

На правах рукописи



АСМОЛОВ Евгений Савельевич

**ПОПЕРЕЧНАЯ МИГРАЦИЯ МАЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В
СДВИГОВЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКАХ**

Специальность 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в Центральном аэрогидродинамическом институте имени профессора Н. Е. Жуковского.

- Официальные оппоненты:
- доктор физико-математических наук, профессор,
член-корр. АН РБ, Директор Центра
Сколковского института науки и
технологии, Москва
Ахатов Искандер Шаукатович
- доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН Институт механики сплошных сред
Уральского отделения РАН, заведующий лабораторией
вычислительной гидродинамики, Пермь
Любимова Татьяна Петровна
- доктор физико-математических наук, профессор
кафедры Плазмогазодинамики и теплотехники,
Балтийский государственный технический
университет "Военмех", Санкт-Петербург
Циркунов Юрий Михайлович
- Ведущая организация: Объединенный Институт Высоких температур
РАН, Москва

Защита состоится «15» апреля 2016 г. в 15-00 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенного по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Автореферат разослан «_____» _____ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.89
доктор физико-математических наук

В.В. Измоленов

Общая характеристика работы

Структура диссертации и объем работы. Диссертация изложена на 206 страницах машинописного текста и состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 184 источников. Диссертация иллюстрирована 51 рисунком и содержит 4 таблицы.

Актуальность проблемы.

Актуальность изучения течений дисперсных сред связана с многочисленными техническими приложениями и природными явлениями. К ним относятся, например, процессы в химических и энергетических установках, использующих двухфазные рабочие среды; в аэродинамике – движение летательных аппаратов в запыленной атмосфере или облаках, исследование загрязнения атмосферы, диагностика потоков на основе метода визуализации поля скорости (PIV). В числе наиболее активно развивающихся в последнее время направлений в биологии и медицине – исследование движения крови в кровеносных сосудах, гидродинамическая сепарация и фильтрация клеток, бактерий и других биологических частиц разных размеров и/или плотности.

Существенное значение для описания течений дисперсных сред имеет правильное определение сил, действующих на отдельные частицы, и их движение относительно несущей жидкости или газа. Как правило, при движении сферической частицы учитывают только классическую силу сопротивления, совпадающую по направлению со скоростью обтекания. Числа Рейнольдса частиц обычно малы в силу малости их размеров (1-100 мкм) и малости скоростей их относительного движения. Во многих указанных приложениях несущий поток является не однородным и не безграничным, а сдвиговым и ограниченным стенками. В таком потоке на частицы помимо силы сопротивления действует также поперечная сила, которая активно изучалась в последние годы экспериментально и теоретически.

Из решения уравнений Стокса, которые соответствуют нулевому значению числа Рейнольдса частицы, следует, что поперечная сила равна нулю в сдвиговом потоке независимо от профиля невозмущенной скорости и наличия стенок. Таким образом, поперечная сила (сила Сэфмана) обуслов-

лена малыми, но конечными конвективными членами в уравнениях Навье-Стокса. По этой причине такие силы также называют инерционными, т.е. вызванными малой, но конечной инерцией течения жидкости. Их действие приводит к поперечной миграции частиц относительно несущего потока. Поскольку конвективные члены малы по сравнению с вязкими, поперечная сила также асимптотически мала по сравнению с продольной силой сопротивления (силой Стокса). Это означает, что ее учет и поперечные миграции частиц важны для течений, в которых поперечный масштаб существенно меньше продольного, например, для течений в канале или в пограничном слое. Наибольший интерес для приложений имеют случаи, когда сила является знакопеременной функцией расстояния до стенки. Точки, в которых сила равняется нулю, соответствуют положениям равновесия, и вблизи них происходит накопление частиц.

Цели настоящего исследования

Теоретическое исследование инерционных сил, действующих на сферические частицы при малых числах Рейнольдса для ламинарных сдвиговых и нестационарных течений, и движения дисперсной примеси под действием этих сил.

Основными задачами настоящего исследования явились:

1. Математическая формулировка на основе методов возмущений и сращиваемых асимптотических разложений задачи о динамике сферических частиц с учетом малых конвективных и нестационарных членов в уравнениях Навье-Стокса.
2. Разработка методов аналитического и численного решений линеаризованных уравнений Навье-Стокса (уравнений Озеена) на основе преобразования Фурье.
3. Определение инерционных сил и возмущенных полей скорости частицы в различных сдвиговых и нестационарных потоках.
4. Формулировка и решение на основе метода сращиваемых асимптотических разложений задач о движении дисперсной примеси в пограничных слоях с учетом сил Стокса, Сэфмана и центробежной силы.

Научная новизна и практическая ценность работы.

Полученные результаты являются существенным развитием и обобщением предшествующих исследований инерционных сил. Они обладают несомненным приоритетом или получены независимо и самостоятельно. Определены поперечные инерционные силы для практически значимых сдвиговых течений. Результаты расчетов сил активно используются в последнее время для описания инерционной миграции частиц в течениях суспензий и запыленных газов в каналах и пограничных слоях. Они находят применение в био- и медицинских технологиях для проектирования устройств для гидродинамического разделения и фильтрации частиц разных размеров и/или плотности, при расчете течений суспензий в трещинах гидроразрыва при нефтедобыче.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Классификация режимов обтекания частицы при малых числах Рейнольдса - сильный, слабый, конечный сдвиг. Определение безразмерного параметра, характеризующего соотношение сдвигового и однородного членов в набегающем потоке - параметра скольжения.
2. Вывод в рамках методов возмущений и сращиваемых асимптотических разложений уравнений внутренней и внешней областей для конечных значений параметра скольжения и расстояний до стенок, сравнимых с масштабом внешней области.
3. Метод решения уравнений внешней области на основе двумерного преобразования Фурье. Аналитическое и численное решения обыкновенного дифференциального уравнения для Фурье-образа возмущенной скорости. Вычисление поперечной силы через обратное преобразование Фурье.
4. Определение зависимости силы Сэфмана в линейном сдвиговом потоке от двух безразмерных параметров, параметра скольжения и расстояния до стенки, отнесенного к масштабу Сэфмана. Данные результаты являются обобщением известного выражения для силы Сэфмана, полученного для неограниченного потока и в пределе малого па-

раметра скольжения. Для частиц, опережающих несущий поток (отрицательный параметр скольжения), сила является знакопеременной функцией расстояния до стенки. Такие частицы имеют устойчивое положение равновесия, где сила равна нулю. Предложены аппроксимационные формулы для численных результатов.

5. Определение инерционной поперечной силы в течении в плоском канале при конечных числах Рейнольдса канала для разных режимов скольжения, направления скорости скольжения (параллельная и перпендикулярная основному потоку) и типов плавучести частиц (частица с конечным параметром скольжения и нейтрально плавучая частица).
6. Сравнение результатов для поперечной силы в линейном и параболическом потоках при больших числах Рейнольдса канала. Влияние стенок канала существенно в тонких пристеночных слоях, где поперечная сила близка к значениям, полученным для линейного потока, ограниченного одной стенкой. В основной части канала влияние стенок мало, но роль кривизны профиля остается существенной. Коэффициент силы в этой части течения соответствует неограниченному параболическому потоку и зависит от двух безразмерных параметров: параметра скольжения и кривизны профиля.
7. Определение устойчивых положений равновесия частиц для течения в канале. Положения равновесия при больших числах Рейнольдса канала и конечных параметрах скольжения и для нейтрально плавучих частиц находятся на малых расстояниях от стенок. Появление дополнительных положений равновесия при больших параметрах скольжения.
8. Исследование структуры течения в дальней области при обтекании частицы линейным сдвиговым потоком. Вывод степенных законов зависимостей возмущений всех компонент скорости от расстояния до частицы в дальней невязкой области. Вверх и вниз по потоку образуются два вязких следа, ширина которых растет пропорционально расстоянию от частицы в степени одна третья. Возмущения продольной

скорости в следах убывают, как расстояние в степени минус две трети. Расчет парного гидродинамического взаимодействия частиц.

9. Определение инерционных сил для нестационарной скорости скольжения частицы. Расчет нестационарной поперечной силы в неограниченном сильном сдвиговом потоке. Вывод аналитических выражений для поля возмущенной скорости и нестационарной силы Озеена (обобщенной силы Бассэ) для частицы, движущейся прямолинейно с произвольной скоростью в покоящейся жидкости. Данная сила зависит от "истории" движения в предшествующие моменты времени.
10. Описание движения дисперсной примеси в ламинарных пограничных слоях в газе на плоской пластине, клине и вблизи критической точки затупленного тела с учетом силы Сэфмана и конечности параметра скольжения. Определение продольного масштаба течения, на котором влияние поперечной силы конечно. Расчет распределений плотности и скорости частиц. В пограничных слоях на клине и затупленном теле под действием поперечной силы может происходить отрыв дисперсной фазы, т. е. появляется область чистого газа вблизи поверхности, где частицы отсутствуют.

Публикации и апробация работы. По материалам диссертационной работы опубликовано 26 научных публикаций [1] - [26], из которых 17 [1]-[17] — статьи из журналов перечня ВАК и 9 [18]-[26] – статьи и тезисы докладов в трудах международных и российских конференций. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих научных конференциях: на 2-й, 4-й и 8-й Европейских конференциях по механике жидкостей, проведенных под эгидой EUROMECH (EFMC'94, Варшава, Польша, 1994; EFMC'00, Эйндховен, Голландия, 2000; EFMC'10, Бад Райхенхаль, Германия, 2010), на XIX и XX международных конгрессах по теоретической и прикладной механике (XIX ISTAM, Киото, Япония, 1996; XX ISTAM, Чикаго, США, 2000); международной конференции "Асимптотика в механике" (Санкт-Петербург, 1996); а также на специализированных научных семинарах: семинары в Ecole superieure de physique et de chimie industrielles (ESPCI), Париж, Франция (2004, 2008); объединенные семина-

ры по аэромеханике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИ Механики МГУ (2011, 2014); семинары Московского исследовательского центра Шлюмберже (2007, 2008); семинары по механике многофазных сред под руководством д.ф.м.н. А.Н. Осипцова (НИИ Механики МГУ, Москва, 2004, 2010).

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и частично в соавторстве. Так, главы 1, 5, §§2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1-3.3, 4.2 содержат результаты, полученные лично автором. §2.3 написан на основе совместной работы с А. А. Осипцовым [14], который участвовал в расчетах поперечной силы в горизонтальном течении в канале с вертикальными стенками, §3.4 - на основе совместной работы с F. Feuillebois [16], которому принадлежит идея о парном инерционном взаимодействии частиц, §4.1 - на основе совместной работы с J. McLaughlin [10], который сформулировал постановку задачи о нестационарной поперечной силе в неограниченном сдвиговом потоке в виде интеграла Фурье по времени. Численные решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений для Фурье-компонентов скорости методом ортонормализации Годунова были разработаны автором на основе алгоритмов С.В. Мануйловича.

Содержание Работы

Во Введении описана предметная область исследований, подтверждены актуальность и практическая значимость работы, сформулированы цели диссертационной работы, обоснована научная новизна полученных результатов, определен личный вклад автора.

В первой главе рассмотрена задача о поперечной силе, действующей на частицу в стационарном линейном сдвиговом потоке, ограниченном одной стенкой. В §1.1 приведен обзор работ, посвященных исследованиям инерционных сил и поперечной миграции частиц в сдвиговых потоках. Миграция впервые исследовалась экспериментально для нейтрально плавающих частиц, у которых плотность вещества равна плотности несущей фазы [27]. Частицы медленно перемещались от стенок и центра трубы. В результате возникало неоднородное кольцевое распределение concentra-

ции поперек трубы с максимумом на расстоянии 0.6 радиуса от центра. Теоретические исследования влияния малых конвективных членов в уравнениях Навье-Стокса основываются на асимптотических методах. Числа Рейнольдса частицы, вычисляемые по градиенту скорости невозмущенного потока G , по скорости скольжения V_s , которая определяется как разность скорости невозмущенного поля течения в отсутствие частицы и скорости частицы, и по угловой скорости частицы Ω_p , предполагаются асимптотически малыми, $R_G = Ga^2/\nu \ll 1$, $R_s = a|V_s|/\nu \ll 1$, $R_\Omega = \Omega_p a^2/\nu \ll 1$. Здесь a - радиус сферы, ν - кинематическая вязкость жидкости. Для сдвигового набегающего потока метод сращиваемых асимптотических разложений был впервые применен Сэфманом [28, 29] для расчета поперечной силы (ее часто называют в литературе силой Сэфмана), действующей на не нейтрально плавучую частицу. Был рассмотрен предельный случай сильного сдвигового неограниченного потока, который предполагает, что числа Рейнольдса частицы связаны соотношением $R_s \ll R_G^{1/2} \ll 1$. Сила Сэфмана записывается в виде $F_{Sa} = 6.46\rho a^2 V_s (G\nu)^{1/2}$ [28, 29], где ρ - плотность жидкости. Обратный предельный случай малого сдвига, $R_s \gg R_G^{1/2}$, при наличии стенок был впервые рассмотрен в работе [30]. Была рассчитана поперечная сила, действующая на частицу, осаждающуюся в покоящейся жидкости, ограниченной одной или двумя вертикальными стенками.

В §1.2 рассмотрен более общий по сравнению с постановкой Сэфмана случай произвольного отношения чисел Рейнольдса скольжения и сдвига. Введен безразмерный параметр скольжения, характеризующий соотношение однородного и линейного потоков в профиле невозмущенной скорости в уравнениях внешней области:

$$\alpha = \pm R_s R_G^{-1/2} = V_s (\nu G)^{-1/2}. \quad (1)$$

Кроме того, линейный поток может быть ограничен одной стенкой, расположенной на расстоянии d , большом по сравнению с радиусом частицы (см. Рис. 1).

Оценки скорости поперечной миграции частицы v_m показывают, что изменение d происходит медленно по сравнению с характерными временами для течений во внутренней и внешней областях. В результате течение в системе координат, связанной с частицей, явля-

ется квазистационарным. Решение для поля скорости ищется в виде суммы основного сдвигового течения $\bar{\mathbf{v}}$ и возмущения $\mathbf{u}$, возникающего в результате обтекания частицы. Возмущение представляется в виде асимптотического ряда по малому параметру $\varepsilon = R_G^{1/2} \ll 1$.

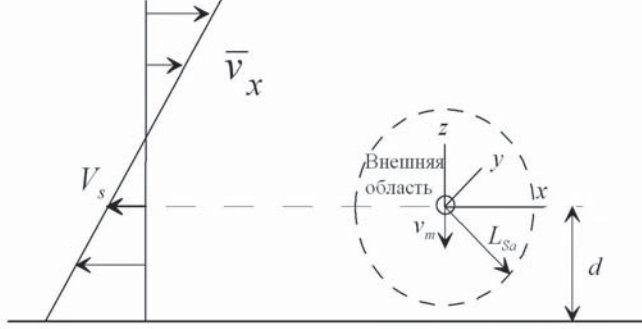


Рис. 1: Схема течения в сдвиговом потоке, ограниченном стенкой

Течение во внутренней области (на масштабе радиуса частицы) в главном приближении по числу Рейнольдса соответствует классической задаче Стокса об обтекании сферы однородным неограниченным потоком. Этому осесимметричному решению соответствуют сила

сопротивления Стокса и нулевые поперечная сила и момент. Конвективные члены малы по сравнению с вязкими во внутренней области, но становятся сравнимыми на больших расстояниях, т.к. убывают с расстоянием от частицы медленнее, чем вязкие. На масштабе внешней области (масштабе Сэфмана), $L_{Sa} = a\varepsilon^{-1} = (\nu/G)^{1/2} \gg a$, они становятся величинами одного порядка. Уравнения Навье-Стокса при этом могут быть линеаризованы, т.е. можно пренебречь членами, квадратичными по возмущениям. В результате безразмерные уравнения внешней области записываются в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (\alpha + Z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = -6\pi\delta(\mathbf{R}) \mathbf{e}_x. \quad (2)$$

Здесь возмущенная скорость $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ обезразмерена на εV_s , пространственные переменные - на L_{Sa} . Полученные уравнения линейны и аналогичны уравнениям Озеена, которые обычно используют для описания обтекания однородным потоком. Член $(\alpha + Z)$ представляет собой

профиль невозмущенной скорости $\bar{v}_x$, записанный в координатах внешней области. Влияние частицы эквивалентно точечной силе Стокса, помещенной в центр сферы, которая аппроксимируется в уравнении импульса (2) дельта-функцией. Условие срачивания с внутренней областью при этом выполняется автоматически. Граничные условия во внешней области - это условия затухания возмущений вдали от сферы, $\mathbf{U}(R \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbf{0}$. Кроме того, при наличии плоской стенки, находящейся на расстоянии порядка масштаба Сэфмана от частицы, ставится условие прилипания на ее поверхности, $\mathbf{U}(X, Y, -d/L_{Sa}) = \mathbf{0}$.

Для решения системы уравнений (2) вводятся двумерные преобразования Фурье полей скорости и давления. В результате уравнения преобразуются в единственное обыкновенное дифференциальное уравнение для Фурье-образа поперечной скорости $\tilde{U}_z(k_x, k_y, Z)$

$$\left[\tilde{\Delta} - ik_x (\alpha + Z) \right] \tilde{\Delta} \tilde{U}_z = -ik_x \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(Z)}{dZ}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{d^2}{dZ^2} - k_x^2 - k_y^2, \quad (3)$$

$$Z \rightarrow \infty : \quad \tilde{U}_z \rightarrow 0, \quad Z = -d/L_{Sa} : \quad \tilde{U}_z = \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} = 0. \quad (4)$$

Аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения (3) выражается через интегралы от функций Эйри и их производных [1, 2]. Для решения аналогичной задачи в параболическом потоке (Глава 2) применялись численные методы решения линейных обыкновенных дифференциальных

уравнений, основанные на методе ортонормализации Годунова [31]. Кроме того, численное решение более удобно для расчета полного поля

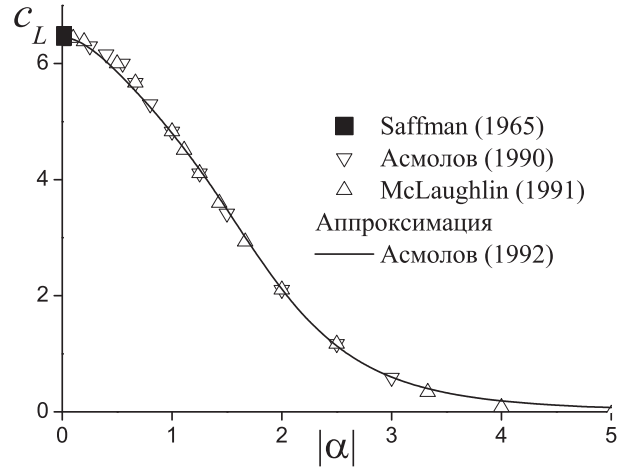


Рис. 2: Коэффициент поперечной силы в неограниченном сдвиговом потоке

возмущенного течения частицы в сдвиговом потоке, рассматриваемого в Главе 3.

Для определения поперечной силы достаточно вычислить из обратного преобразования Фурье поперечную компоненту возмущенной скорости в центре частицы и применить закон Стокса. Выражение для нее имеет вид

$$F_L = c_L(\alpha, d/L_{Sa}) \rho a^2 V_s (G\nu)^{1/2}. \quad (5)$$

Коэффициент поперечной силы в неограниченном потоке c_L^∞ зависит только от параметра скольжения α . Результаты расчета этой зависимости показаны на Рис. 2. Величины $c_L^\infty(\alpha)$, рассчитанные независимо двумя авторами [2],[32], очень близки. Они всегда меньше предельного значения $c_{Sa} = 6.46$, полученного Сэфманом для случая сильного сдвига, $\alpha \ll 1$. Коэффициент c_L монотонно убывает с α , и в случае слабого сдвига, $|\alpha| \gg 1$, асимптотически мал, $c_L^\infty \sim \alpha^{-5} \ln |\alpha|$ [32]. Кроме того, была предложена аппроксимация численных результатов [3]:

$$c_L^\infty = 6.46(1 + 0.581\alpha^2 - 0.439|\alpha|^3 + 0.203\alpha^4)^{-1}. \quad (6)$$

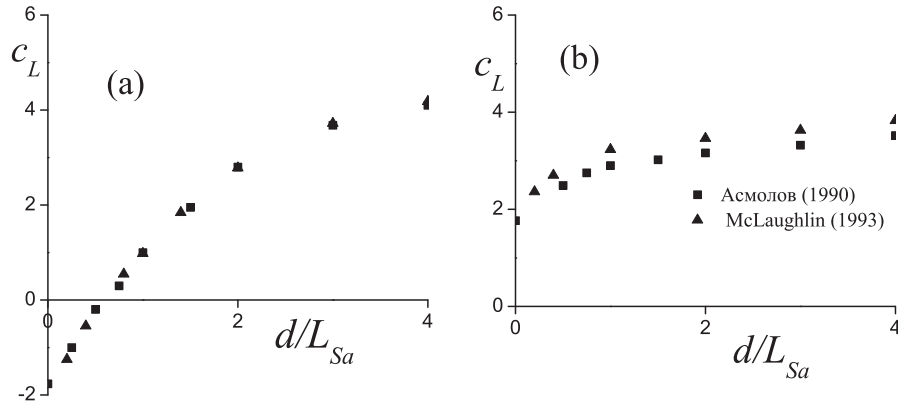


Рис. 3: Коэффициент поперечной силы в сдвиговом потоке, ограниченном стенкой. (a) $\alpha = -1$, (b) $\alpha = 1$.

Зависимости коэффициента поперечной силы вблизи плоской стенки были рассчитаны в работе автора [2] и позднее в работе [32] (см. Рис. 3).

При $d/L_{Sa} \ll 1$ поперечная сила обусловлена в основном взаимодействием со стенкой, и c_L стремится к значению $c_L^0 = 1.77\alpha$ [33]. В результате на малых расстояниях поперечная сила всегда отталкивает частицы от стенки. Для $\alpha > 0$ (частицы отстают от несущего потока) направление силы тоже, т.к. коэффициент положителен при всех d . Для частиц, опережающих несущий поток ($\alpha < 0$), сила является знакопеременной функцией расстояния, и на больших расстояниях поперечная сила направлена к стенке. Такие частицы имеют устойчивое положение равновесия, где сила равна нулю.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1]-[3].

Вторая глава посвящена исследованию динамики частицы в плоском течении в канале для различных направлений (параллельная и перпендикулярная основному потоку) и величин скорости скольжения. Поперечная сила определялась ранее для умеренных чисел Рейнольдса канала $0 < R_c \leq 100$ для нейтрально плавучей [34, 33, 35] и для не нейтрально плавучей частиц [36] (только в пределе сильного сдвига). В работе автора изучена зависимость поперечной силы и положения равновесия от всех независимых параметров, в том числе для диапазона больших чисел Рейнольдса канала, $100 \leq R_c \leq 3000$.

В §2.1 рассматривается инерционная поперечная сила в вертикальном канале, когда скорость скольжения частицы параллельна скорости основного течения (см.

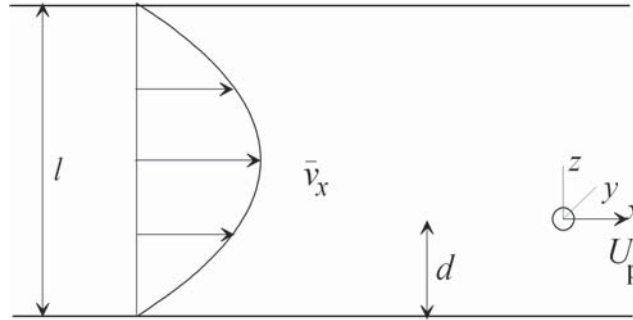


Рис. 4). Малое число Рейнольдса частицы определяется по сред-

Рис. 4: Конфигурация течения при миграции частицы в вертикальном канале

нему сдвигу в канале, $R_p = V_m a^2 / (\nu l) \ll 1$, где V_m и l - максимальная скорость основного течения и ширина канала. Масштаб внешней области отличается от масштаба Сэфмана L_{Sa} : $l_p = a R_p^{-1/2} \gg a$. Такой выбор R_p и l_p удобен тем, что они не зависят от величины локального сдвига и

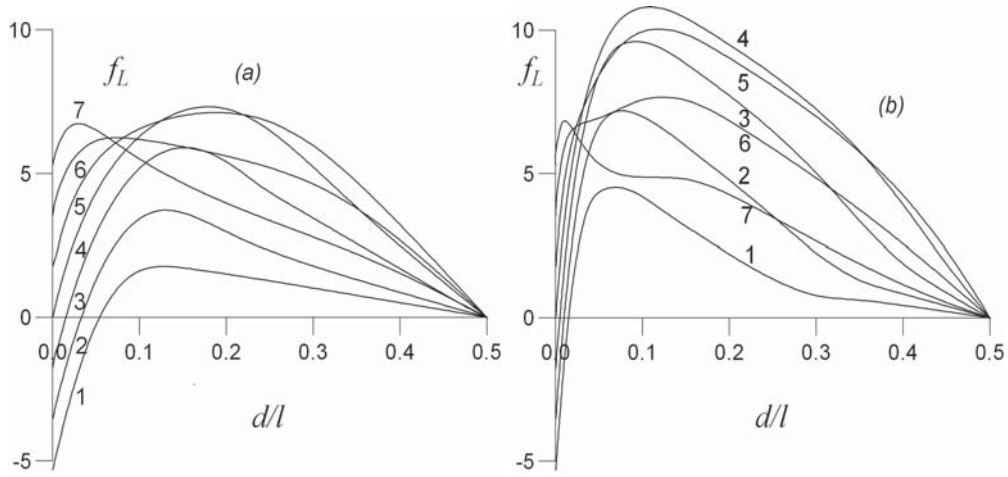


Рис. 5: Поперечная сила в вертикальном канале для (a) $R_c = 100$, (b) 1000. Параметр $v = VR_c^{1/2}$ изменяется от -3 до 3 с шагом 1 (кривые 1-7).

являются одинаковыми для любого положения частицы в канале. Число Рейнольдса канала $R_c = V_m l / \nu$ считается большим, но конечным, не связанным с асимптотическим параметром R_p .

Безразмерное уравнение импульса во внешней области записывается аналогично (2),

$$\bar{v}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} - \frac{d\bar{v}_x}{dZ} U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = -6\pi V \mathbf{e}_x \delta(\mathbf{R}). \quad (7)$$

$$\bar{v}_x = v + (4 - 8d/l)Z - 4R_c^{-1/2}Z^2, \quad V = V_s/V_m, \quad v = VR_c^{1/2}.$$

В отличие от случая, рассмотренного в первой главе, профиль невозмущенной скорости $\bar{v}_x$ является параболическим и характеризуется тремя независимыми безразмерными параметрами: число Рейнольдса канала R_c , параметр v , пропорциональный скорости скольжения частицы, и расстояние до ближайшей стенки d/l . Выражение для поперечной силы в этом случае имеет вид

$$F_L = f_L(R_c, v, d/l) \rho a^2 V_s (V_m \nu / l)^{1/2}. \quad (8)$$

Зависимости силы антисимметричны относительно оси канала. Коэффициент силы для нижней половины течения показан на Рис. 5 как функция расстояния до стенки d/l для различных значений параметров v и R_c .

Для большей части течения величина f_L положительна. Сила быстро меняется при малых d/l , что связано с инерционным влиянием стенки, которое проявляется на расстояниях порядка размера внешней области $l_p \sim lR_c^{-1/2}$. Толщина этого слоя убывает с ростом числа Рейнольдса и составляет лишь малую часть канала при больших R_c .

Вследствие симметрии течения поперечная сила всегда равна нулю на оси канала. Для частиц, отстающих от несущего потока ($v > 0$), это положение равновесия устойчиво. При отрицательной скорости скольжения ($v < 0$) ось канала - неустойчивое положение, и такие частицы имеют устойчивое положение равновесия вблизи стенки. Расстояние до него d_{eq}/l_p представлено на Рис. 6 как функция v . Для больших чисел Рейнольдса и $-2 \leq v \leq 0$ кривые близки друг к другу и соответствуют результатам для линейного сдвигового потока, т.к. влияние второй удаленной стенки и кривизны профиля в этом случае несущественно.

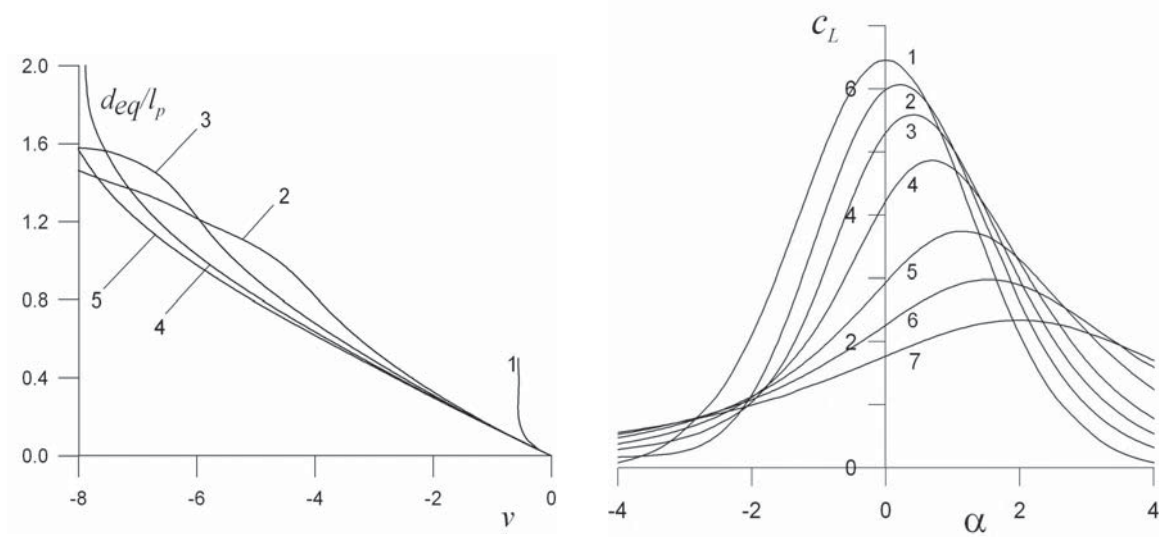


Рис. 6: Положение равновесия частицы вблизи стенки, d_{eq}/l_p . Кривые 1-5 соответствуют $R_c = 1, 100, 300, 1000, 3000$.

Рис. 7: Коэффициент силы в неограниченном параболическом потоке для $\sigma = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$ (кривые 1-7).

В основной части канала вне пристеночных слоев, $d > l_p \sim lR_c^{-1/2}$, частица слабо взаимодействует со стенками, и сила близка к значениям, соответствующим неограниченному потоку. При этом роль кривизны профиля $\bar{v}_x$ остается существенной даже при максимальных числах Рейнольдса

R_c . Для расчета силы в неограниченном параболическом потоке уравнения внешней области решались с использованием L_{Sa} в качестве ее масштаба. При этом выражение для силы аналогично (5), а коэффициент силы c_L^∞ зависит от двух безразмерных параметров, α и $\sigma = (1 - 2d/l)^{-3/2} R_c^{-1/2}/2$, характеризующих соответственно величины однородного и квадратичного членов по отношению к линейному в профиле невозмущенной скорости. На Рис. 7 представлены результаты расчетов коэффициента поперечной силы c_L^∞ в зависимости от параметра скольжения α для различных σ . Сила отличается от значений для линейного потока ($\sigma = 0$) даже для достаточно малых $\sigma \leq 0.1$. Максимальные величины меньше, чем для линейного потока, однако для больших значений α , при которых сила мала, имеет место обратная ситуация: $c_L^\infty(\alpha, \sigma)$ во много раз превосходит значения в линейном потоке.

В §2.2 рассматривается режим слабого сдвига, когда однородная скорость в профиле невозмущенной скорости велика по сравнению со сдвиговым и квадратичным членами. Число Рейнольдса канала считается асимптотически большим, $R_c \gg 1$, а скорость скольжения сравнимой со скоростью несущего потока, $V = V_s/V_m \sim 1$.

Решение (7) строится на основе метода сращиваемых асимптотических разложений по параметру $\beta = \nu/(l|V_s|) \ll 1$ и двумерного преобразования Фурье. В пространстве (k_x, k_y, Z) выделяются несколько областей, соответствующих области Озеена, невязкой области и пограничным слоям вблизи стенок канала. Основной вклад в поперечную силу связан с невязким взаимодействием частицы с параболическим невозмущенным течением и стенками. Сила асимптотически мала по сравнению с (8). Двучленное разложение записывается в виде $F_L = \rho(a\nu/l)^2 (I_0(V, d/l) + \beta^{1/2} I_1(V, d/l))$. Интегралы I_0 и I_1 определялись численно в широком диапазоне параметров $V, d/l$. Для отрицательной скорости скольжения появляется дополнительное положение равновесия d_{eq} , находящееся на расстояниях от стенки, сравнимых с шириной канала. Зависимость $d_{eq}(V)/l$ для различных чисел Рейнольдса показана на Рис. 8.

В §2.3 рассмотрена поперечная сила в горизонтальном течении в канале с вертикальными стенками. В этом случае скорость скольжения $V_{sy}\mathbf{e}_y$ перпендикулярна скорости несущего потока $\bar{v}\mathbf{e}_x$. Такая конфигурация харак-

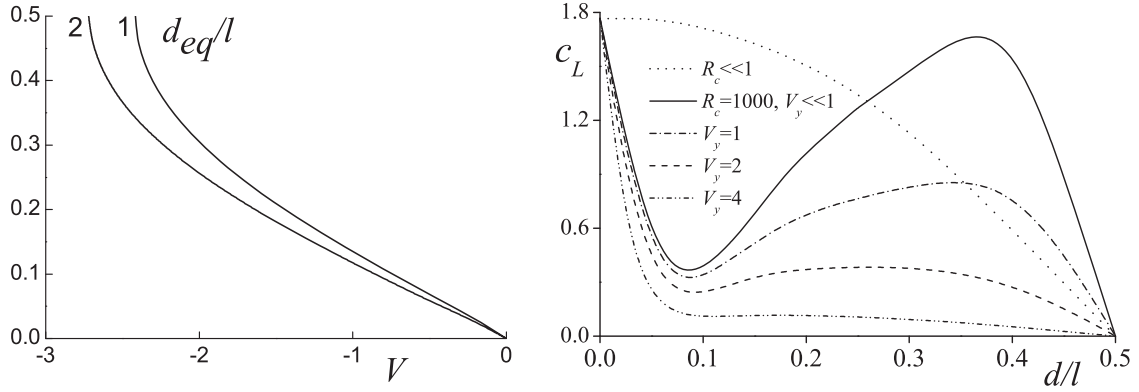


Рис. 8: Положение равновесия для режима слабого сдвига, как функция $V = V_s/V_m$. Кривые 1, 2 соответствуют $R_c = 100, 1000$.

Рис. 9: Коэффициент поперечной силы для горизонтального течения в канале с вертикальными стенками

терна, например, для задач о гидроразрыве нефтеносного пласта. Результаты расчета силы использовались для описания таких течений в работах [15, 17]. Поперечная сила представляется в виде $F_L = \rho V_{sy}^2 a^2 c_L (d/l, V_y, R_c)$, где $V_y = V_{sy}/V_m$. Таким образом, сила квадратично зависит от скорости скольжения, в отличие от случая, рассмотренного в §2.1. Результаты расчетов коэффициента поперечной силы c_L показаны на Рис. 9 в зависимости от расстояния до стенки для $R_c = 1000$ и различных V_y в сравнении с результатами [37] ($R_c \ll 1$, пунктирная кривая). Коэффициент всегда положителен, т.е. частица мигрирует к устойчивому положению равновесия в центре канала. Вблизи стенки сила обусловлена только инерционным взаимодействием со стенкой и быстро спадает на расстоянии $L_{Sa} \sim l R_c^{-1/2}$. На больших расстояниях зависимости при конечных V_y имеют максимумы, что связано с влиянием кривизны профиля невозмущенной скорости.

Результаты могут быть обобщены и для произвольного направления скорости скольжения относительно скорости основного течения. Для случая сильного сдвига $|V_x| \ll 1$, $|V_y| \ll 1$ поперечная сила является суммой сил, соответствующих параллельному и перпендикулярному относительному движению.

В §2.4 определяется сила, действующая на нейтрально плавучую частицу, что соответствует малому параметру скольжения, $\alpha \ll R_s^2$. В этом слу-

чае влияние частицы для внешней области эквивалентно не точечной силе сопротивления, а симметричному диполю. Член в правой части уравнении импульса (7) заменяется сингулярным членом $\mathbf{e}_x \frac{\partial \delta(\mathbf{R})}{\partial Z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \delta(\mathbf{R})}{\partial X}$. Возмущения во внешней области обусловлены сдвигом и вращением частицы и асимптотически малы по сравнению со случаем конечной скорости скольжения, т.к. убывают с расстоянием быстрее. В результате для размерной силы имеем

$$F_L^{nb} = f_L^{nb}(R_c, d/l) \rho a^4 (V_m/l)^2.$$

Результаты расчетов коэффициента f_L^{nb} представлены на Рис. 10 в зависимости от расстояния для различных чисел Рейнольдса. В интервале $1 \ll R_c \leq 15$ зависимости близки, и положение равновесия находится на расстоянии $d_{eq} \simeq 0.2l$ в соответствии с экспериментальными значениями [27]. В случае больших R_c влияние стенки опять проявляется только в тонких пристеночных слоях, на расстояниях $d \sim l R_c^{-1/2}$, в результате чего положение равновесия приближается к стенке. В большей части течения, где взаимодействие со стенкой слабо, сила обусловлена только кривизной профиля скорости и ее величина значительно меньше. Положение равновесия нейтрально плавучей частицы d_{eq}/l_p в зависимости от R_c показано на Рис. 11. Расчетная кривая близка к экспериментальным значениям.

Результаты второй главы опубликованы в работах [9, 12, 14, 15, 17, 21, 24].

В третьей главе рассматривается возмущенное поле скорости при обтекании не нейтрально плавучей частицы неограниченным сдвиговым потоком. При этом определяются все три компоненты скорости во всех областях течения: вязкой, Озеена, невязкой и в вязких следах. Фурье-образ поперечной скорости $\tilde{U}_z$ описывается уравнением (3). Для определения двух других компонент, $\tilde{U}_x$ и $\tilde{U}_y$, вводится двумерное преобразование Фурье поля завихренности, $\tilde{\omega}_z = i(k_y \tilde{U}_x - k_x \tilde{U}_y)$, для которого получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left[\tilde{\Delta} - i k_x (\alpha + Z) \right] \tilde{\omega}_z = i k_y \left[3\delta(Z)/(2\pi) + \tilde{U}_z \right], \quad (9)$$

$$\tilde{U}_x = i k^{-2} \left(k_x d\tilde{U}_z/dZ - k_y \tilde{\omega}_z \right), \quad \tilde{U}_y = i k^{-2} \left(k_y d\tilde{U}_z/dZ + k_x \tilde{\omega}_z \right).$$

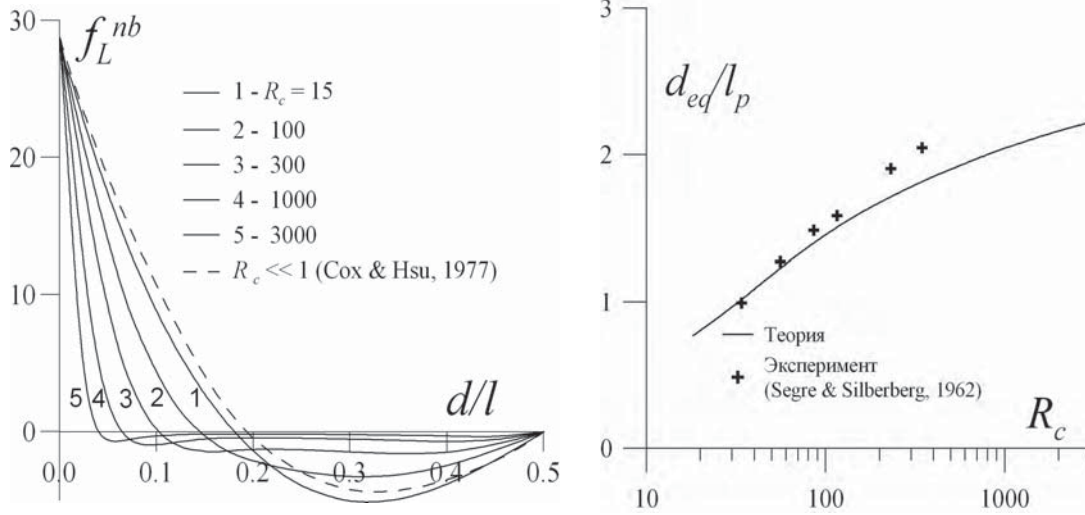


Рис. 10: Сила на нейтрально плавучую частицу при $R_c = 15, 100, 300, 1000, 3000$ (кривые 1-5). Штриховая линия - $R_c \ll 1$ [33].

Рис. 11: Положение равновесия нейтрально плавучей частицы в сравнении с экспериментальными результатами [27] (кресты).

Система уравнений (3), (9) интегрировалась численно. Компоненты скорости вычислялись из обратных преобразований Фурье. Скорость близка к Стокслету $\mathbf{U}_s = -3(\mathbf{e}_x/R + X\mathbf{R}/R^3)/4$ на малых расстояниях, $R \ll 1$. Для дальней невязкой области, $R \gg 1$, найдены степенные законы для всех компонент скорости. В результате рассмотрения асимптотического решения (3) при $k \ll 1$, $|Z| \gg 1$ показано, что поле U_z обладает цилиндрической симметрией на больших расстояниях,

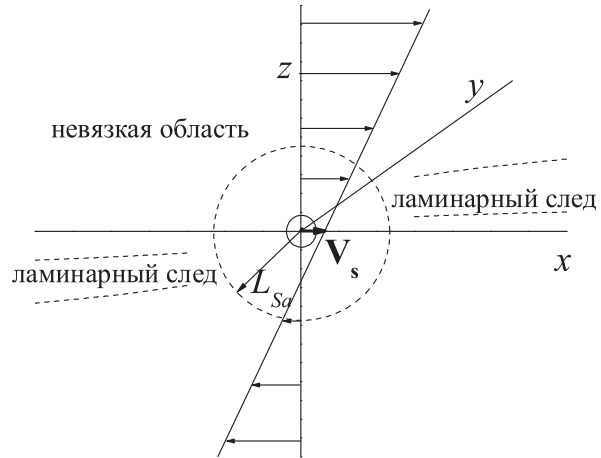


Рис. 12: Схема возмущенного поля скорости вдали от частицы

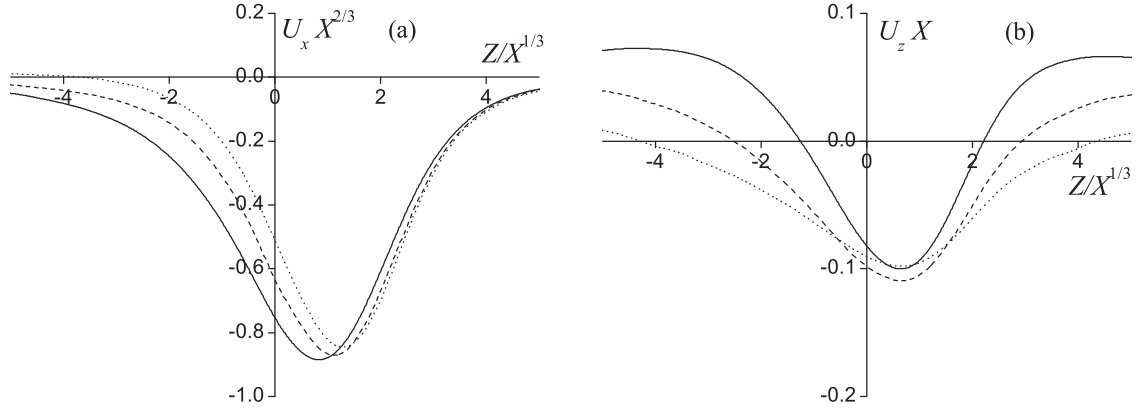


Рис. 13: Компоненты скорости (a) $U_x X^{2/3}$ и (b) $U_z X$ в зависимости от $ZX^{-1/3}$ для $\alpha \ll 1$, $Y = 0$ и $X = 10, 20, 40$ (сплошные, штриховые и пунктирные линии, соответственно).

$U_z = U_z(X, r)$, $r = (Y^2 + Z^2)^{1/2} \gg 1$. В медианной плоскости $X = 0$ можно получить аналитическое выражение $U_z(0, Y, Z) = 0.9064r^{-5/3}$. Таким образом, возмущение убывает в невязкой области в сдвиговом потоке медленнее, чем в однородном потоке, где имеет место закон убывания r^{-2} . Численные значения трансверсальной компоненты убывают с расстоянием еще медленнее, $U_z(0, Y, 0) \sim |Y|^{-4/3}$, $|Y| \gg 1$, а продольной - быстрее, $U_x(0, Y, 0) \sim |Y|^{-7/3}$.

Не нейтрально плавучая частица индуцирует в окружающей жидкости дефицит суммарного импульса, который вследствие закона сохранения равен ее сопротивлению. Область пониженного импульса жидкости переносится конвективно невозмущенным сдвиговым потоком и растет в поперечном размере вследствие вязкости, в результате образуются два ламинарных следа вверх и вниз по потоку (см. Рис. 12). Ядро следа находится в области, где скорость конвективного переноса достаточно велика. Приравняв время z^2/ν , за которое возмущение распространяется поперек потока на расстояние z , и время x/Gz , за которое возмущение конвективно переносится в продольном направлении на расстояние x , получим оценку для ширины следа, $z_w^{sh} \sim (\nu x/G)^{1/3}$, или в безразмерных переменных $Z_w^{sh} \sim X^{1/3}$. Перенос, обусловленный вязкостью, одинаково происходит в направлениях Z и Y , следовательно, ширина следа в обоих направлениях одинакова, $Y_w^{sh} \sim Z_w^{sh}$.

Законы изменения различных компонент скорости в следе проиллю-

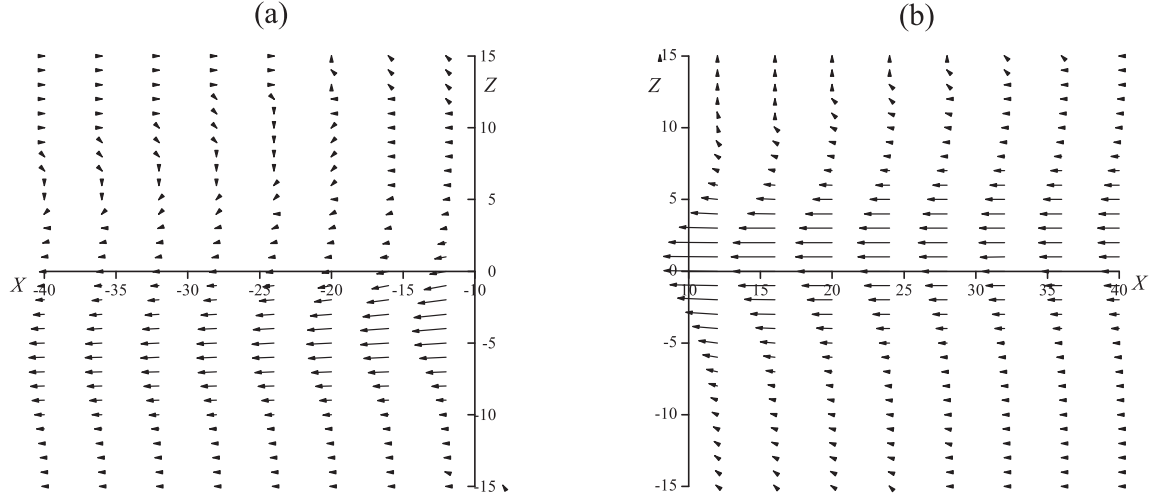


Рис. 14: Векторное поле (U_x, U_z) для $Y = 0$, $\alpha = 1$ в дальней области (a) вверх и (b) вниз по течению.

стрированы на Рис. 13. На Рис. 13(a) показаны профили $U_x X^{-2/3}$ как функции $Z X^{-1/3}$ для сильного сдвигового случая ($\alpha \ll 1$) и $Y = 0$. Профили, рассчитанные для разных X , мало различаются вблизи ядра следа и при больших положительных Z . В то же время в области возвратного течения ($Z X^{-1/3} < 0$) и вблизи оси X различия значительны. Нормальная скорость убывает в ядре следа пропорционально X^{-1} (см. Рис. 13(b)).

При конечных $\alpha > 0$ два следа при $X > 0$ и $X < 0$ различаются. На Рис. 14 показано векторное поле в дальних областях вверх (a) и вниз (b) по потоку для $Y = 0$, $\alpha = 1$. Большая часть дефицита импульса переносится вниз по потоку, поскольку скорость переноса $Z + \alpha$ больше при $Z > 0$. Ядро следа в этом случае располагается ближе к оси X . След вверх по потоку находится дальше от оси X , поскольку на оси скорость невозмущенного потока направлена к частице.

Полученные данные о возмущенном поле течения могут быть использованы для описания взаимодействия пары частиц. Инерционное гидродинамическое взаимодействие частиц может приводить к их притяжению и образованию цепочек частиц в сдвиговых течениях разреженных суспензий [38]. Расстояние между частицами считается достаточно большим, так что каждая сфера находится в области Сэфмана по отношению к другой. Рассматриваемое течение представляется в виде суперпозиции двух

течений, индуцированных двумя точечными силами. Сближающиеся траектории частиц возникают, когда их взаимное расположение почти параллельно скорости набегающего потока.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [16, 26].

В четвертой главе рассмотрена роль нестационарных эффектов при описании динамики частиц. Поперечная миграция частицы во многих практически важных случаях, например, под действием силы тяжести в вертикальном канале или вследствие инерции частицы в пограничном слое, является медленной, т.е. характерные времена изменения скорости обтекания или расстояния до стенки велики по сравнению с характерным временем для течения во внешней области. В этих случаях задачи обтекания являются квазистационарными, и может быть использовано выражение для стационарной силы Сэфмана. Тем не менее, обтекание частиц существенно нестационарно, если имеются флуктуации скорости несущей среды. Такая ситуация характерна, например, для турбулентных течений или при распространении волн неустойчивости в ламинарных течениях запыленных газов, где для описания межфазного обмена импульсом необходимо учитывать не только силу сопротивления, но и поперечную силу [8, 22]. В этой связи возникает необходимость определения границ применимости стационарных решений и учета нестационарности при вычислении инерционных сил при малых, но конечных числах Рейнольдса.

В §4.1 рассматривается задача определения инерционной поперечной силы при условии, что скорость скольжения изменяется по времени, а градиент скорости стационарен. Для предельного случая сильного сдвигового потока $|\alpha| \ll 1$ получена зависимость поперечной силы при произвольном изменении скорости скольжения. Решение, как и в предыдущих главах, строится методом сращиваемых разложений, но в уравнениях Озеена необходимо учитывать нестационарный член.

Сначала рассматривается случай, когда скорость скольжения и сила сопротивления, действующая на частицу, изменяются гармонически по времени, $V_s = \tilde{V}_s e^{-i\Omega t}$, $F = 6\pi \tilde{V}_s e^{-i\Omega t}$, где частота безразмерна на G , а время на $t_{Sa} = G^{-1}$. В случае $|\alpha| \ll 1$ возмущенное поле течения также является гармоническим. По аналогии с уравнением (2) уравнение импульса во внешней области для Фурье-гармоник возмущений скорости по времени

записывается в виде:

$$-i\Omega\tilde{\mathbf{U}} + Z\frac{\partial\tilde{\mathbf{U}}}{\partial X} + \tilde{U}_z\mathbf{e}_x + \nabla\tilde{P} - \nabla^2\tilde{\mathbf{U}} = -6\pi\tilde{V}_s\delta(\mathbf{R})\mathbf{e}_x. \quad (10)$$

Для решения (10) совместно с уравнением неразрывности применяется трехмерное преобразование Фурье по пространственным координатам, предложенное Сэфманом [28] для решения аналогичной стационарной задачи. В результате поперечная сила выражается следующим образом:

$$\tilde{F}_L = c_L(\Omega)\rho a^2\tilde{V}_s(G\nu)^{1/2}, \quad (11)$$

$$c_L = \frac{9}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\zeta \left\{ \frac{k_3^2}{k^2} - \frac{k_1 k_3 (2k_1 k_3 + \zeta k_3^2)}{k^4} \right\} + i \frac{k_1 k_3}{k^4} \Omega \right] e^{-(k_3^2 \zeta^3 / 3 + k_1 k_3 \zeta^2 + k^2 \zeta)} e^{i\Omega \zeta} d\zeta d\mathbf{k}, \quad (12)$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$. Переходя в (12) к сферическим координатам в Фурье-пространстве, можно вычислить явно интеграл по $|\mathbf{k}|$. Остальные интегралы в (12) определяются численно. Результаты расчета действительной и мнимой частей коэффициента c_L (сплошная и штриховая линии) показаны на Рис. 15. При малых частотах $\Omega \ll 1$ коэффициент

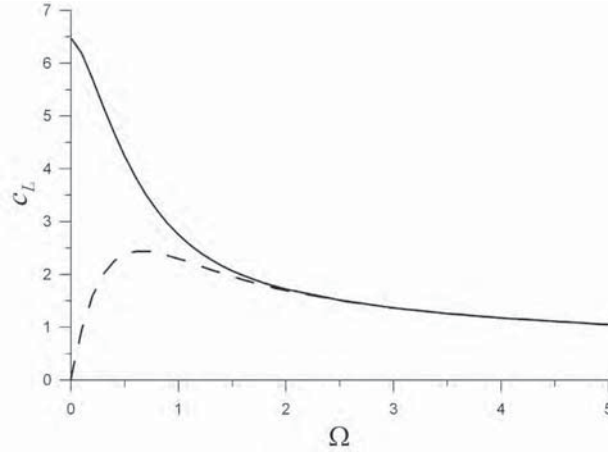


Рис. 15: Коэффициент поперечной силы в нестационарном потоке.

стремится к значению $c_{Sa} = 6.46$. Нестационарность приводит к уменьшению поперечной силы и при больших частотах, $\Omega \gg 1$, она убывает пропорционально $\Omega^{-1/2}$. Ненулевая мнимая часть означает, что возникает сдвиг фаз между скоростью скольжения и поперечной силой. Такое запаздывание связано с тем, что сила порождается возмущениями скорости на

больших расстояниях от частицы, и требуется конечное время для их распространения. В пределе $\Omega \gg 1$ имеем $\text{Re}(c_L) = \text{Im}(c_L)$, т.е. сдвиг фаз равен $\pi/4$.

Уравнение (11), полученное для гармонического изменения скорости скольжения, можно легко обобщить для произвольной зависимости $V_s(t)$, используя обратное преобразование Фурье по времени:

$$\tilde{V}_s = \int_{-\infty}^{\infty} V_s(t) e^{i\Omega t} dt, \quad F_L = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_L(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega.$$

В §4.2 рассматривается задача о силе сопротивления при прямолинейном движении частицы с произвольной скоростью в покоящейся жидкости. Если скорость частицы изменяется быстро (время изменения сравнимо со временем $t_{St} = a^2/\nu$), сила сопротивления описывается известной формулой Бассэ-Буссинеска-Озеена. В случае, когда происходит более медленное изменение скорости, на масштабе времени $t_{Os} = \nu/U_c^2 = t_{St} R_s^{-2} \gg t_{St}$, где U_c - характерное значение скорости частицы, сила в главном приближении по числу Рейнольдса $R_s = aU_c/\nu \ll 1$, равна силе Стокса. Для построения члена следующего порядка необходимо решение нестационарного уравнения Озеена во внешней области [39],[11]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - V_p \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = 6\pi V_p \mathbf{e}_x \delta(\mathbf{R}). \quad (13)$$

Здесь скорость частицы $V_p(t)$, которая равна скорости скольжения с обратным знаком, обезразмерена на U_c , возмущенная скорость жидкости $\mathbf{U}(t, \mathbf{R})$ - на $R_s U_c$, пространственные координаты и время - на Озееновские масштабы длины и времени, $L_{Os} = \nu/U_c \gg a$ и t_{Os} .

Для решения (13) использовалось трехмерное преобразование Фурье по пространственным координатам. В результате аналитического вычисления обратного преобразования Фурье получены более простые, чем в предшествующих работах [40, 41], выражения для возмущенного поля скорости, а также нестационарной силы Озеена:

$$F_{Os} = \frac{9\pi^{1/2}}{4} \rho a^2 U_c^2 \int_{-\infty}^t \left[\frac{4\Delta\tau}{\Delta X_p} \frac{d \exp(-A^2)}{d\tau} - V_p(t) \right] \frac{d\tau}{\Delta\tau^{3/2}}. \quad (14)$$

$$\Delta\tau = t - \tau, \quad \Delta X_p = X_p(t) - X_p(\tau), \quad X_p = \int_{-\infty}^t V_p(\tau) d\tau, \quad A = \frac{\Delta X_p}{2\Delta\tau^{1/2}}.$$

Здесь $X_p(t)$ - зависимость перемещения частицы от времени. Полученное выражение можно рассматривать, как модифицированную силу Бассэ, т.к. она зависит от характера движения в предшествующие моменты времени, т.е. от "истории" движения. Память об изменении скорости затухает быстрее, чем в классической силе Бассэ. Так, например, в задаче о начале движения нестационарная сила (14) затухает пропорционально t^{-2} , в то время как классическая сила Бассэ – пропорционально $t^{-1/2}$. Сила присоединенных масс сохраняется для рассматриваемых медленных изменений скорости, но является малым по порядку R_s членом по сравнению с (14).

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [8, 10, 11, 22, 25].

В пятой главе исследуется течение малой дисперсной примеси в ламинарных пограничных слоях в газе под действием сил Стокса и Сэфмана. В большинстве теоретических работ [42, 43] использовалась формула Сэфмана с максимальным значением коэффициента силы $c_{Sa} = 6.46$. В данной работе учтено влияние зависимости коэффициента поперечной силы c_L от параметра скольжения α на скорость и плотность дисперсной примеси для пограничных слоев на различных телах, на плоской пластине, на клине, в окрестности критической точки затупленного тела.

Масштаб области Сэфмана, представляющий собой характерный размер области, в которой решаются уравнения возмущенного движения газа около частицы, при любом продольном масштабе L пограничного слоя мал по сравнению с его толщиной δ , $L_{Sa} \sim L \text{Re}_L^{-3/4} \ll \delta \sim L \text{Re}_L^{-1/2}$, где $\text{Re}_L \gg 1$ - число Рейнольдса пограничного слоя. По этой причине влияние поверхности пластины на величину силы Сэфмана сказывается лишь на расстояниях от частицы до пластины порядка $L_{Sa} \ll \delta$, а кривизна профиля невозмущенной скорости на масштабе L_{Sa} асимптотически мала. Течение вблизи частицы квазистационарно: хотя по мере ее движения скорость обтекания и градиент скорости меняются, характерное время этого

изменения велико по сравнению с характерным временем для уравнений Озеена t_{Sa} . Таким образом, при рассмотрении движения дисперсной примеси в основной части пограничного слоя с поперечным масштабом δ условия обтекания частицы на масштабе L_{Sa} соответствуют неограниченному стационарному линейному сдвиговому потоку, и для силы Сэфмана можно использовать значения коэффициента поперечной силы (6). Направление силы определяется знаком скорости скольжения, который зависит от продольного ускорения несущей фазы.

В §5.1 рассматривается движение монодисперсной примеси в пограничном слое на плоской пластине. Сила Сэфмана направлена к поверхности пластины, т.к. частицы опережают поток газа, и параметр скольжения отрицателен. Массовая плотность частиц считается малой, так что влияние примеси на течение несущего газа можно не учитывать. Безразмерные уравнения импульса для дисперсной примеси в рамках модели запыленного газа [44] записываются в виде

$$u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} = \frac{9}{2} (u - u_p) \frac{\theta \text{Re}_{Sa}}{R_V^2}, \quad (15)$$

$$u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y} = \frac{9}{2} (v - v_p) \frac{\theta \text{Re}_{Sa}}{R_V^2} + \frac{3}{4\pi} c_L^\infty(\alpha) (u - u_p) \frac{\theta \text{Re}_{Sa}^{5/4}}{R_V} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

$$\alpha = (u - u_p) \text{Re}_{Sa}^{1/4} (\partial u / \partial y)^{-1/2}. \quad (17)$$

Здесь первые члены в правых частях (15) и (16) соответствуют продольной и поперечной силе Стокса, второй член в (16) – силе Сэфмана. Координата x обезразмерена на продольный масштаб течения λ_{Sa} , y – на $\lambda_{Sa} \text{Re}_{Sa}^{-1/2}$, $\text{Re}_{Sa} = (\lambda_{Sa} \rho V) / \mu$; продольные скорости газа u и частиц u_p – на скорость набегающего потока V , поперечные v , v_p – на $V \text{Re}_{Sa}^{-1/2}$; $\theta = \rho / \rho_s$, ρ_s – массовая плотность вещества частиц, $R_V = (a \rho V) / \mu$. Поскольку в газе обычно $\theta \sim 10^{-3}$, считается, что $\theta \ll 1$, а $R_V \sim 1$. Масштаб λ_{Sa} и соответствующее число Рейнольдса Re_{Sa} определяются из условий одинакового порядка двух поперечных сил в (16) и конечности разности $(v - v_p)$. В результате получим

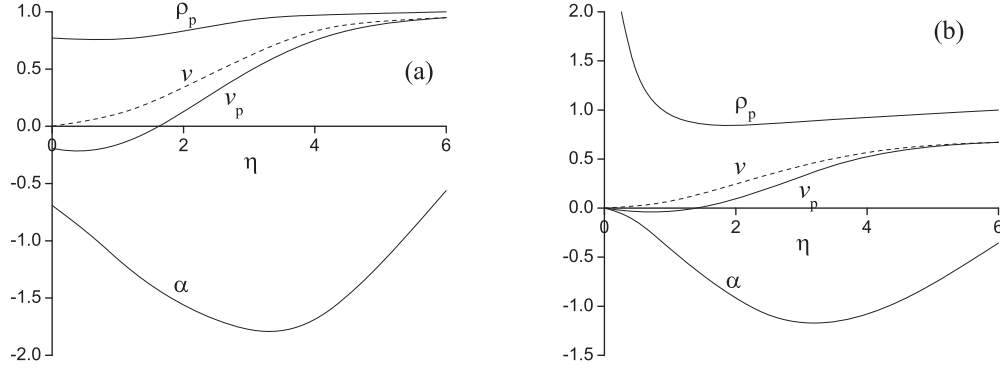


Рис. 16: Параметр скольжения, поперечная скорость и плотность частиц и скорость газа в пограничном слое на плоской пластине.

$$\text{Re}_{Sa} = 3.56 \times 10^{-3} R_V^4 \theta^{-4/3} \gg 1, \quad |u - u_p| \sim \text{Re}_{Sa}^{-1/4} \ll 1.$$

В главном приближении $u_p = u$, т. е. в продольном направлении частицы «вморожены» в газ, а суммарная поперечная сила равна нулю. В результате система (15-17) сводится к алгебраическому уравнению:

$$\alpha c_L^\infty(\alpha) = \alpha c_L^\infty(0) x^{3/4} \left[\frac{f''(\eta)}{f''(0)} \right]^{-3/2} + \frac{3\pi f(\eta)}{R_V f''(\eta)}, \quad (18)$$

где $f(\eta)$ – функция Блазиуса, $\eta = yx^{-1/2}$.

Из уравнения следует, что на малых ($x \ll 1$) и на больших ($x \gg 1$) расстояниях параметр α пропорционален $x^{-3/4}$. В результате в обоих предельных случаях сила Сэфмана мала: в случае $x \ll 1$ имеем $\alpha \gg 1$ (большая скорость скольжения частиц), но сила мала, т.к. коэффициент силы быстро убывает, $c_L^\infty(\alpha) \sim \alpha^{-4} \ln|\alpha|$ (см. также Рис. 2). При $x \gg 1$ сила мала вследствие малости скорости скольжения. Таким образом, влияние силы Сэфмана существенно на расстояниях λ_{Sa} . При $x \sim 1$ уравнение (18) решалось численно. Результаты расчета параметра α для $R_V = 3$ и значений координат $x = 0,8$ и $x = 1,5$ приведены соответственно на Рис. 16(a,b). Параметр скольжения конечен, и поэтому коэффициент поперечной силы значительно отличается от предельного

значения $c_L^\infty(0) = 6.46$. На рисунке нанесены также зависимости поперечной скорости $v_p(\eta)$ и плотности $\rho_p(\eta)$ частиц и скорости газа $v(\eta)$.

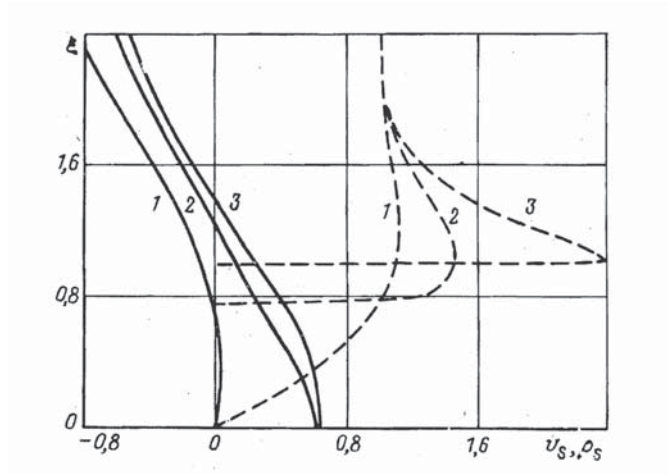


Рис. 17: Поперечная скорость и плотность частиц (сплошные и штриховые кривые) в пограничном слое на клине.

Распределения качественным образом различаются при $x < 1$ и $x > 1$ вблизи поверхности пластины. При $x < 1$, $\eta \rightarrow 0$ (18) дает ненулевые решения для α и v_p , т.е. частицы приближаются к поверхности пластины с конечной скоростью, а для значений $x > 1$ скорость частиц стремится к нулю вблизи стенки. Следствием

этого является конечность плотности частиц при $x < 1$ и появление неинтегрируемой особенности, $\rho_p \sim \eta^{-1}$ при $x > 1$, $\eta \rightarrow 0$.

В §5.2 рассмотрен пограничный слой запыленного газа при обтекании клина. В градиентном пограничном слое, в отличие от течения на плоской пластине, продольное ускорение несущей фазы и связанные с ним скорость обтекания частиц и сила Сэфмана могут иметь любой знак. Результатом действия на частицы положительной (направленной от поверхности тела) поперечной силы является отход траекторий частиц от поверхности клина. Получено уравнение для α , аналогичное (18). Параметр скольжения и поперечная скорость также выражаются через автомодельное решение для скорости газа, которая степенным образом растет вдоль поверхности клина. На Рис. 17 представлены профили v_p и ρ_p для трех расстояний от вершины клина $x_1 < x_2 < x_3$. Так же, как и в случае плоской пластины, профили скорости v_p качественным образом изменяются при некотором $x = x_r$: при этом в отличие от плоской пластины скорость частиц стремится к нулю вблизи стенки для $x < x_r$, а для $x > x_r$ скорость на стенке конечна и положительна. В результате нулевая линия тока дисперсной фазы, прохо-

дящая при $x < x_r$ у поверхности клина, при $x > x_r$ удаляется от нее на конечные расстояния. Таким образом, результатом действия силы Сэфмана при обтекании клина является образование области чистого газа. Это явление можно назвать отрывом потока дисперсной фазы в пограничном слое.

В §5.3 асимптотический метод описания движения дисперсной фазы распространен на пограничный слой при обтекании критической точки затупленного тела. При описании течения в криволинейной системе координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела, возникает дополнительная поперечная сила, действующая на частицы,

– центробежная. Получено уравнение для параметра скольжения α , которое аналогично (18) и включает дополнительный член, соответствующий центробежной силе. В данном течении в результате действия поперечной силы также возникает отрыв потока дисперсной фазы (см. Рис. 18).

Результаты пятой главы опубликованы в работах [3]–[7], [13].

В Заключение сформулированы основные результаты и выводы работы.

1. На основе метода срачиваемых асимптотических разложений сформулирована задача о динамике малых сферических частиц в сдвиговых потоках. Для частицы, движущейся в ограниченном стенкой линейном сдвиговом потоке, определены зависимости поперечной силы от двух безразмерных параметров: параметра скольжения и расстояния до стенки, отнесенного к масштабу Сэфмана. Частицы, опережающие несущий поток, имеют устойчивое положение равновесия, т.к. сила является знакоперемен-

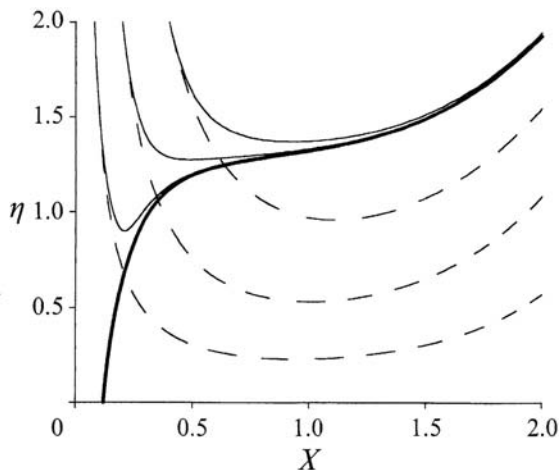


Рис. 18: Траектории частиц в пограничном слое на сфере и граница области без частиц (жирная линия). Штриховые линии – траектории, рассчитанные без учета силы Сэфмана.

ной функцией расстояния до стенки.

2. Для течения в плоском канале найдены поперечные инерционные силы для различных направлений (параллельная и перпендикулярная основному потоку) и величин скорости скольжения. При больших числах Рейнольдса канала влияние стенок существенно в тонких пристеночных слоях, где поперечная сила близка к значениям, полученным для линейного потока с одной стенкой. В основной части канала коэффициент силы соответствует неограниченному параболическому потоку и зависит от двух безразмерных параметров: параметра скольжения и кривизны профиля скорости. Определены устойчивые положения равновесия.

3. Построено асимптотическое решение для возмущенного поля скорости вдали от не нейтрально плавучей частицы в сдвиговом потоке. Получены степенные законы зависимостей возмущений всех компонент скорости от расстояния до частицы в дальней невязкой области и в вязких следах.

4. Задача определения инерционной поперечной силы обобщена на случай, когда скорость скольжения частицы в неограниченном сдвиговом потоке нестационарна. Получено аналитическое выражение для обобщенной силы Бассэ, которая зависит от "истории" движения в предшествующие моменты времени для частицы, движущейся прямолинейно с произвольной скоростью.

5. Получены распределения плотности и скорости частиц для течений газовзвеси в ламинарных пограничных слоях на различных телах. В пограничных слоях на клине и затупленном теле в результате действия поперечной силы происходит отрыв дисперсной фазы, т. е. возникает область чистого газа вблизи поверхности, где частицы отсутствуют.

Список публикаций по теме диссертации в т.ч. статьи из журналов перечня ВАК [1-17]

- [1] Асмолов Е. С. О поперечной силе, действующей на сферическую частицу в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1989. — № 5. — С. 66–71.
- [2] Асмолов Е. С. О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 6. — С. 91–96.
- [3] Асмолов Е. С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на плоской пластине // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 1. — С. 66–73.
- [4] Асмолов Е. С. Движение частиц в ламинарном пограничном слое на масштабе релаксации поперечной скорости // Изв. РАН. МЖГ. — 1993. — № 1. — С. 86–93.
- [5] Асмолов Е. С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое при обтекании клина // Изв. РАН. МЖГ. — 1993. — № 1. — С. 34–42.
- [6] Asmolov E. S. Dusty-gas flow in a laminar boundary layer over a blunt body // J. Fluid Mech. — 1995. — Vol. 305. — P. 29–46.
- [7] Асмолов Е. С. Движение дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на клине при неоднозначном распределении скорости частиц // Ученые записки ЦАГИ. — 1996. — Т. 27, № 1. — С. 91–99.
- [8] Asmolov E. S., Manuilovich S. V. Stability of a dusty-gas laminar boundary layer on a flat plate // J. Fluid Mech. — 1998. — Vol. 365, no. 1. — P. 137–170.
- [9] Asmolov E. S. The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number // J. Fluid Mech. — 1999. — Vol. 381. — P. 63–87.

- [10] Asmolov E. S., McLaughlin J. B. The inertial lift on an oscillating sphere in a linear shear flow // *Int. J. Multiphase Flow*. — 1999. — Vol. 25. — P. 739–751.
- [11] Asmolov E. S. Flow past a sphere undergoing unsteady rectilinear motion and unsteady drag at small Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 446. — P. 95–120.
- [12] Asmolov E. S. The inertial lift on a small particle in a weak-shear parabolic flow // *Phys. Fluids*. — 2002. — Vol. 14. — P. 15.
- [13] Osipov A. A., Asmolov E. S. Asymptotic model of the inertial migration of particles in a dilute suspension flow through the entry region of a channel // *Phys. Fluids*. — 2008. — Vol. 20. — P. 123301.
- [14] Asmolov E. S., Osipov A. A. The inertial lift on a spherical particle settling in a horizontal viscous flow through a vertical slot // *Phys. Fluids*. — 2009. — Vol. 21. — P. 063301.
- [15] Асмолов Е. С., Лебедева Н. А., Осипов А. А. Инерционная миграция осаждающихся частиц при течении суспензии в ячейке Хеле-Шоу // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2009. — № 3. — С. 85–101.
- [16] Asmolov E. S., Feuillebois F. Far-field disturbance flow induced by a small non-neutrally buoyant sphere in a linear shear flow // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 643. — P. 449–470.
- [17] Lebedeva N. A., Asmolov E. S. Migration of settling particles in a horizontal viscous flow through a vertical slot with porous walls // *Int. J. Multiphase Flow*. — 2011. — Vol. 27. — P. 453–461.
- [18] Asmolov E. S. Suspension flow in laminar boundary layer over a flat plate and a wedge // *2nd EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Warsaw, Poland, 20-24 September 1994. Abstracts of Papers*. — 1994.
- [19] Asmolov E. S. The inertial lift on a small particle in a channel flow // *XIXth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Kyoto, Japan, 25-31 August 1996*. — 1996. — P. 138.

- [20] Asmolov E. S. The inertial lift on a spherical particle in a channel flow // Proceedings of International Conference "Asymptotics in Mechanics St. Petersburg, Russia, 13-16 October 1996. — 1996. — P. 17–24.
- [21] Asmolov E. S. The lift exerted by the fluid on a small particle in a channel flow // Proceedings of the 1999 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, FEDSM'99, San Francisco, California, USA, 18-23 July 1999 (CD-ROM). — 1999. — P. 7774.
- [22] Asmolov E. S., Manuilovich S. Strong effect of small particles on the stability of the channel flow with non-uniform distribution of particle density // Proceedings of the 1999 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, FEDSM'99, San Francisco, California, USA, 18-23 July 1999 (CD-ROM). — 1999. — P. 7857.
- [23] Asmolov E. S. Unsteady drag on a sphere in a rectilinear motion at small Reynolds number // 4th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Eindhoven, Netherlands, 19-21 November 2000. Book of Abstracts. — 2000. — P. 17.
- [24] Asmolov E. S. The inertial lift on a small particle in a weak-shear channel flow at large channel Reynolds number // 4th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Eindhoven, Netherlands, 19-21 November 2000. Book of Abstracts. — 2000. — P. 213.
- [25] Asmolov E. S. Unsteady flow past a sphere undergoing unidirectional motion at small Reynolds number // XXth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Chicago, USA, 27August - 2 September 2000. Book of Abstracts. — 2000. — P. 78.
- [26] Asmolov E. S., Feuillebois F. Disturbance flow of a non-neutrally buoyant sphere in an unbounded linear shear flow // 8th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Bad Reichenhall, Germany, 13-16 September 2010. Book of Abstracts. — 2010. — P. S3–4.

Список литературы

- [27] Segré G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2. Experimental results and interpretation // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 14. — P. 136–157.
- [28] Saffman P. G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. — 1965. — Vol. 22. — P. 385–400.
- [29] Saffman P. G. Corrigendum // J. Fluid Mech. — 1968. — Vol. 31. — P. 624.
- [30] Vasseur P., Cox R. G. The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid // J. Fluid Mech. — 1977. — Vol. 80. — P. 561–591.
- [31] Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. — 1961. — Т. 16, № 3 (99). — С. 171–174.
- [32] McLaughlin J. B. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows // J. Fluid Mech. — 1991. — Vol. 224. — P. 261–274.
- [33] Cox R. G., Hsu S. K. The lateral migration of solid particles in a laminar flow near a plane // Int. J. Multiphase Flow. — 1977. — Vol. 3. — P. 201–222.
- [34] Cox R. G., Brenner H. The lateral migration of solid particles in Poiseuille flow. I. Theory. // Chem. Eng. Sci. — 1968. — Vol. 23. — P. 147–173.
- [35] Schonberg J. A., Hinch E. J. Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow // J. Fluid Mech. — 1989. — Vol. 203. — P. 517–524.
- [36] Hogg A. J. The inertial migration of non-neutrally buoyant spherical particles in two-dimensional shear flows // J. Fluid Mech. — 1994. — Vol. 272. — P. 285–318.
- [37] Vasseur P., Cox R. G. The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows // J. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 78. — P. 385–413.

- [38] Matas J.-P., Glezer V., et al. Trains of particles in finite-Reynolds-number pipe flow // Phys. Fluids. — 2004. — Vol. 11. — P. 4192–4195.
- [39] Childress S. The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid // J. Fluid Mech. — 1964. — Vol. 20, no. 2. — P. 305–314.
- [40] Ockendon J. The unsteady motion of a small sphere in a viscous liquid // J. Fluid Mech. — 1968. — Vol. 34, no. 02. — P. 229–239.
- [41] Lovalenti P. M., Brady J. F. The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number // J. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 256. — P. 561–605.
- [42] Otterman B., Lee S. Particulate velocity and concentration profiles for laminar flow of a suspension over a flat plate // Proc. 1970 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, T. Sarpkaya, ed. — 1970. — P. 311.
- [43] Осипцов А. Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1988. — № 6. — С. 80.
- [44] Marble F. E. Dynamics of dusty gases // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1970. — Vol. 2, no. 1. — P. 397–446.