum_{j'=1}^{2^{i-1}} m_{i,2j'-1}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2^i} m_{i,j} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Пусть $A_{i,1} = A \setminus A_{i,2}$ для $i = 1, \ldots, s-2$. Тогда $A = A_{i,1} \sqcup A_{i,2}$ и

$$\big||A_{i,1}| - |A_{i,2}|\big| = \big|A - |A_{i,2}| - |A_{i,2}|\big| = \left|n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right| \leqslant 1.$$

Из (8.20) вытекает, что

$$A_{i,1} = \begin{cases} \bigsqcup\limits_{j=1}^{2^{i-1}} B_{i,2j-1}, & \text{если } n \text{ четно}, \\ \bigsqcup\limits_{j=1}^{2^{i-1}} B_{i,2j-1} \sqcup \{a_n\}, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{8.22}$$

Таким образом, построены $2s$ множеств $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{s,1}, A_{s,2}$, для которых выполнены свойства 1)–3) из условия леммы 8.6.

**Пример 8.1.** Пусть $n = 23$, тогда $s = \lceil \log_2 23 \rceil + 1 = 6$, $m_{1,1} = m_{1,2} = 11$, $m_{2,1} = m_{2,4} = 5$, $m_{2,2} = m_{2,3} = 6$, $m_{3,1} = m_{3,8} = 2$, $m_{3,2} = m_{3,3} = m_{3,4} = m_{3,5} = m_{3,6} = m_{3,7} = 3$, $m_{4,1} = m_{4,2} = m_{4,3} = m_{4,5} = m_{4,7} = m_{4,10} = m_{4,12} = m_{4,14} = m_{4,15} = m_{4,16} = 1$, $m_{4,4} = m_{4,6} = m_{4,8} = m_{4,9} = m_{4,11} = m_{4,13} = 2$ и множества $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{6,1}, A_{6,2}$ имеют следующий вид:

$A_{1,1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 23\}$, $A_{1,2} = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$,

$A_{2,1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 23\}$, $A_{2,2} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 20, 21, 22\}$,

$A_{3,1} = \{1, 2, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 23\}$, $A_{3,2} = \{3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 21, 22\}$,

$A_{4,1} = \{1, 3, 6, 9, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23\}$, $A_{4,2} = \{2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 20, 22\}$,

$A_{5,1} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$, $A_{5,2} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23\}$,

$A_{6,1} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$, $A_{6,2} = \{2, 4, 6, 8, 10, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$.

(Для удобства, элемент с номером $j$ обозначаем просто $j$, где $j = 1, \ldots, 23$.)

Графически это можно изобразить так, как показано на рис. 12. Если на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит черный кружок, то элемент $a_j$ принадлежит множеству $A_{i,1}$; в противном случае данный элемент принадлежит множеству $A_{i,2}$.

| элемент / множества | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{1,1}$ и $A_{1,2}$ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | | | | | | | | | | | | ● |
| $A_{2,1}$ и $A_{2,2}$ | ● | ● | ● | ● | ● | | | | | | | ● | ● | ● | ● | ● | ● | | | | | | ● |
| $A_{3,1}$ и $A_{3,2}$ | ● | ● | | | | ● | ● | ● | | | | ● | ● | ● | | | | ● | ● | ● | | | ● |
| $A_{4,1}$ и $A_{4,2}$ | ● | | ● | | | ● | | | ● | | | ● | ● | | ● | ● | | ● | ● | | ● | | ● |
| $A_{5,1}$ и $A_{5,2}$ | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | |
| $A_{6,1}$ и $A_{6,2}$ | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | | ● | |

Рис. 12

Осталось доказать выполнение свойства 4) из условия леммы 8.6 для построенных множеств $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{s,1}, A_{s,2}$. В случае $n = 1$ оно тривиально (у $A$ нет ни одного двухэлементного подмножества). В случае $n = 2$ по построению имеем $s = \lceil \log_2 n \rceil + 1 = 2$, $A_{1,1} = \{a_1\}$, $A_{1,2} = \{a_2\}$, $A_{2,1} = A$, $A_{2,2} = \varnothing$; в то же время, единственным двухэлементным подмножеством множества $A$ является само $A$, поэтому при $i_1 = 2$, $i_2 = 1$ свойство 4) выполняется. Пусть теперь $n \geqslant 3$. Тогда $s = \lceil \log_2 n \rceil + 1 \geqslant 3$. Из (8.17) следует, что для любых $i \in \{2, \ldots, s-2\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{i-1}\}$ справедливы равенства

$$\sum_{t=1}^{j-1} m_{i-1,t} + 1 = \sum_{t=1}^{2j-2} m_{i,t} + 1,$$

$$\sum_{t=1}^{j} m_{i-1,t} = \sum_{t=1}^{2j} m_{i,t},$$

откуда получаем, что любое целое число из отрезка $\left[\sum\limits_{t=1}^{j-1} m_{i-1,t} + 1; \sum\limits_{t=1}^{j} m_{i-1,t}\right]$ содержится ровно в одном из отрезков $\left[\sum\limits_{t=1}^{2j-2} m_{i,t} + 1; \sum\limits_{t=1}^{2j-1} m_{i,t}\right]$, $\left[\sum\limits_{t=1}^{2j-1} m_{i,t} + 1; \sum\limits_{t=1}^{2j} m_{i,t}\right]$. Согласно определению множеств $B_{i,j}$, это означает, что $B_{i-1,j} = B_{i,2j-1} \sqcup B_{i,2j}$ для любых $i \in \{2, \ldots, s-2\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{i-1}\}$. Отсюда и из (8.20)–(8.22) следует, что для любых $i \in \{2, \ldots, s-2\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{i-1}\}$ выполняются соотношения

$$B_{i-1,j} \cap A_{i,1} = B_{i,2j-1},$$

$$B_{i-1,j} \cap A_{i,2} = B_{i,2j},$$

которые можно объединить в одно, записав

$$B_{i-1,j} \cap A_{i,b} = B_{i,2j+b-2}, \tag{8.23}$$

где $b \in \{1; 2\}$.

Далее, для любых $i \in \{1, \ldots, s-2\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^i\}$ выполняются неравенства

$$2^{s-2-i} \leqslant m_{i,j} \leqslant 2^{s-1-i}. \tag{8.24}$$

Действительно, из равенства $s = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ следует соотношение $2^{s-2} \leqslant n \leqslant 2^{s-1}$, а отсюда и из (8.13) вытекают неравенства (8.24) в случае $i = 1$; если же соотношение (8.24) выполнено для $i = t-1 \in \{1, \ldots, s-3\}$, то из (8.14), (8.15) следует его справедливость и для $i = t$.

Предположим, что существует такое двухэлементное подмножество $B$ множества $A$, что для любого индекса $i_2 \in \{1, \ldots, s\}$ либо $B \subseteq A_{i_2,1}$, либо $B \subseteq A_{i_2,2}$. Будем считать, что $B \subseteq A_{i_2,b_{i_2}}$, где $b_{i_2} \in \{1; 2\}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $n$ четно или $a_n \notin B$. Тогда при $i_2 = 1$ в силу (8.21), (8.22) и соотношения $B \subseteq A_{1,b_1}$ имеем $B \subseteq B_{1,b_1}$. Определим натуральные числа $d_1, \ldots, d_{s-2}$ (напомним, что $s \geqslant 3$). Пусть $d_1 = b_1$, тогда $1 \leqslant d_1 \leqslant 2 = 2^1$ и $B \subseteq B_{1,d_1}$. Если $s \geqslant 4$, то при $i_2 = 2$ в силу предположения имеем $B \subseteq A_{2,b_2}$, а в таком случае $B \subseteq B_{1,d_1} \cap A_{2,b_2} = B_{2,2d_1+b_2-2}$ в силу (8.23). Пусть $d_2 = 2d_1 + b_2 - 2$, тогда $1 \leqslant d_2 \leqslant 4 = 2^2$ и $B \subseteq B_{2,d_2}$. Далее, если $s \geqslant 5$, то при $i_2 = 3$ в силу предположения имеем $B \subseteq A_{3,b_3}$, а в таком случае $B \subseteq B_{2,d_2} \cap A_{3,b_3} = B_{3,2d_2+b_3-2}$ в силу (8.23), и после введения обозначения $d_3 = 2d_2 + b_3 - 2$ получаем $1 \leqslant d_3 \leqslant 8 = 2^3$ и $B \subseteq B_{3,d_3}$. Рассуждая аналогично для $i_2 = 4, 5, \ldots, s-2$, получим, что $B \subseteq B_{s-2,d_{s-2}}$, где $1 \leqslant d_{s-2} \leqslant 2^{s-2}$. Из (8.19) и (8.24) заключаем, что $|B_{s-2,d_{s-2}}| = m_{s-2,d_{s-2}} \leqslant 2$. Отсюда, из соотношений $|B| = 2$, $B \subseteq B_{s-2,d_{s-2}}$, (8.20) и определения множеств $B_{i,j}$ следует, что $B = B_{s-2,d_{s-2}} = \{a_l, a_{l+1}\}$, где $2 \leqslant l+1 \leqslant 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Далее, по предположению $B \subseteq A_{s-1,b_{s-1}}$, где $b_{s-1} \in \{1; 2\}$. Из определения множеств $A_{s-1,1}$ и $A_{s-1,2}$ легко видеть, что среди элементов с номерами от 1 до $2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ во множестве $A_{s-1,1}$ содержатся в точности все элементы с нечетными, а во множестве $A_{s-2,2}$ — с четными номерами. Но номера $l$ и $l+1$ имеют разную четность и принадлежат отрезку $\left[1; 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]$, откуда следует, что $B = \{a_l, a_{l+1}\} \nsubseteq A_{s-1,b_{s-1}}$. Получено противоречие.

2. Пусть $n$ нечетно и $a_n \in B$. В этом случае из (8.22) следует, что $a_n \in A_{i_2,1}$ для любого $i_2 \in \{1, \ldots, s-2\}$, а значит, $a_n \notin A_{i_2,2}$. В таком случае, так как по предположению $B \subseteq A_{i_2,b_{i_2}}$, где $b_{i_2} \in \{1; 2\}$, то $b_{i_2} = 1$ и $B \subseteq A_{i_2,1}$. Пусть $a_l$ — элемент, содержащийся во множестве $B$ и отличный от элемента $a_n$. Тогда $a_l \in A_{i_2,1}$ для любого $i_2 \in \{1, \ldots, s-2\}$, причем $l < n$.

В таком случае при $i_2 = 1$ в силу (8.22) имеем $a_l \in A_{1,1} \setminus \{a_n\} = B_{1,1}$. Если $s \geqslant 4$, то при $i_2 = 2$ имеем $a_l \in A_{2,1}$, а тогда $a_l \in B_{1,1} \cap A_{2,1} = B_{2,2\cdot 1+1-2} = B_{2,1}$ в силу (8.23). Далее, если $s \geqslant 5$, то при $i_2 = 3$ имеем $a_l \in A_{3,1}$, а в таком случае $a_l \in B_{2,1} \cap A_{3,1} = B_{3,2\cdot 1+1-2} = B_{3,1}$ в силу (8.23). Рассуждая аналогично для $i_2 = 4, 5, \ldots, s-2$, получим, что $a_l \in B_{s-2,1}$. Из равенства $s = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ следуют неравенства $2^{s-2} \leqslant n \leqslant 2^{s-1}$, а отсюда и из нечетности $n$ — неравенства $2^{s-2} < n \leqslant 2^{s-1} - 1$. Из (8.13), (8.14) и последнего соотношения следует, что $2^{s-3} \leqslant m_{1,1} \leqslant 2^{s-2}-1$, $2^{s-4} \leqslant m_{2,1} = \left\lfloor \frac{m_{1,1}}{2} \right\rfloor \leqslant 2^{s-3}-1$ (в случае $s \geqslant 4$), …, $2^0 \leqslant m_{s-2,1} \leqslant 2^1-1$, т.е. $m_{s-2,1} = 1$, а тогда по определению множества $B_{s-2,1}$ оно равно $\{a_1\}$. Получаем, что $l = 1$ и $B = \{a_1, a_n\}$. Из определения множеств $A_{s-1,1}$ и $A_{s-1,2}$ видно, что $a_n \notin A_{s-1,1}$, $a_1 \notin A_{s-1,2}$, откуда следует, что $B \nsubseteq A_{s-1,1}$ и $B \nsubseteq A_{s-1,2}$. Но это противоречит тому, что $B \subseteq A_{s-1,b_{s-1}}$ для некоторого $b_{s-1} \in \{1; 2\}$.

Таким образом, предположение о существовании такого двухэлементного подмножества $B$ множества $A$, что для любого индекса $i_2 \in \{1, \ldots, s\}$ либо $B \subseteq A_{i_2,1}$, либо $B \subseteq A_{i_2,2}$, неизбежно приводит к противоречию. Значит, для любого двухэлементного подмножества $B$ множества $A$ существует такой индекс $i_2 \in \{1, \ldots, s\}$, что $B \nsubseteq A_{i_2,1}$ и $B \nsubseteq A_{i_2,2}$. Осталось доказать, что для любого двухэлементного подмножества $B$ множества $A$ существует такой индекс $i_1 \in \{1, \ldots, s\}$, что $B \subseteq A_{i_1,1}$ или $B \subseteq A_{i_1,2}$. Предположим, что это не так, т.е. существует такое подмножество $B = \{a_l, a_m\}$ множества $A$, что для любого индекса $i_1 \in \{1, \ldots, s\}$ одновременно $B \nsubseteq A_{i_1,1}$ и $B \nsubseteq A_{i_1,2}$. Из этого предположения с учетом того, что $A_{i_1,1} \sqcup A_{i_1,2} = A$, следует, что $a_l \in A_{i_1,b_{i_1}}$ и $a_m \in A_{i_1,3-b_{i_1}}$ для некоторого $b_{i_1} \in \{1; 2\}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $n$ четно или $a_n \notin B$. Тогда при $i_1 = 1$ в силу (8.21), (8.22) и соотношений $a_l \in A_{1,b_1}$, $a_m \in A_{1,3-b_1}$ имеем $a_l \in B_{1,b_1}$, $a_m \in B_{1,3-b_1}$. Определим натуральные числа $d_1, d'_1, \ldots, d_{s-2}, d'_{s-2}$. Пусть $d_1 = b_1$, $d'_1 = 3 - d_1$, тогда $d_1 + d'_1 = 3 = 2^1 + 1$, $1 \leqslant d_1 \leqslant 2 = 2^1$, $1 \leqslant d'_1 = 2^1 + 1 - d_1 \leqslant 2^1$, $a_l \in B_{1,d_1}$ и $a_m \in B_{1,d'_1}$. Если $s \geqslant 4$, то при $i_1 = 2$ в силу предположения имеем $a_l \in A_{2,b_2}$, $a_m \in A_{2,3-b_2}$, а в таком случае $a_l \in B_{1,d_1} \cap A_{2,b_2} = B_{2,2d_1+b_2-2}$ и $a_m \in B_{1,d'_1} \cap A_{2,3-b_2} = B_{2,2d'_1+(3-b_2)-2}$ в силу (8.23). Пусть $d_2 = 2d_1 + b_2 - 2$, $d'_2 = 2d'_1 + (3-b_2) - 2$, тогда $d_2 + d'_2 = 2(d_1 + d'_1) - 1 = 2^2 + 1$, $1 \leqslant d_2 \leqslant 4 = 2^2$, $1 \leqslant d'_2 = 2^2 + 1 - d_2 \leqslant 2^2$, $a_l \in B_{2,d_2}$ и $a_m \in B_{2,d'_2}$. Далее, если $s \geqslant 5$, то при $i_1 = 3$ в силу предположения имеем $a_l \in A_{3,b_3}$, $a_m \in A_{3,3-b_3}$, а в таком случае $a_l \in B_{2,d_2} \cap A_{3,b_3} = B_{2,2d_2+b_3-2}$ и $a_m \in B_{2,d'_2} \cap A_{3,3-b_3} = B_{2,2d'_2+(3-b_3)-2}$ в силу (8.23), и после введения обозначений $d_3 = 2d_2 + b_3 - 2$, $d'_3 = 2d'_2 + (3 - b_3) - 2$ получаем

$d_3+d_3'=2(d_2+d_2')-1=2^3+1$, $1\leqslant d_3\leqslant 8=2^3$, $1\leqslant d_3'=2^3+1-d_3\leqslant 2^3$, $a_l\in B_{3,d_3}$ и $a_m\in B_{3,d_3'}$. Рассуждая аналогично для $i_1=4,\ 5,\ldots,s-2$, получим, что $a_l\in B_{s-2,d_{s-2}}$ и $a_m\in B_{s-2,d_{s-2}'}$, где

$$d_{s-2}+d_{s-2}'=2^{s-2}+1, \tag{8.25}$$

$1\leqslant d_{s-2}\leqslant 2^{s-2}$ и $1\leqslant d_{s-2}'\leqslant 2^{s-2}$. Из (8.16), (8.19), (8.24) и (8.25) заключаем, что $|B_{s-2,d_{s-2}}|=m_{s-2,d_{s-2}}\leqslant 2$, $|B_{s-2,d_{s-2}'}|=m_{s-2,d_{s-2}'}=m_{s-2,2^{s-2}+1-d_{s-2}}=m_{s-2,d_{s-2}}=|B_{s-2,d_{s-2}}|$. С другой стороны, так как $a_l\in B_{s-2,d_{s-2}}$, то $|B_{s-2,d_{s-2}}|\geqslant 1$. Поэтому возможны два подслучая.

1.1. Пусть $|B_{s-2,d_{s-2}}|=|B_{s-2,d_{s-2}'}|=1$. Тогда $m_{s-2,d_{s-2}}=1$, $B_{s-2,d_{s-2}}=\{a_l\}$ и $B_{s-2,d_{s-2}'}=\{a_m\}$. Отсюда, из определения множеств $B_{i,j}$ и из (8.16), (8.18), (8.25) имеем

$$l=\sum_{j=1}^{d_{s-2}-1}m_{s-2,j}+1=\sum_{j=1}^{d_{s-2}}m_{s-2,j},$$

$$\begin{aligned}m=\sum_{j=1}^{d_{s-2}'-1}m_{s-2,j}+1&=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\sum_{j=d_{s-2}'}^{2^{s-2}}m_{s-2,j}+1=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\sum_{j=d_{s-2}'}^{2^{s-2}}m_{s-2,2^{s-2}-j+1}+1\\&=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{2^{s-2}-d_{s-2}'+1}m_{s-2,j}+1=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{d_{s-2}}m_{s-2,j}+1=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-l+1.\end{aligned}$$

Далее, как нетрудно видеть из построения множества $A_{s,1}$, данное множество обладает следующим свойством: для любого $j\in\{1,\ldots,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$ элементы $a_j$ и $a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-j+1}$ либо одновременно принадлежат, либо одновременно не принадлежат множеству $A_{s,1}$. Так как $m=2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-l+1$, то либо оба элемента $a_l,a_m$ принадлежат множеству $A_{s,1}$, т.е. $B=\{a_l,a_m\}\subseteq A_{s,1}$, либо они оба принадлежат множеству $A\setminus A_{s,1}=A_{s,2}$, т.е. $B\subseteq A_{s,2}$. Однако обе этих альтернативы противоречат предположению о том, что для любого индекса $i_1\in\{1,\ldots,s\}$ одновременно $B\nsubseteq A_{i_1,1}$ и $B\nsubseteq A_{i_1,2}$. Случай 1.1 разобран.

1.2. Пусть $|B_{s-2,d_{s-2}}|=|B_{s-2,d_{s-2}'}|=2$. Согласно определению множеств $B_{i,j}$, это означает, что $B_{s-2,d_{s-2}}=\{a_p,a_{p+1}\}$, $B_{s-2,d_{s-2}'}=\{a_q,a_{q+1}\}$, где $2\leqslant p+1\leqslant 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ и $2\leqslant q+1\leqslant 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ в силу (8.20). Кроме того, так как $a_l\in B_{s-2,d_{s-2}}$ и $a_m\in B_{s-2,d_{s-2}'}$, то $l\in\{p,p+1\}$ и $m\in\{q,q+1\}$. Если числа $l$ и $m$ имеют одинаковую четность, то по построению множеств $A_{s-1,1}$ и $A_{s-1,2}$ оба элемента $a_l,a_m$ одновременно принадлежат либо $A_{s-1,1}$, либо $A_{s-1,2}$, т.е. либо $B\subseteq A_{s-1,1}$, либо $B\subseteq A_{s-1,2}$, однако обе этих альтернативы противоречат предположению о том, что для любого индекса $i_1\in\{1,\ldots,s\}$ одновременно $B\nsubseteq A_{i_1,1}$ и $B\nsubseteq A_{i_1,2}$. Таким образом, числа

$l$ и $m$ имеют разную четность. Далее, из определения множеств $B_{i,j}$, (8.16), (8.18), (8.25) и того, что $m_{s-2,d_{s-2}} = |B_{s-2,d_{s-2}}| = 2$, имеем

$$p = \sum_{j=1}^{d_{s-2}-1} m_{s-2,j} + 1 = \sum_{j=1}^{d_{s-2}} m_{s-2,j} + 1 - m_{s-2,d_{s-2}} = \sum_{j=1}^{d_{s-2}} m_{s-2,j} - 1,$$

$$q = \sum_{j=1}^{d'_{s-2}-1} m_{s-2,j} + 1 = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \sum_{j=d'_{s-2}}^{2^{s-2}} m_{s-2,j} + 1 = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \sum_{j=d'_{s-2}}^{2^{s-2}} m_{s-2,2^{s-2}-j+1} + 1$$

$$= 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{2^{s-2}-d'_{s-2}+1} m_{s-2,j} + 1 = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{d_{s-2}} m_{s-2,j} + 1 = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - p.$$

Из последнего соотношения вытекает, что числа $p$ и $q$ имеют одинаковую четность и $p+q = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Так как $l \in \{p, p+1\}$, $m \in \{q, q+1\}$, числа $p$ и $q$ имеют одинаковую, а числа $l$ и $m$ — разную четность, то либо $l = p$ и $m = q+1$, либо $l = p+1$ и $m = q$. В обоих случаях получаем соотношение $l + m = p + q + 1 = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, т.е. $m = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - l + 1$. Последнее равенство совпадает с соответствующим равенством, полученным при разборе случая 1.1, и дальнейшие рассуждения проводятся аналогично этому случаю. Случай 1.2, а вместе с ним случай 1 разобраны.

2. Пусть $n$ нечетно и $a_n \in B$. Без ограничения общности $n = m$, т.е. $B = \{a_l, a_n\}$. В этом случае из (8.22) следует, что $a_n \in A_{i_1,1}$ для любого $i_1 \in \{1, \ldots, s-2\}$, а значит, $a_n \notin A_{i_1,2}$. Так как по предположению $a_l \in A_{i_1,b_{i_1}}$ и $a_n \in A_{i_1,3-b_{i_1}}$ для некоторого $b_{i_1} \in \{1; 2\}$, то $b_{i_1} = 2$ и $a_l \in A_{i_1,2}$ для любого $i_1 \in \{1, \ldots, s-2\}$. Тогда при $i_1 = 1$ в силу (8.21) имеем $a_l \in A_{1,2} = B_{1,2}$. Если $s \geqslant 4$, то при $i_1 = 2$ имеем $a_l \in A_{2,2}$, а в таком случае $a_l \in B_{1,2} \cap A_{2,2} = B_{2,2\cdot 2+2-2} = B_{2,2^2}$ в силу (8.23). Далее, если $s \geqslant 5$, то при $i_1 = 3$ имеем $a_l \in A_{3,2}$, а в таком случае $a_l \in B_{2,2^2} \cap A_{3,2} = B_{3,2^2\cdot 2+2-2} = B_{3,2^3}$ в силу (8.23). Рассуждая аналогично для $i_1 = 4, 5, \ldots, s-2$, получим, что $a_l \in B_{s-2,2^{s-2}}$. По аналогии с разбором случая 2 на с. 103, строки 5–8 сверху, получим, что $m_{s-2,1} = 1$. В силу (8.16), (8.19) имеем $|B_{s-2,2^{s-2}}| = m_{s-2,2^{s-2}} = m_{s-2,1} = 1$ и единственный элемент множества $B_{s-2,2^{s-2}}$ по определению данного множества имеет номер

$$\sum_{j=1}^{2^{s-2}-1} m_{s-2,j} + 1 = \sum_{j=1}^{2^{s-2}} m_{s-2,j} = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

в силу (8.18). Получаем, что $l = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $B = \{a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, a_n\}$. Из определения множества $A_{s-1,2}$ видно, что $a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in A_{s-1,2}$ и $a_n \in A_{s-1,2}$, т.е. $B \subseteq A_{s-1,2}$. Но это противоречит тому, что для любого индекса $i_1 \in \{1, \ldots, s\}$ выполнено соотношение $B \not\subseteq A_{i_1,2}$. Случай 2 разобран. Свойство (4) множеств $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{s,1}, A_{s,2}$, а вместе с ним лемма 8.6 доказаны.

Вернемся к доказательству теоремы 8.1, а именно к получению оценки $L(f, N) \leqslant \lceil \log_3(2N+1) \rceil$ в случае $n = 1$ и $f(x_1) = \overline{x_1}$. Пусть $r = \lceil \log_3(2N+1) \rceil$. Ясно, что $r \geqslant 1$. Опишем построение схем $S_1'', \ldots, S_r''$, которые составят проверяющий тест. В силу леммы 8.5 существуют такие целые неотрицательные числа $n_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$, что

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{C_r^i} n_{i,j} = N, \tag{8.26}$$

причем

$$n_{i,j} \leqslant 2^{i-1} \tag{8.27}$$

для любых $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, C_r^i\}$ и

$$n_{1,1} = n_{1,2} = \ldots = n_{1,r} = 1. \tag{8.28}$$

Равенство (8.26) означает, что множество $\{E_1, \ldots, E_N\}$ может быть представлено в виде объединения некоторых попарно непересекающихся множеств $V_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$, таких, что для любых $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, C_r^i\}$ выполняется равенство

$$|V_{i,j}| = n_{i,j}. \tag{8.29}$$

(Ясно, что таких способов представления множества $\{E_1, \ldots, E_N\}$ в виде $\bigsqcup\limits_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,C_r^i}} V_{i,j}$ может быть много. Выберем из них для определенности какой-нибудь один, например, такой, при котором $V_{1,1} = \{E_1, \ldots, E_{n_{1,1}}\}$, а каждое следующее множество $V_{i,j}$ состоит из $n_{i,j}$ элементов с наименьшими номерами среди еще не задействованных в предыдущих множествах.) Далее, каждому множеству $V_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$, поставим в соответствие двоичный набор $\tilde{\alpha}_{i,j}$ длины $r$, являющийся $j$-м в лексикографическом порядке среди всех двоичных наборов длины $r$, содержащих ровно $i$ единиц. Это можно сделать, так как число двоичных наборов длины $r$, содержащих ровно $i$ единиц, равно $C_r^i$. Будем считать, что каждый элемент из множества $V_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$, содержится в схеме $S_q''$, $q = 1, \ldots, r$, тогда и только тогда, когда $q$-й (слева) разряд набора $\tilde{\alpha}_{i,j}$ равен 1. Например, если $r = 7$, $i = 4$ и $j = 3$, то $\tilde{\alpha}_{i,j} = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ и каждый элемент из множества $V_{4,3}$ содержится в схемах $S_3''$, $S_4''$, $S_6''$, $S_7''$ и не содержится в схемах $S_1''$, $S_2''$, $S_5''$. Таким образом, для каждой из схем

$S''_1, \ldots, S''_r$ определены все элементы, которые в ней содержатся. А именно, в каждой схеме $S''_q$, $q = 1, \ldots, r$, содержатся в точности все элементы из всех таких множеств $V_{i,j}$, что $q$-й разряд набора $\tilde{\alpha}_{i,j}$ равен 1. Множество элементов, содержащихся в схеме $S''_q$, $q = 1, \ldots, r$, обозначим через $M_q$.

Определим теперь строение каждой схемы $S''_q$, $q = 1, \ldots, r$. Так как $n = 1$ по предположению случая IV, то каждый элемент из множества $M_q$ имеет один вход. Будем предполагать, что схема $S''_q$ представляет собой цепь, содержащую все элементы из множества $M_q$, на вход верхнего элемента которой подается переменная $x$, а выходом схемы $S''_q$ является выход нижнего элемента этой цепи. Осталось определить порядок следования элементов из множества $M_q$ в этой цепи. Для этого воспользуемся некоторыми вспомогательными построениями. Рассмотрим каждое непустое множество $V_{i,j}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, C_r^i$. Тогда $n_{i,j} = |V_{i,j}| \geqslant 1$ в силу (8.29) и можно определить число $s_{i,j} = \lceil \log_2 n_{i,j} \rceil + 1$. Применяя лемму 8.6 для $A = V_{i,j}$, $n = n_{i,j}$ и $s = s_{i,j}$, получим, что существуют такие $2s_{i,j}$ множеств $V_{1,1}^{i,j}, V_{1,2}^{i,j}, \ldots, V_{s_{i,j},1}^{i,j}, V_{s_{i,j},2}^{i,j}$, что для любого $t \in \{1, \ldots, s_{i,j}\}$ выполнены соотношения

$$\big||V_{t,1}^{i,j}| - |V_{t,2}^{i,j}|\big| \leqslant 2, \tag{8.30}$$

$$V_{t,1}^{i,j} \sqcup V_{t,2}^{i,j} = V_{i,j} \tag{8.31}$$

и, кроме того, справедливо следующее утверждение (ii): для любого двухэлементного подмножества $B_{i,j}$ множества $V_{i,j}$ существуют такие индексы $t_1, t_2 \in \{1, \ldots, s_{i,j}\}$, что $B_{i,j} \subseteq V_{t_1,1}^{i,j}$ или $B_{i,j} \subseteq V_{t_1,2}^{i,j}$ и при этом $B_{i,j} \nsubseteq V_{t_2,1}^{i,j}$, $B_{i,j} \nsubseteq V_{t_2,2}^{i,j}$. (Оценка (8.30) является более грубой, чем совокупность свойств 1), 2) из условия леммы 8.6, но нам ее будет достаточно.) Далее, из (8.27) и определения числа $s_{i,j}$ следует, что

$$i \geqslant \lceil \log_2 n_{i,j} \rceil + 1 = s_{i,j}. \tag{8.32}$$

В случае $i > s_{i,j}$ положим $V_{s_{i,j}+1,1}^{i,j} = \ldots = V_{i,1}^{i,j} = V_{1,1}^{i,j}$, $V_{s_{i,j}+1,2}^{i,j} = \ldots = V_{i,2}^{i,j} = V_{1,2}^{i,j}$. Таким образом, определены $2i$ множеств $V_{1,1}^{i,j}, V_{1,2}^{i,j}, \ldots, V_{i,1}^{i,j}$, $V_{i,2}^{i,j}$, причем соотношения (8.30), (8.31) верны не только для любого $t \in \{1, \ldots, s_{i,j}\}$, но и — в случае $i > s_{i,j}$ — для $t = s_{i,j} + 1, \ldots, i$. Действительно, для $t = s_{i,j} + 1, \ldots, i$ имеем

$$\big||V_{t,1}^{i,j}| - |V_{t,2}^{i,j}|\big| = \big||V_{1,1}^{i,j}| - |V_{1,2}^{i,j}|\big| \leqslant 2,$$

$$V_{t,1}^{i,j} \sqcup V_{t,2}^{i,j} = V_{1,1}^{i,j} \sqcup V_{1,2}^{i,j} = V_{i,j}.$$

Получаем, что соотношения (8.30), (8.31) верны для всех $t = 1, \ldots, i$.

Введем для удобства функцию $t(i,j,q)$, определенную на всех тройках $(i,j,q)$, таких, что $i \in \{1,\ldots,r\}$, $j \in \{1,\ldots,C_r^i\}$, $q \in \{1,\ldots,r\}$, и равную

$$\begin{cases} 0, & \text{если } q\text{-й (слева) разряд набора } \tilde{\alpha}_{i,j} \text{ равен } 0, \\ p, & \text{если } q\text{-й разряд набора } \tilde{\alpha}_{i,j} \text{ является } p\text{-м слева единичным} \\ & \text{разрядом этого набора.} \end{cases}$$

Например, если $\tilde{\alpha}_{i,j} = (0,0,1,1,0,1,1)$, то $t(i,j,1) = t(i,j,2) = t(i,j,5) = 0$, $t(i,j,3) = 1$, $t(i,j,4) = 2$, $t(i,j,6) = 3$, $t(i,j,7) = 4$. Отметим, что всегда $t(i,j,q) \leqslant i$, так как в наборе $\tilde{\alpha}_{i,j}$ содержится ровно $i$ единиц. Тогда каждое множество $M_q$, $q = 1,\ldots,r$, как следует из определения этого множества и (8.31), представимо в виде

$$M_q = \bigsqcup_{(i,j)\colon t(i,j,q)>0} V_{i,j} = \bigsqcup_{\substack{(i,j)\colon t(i,j,q)>0, \\ V_{i,j} \text{ непусто}}} V_{i,j} = \bigsqcup_{\substack{(i,j)\colon t(i,j,q)>0, \\ V_{i,j} \text{ непусто}}} (V^{i,j}_{t(i,j,q),1} \sqcup V^{i,j}_{t(i,j,q),2}). \tag{8.33}$$

Разобьем множество $M_q$ на два непересекающихся множества $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$ следующим образом. Из каждой пары множеств $V^{i,j}_{t(i,j,q),1}$, $V^{i,j}_{t(i,j,q),2}$, стоящих в правой части представления (8.33), все элементы одного множества отнесем ко множеству $M_{q,1}$, а все элементы другого — ко множеству $M_{q,2}$ так, чтобы для полученных в итоге множеств $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$ выполнялось неравенство

$$\big||M_{q,1}| - |M_{q,2}|\big| \leqslant 1. \tag{8.34}$$

Покажем, что это можно сделать. Изначально будем считать, что множества $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$ пусты. Заметим, что в правую часть представления (8.33) входят множества $V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),1}$ и $V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),2}$. Действительно, так как $q \in \{1,\ldots,r\}$, то $r-q+1 \in \{1,\ldots,r\}$ и множество $V_{1,r-q+1}$ определено; из определений наборов $\tilde{\alpha}_{i,j}$ следует, что $\tilde{\alpha}_{1,r-q+1} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{q-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{r-q})$, а из определения функции $t(i,j,q)$ — что $t(1,r-q+1,q) = 1 > 0$; наконец, из (8.28), (8.29) следует, что $|V_{1,r-q+1}| = n_{1,r-q+1} = 1$ и множество $V_{1,r-q+1}$ непусто. Из последнего соотношения и равенства $V_{1,r-q+1} = V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),1} \sqcup V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),2}$ (согласно (8.31)) следует, что одно из множеств $V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),1}$, $V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),2}$ пусто, а в другом содержится ровно один элемент. Отнесем этот элемент ко множеству $M_{q,1}$ и будем считать, что пара множеств $V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),1}$, $V^{1,r-q+1}_{t(1,r-q+1,q),2}$ уже рассмотрена. На данном этапе $|M_{q,1}| = 1$, $|M_{q,2}| = 0$ и поэтому

$$|M_{q,1}| - |M_{q,2}| = 1. \tag{8.35}$$

Далее, все не рассмотренные пары множеств $V^{i,j}_{t(i,j,q),1}$, $V^{i,j}_{t(i,j,q),2}$, стоящие в правой части представления (8.33), разобьем на два класса. К первому классу отнесем все пары, для которых выполняется равенство

$$\big||V^{i,j}_{t(i,j,q),1}| - |V^{i,j}_{t(i,j,q),2}|\big| = 2, \tag{8.36}$$

а ко второму — все остальные пары. В силу (8.30) для каждой пары из второго класса выполняется неравенство

$$\big||V^{i,j}_{t(i,j,q),1}| - |V^{i,j}_{t(i,j,q),2}|\big| \leqslant 1. \tag{8.37}$$

Рассмотрим произвольную пару $(V^{i,j}_{t(i,j,q),1}, V^{i,j}_{t(i,j,q),2})_1$ из первого класса, если такая пара существует. Отнесем все элементы из того множества, входящего в эту пару, в котором меньше элементов, ко множеству $M_{q,1}$, а все элементы из другого множества из этой пары — ко множеству $M_{q,2}$. Тогда в силу (8.35), (8.36) для полученных множеств $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$ выполняется равенство

$$|M_{q,2}| - |M_{q,1}| = 1. \tag{8.38}$$

Затем рассмотрим любую другую пару $(V^{i,j}_{t(i,j,q),1}, V^{i,j}_{t(i,j,q),2})_2$ из первого класса, если такая пара существует. Отнесем все элементы из того множества, входящего в эту пару, в котором меньше элементов, ко множеству $M_{q,2}$, а все элементы из другого множества из этой пары — ко множеству $M_{q,1}$. Тогда в силу (8.36), (8.38) для полученных множеств $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$ выполняется равенство (8.35). Далее рассмотрим любую пару $(V^{i,j}_{t(i,j,q),1}, V^{i,j}_{t(i,j,q),2})_3$ из первого класса, отличную от ранее рассмотренных, если такая пара существует. Отнесем все элементы из того множества, входящего в эту пару, в котором меньше элементов, ко множеству $M_{q,1}$, а все элементы из другого множества из этой пары — ко множеству $M_{q,2}$. Тогда в силу (8.35), (8.36) для полученных множеств $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$ выполняется равенство (8.38). Действуя и далее аналогичным образом, получим, что все элементы одного из множеств каждой пары из первого класса отнесены ко множеству $M_{q,1}$, а все элементы другого множества той же пары — ко множеству $M_{q,2}$, причем для полученных множеств выполнено одно из неравенств (8.35), (8.38), а значит — и неравенство (8.34).

Далее будем последовательно рассматривать пары множеств из второго класса (если такие пары существуют) и относить все элементы одного из множеств рассматриваемой пары ко множеству $M_{q,1}$, а все элементы другого множества этой же пары — ко множеству

$M_{q,2}$, следя только за тем, чтобы после каждой такой операции не нарушалось неравенство (8.34). Для этого достаточно следить, чтобы в случае обращения обоих неравенств (8.34), (8.37) в равенства при рассмотрении очередной пары все элементы из того ее множества, в котором меньше элементов, были отнесены к тому из множеств $M_{q,1}$, $M_{q,2}$, в котором больше элементов, и наоборот. В случае же равенства нулю хотя бы одного из выражений, стоящих в левых частях неравенств (8.34), (8.37), после выполнения очередного шага неравенство (8.34), как нетрудно видеть, будет выполняться вне зависимости от того, элементы какого множества из рассматриваемой пары мы относим к $M_{q,1}$, а какого — к $M_{q,2}$.

В результате указанной процедуры множество $M_q$ в силу (8.33) разбивается на два непересекающихся множества $M_{q,1}$ и $M_{q,2}$, причем для каждой пары множеств $V^{i,j}_{t(i,j,q),1}$, $V^{i,j}_{t(i,j,q),2}$, стоящих в правой части представления (8.33), все элементы одного из этих множеств принадлежат $M_{q,1}$, а все элементы другого — $M_{q,2}$ и выполнено неравенство (8.34).

Пусть

$$M'_q = \begin{cases} M_{q,1}, & \text{если } |M_{q,1}| \geqslant |M_{q,2}|, \\ M_{q,2}, & \text{если } |M_{q,1}| < |M_{q,2}|, \end{cases}$$

$$M''_q = \begin{cases} M_{q,2}, & \text{если } |M_{q,1}| \geqslant |M_{q,2}|, \\ M_{q,1}, & \text{если } |M_{q,1}| < |M_{q,2}|. \end{cases}$$

Тогда неупорядоченные пары $(M_{q,1}, M_{q,2})$ и $(M'_q, M''_q)$ совпадают и $|M'_q| \geqslant |M''_q|$, а отсюда и из (8.34) следует, что $0 \leqslant |M'_q| - |M''_q| \leqslant 1$, что в совокупности с соотношением $|M_q| = |M_{q,1}| + |M_{q,2}| = |M'_q| + |M''_q|$ приводит к равенствам

$$|M'_q| = \left\lceil \frac{|M_q|}{2} \right\rceil, \tag{8.39}$$

$$|M''_q| = \left\lfloor \frac{|M_q|}{2} \right\rfloor. \tag{8.40}$$

Определим порядок следования элементов из множества $M_q$ в схеме $S''_q$, $q = 1, \ldots, r$. Напомним, что схема $S''_q$ представляет собой цепь элементов, на вход верхнего элемента которой подается переменная $x$, а выходом схемы $S''_q$ является выход нижнего элемента этой цепи. Будем говорить, что функциональный элемент расположен в схеме $S''_q$ на *нечетном месте*, если ниже его в указанной цепи расположено четное число элементов. (Таковым, например, является выходной элемент схемы $S''_q$.) Все остальные элементы в этой схеме будем считать расположенными на *четных местах*. Так как общее число элементов в схеме $S''_q$ равно $|M_q|$, то легко видеть, что в ней имеется ровно $\left\lceil\frac{|M_q|}{2}\right\rceil$ нечетных и ровно $\left\lfloor\frac{|M_q|}{2}\right\rfloor$ четных мест. Отсюда и из (8.39), (8.40) заключаем, что все элементы из множества $|M_q'|$ могут быть размещены на нечетных, а все элементы из множества $|M_q''|$ — на четных местах. (И даже существует $\left(\left\lceil\frac{|M_q|}{2}\right\rceil\right)! \cdot \left(\left\lfloor\frac{|M_q|}{2}\right\rfloor\right)!$ способов это сделать. Из них для определенности можно выбрать какой-нибудь один, например — в порядке возрастания номеров элементов, если двигаться по схеме $S_q''$ сверху вниз.)

В результате все схемы $S_1'', \ldots, S_r''$ полностью определены. Из вида этих схем и того, что $f(x_1) = \overline{x_1}$, непосредственно вытекает

**Лемма 8.7.** *Пусть имеет место некоторая неисправность системы элементов и* $q \in \{1, \ldots, r\}$. *Тогда функция, реализуемая схемой* $S_q''$, *равна*

$$\begin{cases} x \text{ или } \overline{x}, & \text{если все элементы в схеме } S_q'' \text{ исправны;} \\ \delta, & \text{если некоторый элемент, расположенный в схеме } S_q'' \text{ на} \\ & \text{нечетном месте, неисправен и выдает константу } \delta; \\ \overline{\delta}, & \text{если некоторый элемент, расположенный в схеме } S_q'' \text{ на} \\ & \text{четном месте, неисправен и выдает константу } \delta. \end{cases}$$

**Лемма 8.8.** *Набор* $(S_1'', \ldots, S_r'')$ *является проверяющим тестом.*

*Доказательство.* Пусть $H_1$ и $H_2$ — две произвольные неисправности системы элементов, при которых множества неисправных элементов различны. Надо доказать, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1'', \ldots, S_r''$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Предположим сначала, что при одной из неисправностей $H_1$ и $H_2$ (без ограничения общности при $H_1$) все элементы исправны. Тогда при неисправности $H_2$ некоторый элемент $E_a$ неисправен. Согласно описанным выше построениям, элемент $E_a$ принадлежит некоторому множеству $V_{i,j}$ (где $i \geqslant 1$), которому соответствует двоичный набор $\tilde{\alpha}_{i,j}$ длины $r$, содержащий ровно $i$ единиц, а это означает, что данный элемент содержится ровно в $i$ схемах из $S_1'', \ldots, S_r''$. Тогда в силу леммы 8.7 каждая из этих $i$ схем реализует одну из функций $x, \overline{x}$ при неисправности $H_1$ и некоторую булеву константу при неисправности $H_2$, откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1'', \ldots, S_r''$ при этих двух неисправностях, не совпадают.

Пусть теперь при неисправности $H_1$ неисправен некоторый элемент $E_{a_1}$, а при неисправности $H_2$ — некоторый элемент $E_{a_2}$. Тогда $a_1 \neq a_2$. Согласно описанным выше построениям, элементы $E_{a_1}$ и $E_{a_2}$ принадлежат некоторым множествам $V_{i_1,j_1}$ и $V_{i_2,j_2}$ соответственно. Возможны два случая.

1. Выполняется хотя бы одно из неравенств $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$. Тогда двоичные наборы $\tilde{\alpha}_{i_1,j_1}$ и $\tilde{\alpha}_{i_2,j_2}$ длины $r$ различаются (это следует из определения наборов $\tilde{\alpha}_{i,j}$ на с. 106). Пусть они различаются в $q$-м разряде. Без ограничения общности в $q$-м разряде набора $\tilde{\alpha}_{i_1,j_1}$ стоит единица, а в $q$-м разряде набора $\tilde{\alpha}_{i_2,j_2}$ — нуль. Тогда, согласно построению схемы $S''_q$, в ней содержатся все элементы из множества $V_{i_1,j_1}$, в частности, элемент $E_{a_1}$, и не содержится ни одного элемента из множества $V_{i_2,j_2}$, в частности, элемента $E_{i_2}$. Тогда в силу леммы 8.7 схема $S''_q$ реализует некоторую булеву константу при неисправности $H_1$ и одну из функций $x$, $\overline{x}$ при неисправности $H_2$, откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S''_1, \ldots, S''_r$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Случай 1 разобран.

2. Одновременно $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$. Пусть $i = i_1$, $j = j_1$. Тогда оба элемента $E_{a_1}$, $E_{a_2}$ принадлежат множеству $V_{i,j}$. В силу утверждения (ii) (см. с. 107) для множества $B = \{E_{a_1},\ E_{a_2}\}$ существуют такие индексы $t_1, t_2 \in \{1, \ldots, s_{i,j}\}$, что $B \subseteq V^{i,j}_{t_1,1}$ или $B \subseteq V^{i,j}_{t_1,2}$ и при этом $B \nsubseteq V^{i,j}_{t_2,1}$, $B \nsubseteq V^{i,j}_{t_2,2}$. Из последних двух соотношений, поскольку $B \subseteq V_{i,j}$ и $V^{i,j}_{t_2,1} \sqcup V^{i,j}_{t_2,2} = V_{i,j}$ в силу (8.31), заключаем, что либо $E_{a_1} \in V^{i,j}_{t_2,1}$ и $E_{a_2} \in V^{i,j}_{t_2,2}$, либо $E_{a_1} \in V^{i,j}_{t_2,2}$ и $E_{a_2} \in V^{i,j}_{t_2,1}$. Далее, в силу (8.32) имеем $t_1, t_2 \in \{1, \ldots, i\}$. Так как в наборе $\tilde{\alpha}_{i,j}$ содержится ровно $i$ единиц, то в силу определения функции $t(i,j,q)$ (см. с. 108) существуют такие числа $q_1, q_2 \in \{1, \ldots, r\}$, что $t(i,j,q_1) = t_1$ и $t(i,j,q_2) = t_2$. Отсюда и в силу равенства (8.33) и того, что множество $V_{i,j}$ непусто, имеем $V^{i,j}_{t_1,1} = V^{i,j}_{t(i,j,q_1),1} \subseteq M_{q_1}$, $V^{i,j}_{t_1,2} = V^{i,j}_{t(i,j,q_1),2} \subseteq M_{q_1}$, $V^{i,j}_{t_2,1} = V^{i,j}_{t(i,j,q_2),1} \subseteq M_{q_2}$, $V^{i,j}_{t_2,2} = V^{i,j}_{t(i,j,q_2),2} \subseteq M_{q_2}$. В силу этих соотношений, с учетом построения множеств $M_{q,1}$, $M_{q,2}$ и определения множеств $M'_q$, $M''_q$ для каждого $q = 1, \ldots, r$, можно утверждать, что либо $V^{i,j}_{t_1,1} \subseteq M'_{q_1}$ и $V^{i,j}_{t_1,2} \subseteq M''_{q_1}$, либо $V^{i,j}_{t_1,1} \subseteq M''_{q_1}$ и $V^{i,j}_{t_1,2} \subseteq M'_{q_1}$ и, кроме того, либо $V^{i,j}_{t_2,1} \subseteq M'_{q_2}$ и $V^{i,j}_{t_2,2} \subseteq M''_{q_2}$, либо $V^{i,j}_{t_2,1} \subseteq M''_{q_2}$ и $V^{i,j}_{t_2,2} \subseteq M'_{q_2}$. Учитывая написанные выше соотношения для множества $B$ и элементов $E_{a_1}$, $E_{a_2}$, получаем, что либо $B \subseteq M'_{q_1}$, либо $B \subseteq M''_{q_1}$; кроме того, либо $E_{a_1} \in M'_{q_2}$ и $E_{a_2} \in M''_{q_2}$, либо $E_{a_1} \in M''_{q_2}$ и $E_{a_2} \in M'_{q_2}$. Так как в схеме $S''_{q_1}$ все элементы из множества $M'_{q_1}$ расположены на нечетных, а все элементы из множества $M''_{q_1}$ — на четных местах, то в этой схеме элементы $E_{a_1}$ и $E_{a_2}$ расположены на местах одной четности. Так как в схеме $S''_{q_2}$ все элементы из множества $M'_{q_2}$ расположены на нечетных, а все элементы из множества $M''_{q_2}$ — на четных местах, то в этой схеме элементы $E_{a_1}$ и $E_{a_2}$ расположены на местах разной четности. Пусть $H_1 = \{(E_{a_1}, \delta_1)\}$, $H_2 = \{(E_{a_2}, \delta_2)\}$, где $\delta_1, \delta_2 \in \{0; 1\}$. Рассмотрим

два подслучая.

2.1. Пусть $\delta_1 \neq \delta_2$. Тогда в силу вышенаписанного и леммы 8.7 схема $S''_{q_1}$ реализует при неисправностях $H_1$ и $H_2$ различные булевы константы (либо соответственно $\delta_1$ и $\delta_2$, либо соответственно $\overline{\delta_1}$ и $\overline{\delta_2}$), откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S''_1, \ldots, S''_r$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Случай 2.1 разобран.

2.2. Пусть $\delta_1 = \delta_2$. Тогда в силу вышенаписанного и леммы 8.7 схема $S''_{q_2}$ реализует при неисправностях $H_1$ и $H_2$ различные булевы константы (либо соответственно $\delta_1$ и $\overline{\delta_2}$, либо соответственно $\overline{\delta_1}$ и $\delta_2$), откуда следует, что наборы функций, реализуемых схемами $S''_1, \ldots, S''_r$ при этих двух неисправностях, не совпадают. Случай 2.2 разобран. Лемма 8.8 доказана.

Из леммы 8.8 получаем соотношение $L(f, N) \leqslant r = \lceil \log_3(2N+1) \rceil$. Случай IV разобран. Теорема 8.1 доказана.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации даны постановки задач проверки и диагностики контактов и функциональных элементов. Определены понятия проверяющего и диагностического тестов и их длин. Получен ряд верхних и нижних оценок длин минимальных тестов при различных исходных условиях; в некоторых случаях найдены их точные значения. В то же время, для большинства начальных условий вопрос о точных значениях длин проверяющих и диагностических тестов остается открытым. К основным нерешенным проблемам можно также отнести следующие: уменьшение зазора между верхними и нижними оценками длин тестов для контактов в общем случае; нахождение нетривиальных верхних оценок длин минимальных тестов для функциональных элементов, реализующих конъюнкцию, дизъюнкцию или отрицание, а также длин минимальных диагностических тестов для функциональных элементов, реализующих линейную функцию от двух и более переменных, в случае $k \geqslant 2$.

Рассмотренные в диссертации постановки задач допускают много различных обобщений.

1. В качестве длины теста можно рассматривать не число схем в тесте, а число двоичных наборов, которые достаточно подавать на входы схем для проверки исправности либо определения состояний всех базисных элементов (контактов или функциональных элементов).

2. Тесты могут предполагаться условными, т.е. вид каждой следующей составляемой схемы может зависеть от функций, реализуемых предыдущими схемами.

3. Можно рассматривать другие классы схем, например, $n$-полюсные контактные схемы при $n \geqslant 3$ или схемы из функциональных элементов с двумя и более выходами.

4. Некоторые базисные элементы могут предполагаться надежными, т.е. всегда исправными.

5. Можно рассматривать функциональные элементы, реализующие (в исправном состоянии) различные булевы функции, а не одну и ту же булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

6. Можно рассматривать другие допустимые неисправности базисных элементов, например, константные неисправности на входах функциональных элементов.

7. В качестве базисных элементов могут рассматриваться не только контакты или функциональные элементы, но и, например, клеточные или автоматные элементы (с соответствующими изменениями класса допустимых схем).

Таким образом, область исследований рассмотренных в данной диссертации задач и их обобщений представляется достаточно обширной и может стать одной из важных составных частей теории контроля и диагностики управляющих систем.

# Список литературы

[1] Беджанова С.Р. Тесты схем для некоторых классов булевых функций. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2011. — 96 с.

[2] Бородина Ю.В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

[3] Бородина Ю.В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 5. — С. 49–52.

[4] Бородина Ю.В., Бородин П.А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа "0" на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

[5] Бородина Ю.В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

[6] Ваксов В.В. О тестах для бесповторных контактных схем // Автоматика и телемеханика. — 1965. — Т. 26, № 3. — С. 521–524.

[7] Вартанян С.М. Единичные диагностические тесты для последовательных блочных схем. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 1987. — 114 с.

[8] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. — М.: Издательство Московского университета, 1984.

[9] Глаголев В.В. Построение тестов для блочных схем // ДАН СССР. — 1962. — Т. 144, № 6. — С. 1237–1240.

[10] Коваценко С.В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

[11] Коган И.В. О тестах для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 39–44.

[12] Коляда С.С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

[13] Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Издательство Московского университета, 1984.

[14] Мадатян Х.А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.

[15] Редькин Н.П. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: Наука, 2003. — С. 217–230.

[16] Редькин Н.П. Надежность и диагностика схем. — М.: Издательство Московского университета, 1992.

[17] Редькин Н.П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

[18] Редькин Н.П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 196.

[19] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. — Т. 39. — Новосибирск, 1983. — С. 80–87.

[20] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — № 1. — С. 72–74.

[21] Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

[22] Редькин Н.П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1997. — № 1. — С. 12–18.

[23] Редькин Н.П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Известия вузов. Математика. — 1988. — № 7. — С. 57–64.

[24] Редькин Н.П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. — Вып. 40. — Новосибирск, 1983. — С. 87–99.

[25] Редькин Н.П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.

[26] Редькин Н.П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — № 2. — С. 17–21.

[27] Романов Д.С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

[28] Романов Д.С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

[29] Романов Д.С. Построение тестов и оценка их параметров для некоторых классов контактных схем. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2000. — 114 с.

[30] Угольников А.Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.

[31] Хахулин В.Г. О проверяющих тестах для счетчика четности // Дискретная математика. — 1995. — Т. 7, вып. 4. — С. 51–59.

[32] Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

[33] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

[34] Яблонский С.В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

[35] Яблонский С.В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

[36] Reddy S.M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — V. 21. — No. 1. — P. 124–141.

## Публикации автора по теме диссертации

[37] Попков К.А. Диагностика состояний контактов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 4. — С. 30–40.

[38] Попков К.А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для функциональных элементов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21, № 6. — С. 73–89.

[39] Попков К.А. Проверяющие и диагностические тесты для конъюнкторов, дизъюнкторов и инверторов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2014. — № 6. — С. 40–44.

[40] Попков К.А. Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 83–99.

[41] Попков К.А. О единичных тестах для контактов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 5. — С. 13–18.

[42] Попков К.А. О единичных тестах для функциональных элементов // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, вып. 2. — С. 73–93.

[43] Попков К.А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для контактов // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 2. — С. 108–121.

[44] Попков К.А. О проверяющих и диагностических тестах для функциональных элементов // Материалы XVII международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 2014) — Казань: Отечество, 2014. — С. 237–240.

[45] Попков К.А. Единичные тесты для функциональных элементов // Материалы IX Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва — Красновидово, 2015 г.) — М.: МАКС Пресс, 2015. — С. 193–195.