

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ
ПРОФЕССОРА Н. Е. ЖУКОВСКОГО

На правах рукописи

Асмолов Евгений Савельевич

ПОПЕРЕЧНАЯ МИГРАЦИЯ МАЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В
СДВИГОВЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКАХ

01.02.05 — Механика жидкостей, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва

2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	4
ГЛАВА 1. Инерционные поперечные силы, действующие на частицу в линейном сдвиговом при малых числах Рейнольдса	12
1.1. Обзор работ, посвященных исследованиям инерционных сил и по- перечной миграции частиц в сдвиговых потоках	12
1.2. Частица в стационарном линейном сдвиговом потоке	19
1.2.1. Внутреннее разложение поля скорости	22
1.2.2. Внешнее разложение	26
1.2.3. Вычисление поперечной силы	29
ГЛАВА 2. Поперечные силы в течении в плоском канале	38
2.1. Поперечная сила в вертикальном течении в плоском канале . . .	38
2.1.1. Внутреннее разложение	41
2.1.2. Внешнее разложение	42
2.1.3. Сравнение с результатами для линейных сдвиговых потоков . .	53
2.1.4. Поперечная сила в неограниченном параболическом потоке . .	55
2.2. Сила при конечной скорости скольжения частицы и больших чис- лах Рейнольдса канала	59
2.2.1. Асимптотическое решение при малых волновых числах	65
2.3. Поперечная сила в горизонтальном течении в канале с вертикаль- ными стенками	78
2.3.1. Произвольное направление скорости скольжения	85
2.4. Нейтрально плавучая частица	87
2.4.1. Течение в канале	90
2.4.2. Линейный сдвиговый поток, ограниченный одной стенкой . . .	96

2.5. Сравнение с экспериментальными данными	96
ГЛАВА 3. Возмущенное поле скорости вдали от частицы	101
3.1. Фурье-преобразование поля скорости	101
3.1.1. Асимптотика прямых и обратных преобразований Фурье	104
3.2. Численные результаты	109
3.3. Ламинарные следы в сдвиговом потоке	117
3.4. Инерционное взаимодействие частиц в неограниченном сдвиго- вом потоке	126
ГЛАВА 4. Инерционные силы в нестационарном потоке	133
4.1. Поперечная сила в неограниченном сдвиговом потоке	136
4.2. Сила сопротивления в нестационарном однородном потоке	143
4.2.1. Нестационарное поле скорости.	146
4.2.2. Нестационарная сила Озеена.	151
ГЛАВА 5. Движение дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое в газе	155
5.1. Пограничный слой на плоской пластине	159
5.2. Пограничный слой при обтекании клина	170
5.3. Пограничный слой при обтекании критической точки затуплен- ного тела	180
Заключение	186
Литература	189

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность изучения течений дисперсных сред связана с многочисленными техническими приложениями и природными явлениями. К ним относятся, например, процессы в химических и энергетических установках, использующих двухфазные рабочие среды; в аэродинамике – движение летательных аппаратов в запыленной атмосфере или облаках, исследование загрязнения атмосферы, диагностика потоков на основе метода визуализации поля скорости (PIV). В числе наиболее активно развивающихся в последнее время направлений в биологии и медицине – описание движения крови в каналах, гидродинамическая сепарация и фильтрация клеток, бактерий и других биологических частиц разных размеров и/или плотности.

Существенное значение для описания течений дисперсных сред имеет правильное определение сил, действующих на отдельные частицы, и их движение относительно несущей жидкости или газа. Динамика частиц при малых числах Рейнольдса описана в многочисленных монографиях [1]–[9] и обзорах [10]–[13]. Как правило, при движении сферической частицы учитывают только классическую силу сопротивления, совпадающую по направлению со скоростью обтекания. Во многих указанных приложениях несущий поток является не однородным и не безграничным, а сдвиговым и ограниченным стенками. В таком потоке на частицу помимо силы сопротивления действует также поперечная сила, которая активно изучалась в последние годы экспериментально и теоретически.

Поперечное движение частиц впервые наблюдалось Пуазейлем в связи с исследованиями течений крови в каналах [14]. Было показано, что область вблизи стенок каналов свободна от частиц. Возникновение поперечной силы обусловлено возмущениями, которые вносит сама частица в несущий поток. Одной из причин возмущений может быть различие скоростей частицы и жидкости вдали от нее - проскальзывание частицы. Оно возникает, напри-

мер, в результате действия силы тяжести на не нейтрально плавучие частицы, имеющие плотность вещества, отличную от плотности несущей фазы. В случае, когда плотности равны (нейтрально плавучие частицы), причиной возмущений является вращение твердых частиц в сдвиговом потоке.

Из решения уравнений Стокса, которые соответствуют нулевому значению числа Рейнольдса частицы, следует, что поперечная сила равна нулю в сдвиговом потоке независимо от профиля невозмущенной скорости и наличия стенок [15]. Таким образом, сила может быть обусловлена только малыми, но конечными конвективными членами в уравнениях Навье-Стокса. По этой причине такие силы называют инерционными, т.е. вызванными малой, но конечной инерцией течения жидкости, но не самих частиц. Их действие приводит к поперечной миграции частиц относительно несущего потока. Поскольку конвективные члены малы по сравнению с вязкими, поперечная сила также асимптотически мала по сравнению с продольной силой сопротивления (силой Стокса). Это означает, что ее учет и поперечные миграции частиц важны для течений, в которых поперечный масштаб существенно меньше продольного, например, для течения Пуазейля или течения в пограничном слое. Наибольший интерес для приложений имеют случаи, когда сила является знакопеременной функцией расстояния до стенки. Точки, в которых сила равняется нулю, соответствуют положениям равновесия, и вблизи них происходит накопление частиц.

С начала 1960-х до конца 1980-х годов были получены первые экспериментальные результаты по миграции частиц в ламинарном течении в трубе. Теоретически были определены поперечные силы для нескольких предельных случаев: не нейтрально плавучая частица в линейном неограниченном потоке для случая сильного сдвига (малый параметр скольжения), а также сила в течении Пуазейля при малых числах Рейнольдса канала. При этом не были получены значения для практически значимых диапазонов определяющих безразмерных параметров и конфигураций течения. В этой связи

возникла необходимость обобщения первых теоретических результатов для произвольных значений параметра скольжения и числа Рейнольдса канала, а также учета влияния одной или двух стенок. Интерес, прежде всего, представляло определение положений равновесия частиц в зависимости от этих параметров.

Влияние поперечной силы на движение частиц важно во многих практических приложениях, особенно в бурно развивающихся в последнее время технологиях миниатюрных "лабораторий на чипе". Одной из наиболее актуальных проблем является фокусировка аэрозольных частиц в микросоплах [16]–[19]. Другая проблема - сепарация и фильтрация частиц разных размеров и/или массы, в первую очередь, биологических (клеток, микроорганизмов). Накопление частиц вблизи положения равновесия было предложено использовать в различных технологиях сепарации [20]–[25]. Разделение частиц возможно, если их положение равновесия поперек канала различается в зависимости от размера. Для мелких биологических частиц, которые являются нейтрально-плавучими, положение равновесия слабо зависит от размера. По этой причине для разделения таких частиц использовалось сочетание двух эффектов: инерционной подъемной силы и силы, связанной с неоднородностью потока, например, в криволинейных каналах [22, 23]. В последние 10 лет были выпущены сотни работ, описывающих экспериментальные и расчетные результаты по инерционной сепарации частиц.

Проскальзывание частиц относительно жидкости или газа может быть результатом не только действия гравитации, но и ускоренного движения несущей фазы. В этом случае обтекание вызвано инерцией частиц. Указанная ситуация наиболее характерна для течений аэрозолей и запыленных газов, для которых плотности вещества частиц и несущей фазы различаются на три порядка. Задачи о влиянии силы Сэфмана на течения запыленного газа в ламинарном пограничном слое изучались во многих работах [26]–[29]. В большинстве теоретических работ использовалась формула Сэфма-

на с максимальным значением коэффициента силы. В этой связи возникает необходимость учета зависимости коэффициента силы Сэфмана от параметра скольжения и от расстояния до стенки.

Основными задачами настоящего исследования явились:

1. Теоретическое исследование инерционных сил, действующих на сферические частицы при малых числах Рейнольдса для ламинарных сдвиговых и нестационарных течений, и движения дисперсной примеси под действием этих сил.
2. Математическая формулировка на основе методов возмущений и сращиваемых асимптотических разложений задачи о динамике сферических частиц с учетом малых конвективных и нестационарных членов в уравнениях Навье-Стокса.
3. Разработка методов аналитического и численного решений линеаризованных уравнений Навье-Стокса (уравнений Озеена) на основе преобразования Фурье.
4. Определение инерционных сил и возмущенных полей скорости частицы в различных сдвиговых и нестационарных потоках.
5. Формулировка и решение на основе метода сращиваемых асимптотических разложений задач о движении дисперсной примеси в пограничных слоях с учетом сил Стокса, Сэфмана и центробежной силы.

Полученные результаты являются существенным развитием и обобщением предшествующих исследований. Они обладают несомненным приоритетом или получены независимо и самостоятельно.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Классификация режимов обтекания частицы при малых числах Рейнольдса - сильный, слабый, конечный сдвиг. Определение безразмерного параметра, характеризующего соотношение сдвигового и однородного членов в набегающем потоке - параметра скольжения.

2. Вывод в рамках методов возмущений и сращиваемых асимптотических разложений уравнений внутренней и внешней областей для конечных значений параметра скольжения и расстояний до стенок, сравнимых с масштабом внешней области.
3. Метод решения уравнений внешней областей на основе двумерного преобразования Фурье. Аналитическое и численное решения обыкновенного дифференциального уравнения для Фурье-образа возмущенной скорости. Вычисление поперечной силы через обратное преобразование Фурье.
4. Определение зависимости силы Сэфмана в линейном сдвиговом потоке от двух безразмерных параметров, параметра скольжения и расстояния до стенки, отнесенного к масштабу Сэфмана. Данные результаты являются обобщением известного выражения для силы Сэфмана, полученного для неограниченного потока и в пределах малого параметра скольжения. Для частиц, опережающих несущий поток (отрицательный параметр скольжения), сила является знакопеременной функцией расстояния до стенки. Такие частицы имеют устойчивое положение равновесия, где сила равна нулю. Предложены аппроксимационные формулы для численных результатов.
5. Определение инерционной поперечной силы в течении в плоском канале при конечных числах Рейнольдса канала для разных режимов скольжения, направления скорости скольжения (параллельная и перпендикулярная основному потоку) и типов плавучести частиц (частица с конечным параметром скольжения и нейтрально плавучая частица).
6. Сравнение результатов для поперечной силы в линейном и параболическом потоках при больших числах Рейнольдса канала. Влияние стенок канала существенно в тонких пристеночных слоях, где поперечная сила близка к значениям, полученным для линейного потока,

ограниченного одной стенкой. В основной части канала влияние стенок мало, но роль кривизны профиля остается существенной. Коэффициент силы в этой части течения соответствует неограниченному параболическому потоку и зависит от двух безразмерных параметров: параметра скольжения и кривизны профиля.

7. Определение устойчивых положений равновесия частиц для течения в канале. Положения равновесия при больших числах Рейнольдса канала и конечных параметрах скольжения или для нейтрально плавучих частиц находятся на малых расстояниях от стенок. Появление дополнительных положений равновесия при больших параметрах скольжения.
8. Исследование структуры течения в дальней области при обтекании частицы линейным сдвиговым потоком. Вывод степенных законов зависимостей возмущений всех компонент скорости от расстояния до частицы в дальней невязкой области. Вверх и вниз по потоку образуются два вязких следа, ширина которых растет пропорционально расстоянию от частицы в степени одна третья. Возмущения продольной скорости в следах убывают, как расстояние в степени минус две третьих. Расчет парного гидродинамического взаимодействия частиц.
9. Определение инерционных сил для нестационарной скорости скольжения частицы. Расчет нестационарной поперечной силы в неограниченном сильном сдвиговом потоке. Вывод аналитических выражений для поля возмущенной скорости и нестационарной силы Озеена (обобщенной силы Бассэ) для частицы, движущейся прямолинейно с произвольной скоростью в покоящейся жидкости. Данная сила зависит от "истории" движения в предшествующие моменты времени.
10. Описание движения дисперсной примеси в ламинарных пограничных слоях в газе на плоской пластине, клине и вблизи критической точки затупленного тела с учетом силы Сэфмана и конечности параметра

скольжения. Определение продольного масштаба течения, на котором влияние поперечной силы конечно. Расчет распределений плотности и скорости частиц. В пограничных слоях на клине и затупленном теле под действием поперечной силы может происходить отрыв дисперсной фазы, т. е. появляется область чистого газа вблизи поверхности, где частицы отсутствуют.

Результаты исследований по теме диссертации докладывались на следующих международных научных конференциях: на 2-й, 4-й и 8-й Европейских конференциях по механике жидкостей, проведенных под эгидой EUROMECH Fluid (EFMC'94, Варшава, Польша, 1994; EFMC'00, Эйндховен, Голландия, 2000; EFMC'10, Бад Райхенхаль, Германия, 2010), на XIX и XX международных конгрессах по теоретической и прикладной механике (XIX ICTAM, Киото, Япония, 1996; XX ICTAM, Чикаго, США, 2000); международной конференции "Асимптотика в механике", (Санкт-Петербург, 1996); а также на специализированных научных семинарах: семинары в Ecole superieure de physique et de chimie industrielles (ESPCI), Париж, Франция (2004, 2008); объединенные семинары по аэромеханике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИ Механики МГУ (2011, 2014); семинар Московского исследовательского центра Шлюмберже (2007); семинары по механике многофазных сред под руководством д.ф.м.н. А.Н. Осипцова (НИИ Механики МГУ, Москва, 2004, 2010).

Основные результаты работы изложены в 26 научных публикациях [29]-[54], из которых 17 [29]-[45] — статьи из журналов перечня ВАК и 9 [46]-[54] — статьи и тезисы докладов в трудах международных и российских конференций.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и частично в соавторстве. Так, главы 1, 5, §§2.1,2.2,2.4,2.5,3.1-3.3, 4.2 содержат результаты, полученные лично автором. §2.3 написан на основе совместной работы с А. А. Осипцовым [42],

который участвовал в расчетах поперечной силы в горизонтальном течении в канале с вертикальными стенками, §3.4 - на основе совместной работы с F. Feuillebois [44], которому принадлежит идея о парном инерционном взаимодействии частиц, §4.1 - на основе совместной работы с J. McLaughlin [38], который сформулировал постановку задачи о нестационарной поперечной силе в неограниченном сдвиговом потоке в виде интеграла Фурье по времени. Численные решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений для Фурье-компонентов скорости методом ортонормализации Годунова были разработаны автором на основе алгоритмов С.В. Мануйловича. Все положения, выносимые на защиту, получены лично соискателем.

ГЛАВА 1

ИНЕРЦИОННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЧАСТИЦУ В ЛИНЕЙНОМ СДВИГОВОМ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

1.1. Обзор работ, посвященных исследованиям инерционных сил и поперечной миграции частиц в сдвиговых потоках

Экспериментальные исследования миграции первоначально проводилось для нейтрально плавучих частиц, у которых плотность вещества равна плотности несущей фазы. Такие частицы не осаждаются в жидкости под действием силы тяжести. Интерес к ним вызван тем, что нейтрально плавучими являются биологические объекты (клетки, планктон, бактерии и т.п.). Подробное описание миграции в течении в круглой трубе было впервые выполнено Сегрэ и Зильбербергом [55, 56]. Числа Рейнольдса течения в трубе менялись в диапазоне 2-700, т.е. невозмущенное течение было ламинарным. Частицы медленно мигрировали от стенок и центра трубы, и в результате возникало неоднородное кольцевое распределение концентрации поперек трубы с максимумом на расстоянии 0.6 радиуса от центра. Влияние вращения частиц на их миграцию исследовалось в работах [57, 58]. Для больших, чем в опыте Сегрэ-Зильберберга, числах Рейнольдса канала положение максимума концентрации приближается к стенкам [59, 60]. Кроме того, профиль концентрации может иметь дополнительный максимум на оси симметрии при больших числах Рейнольдса канала или конечных концентрациях частиц в суспензии [59, 61].

Характер движения существенно зависит от отношения плотностей частиц и несущей фазы. Первые эксперименты по миграции не нейтрально плавучих частиц в вертикальных каналах были проведены в работах [62, 63, 64, 65]. Было показано, что инерционные поперечные силы суще-

ственно больше, чем для нейтрально плавучих частиц, что связано с проскальзыванием их относительно несущей жидкости под действием силы тяжести. Частицы, движущиеся быстрее несущего потока жидкости, например, тяжелые частицы в направленном вниз потоке, перемещаются к центру канала, а в обратном случае - к его стенкам. Также наблюдалась миграция частиц, осаждающихся между двумя вертикальными стенками в отсутствие несущего потока [66] и в линейном сдвиговом потоке [67]. При этом частицы мигрировали от стенок. Значения подъемной силы частицы вблизи стенки, измеренные в турбулентном потоке газа [68, 69], существенно отличаются от сил, действующих в ламинарных течениях.

Теоретические исследования влияния малых конвективных членов в уравнениях Навье-Стокса основываются на асимптотических методах. Числа Рейнольдса частицы, основанные на градиенте скорости невозмущенного потока G , на скорости скольжения V_s , которая определяется как разность скорости невозмущенного поля течения в отсутствие частицы и скорости частицы, и угловой скорости частицы Ω_p , предполагаются асимптотически малыми,

$$R_G = Ga^2/\nu \ll 1, \quad R_s = a|V_s|/\nu \ll 1, \quad R_\Omega = \Omega_p a^2/\nu \ll 1. \quad (1.1)$$

Здесь a - радиус сферы, ν - кинематическая вязкость жидкости. При выполнении условий (1.1) возмущенное течение жидкости в главном приближении описывается уравнениями Стокса. Конвективные члены малы по сравнению с вязкими на расстояниях от частицы порядка радиуса (внутренняя область), но становятся сравнимыми на больших расстояниях (внешняя область), т.к. убывают с расстоянием от частицы медленнее, чем вязкие.

Первая попытка теоретически рассчитать поперечную силу была предпринята в работе [70], где предполагалось, что сила обусловлена вращением частицы в однородном потоке. Для решения задачи использовался метод сращиваемых асимптотических разложений, впервые примененный для об-

текания частицы однородным потоком [71]. Были построены решения во внутренней и внешней областях, имеющих масштабы a и длина Озеена $L_{Os} = \nu/V_s$, соответственно. В результате было найдено выражение для поперечной силы (аналог силы Магнуса)

$$\mathbf{F}'_{RK} = \pi a^3 \rho [\mathbf{V}_s \times \boldsymbol{\Omega}_p]. \quad (1.2)$$

Для сдвигового набегающего потока метод сращиваемых асимптотических разложений был применен Сэфманом [72, 73] для расчета поперечной силы (ее часто называют в литературе силой Сэфмана), действующей на не нейтрально плавучую частицу в линейном неограниченном потоке для случая сильного сдвига. Данный предельный случай предполагает, что числа Рейнольдса частицы (1.1) связаны соотношениями:

$$R_s \ll R_G^{1/2} \ll 1, \quad R_\Omega \sim R_G. \quad (1.3)$$

В предельном случае (1.3) при решении уравнений во внешней области можно пренебречь однородным потоком в профиле невозмущенной скорости. Решение строилось в виде ряда по малому параметру $R_G^{1/2}$. Во внутренней области с масштабом, равным радиусу частицы, поле скорости в главном приближении совпадает с решением Стокса.

Масштаб внешней области (масштаб Сэфмана) определяется следующим образом

$$L_{Sa} = \frac{a}{R_G^{1/2}} = \left(\frac{\nu}{G}\right)^{1/2} \gg a, \quad (1.4)$$

т.е. не зависит от размера частицы. Поле скорости во внешней области ищется в виде невозмущенного сдвигового потока и малых возмущений скорости, связанных с обтеканием частицы. Уравнения Навье-Стокса могут быть линеаризованы, т.е. можно пренебречь членами, квадратичными по возмущениям членами. Таким образом, полученные уравнения аналогичны уравнениям Озеена [74], использованным для описания обтекания однородным

поток. Следует заметить, что полученные уравнения являются трехмерными, что усложняет их решение по сравнению с классической двумерной осесимметричной постановкой Озеена. Кроме того, задача в общем случае является нестационарной вследствие неоднородности несущего потока или поперечного движения частицы относительно ограничивающих поток стенок.

Для решения стационарных уравнений Озеена во внешней области Сэфман применял трехмерное преобразование Фурье. Аналогичный подход (двух- или трехмерное преобразование Фурье) широко применялся в последующих работах для различных конфигураций несущего течения. Было показано, что в главном приближении по малому параметру $R_G^{1/2}$ влияние частицы на возмущенное течение эквивалентно точечной силе, равной силе Стокса и расположенной в центре частицы, а вращение частицы не оказывает влияния на течение во внешней области. Для определения поперечной силы достаточно вычислить из обратного преобразования Фурье поперечную компоненту возмущенной скорости в центре частицы и применить закон Стокса.

Сила Сэфмана записывается в виде [72, 73]

$$F'_{Sa} = c_{Sa}\mu a V_s R_G^{1/2} = c_{Sa}\mu a^2 V_s (G/\nu)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Таким образом, она асимптотически велика по сравнению с силой Магнуса (1.2) при выполнении условий (1.3). Для коэффициента поперечной силы численно было найдено значение

$$c_{Sa} = 6.46.$$

Влияние ограничивающих течение стенок на действующие на частицы силы первоначально изучалось на основе решений уравнений Стокса. В пределе $R_s \rightarrow 0$ они приводят к значительному изменению силы сопротивления

[75, 76, 3], но поперечная сила остается равной нулю. В последнее время также активно исследуется гидродинамическое взаимодействие частиц с шероховатыми [77] и гетерогенными стенками [78, 79]. Влияние стенок на поперечную силу при малых конечных числах Рейнольдса, связанное с учетом инерционных членов, впервые было изучено в работе [80] для не нейтрально плавучих частиц в линейном сдвиговом потоке, ограниченном плоской стенкой. Была рассмотрена более простая для решения задача, в которой стенка расположена на расстоянии d , малом по сравнению с масштабом внешней области, $d \ll \min(L_{Os}, L_{Sa})$, т.е. возмущенное течение полностью лежит во внутренней области. В этом случае решение строится в виде асимптотического ряда во внутренней области. В результате поперечная сила выражается через функцию Грина. Аналогичный подход был позднее применен для частиц находящихся между двумя стенками в сдвиговом и параболическом потоках [81, 82].

Данный метод использовался также для описания миграции нейтрально плавучих частиц [83, 81]. Была рассчитана зависимость поперечной силы от расстояния до ближайшей стенки d для малых чисел Рейнольдса канала

$$R_c = U'_m l / \nu,$$

где U'_m - максимальная скорость жидкости в канале, l - ширина канала. Сила равнялась нулю (положение равновесия частицы) на расстоянии 0.3 ширины от центра, в соответствии с экспериментами [55, 56].

Для случая, когда размер частицы сравним с расстоянием до стенки, решения уравнений нулевого и первого порядка по числу Рейнольдса строились с использованием бисферических координат и теоремы обратимости [67, 84]. Сила, действующая на покоящуюся и катящуюся нейтрально плавучую частицу, касающуюся стенки, была рассчитана в работах [85, 86].

Более сложным является случай, когда стенки находятся на расстояниях от частицы, сравнимых с масштабом внешней области. Влияние плоской

стенки на поперечную силу в пределе сильного сдвига изучалось в работах [87, 31, 88]. Сила равна нулю вблизи стенки и монотонно приближается к значению, предсказанному Сэфманом, при удалении от нее.

Обратный предельный случай малого сдвига, $R_s \gg R_G^{1/2}$, при наличии стенок был впервые рассмотрен в работе [66]. Была рассчитана поперечная сила, действующая на частицу, осаждающуюся в покоящейся жидкости, ограниченной одной или двумя вертикальными стенками.

Случай произвольного соотношения параметров R_s и $R_G^{1/2}$ был независимо изучен в работах автора [30] и МакЛофлина [89, 90]. Поперечная сила определялась для неограниченного линейного сдвигового потока и потока, ограниченного одной стенкой (решение данной задачи подробно описано данной Главе). Выражение для нее в этом случае имеет следующий вид

$$F'_L = c_L (\alpha, d/L_{Sa}) \mu a^2 V_s (G/\nu)^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$\alpha = \pm R_s / R_G^{1/2}.$$

Были численно определены зависимости коэффициента поперечной силы c_L от двух безразмерных параметров α и d/L_{Sa} , характеризующих, соответственно, отношение однородного и сдвигового потоков во внешней области (параметр скольжения) и безразмерное расстояние до стенки.

Большое внимание привлекло также теоретическое изучение динамики частиц в каналах с параболическим профилем невозмущенной скорости. Поперечная сила, действующая на нейтрально плавучую частицу в плоских каналах, определялась в работе [91] для чисел Рейнольдса канала $0 < R_c \leq 100$. Случай не нейтрально плавучей частицы в вертикальном и горизонтальном каналах для того же диапазона R_c рассматривался в работе [92]. Для больших значений чисел Рейнольдса канала, $100 \leq R_c \leq 3000$, расчет поперечной силы и положений равновесия для различных плавучесть частиц был выполнен в работе автора [37] (данная задача подробно

рассмотрена в Главе 2). Малое число Рейнольдса частицы определялось по среднему сдвигу в канале,

$$R_p = U'_m a^2 / \nu l.$$

Масштаб внешней области, использованный для этих задач в работах [91, 92], также отличался от масштаба Сэфмана (1.4):

$$l_p = a R_p^{-1/2} = (\nu l / U'_m)^{1/2} = l R_c^{-1/2}. \quad (1.7)$$

Такой выбор R_p и l_p удобен тем, что они не зависят от величины локального сдвига, т.е. от положения частицы в канале.

Для определения поперечной силы также широко использовались численные методы решения уравнений Навье-Стокса, метод конечных элементов [93, 94, 95, 96, 97] и конечно-разностными методы [98, 99, 100, 101]. Данные исследования ограничиваются конечными числами Рейнольдса частицы, т.к. необходимый размер расчетной области, сравнимый с масштабом области Сэфмана, обратно пропорционален R_G . Величина поперечной силы в неограниченном сдвиговом потоке определялась в работах [93, 94, 99, 100, 101]. Для небольших значений $R_G < 1$ было получено удовлетворительное согласие с результатами асимптотической теории [72, 73, 30, 89]. Для течения в канале методом конечных элементов решались двумерные задачи (круговая частица) о подъеме частиц в горизонтальном канале и взаимодействии ансамбля частиц в Ньютоновской и вязко-упругой жидкостях [95, 96, 102, 103, 104]. Трехмерная задача об инерционной миграции не нейтрально плавучих частиц в вертикальной трубе рассчитывалась в [105], нейтрально плавучих частиц - в [106]. Значения силы сопротивления и подъемной силы на покоящуюся сферу в осциллирующем пограничном слое при конечном числе Рейнольдса определялись также методом конечных элементов в работах [107, 108].

Другой метод определения поперечной силы, получивший широкое распространение в последнее время, - численное моделирование течения газа на

основе решения решеточного уравнения Больцмана [109, 110, 111, 112, 113]. Движение частицы конечного размера описывалось в канале прямоугольного сечения. Положения равновесия находились в углах канала [111], на расстоянии от стенки, предсказанного ранее асимптотической теорией [37]. Положения равновесия в углах прямоугольного канала наблюдались также экспериментально [114].

Сила Сэфмана, рассчитанная первоначально для твердой частицы, была также теоретически определена для сферической капли или пузырька [115, 116, 117]. Сила изменяется пропорционально квадрату известной поправки Адамара-Рыбчинского c_{AR} для силы сопротивления вязкой сферы [116]

$$F'_{L,b} = c_{AR}^2 F'_L, \quad c_{AR} = \frac{2\mu + 3\mu_p}{3(\mu + \mu_p)},$$

где F'_L задается уравнением (1.6), μ_p - вязкость жидкости частицы. В частности, для пузырька, когда $\mu_p/\mu \ll 1$ и $c_{AR} = 2/3$, имеем $F'_{L,b} = 4F'_L/9$. Кроме того, были рассмотрены задачи о влиянии плоской вертикальной стенки на поперечную силу всплывающего пузырька [118] и о силе на пузырек во вращающейся жидкости [119]. Влияние деформации капли, движущейся в течении Пуазейля, на силу изучалось в работе [120].

1.2. Частица в стационарном линейном сдвиговом потоке

Рассматривается движение твердой сферической частицы в сдвиговом потоке несжимаемой жидкости, который может быть неограничен или ограничен одной плоской стенкой. Схема течения показана на Рис. 1.1. Скорость скольжения \mathbf{V}_s параллельна линиям тока основного потока. Такая постановка соответствует движению частицы под действием силы тяжести в вертикальном потоке или вследствие инерции частицы в ламинарном пограничном слое (см. Главу 5). Числа Рейнольдса частицы предполагаются

асимптотически малыми и связанными соотношениями

$$R_s \sim R_G^{1/2} \ll 1, \quad R_\Omega \sim R_G \ll 1.$$

Расстояние до стенки d велико по сравнению с радиусом и сравнимо с масштабом Сэфмана

$$L_{Sa} = \frac{a}{R_G^{1/2}} = \left(\frac{\nu}{G}\right)^{1/2}.$$

Система координат движется вместе с частицей, так что начало координат всегда находится в центре частицы. Профиль невозмущенной скорости записывается в виде

$$\bar{\mathbf{v}}' = (V_s + Gz') \mathbf{e}_x.$$

Направления оси x выбрано так, что градиент невозмущенной скорости $G > 0$. Скорость поперечной миграции частицы v_m можно оценить, считая, что сила Сэфмана (1.5) уравновешивается поперечной силой Стокса,

$$v_m \sim F_{Sa}/(\mu a) \sim V_s R_G^{1/2}.$$

Таким образом, поперечная скорость частицы мала по сравнению с V_s , т.е. в главном приближении по числу Рейнольдса R_G частица движется параллельно оси x . Следует заметить, что вследствие поперечного перемещения при наличии стенки течение становится нестационарной - положение стенки меняется в системе координат, связанной с частицей. Однако, изменение расстояния до стенки d является медленным. В самом деле, время этого изменения можно оценить как

$$t_d \sim L_{Sa}/v_m \sim a R_G^{-1}/V_s.$$

При этом характерные времена для течений во внутренней и внешней областях определяются через масштабы этих областей

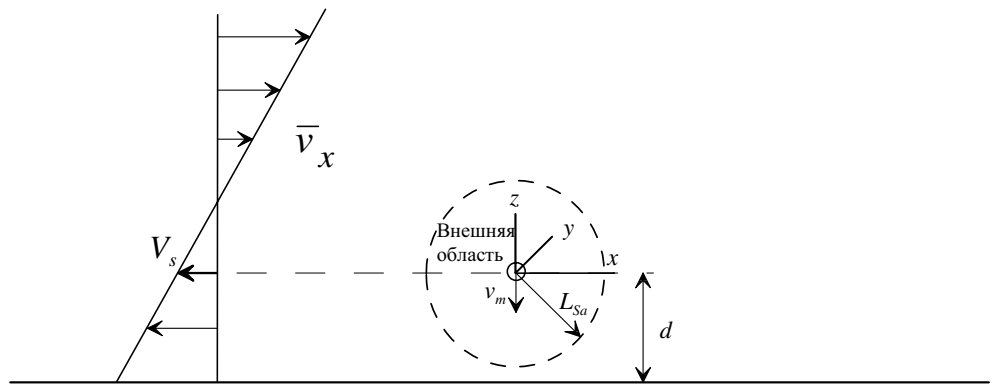


Рис. 1.1. Схема течения, индуцированного сферой в сдвиговом потоке, ограниченном стенкой

$$t_{St} = a^2/\nu,$$

$$t_{Sa} = L_{Sa}^2/\nu = G^{-1} = t_{St}R_G^{-1} \gg t_{St}.$$

Время t_d велико по сравнению с обоими масштабами времени:

$$t_d/t_{St} \sim \nu R_G^{-1}/(aV_s) = R_G^{-1}R_s^{-1} \gg 1,$$

$$t_d/t_{Sa} \sim aGR_G^{-1}/V_s = R_s^{-1} \gg 1.$$

Таким образом, течения в обеих областях можно считать квазистационарными.

Решение будем искать в виде суммы основного сдвигового течения $\bar{\mathbf{v}}'$ и возмущения, возникающего в результате обтекания частицы. Возмущенная скорость \mathbf{u}' обезразмеривается на скорость скольжения V_s , координаты $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ - на радиус частицы a , и сила, действующая на частицу, на $V_s\mu a$.

1.2.1. Внутреннее разложение поля скорости Асимптотический малый параметр связан с числом Рейнольдса R_G :

$$\varepsilon = R_G^{1/2} = a(G/\nu)^{1/2} \ll 1.$$

Безразмерные поля возмущенных скорости и давления и сила, действующая на частицу, ищутся в виде рядов по этому параметру

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\mathbf{u}_1 + o(\varepsilon), \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + o(\varepsilon), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \varepsilon\mathbf{F}_1 + o(\varepsilon).$$

Безразмерная скорость основного течения во внутренней области записывается в виде

$$\bar{\mathbf{v}} = \left(1 + \varepsilon\frac{z}{\alpha}\right) \mathbf{e}_x, \quad (1.9)$$

где параметр скольжения α характеризует соотношение чисел Рейнольдса частицы скольжения и сдвига:

$$\alpha = \frac{V_s}{(\nu G)^{1/2}} = \pm \frac{R_s}{R_G^{1/2}}.$$

Для безразмерных уравнений Навье-Стокса, описывающих возмущенное течение получим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.10)$$

$$\alpha \varepsilon (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.11)$$

Граничные условия представляют собой условия прилипания на поверхности частицы,

$$r = 1 : \quad \mathbf{u} = -\mathbf{e}_x + \varepsilon \left(\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \frac{z}{\alpha} \mathbf{e}_x \right), \quad (1.12)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_p$ - угловая скорость вращения частицы, условие затухания возмущений вдали от сферы,

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

и при наличии плоской стенки условие прилипания на ее поверхности,

$$z = -\varepsilon^{-1} d / L_{Sa} : \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

Здесь d - расстояние от центра частицы до стенки.

Из граничного условия (1.12) следует, что скорость возмущенного течения в главном приближении обусловлена обтеканием однородным потоком. Уравнения для главных членов разложения \mathbf{u}_0 , p_0 можно получить, подставляя разложение (1.8) в систему (1.11)-(1.13) и собирая члены порядка ε^0 . В результате будем иметь

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}_0 - \nabla p_0 = 0, \quad (1.16)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_0 = -\mathbf{e}_x, \quad (1.17)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{0}. \quad (1.18)$$

Таким образом, система (1.15)-(1.18) соответствует обычной задаче Стокса об обтекании сферы однородным неограниченным потоком при малых числах Рейнольдса. Ее решение записывается в виде

$$\mathbf{u}_0 = - \left[\mathbf{e}_x \left(\frac{3}{4r} + \frac{1}{4r^3} \right) + \frac{3}{4} \frac{x\mathbf{r}}{r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \right]. \quad (1.19)$$

Данному осесимметричному решению соответствует сила сопротивления, действующая на сферу, $\mathbf{F}_0 = 6\pi\mathbf{e}_x$, и нулевые поперечная сила и момент. К возникновению поперечной силы может привести только асимметрия течения, которая имеется у следующего члена внутреннего разложения.

Решение (1.19) убывает на больших расстояниях от сферы пропорционально r^{-1} ,

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}^S, \\ \mathbf{u}^S = -\frac{3}{4} \left(\frac{\mathbf{e}_x}{r} + \frac{x\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad (1.20)$$

где поле скорости Стокслета \mathbf{u}^S соответствует вязкому течению, вызванному точечной силой \mathbf{F}_0 .

Собирая члены порядка ε^1 в системе (1.11)-(1.13), можно получить с учетом (1.9) уравнения для членов первого порядка:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \nabla p_1 = \alpha (\mathbf{u}_0 + \mathbf{e}_x) \cdot \nabla \mathbf{u}_0, \quad (1.22)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \frac{z}{\alpha} \mathbf{e}_x. \quad (1.23)$$

Скорость \mathbf{u}_1 не затухает на бесконечности в отличие от \mathbf{u}_0 , и граничное условие (1.18) необходимо заменить условием срачивания с внешним разложением.

Система уравнений (1.22)-(1.23) линейна, поэтому ее решение можно искать в виде [37]:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^{nb} + \mathbf{u}^{PP} + \mathbf{w}. \quad (1.24)$$

Здесь \mathbf{u}^{nb} - решение однородных уравнений (1.22)-(1.21), т.е., уравнений Стокса, удовлетворяющее граничному условию (1.23). Оно соответствует решению главного приближения для нейтрально плавучей частицы, которое подробно описывается в Главе 2.4. Член \mathbf{u}^{PP} - решение неоднородных уравнений с граничным условием $\mathbf{u}_1 = 0$ при $r = 1$, и $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ - решение уравнений Стокса с нулевым граничным условием на поверхности сферы. Решение для скорости \mathbf{u}^{PP} было получено в работе [71]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{PP} = \frac{3}{32}\alpha \left[\left(2 - \frac{3}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right) \left(1 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right. \\ \left. + \left(4 - \frac{3}{r} + \frac{1}{r^3} - \frac{2}{r^4} \right) \left(\frac{x^2\mathbf{r}}{r^3} - \frac{x\mathbf{e}_x}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Последний член в (1.24) является решением уравнений Стокса с нулевым граничным условием на поверхности сферы, $\mathbf{w} = 0$ при $r = 1$, и достигает произвольной конечной скорости \mathbf{w}_∞ на бесконечности. Скорость \mathbf{w}_∞ равна скорости миграции v_m изолированной неинерционной частицы. Ее величина находится из условия срачивания с внешним разложением.

Члены \mathbf{u}^{nb} и \mathbf{u}^{PP} представляют собой регулярные члены разложения по ε . Они симметричны и поэтому не приводят к появлению поперечной силы. Сила F_z обусловлена только несимметричностью члена \mathbf{w} . Внешний предел скорости \mathbf{u}^{PP} конечен,

$$\mathbf{u}_\infty^{PP} = \mathbf{u}^{PP}|_{r \rightarrow \infty} = \frac{3}{16}\alpha \left[\left(1 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + 2 \left(\frac{x^2\mathbf{r}}{r^3} - \frac{x\mathbf{e}_x}{r} \right) \right], \quad (1.26)$$

и поэтому дает вклад во внешний предел внутреннего разложения первого порядка:

$$\mathbf{u}_1|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{u}_\infty^{PP}(\mathbf{r}/r) + \mathbf{w}_\infty.$$

Для неограниченного линейного сдвигового потока \mathbf{w}_∞ зависит только от параметра скольжения α . Функция $w_{z\infty}(\alpha)$ была независимо рассчитана в работах [30, 89]. Результаты ее расчета проиллюстрированы в разделе 1.2.3..

1.2.2. Внешнее разложение Внешние пространственные переменные вводятся следующим образом:

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \varepsilon \mathbf{r},$$

т.е. координаты обезразмериваются на масштаб Сэфмана. Невозмущенное поле скорости записывается во внешних переменных следующим образом

$$\bar{\mathbf{v}} = (\alpha + Z) \mathbf{e}_x.$$

Внутреннее решение (уравнение (1.19)), записанное с использованием внешних координат принимает вид

$$\mathbf{u}_0 = \varepsilon \mathbf{U}^S + O(\varepsilon^3), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{U}^S = -\frac{3}{4} \left(\frac{\mathbf{e}_x}{R} + \frac{X\mathbf{R}}{R^3} \right).$$

С учетом (1.27) внешние поля скорости и давления можно искать в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{U} + o(\varepsilon), \quad p = \varepsilon^2 P + o(\varepsilon^2),$$

т.е. возмущения скорости во внешней области асимптотически малы по сравнению со скоростью основного потока. Поэтому в конвективных членах в

уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь квадратичными по возмущениям членами, т.е. они могут быть линеаризованы

$$(\varepsilon \mathbf{U} + \bar{\mathbf{v}}) \cdot \nabla (\varepsilon \mathbf{U} + \bar{\mathbf{v}}) = \varepsilon (1 + Z/\alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + \varepsilon U_z \mathbf{e}_x / \alpha + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, поле скорости $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z) = O(1)$ описывается уравнениями типа Озеена. Оно должно срачиваться с \mathbf{U}^S при малых R . В работе Сэфмана [72] было показано, что для течения во внешней области влияние частицы в главном приближении эквивалентно точечной силе \mathbf{F}_0 , помещенной в центр сферы. Точечная сила аппроксимируется в уравнении импульса во внешней области дельта-функцией. Условие срачивания при этом выполняется автоматически. В результате уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\ (\alpha + Z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} &= -6\pi\delta(\mathbf{R}) \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Граничные условия (1.13), (1.14) переписутся во внешней области в виде условия затухания возмущений вдали от сферы,

$$R \rightarrow \infty : \quad \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (1.29)$$

и, при наличии плоской стенки, условие прилипания на ее поверхности,

$$Z = -d/L_{Sa} : \quad \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

Условие срачивания внутреннего и внешнего разложений принимает следующий вид:

$$\mathbf{w}_\infty = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^S) \Big|_{R \rightarrow 0}.$$

Поперечная сила связана с однородной частью внешнего течения в начале координат:

$$F_{1z} = 6\pi w_{z\infty}.$$

Для решения системы уравнений (1.28) вводятся двумерные преобразования Фурье полей скорости и давления:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}(k_x, k_y, Z) \\ \tilde{P}(k_x, k_y, Z) \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{pmatrix} \exp[-i(k_x X + k_y Y)] dX dY. \quad (1.31)$$

Скорость и давление можно найти, используя обратные преобразования Фурье:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} \exp[i(k_x X + k_y Y)] dk_x dk_y. \quad (1.32)$$

Уравнения неразрывности и импульса записываются через Фурье-образы следующим образом:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0, \quad (1.33)$$

$$ik_x(\alpha + Z)\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{U}_z \mathbf{e}_x + \tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{U}} = -\frac{3}{2\pi} \delta(Z) \mathbf{e}_x, \quad (1.34)$$

$$\tilde{\nabla} = \left(ik_x, ik_y, \frac{d}{dZ} \right), \quad \tilde{\Delta} = \frac{d^2}{dZ^2} - k^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Последовательно исключая в полученной системе $\tilde{U}_x, \tilde{U}_y, \tilde{P}$, можно получить единственное обыкновенное дифференциальное уравнение для Фурье-образа поперечной скорости [30, 89]:

$$\left[\tilde{\Delta} - ik_x(\alpha + Z) \right] \tilde{\Delta} \tilde{U}_z = -ik_x \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(Z)}{dZ}, \quad (1.35)$$

с граничными условиями

$$Z \rightarrow \infty : \quad \tilde{U}_z \rightarrow 0. \quad (1.36)$$

$$Z = -d/L_{Sa} : \quad \tilde{U}_z = \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} = 0. \quad (1.37)$$

Член в правой части уравнения (1.35) эквивалентен условию скачка для второй производной в начале координат:

$$\left[\frac{d^2 \tilde{U}_z}{dZ^2} \right] = -ik_x \frac{3}{2\pi}, \quad (1.38)$$

где $[f] = f(+0) - f(-0)$ - величина скачка.

Решение уравнения (1.35), удовлетворяющее граничным условиям (1.36), (1.37) и (1.38) может быть построено аналитически [31, 30, 89] или численно [37, 44].

1.2.3. Вычисление поперечной силы Аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.35) выражается через интегралы от функций Эйри и их производных [31, 30]:

$$\tilde{U}_z = \frac{I_1 [\exp(kZ)(I_3 - I_6) + \exp(-kZ)(I_5 + I_7)]}{2k(I_2 + I_3)} - \frac{\exp(-kZ)I_4}{2k} - \frac{\chi(-Z) [\exp(kZ)I_8 - \exp(-kZ)I_9]}{2k}, \quad (1.39)$$

$$I_1 = \int_{-d/L_{Sa}}^0 \psi(\eta) \exp(-kZ) d\eta, \quad I_2 = \int_{-d/L_{Sa}}^0 \text{Ai}(\xi_1) \exp(-kZ) d\eta, \quad (1.40)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \text{Ai}(\xi_1) \exp(-kZ) d\eta, \quad I_4 = \int_{-d/L_{Sa}}^0 \psi(\eta) \exp(kZ) d\eta, \quad (1.41)$$

$$I_5 = \int_{-d/L_{Sa}}^0 \text{Ai}(\xi_1) \exp(kZ) d\eta, \quad I_6 = \int_0^Z \text{Ai}(\xi_1) \exp(-kZ) d\eta, \quad (1.42)$$

$$I_7 = \int_0^Z \text{Ai}(\xi_1) \exp(kZ) d\eta, \quad I_8 = \int_Z^0 \psi(\eta) \exp(-kZ) d\eta,$$

$$I_9 = \int_Z^0 \psi(\eta) \exp(kZ) d\eta,$$

$$\psi = 3ike^{\pi i/6} \cos \theta \left[e^{2\pi i/3} \text{Ai}'(\xi_{10}) \text{Ai}(\xi) - \text{Ai}'(\xi_0) \text{Ai}(\xi_1) \right] \chi(-Z), \quad (1.43)$$

$$\xi = ik_x^{1/3} (\alpha + Z) - k^2 k_x^{-2/3}, \quad \xi_1 = e^{2\pi i/3} \xi,$$

$$\xi_0 = \xi|_{Z=0} = ik_x^{1/3} \alpha - k^2 k_x^{-2/3}, \quad \xi_{10} = e^{2\pi i/3} \xi_0, \quad \cos \theta = k_x/k.$$

Здесь $\chi(Z)$ - функция Хевисайда, решение (1.39) получено для $k_x > 0$ (для $k_x < 0$ решение комплексно сопряжено решению от $-k_x$).

Распределение скорости U_z во внешней области, которое определяется из обратного преобразования Фурье от \tilde{U}_z , задаваемого формулой (1.39), удовлетворяет условию сращивания. Чтобы убедиться в этом, необходимо сравнить функции \tilde{U}_z и \tilde{U}_z^S . Фурье-образ внешнего предела скорости U_z^S (Стокслета) был найден из решения уравнений Стокса в работе [66]:

$$\tilde{U}_z^S = \frac{3}{8\pi} \frac{ik_x}{k} Z \exp(-k|Z|), \quad (1.44)$$

Из формулы (1.44) видно, что при $|Z| \sim R \ll 1$ функция $\tilde{U}_z^S = O(R)$ при $k \sim 1$, а экспоненциальное ее убывание происходит при больших значениях $k \sim R^{-1} \gg 1$. Из этого следует, что характерные масштабы Δk_x , Δk_y областей интегрирования по k_x , k_y в обратном преобразовании Фурье (1.32) от \tilde{U}_z^S также являются величинами порядка R^{-1} . Таким образом, полю скорости Стокслета в вязкой области соответствуют большие значения k . Указанное обстоятельство приводит к особенности типа R^{-1} в обратном преобразовании скорости:

$$U_z^S \sim \tilde{U}_z^S \Delta k_x \Delta k_y \sim R R^{-2} \sim R^{-1}.$$

Сходные свойства при $|Z| \sim R \ll 1$ имеет и решение (1.39). Для доказательства этого утверждения необходимо, используя асимптотические выражения для функций Эйри и их производных при больших значениях аргумента $|\xi| \gg 1$ [121], представить функции $\text{Ai}(\xi_1)$ и ψ , входящие в (1.39-1.42), в виде произведений рядов по степеням Z и k^{-1} на экспоненты $\exp(-k|Z|)$ и $\exp(k|Z|)$ и затем вычислить все необходимые интегралы в формулах (1.39-1.42) (эта процедура подробно описана в [31]). Произведя все указанные вычисления, будем иметь

$$k \sim R^{-1} \gg 1 :$$

$$\tilde{U}_z = \tilde{U}_z^S + \tilde{U}_z^S \text{sgn}(Z) \frac{i\alpha \cos \theta}{4} (k^{-1} + |Z|) + \tilde{w}_{z\infty} + O(k^{-2}, k^{-1}|Z|, Z^2), \quad (1.45)$$

$$\tilde{w}_{z\infty} = \tilde{U}_z \Big|_{Z=0} = \frac{I_1(I_3 + I_5)(I_2 + I_3)^{-1} - I_4}{2k}.$$

Таким образом, первый член в разложении (1.8) внутреннего предела скорости U_z по степеням R , равный U_z^S (что эквивалентно условию срачивания), формируется в обратном преобразовании Фурье за счет интегрирования первого члена \tilde{U}_z^S в разложении (1.45). Второй член в (1.45) представляет собой внутренний предел Фурье-образа скорости U_z^{PP} (1.24),(1.25) [66]. Он не дает вклада в поперечную скорость в начале координат в силу его нечетности по Z . Вклад в поперечную силу формируется только за счет интегрирования третьего члена $\tilde{w}_{z\infty}$ по области значений $k \sim 1$:

$$w_{z\infty} = 2 \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Re}(\tilde{w}_{z\infty}) k dk d\theta. \quad (1.46)$$

Последняя формула записана с учетом комплексной сопряженности $\tilde{w}_{z\infty}$ при $k_x < 0$ с решением при $k_x > 0$.

Вычисление интегралов I_i , $i = 1 - 5$ и интеграла (1.46), знание которых необходимо для определения поперечной силы F_{1z} , проводилось численно.

Входящие в подынтегральные выражения (1.40)-(1.42) функции Эйри и их производные вычислялись через их представления в виде рядов Тейлора при значениях аргумента $|\xi| < 5$, а при $|\xi| > 5$ - через асимптотические представления для больших значений аргумента [121]. Указанные интегралы вычислялись по формуле Симпсона. Интегрирование по k в (1.46) проводилось последовательно по отрезкам $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,4]$, $[4,8]$ и т. д. до значений k_0 (обычно $k_0 = 128$), при которых подынтегральное выражение может быть аппроксимировано степенной зависимостью [92]:

$$k \rightarrow \infty : \quad \tilde{w}_{z\infty} = \frac{3}{16\pi} \frac{k_x^2}{k^5} + O(k^{-5}). \quad (1.47)$$

Поперечная сила в размерном виде может быть записана следующим образом

$$F'_{1z} = c_L(\alpha, d/L_{Sa}) \mu a V_s R_G^{1/2} = c_L(\alpha, d/L_{Sa}) \mu a^2 V_s (G/\nu)^{1/2}. \quad (1.48)$$

Здесь коэффициент поперечной силы связан с поперечной скоростью в начале координат соотношением $c_L = 6\pi w_{z\infty}$. В неограниченном потоке его величина c_L^∞ зависит только от параметра скольжения α . Результаты расчета зависимости $c_L^\infty(\alpha)$ показаны на Рис. 1.2. Величины $c_L^\infty(\alpha)$, рассчитанные независимо двумя авторами [30, 89], очень близки. Они всегда меньше предельного значения $c_{Sa} = 6.46$, полученного Сэфманом для случая сильного сдвига. Коэффициент c_L монотонно убывает с α , и в случае слабого сдвига, $|\alpha| \gg 1$, асимптотически мал, $c_L^\infty \sim \alpha^{-5} \ln |\alpha|$ [89]. Кроме того, были предложены две аппроксимации численных результатов, в работе [29]:

$$c_L^\infty = \frac{6.46}{1 + 0.581\alpha^2 - 0.439|\alpha|^3 + 0.203\alpha^4}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 3. \quad (1.49)$$

и в работе [122]:

$$c_L^\infty = 1.936 \{1 + \tanh [2.5 (0.19 - \lg |\alpha|)]\} \left\{ 0.667 + \tanh \left[6 \left(|\alpha|^{-1} - 0.32 \right) \right] \right\}, \quad (1.50)$$

$$0 \leq |\alpha| \leq 10.$$

Обе аппроксимации удовлетворительно описывают численные значения, при этом зависимость (1.49) более простая.

Зависимости коэффициента поперечной силы для частицы в сдвиговом потоке вблизи плоской стенки $c_L(\alpha, d/L_{Sa})$ были рассчитаны в работе автора [30] и позднее в работе [89]. Результаты расчетов для нескольких α показаны на Рис. 1.3 как функции безразмерного расстояния до стенки. Если расстояние до стенки велико по сравнению с масштабом Сэфмана ($d/L_{Sa} \gg 1$), коэффициент близок к значению c_L^∞ . При $d/L_{Sa} \ll 1$ поперечная сила обусловлена в основном взаимодействием со стенкой, и c_L стремится к значению $c_L^0 = 1.77\alpha$, полученному в работе [82] для расстояний до стенки, малых по сравнению с масштабом внешней области. В результате на малых расстояниях поперечная сила всегда отталкивает частицы от стенки. Для $\alpha > 0$ (частицы отстают от несущего потока) направление силы то же, т.к. коэффициент положителен при всех d . Для частиц, опережающих несущий поток (отрицательный параметр скольжения), сила является знакопеременной функцией расстояния до стенки, и на больших расстояниях поперечная сила направлена к стенке. Такие частицы имеют устойчивое положение равновесия, где сила равна нулю.

Полученная зависимость коэффициента поперечной силы (1.49) используется в Главе 5 для описания движения частиц в пограничном слое в отсутствие внешних сил, когда скорость скольжения обусловлена только инерцией частиц и неоднородностью течения несущей фазы.

Аналитическое решение (1.39) применимо только для расчета попереч-

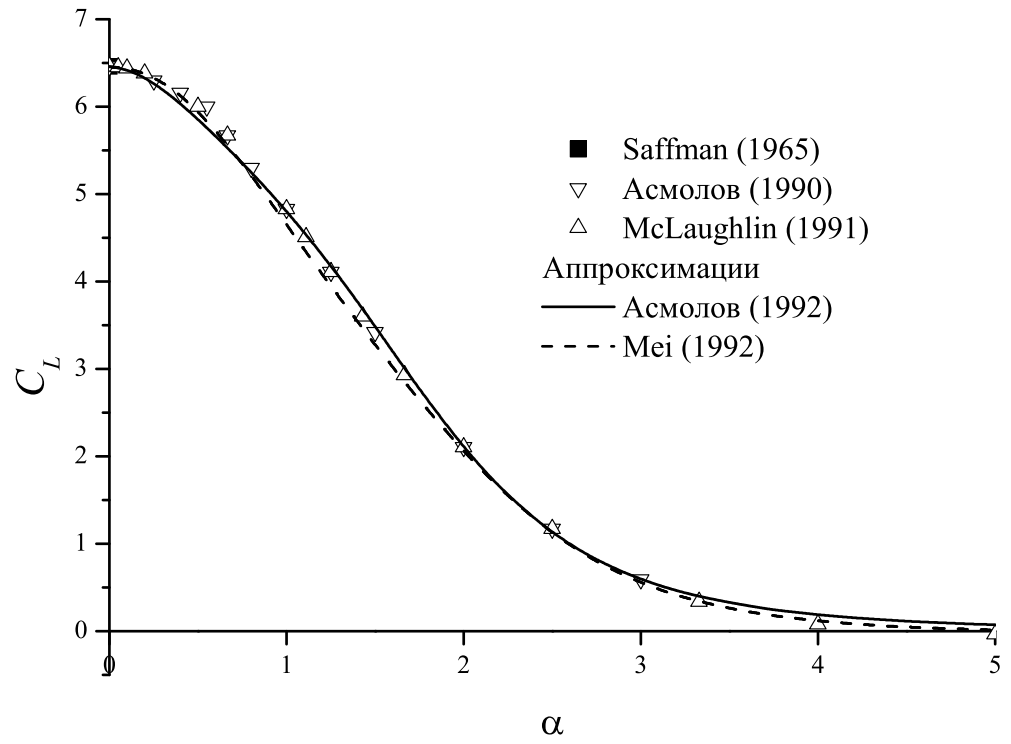
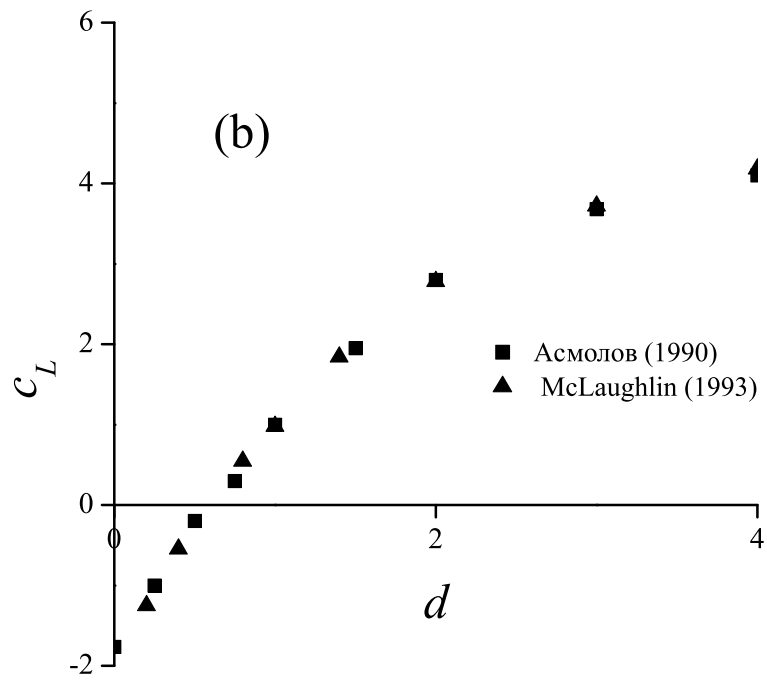
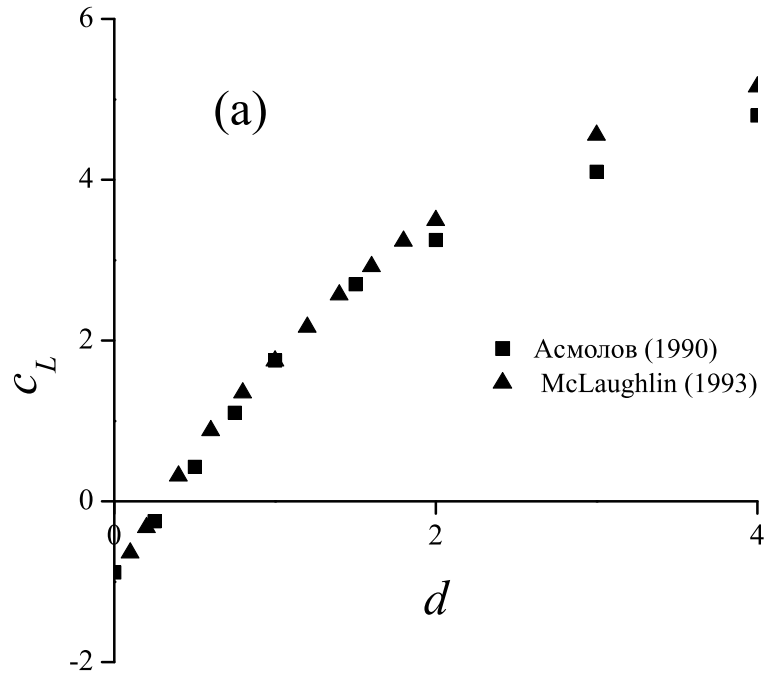


Рис. 1.2. Коэффициент поперечной силы в неограниченном сдвиговом потоке



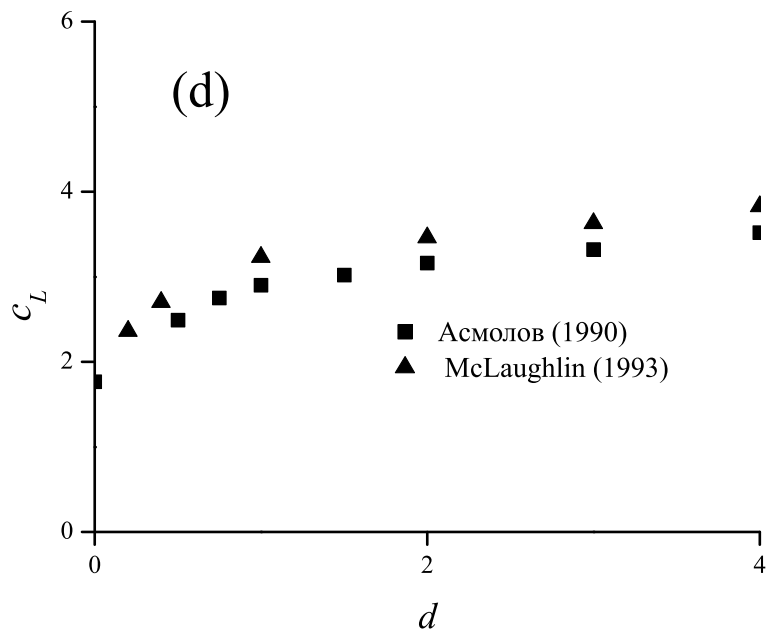
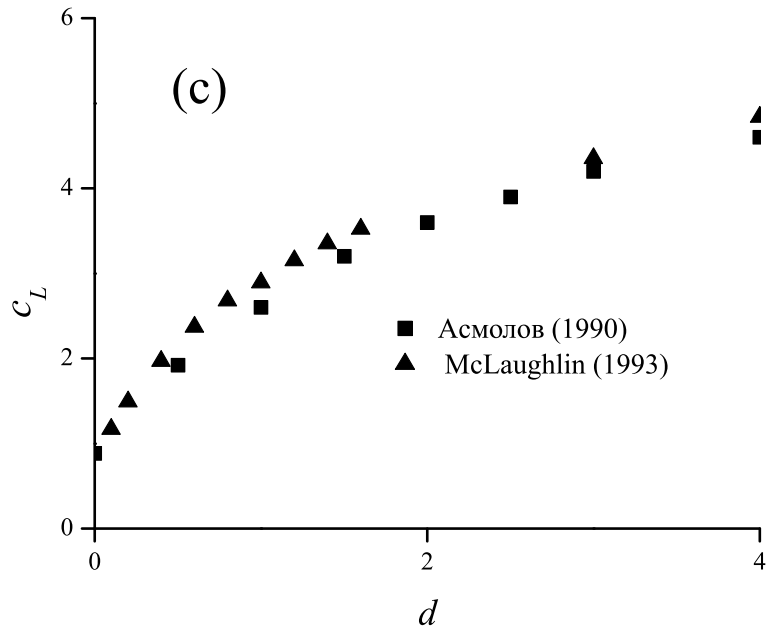


Рис. 1.3. Коэффициент поперечной силы в сдвиговом потоке, ограниченном стенкой. (a) $\alpha = -0.5$, (b) $\alpha = -1$, (c) $\alpha = 0.5$, (d) $\alpha = 1$.

ной силы в сдвиговом потоке. Для решения аналогичной задачи в параболическом потоке (Глава 2) необходимо применять численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на методе ортонормализации Годунова [123]. Кроме того, численное решение более удобно для расчета полного поля возмущенного течения частицы в сдвиговом потоке, рассматриваемого в Главе 3.

Результаты первой главы опубликованы в работах [31, 30, 29].

ГЛАВА 2

ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ В ТЕЧЕНИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

В данной главе рассматривается инерционная поперечная сила в плоском течении Пуазейля [37, 47, 48, 49]. Твердая сфера радиуса a движется параллельно стенкам. Начало координат находится в центре сферы и перемещается вместе с ней относительно стенок. Рассматриваемое течение стационарно, т.к. частица покоится в заданной системе координат. При учете поперечной миграции нестационарностью также можно пренебречь, т.к. положение частицы относительно стенок меняется медленно (см. Главу 1).

2.1. Поперечная сила в вертикальном течении в плоском канале

Частица перемещается со скоростью (см. Рис. 2.1)

$$\mathbf{U}'_p = U'_p \mathbf{e}_x,$$

где \mathbf{e}_x - единичный вектор оси x , направленной параллельно скорости основного течения. Скорость скольжения частицы, равная по величине и обратная по направлению скорости относительного движения,

$$V' = 4U'_m d(l - d) / l^2 - U'_p,$$

в общем случае конечна (не нейтрально плавучая частица). Здесь d - размерное расстояние до ближайшей стенки. Для скорости основного течения имеем

$$\bar{\mathbf{v}}' = \left[V' + U'_m \left(\gamma \frac{z'}{l} - 4 \frac{z'^2}{l^2} \right) \right] \mathbf{e}_x. \quad (2.1)$$

Здесь и далее штрихом обозначаются размерные величины, безразмерный градиент скорости определяется соотношением

$$\gamma = 4 - 8d/l.$$

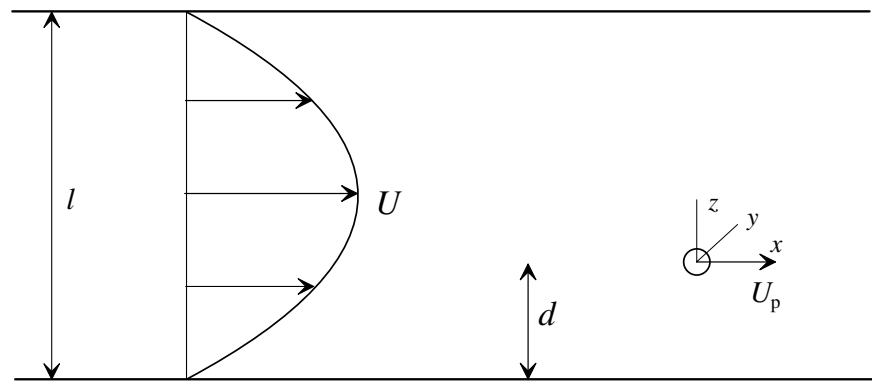


Рис. 2.1. Конфигурация течения при миграции частицы в вертикальном канале.

Уравнения и граничные условия для возмущенного течения записываются в виде [92]

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{v}}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \bar{\mathbf{v}}' = -\nabla' p' / \rho + \nu \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (2.2)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.3)$$

$$r' = a : \quad \mathbf{u}' = \boldsymbol{\Omega}'_p \times \mathbf{r}' - \bar{\mathbf{v}}', \quad (2.4)$$

$$z' = -d, l - d : \quad \mathbf{u}' = 0, \quad (2.5)$$

$$x' \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u}' \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{r}' = (x', y', z'), \quad r' = |\mathbf{r}'|,$$

где $\boldsymbol{\Omega}'_p$ - угловая скорость вращения частицы.

Безразмерные переменные вводятся соотношениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'/a, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}'/U'_m, \quad \boldsymbol{\Omega}_p = \boldsymbol{\Omega}'_p l/U'_m, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}'/\mu a U'_m,$$

где \mathbf{F} - безразмерная сила, действующая на частицу.

Малое число Рейнольдса частицы определяется по среднему сдвигу в канале,

$$R_p = U'_m a^2 / \nu l. \quad (2.7)$$

Основной асимптотический параметр задачи $\varepsilon = R_p^{1/2}$. Все остальные безразмерные параметры считаются величинами порядка единицы, либо величинами порядка некоторой степени ε . Так, для безразмерных скорости скольжения и расстояния до ближайшей стенки предполагается $V = V'/U'_m = O(1)$, $d/l = O(1)$. Необходимо отметить, что число Рейнольдса течения в канале считается параметром порядка единицы, независимым от R_p . Для отношения радиуса частицы к ширине канала с учетом (2.7) имеем $a/l = (R_p/R_c)^{1/2} = \varepsilon R_c^{-1/2}$. Безразмерные скорость основного течения и уравнения возмущенного течения записываются в виде

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}'/U'_m = \left(V + \varepsilon \gamma z R_c^{-1/2} - 4\varepsilon^2 z^2 R_c^{-1} \right) \mathbf{e}_x, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon R_c^{1/2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.10)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u} = -V \mathbf{e}_x + \varepsilon R_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \gamma z \mathbf{e}_x) + 4\varepsilon^2 z^2 R_c^{-1} \mathbf{e}_x, \quad (2.11)$$

$$z = -\varepsilon^{-1} R_c^{1/2} d/l, \quad \varepsilon^{-1} R_c^{1/2} (1 - d/l) : \quad \mathbf{u} = 0, \quad (2.12)$$

$$x \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u} \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Для случая $V = O(1)$ (не нейтрально плавучая частица) из граничного условия (2.11) следует, что скорость возмущенного течения в главном приближении обусловлена обтеканием однородным потоком и также является величиной порядка единицы. В случае нейтрально плавучей частицы имеем $|V| \ll \varepsilon^2/R_c$, т.е. возмущения вызваны сдвигом скорости на частице и ее вращением и малы, $\mathbf{u} = O(\varepsilon)$.

2.1.1. Внутреннее разложение Аналогично выводу уравнений для линейного сдвигового потока можно получить уравнения для нулевого:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_0 - \nabla p_0 = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad (2.15)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_0 = -V \mathbf{e}_x, \quad (2.16)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u}_0 \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

и первого членов разложения:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \nabla p_1 = R_c^{1/2} (\mathbf{u}_0 + V \mathbf{e}_x) \cdot \nabla \mathbf{u}_0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.19)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_1 = R_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \gamma z \mathbf{e}_x). \quad (2.20)$$

Следует заметить, что граничное условие (2.16) включает только однородное течение. Члены в (2.11), связанные со сдвигом скорости основного

течения и вращением частицы, имеют порядок ε , а член, связанный с кривизной профиля скорости - ε^2 , и по этой причине не учитывается в приведенных уравнениях.

Таким образом, система (2.14)-(2.17) по-прежнему соответствует обычной задаче Стокса об обтекании сферы однородным неограниченным потоком, а решение системы уравнений (2.18)-(2.20) можно, аналогично (1.22)-(1.23), искать в виде

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0^{nb} + R_c^{1/2} \mathbf{u}_1^{PP} + \mathbf{w}, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ - решение уравнений Стокса с нулевым граничным условием на поверхности сферы и достигающее скорости \mathbf{w}_∞ на бесконечности, которая находится из условия сращивания.

2.1.2. Внешнее разложение Масштаб внешней области отличается от масштаба Сэфмана (1.4):

$$l_p = aR_p^{-1/2} = (\nu l/U'_m)^{1/2} = lR_c^{-1/2}. \quad (2.22)$$

Такой выбор R_p и l_p удобен тем, что они не зависят от величины локального сдвига и являются одинаковыми для любого положения частицы в канале. Внешние пространственные переменные вводятся следующим образом

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \varepsilon \mathbf{r} = \mathbf{r}'/l_p.$$

Внутреннее решение (уравнение (1.19)), записанное с использованием внешних координат принимает вид

$$\mathbf{u}_0 = \varepsilon \mathbf{U}_s + O(\varepsilon^3), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{U}_s = -\frac{3}{4}V \left(\frac{\mathbf{e}_x}{R} + \frac{X\mathbf{R}}{R^3} \right),$$

где поле скорости Стокслета \mathbf{U}_s соответствует вязкому течению, вызванному точечной силой \mathbf{F}_0 . С учетом (2.23) внешние поля скорости и давления

можно искать в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{U} + o(\varepsilon), \quad p = \varepsilon^2 P + o(\varepsilon^2).$$

Поле скорости $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z) = O(1)$ описывается уравнениями типа Озеена и должно сращиваться с \mathbf{U}_s при малых r .

В работе Сэфмана [72] было показано, что для течения во внешней области влияние частицы в главном приближении эквивалентно точечной силе \mathbf{F}_0 , помещенной в центр сферы. Точечная сила аппроксимируется в уравнении импульса во внешней области дельта-функцией. Условие сращивания при этом выполняется автоматически. В результате уравнения движения и граничные условия записываются в виде

$$\nabla^2 \mathbf{U} - \nabla P - \bar{V}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} - \frac{d\bar{V}_x}{dZ} U_z \mathbf{e}_x = 6\pi V \mathbf{e}_x \delta(\mathbf{R}), \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.25)$$

$$Z = -R_c^{1/2} d/l, \quad R_c^{1/2} (1 - d/l) : \mathbf{U} = 0, \quad (2.26)$$

$$X \rightarrow \infty : \mathbf{U} = 0, \quad (2.27)$$

$$\bar{V}_x = v + \gamma Z - 4R_c^{-1/2} Z^2, \quad v = VR_c^{1/2}. \quad (2.28)$$

Задача характеризуется тремя независимыми безразмерными параметрами: число Рейнольдса канала R_c , скорость скольжения частицы V (или параметр v) и расстояние до ближайшей стенки d/l (или γ). В работе [92] была получена зависимость поперечной силы от $R_c \leq 100$ и d/l для двух предельных случаев, $\varepsilon^2 \ll v \ll 1$ (предел сильного сдвига) и $v \gg 1$ (нулевая скорость основного течения). В данной работе изучена также зависимость поперечной силы от всех трех параметров, в том числе для диапазона больших чисел Рейнольдса, $R_c \leq 3000$.

Для решения системы уравнений (2.24)-(2.28) вводятся, аналогично (1.31), двумерные преобразования Фурье полей скорости $\tilde{\mathbf{U}}$ и давления \tilde{P} .

В результате система преобразуется к виду

$$\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\nabla}\tilde{P} - ik_x\bar{V}_x\tilde{\mathbf{U}} - \frac{d\bar{V}_x}{dZ}\tilde{U}_z\mathbf{e}_x = \frac{3}{2\pi}V\delta(Z)\mathbf{e}_x, \quad (2.29)$$

$$i\left(k_x\tilde{U}_x + k_y\tilde{U}_y\right) + d\tilde{U}_z/dZ = 0, \quad (2.30)$$

$$Z = -R_c^{1/2}d/l, \quad R_c^{1/2}(1 - d/l) : \tilde{\mathbf{U}} = 0, \quad (2.31)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{d^2}{dZ^2} - k^2, \quad \tilde{\nabla} = \left(ik_x, ik_y, \frac{d}{dZ}\right), \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Последовательно исключая в полученной системе $\tilde{U}_x, \tilde{U}_y, \tilde{P}$ можно получить единственное обыкновенное дифференциальное уравнение для Фурье-образа поперечной скорости:

$$\left(\tilde{\Delta}^2 - ik_x\bar{V}_x\tilde{\Delta} - ik_x\delta R_c^{-1/2}\right)\tilde{U}_z = -ik_xV\frac{3}{2\pi}\frac{d\delta(Z)}{dZ}, \quad (2.32)$$

$$Z = -R_c^{1/2}d/l, \quad R_c^{1/2}(1 - d/l) : \tilde{U}_z = \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} = 0. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.32) отличается от аналогичного уравнения (1.35) для линейного сдвигового потока не только профилем невозмущенной скорости \bar{V}_x , но и дополнительным членом $ik_x\delta R_c^{-1/2}$, который является второй производной от \bar{V}_x . Условие сращивания записывается в виде

$$\mathbf{w}\Big|_{r\rightarrow\infty} = [\mathbf{U} - \mathbf{U}_s]\Big|_{R\rightarrow 0}.$$

С учетом последнего равенства поперечную силу можно выразить через Фурье-образ поперечной скорости [72]:

$$F_{1z} = 6\pi V_{1z}\Big|_{r\rightarrow\infty} = 6\pi\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{U}_z - \tilde{U}_{zs}\right)\Big|_{Z\rightarrow 0} dk_x dk_y \right]. \quad (2.34)$$

Дифференциальное уравнение (2.32) решалось численно для всего Фурье-пространства, и затем поперечная сила вычислялась через интеграл Фурье (2.34). Численное интегрирование конечно-разностного варианта уравнения (2.32) представляет определенные трудности при больших

числах Рейнольдса R_c . Стандартные методы решения не позволяют с достаточной точностью разрешить все линейно независимые решения дифференциального уравнения (2.32). В результате поперечную силу удавалось рассчитать лишь для $R_c \leq 100$ [92, 91]. В настоящей работе данная проблема была преодолена на основе использования метода ортонормализации Годунова [123], который применялся для интегрирования (2.32) до значений $k = 128$. Для бóльших k фурье-образ скорости аппроксимировался асимптотическим разложением, полученным в работе [92],

$$k \rightarrow \infty : \quad \tilde{U}_z(k_x, k_y, 0) - \tilde{U}_{zs}(k_x, k_y, 0) = V\gamma \frac{3}{16\pi} \frac{k_x^2}{k^5} + O(k^{-5}). \quad (2.35)$$

Численное интегрирование (2.34) осуществлялось с использованием полярных координат k , $\theta = \arccos(k_x/k)$.

Зависимость поперечной силы от безразмерного расстояния до стенки d/l показана на Рис. 2.2 сплошными линиями для различных значений параметра v и чисел Рейнольдса (a) $R_c = 100, 300, 1000, 3000$. Результаты представлены только для нижней половины течения, $0 \leq d/l \leq 0.5$, поскольку зависимости антисимметричны относительно оси канала. Для большей части течения поперечная сила положительна. Это значит, что частица, которая движется со скоростью, большей скорости основного течения, так что $V < 0$, мигрирует к стенкам. Максимальные значения незначительно растут с ростом R_c для рассматриваемого диапазона $100 < R_c < 3000$, в то время как для меньших чисел Рейнольдса наблюдался более значительный рост [92].

Сила быстро меняется вблизи стенки. Этот эффект связан с инерционным влиянием стенки, которое проявляется на расстояниях порядка размера внешней области $l_p \sim lR_c^{-1/2}$. Толщина этого слоя убывает с ростом числа Рейнольдса и составляет лишь малую часть канала при больших R_c . В этой

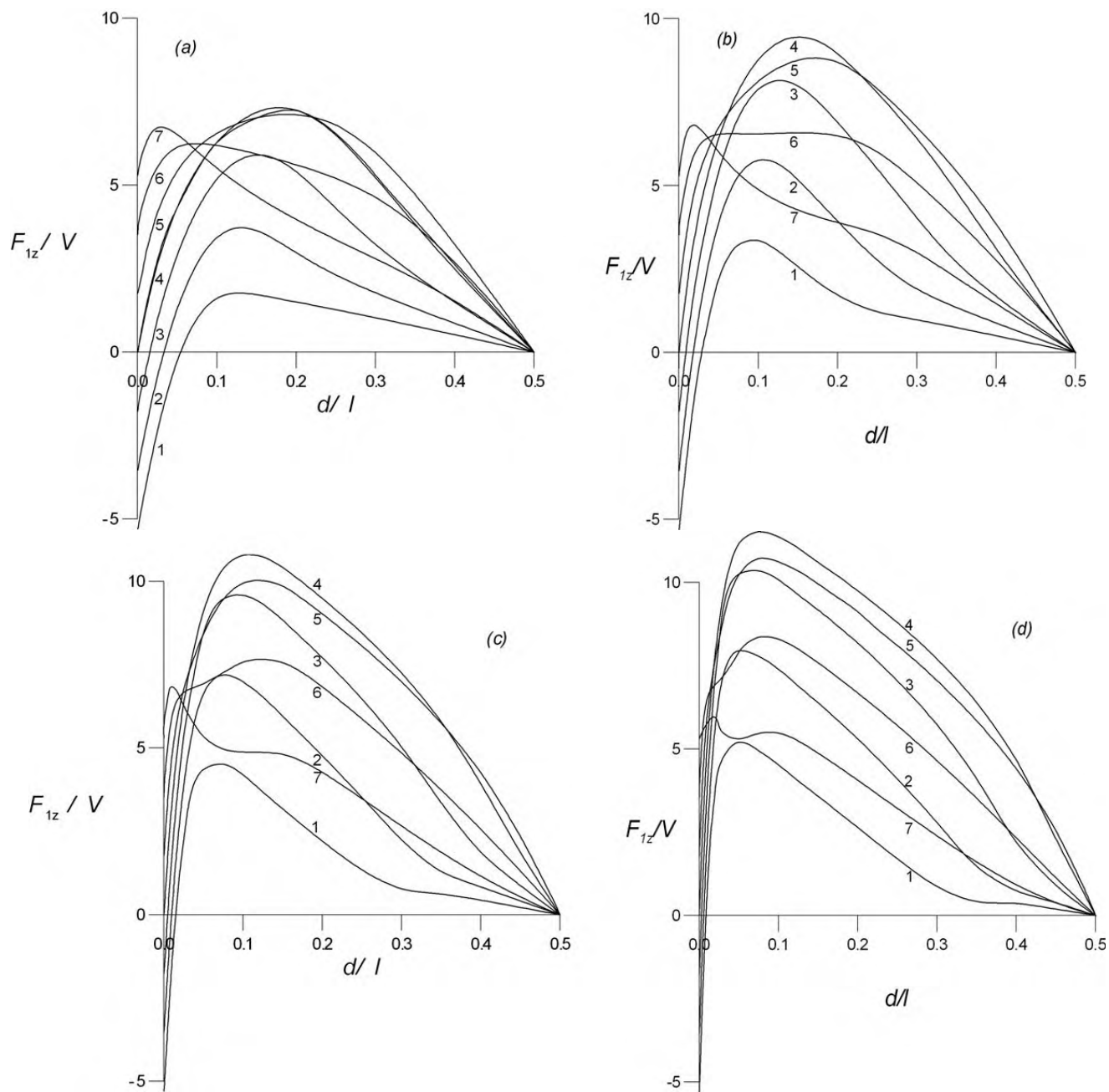


Рис. 2.2. Поперечная сила в вертикальном течении для (a) $R_c = 100$, (b) 300, (c) 1000, (d) 3000. Параметр $v = VR_c^{1/2}$ изменяется от -3 до 3 с шагом 1 (сплошные кривые 1-7). (a) Штрих-пунктирная кривая - результат работы [92] при $\epsilon^2 \ll v \ll 1$ (предел сильного сдвига), $R_c = 100$ (соответствует кривой 4).

связи представляет интерес сравнение полученных данных для пристеночной области и результатов, полученных в работах [82, 31, 30, 90].

В работе [82] было рассмотрено осаждение малой частицы в вертикальном течении Пуазейля. Частица также заменялась точечной силой. Расстояние до стенки также предполагалось большим по сравнению с размером частицы, но малым по сравнению с масштабом внешней области. Последнее предположение выполняется для $R_c \ll 1$. В результате было получено следующее выражение для силы:

$$F_{1z} = \pi V \left[\frac{9}{16}v + \frac{3}{16} \frac{d}{l_p} \left(22 - 105 \frac{d}{l_p} R_c^{-1/2} \right) \right]. \quad (2.36)$$

Поперечная сила в линейном сдвиговом потоке, ограниченном одной стенкой, была получена в работах [31, 30, 90]. Расстояние до стенки было сравнимым с масштабом внешней области L_{Sa} . Асимптотическое разложение строилось аналогично, но решение уравнений внешней области было найдено в виде интегралов от функции Эйри. Скорость миграции частицы $v_m = F_{1z}/6\pi$ можно разделить на две части

$$v_m = v_m^u(\alpha) + v_m^w(\alpha, d/L_{Sa}),$$

где v_m^u соответствует миграции в неограниченном линейном потоке и зависит только от параметра скольжения α , характеризующего соотношение однородного и линейного членов в профиле скорости, а v_m^w обусловлено влиянием стенки. Для $d/L_{Sa} \ll 1$ результаты работ [82, 31, 30, 90] совпадают.

Данные настоящего раздела также совпадают с (2.36) при $d/l_p \ll 1$, поскольку конвективные члены в (2.24) малы по сравнению с вязкими. Кроме того, при больших числах Рейнольдса и $d/l_p = O(1)$ данные должны быть близки к результатам для линейного сдвигового потока, т.к. эффекты второй удаленной стенки и кривизны профиля в (2.28) стремятся к нулю при $R_c \rightarrow \infty$. Для иллюстрации этого вывода на Рис. 2.3 представлены зависимости коэффициента силы для сильного сдвигового режима от расстояния

до стенки, обезразмеренного на l_p . Для сравнения приведены также результаты работ [82, 90]. Видно, что значения поперечной силы в пристеночной области канала при больших R_c и в линейном сдвиговом потоке близки. Разница растет с увеличением d/l_p и остается заметной даже при максимальном значении числа Рейнольдса $R_c = 3000$. Расхождение нельзя объяснить влиянием стенки, т.к. оно должно убывать с расстоянием, и связано только с кривизной профиля скорости основного течения. Следуя подходу работы [90], поперечную силу в канале можно также разделить на две части: F_{1z}^u , соответствующей миграции в неограниченном параболическом потоке и F_{1z}^w , связанной с влиянием стенки. Из сравнения результатов на Рис. 2.3 следует, что член F_{1z}^w должен быть одинаков для миграции в параболическом и линейном потоках, а F_{1z}^u различаются даже при больших числах Рейнольдса. Для большей части течения, за исключением тонких пристеночных слоев, расстояние до стенки велико по сравнению с l_p . Влияние стенки здесь мало, и значения поперечной силы близки к F_{1z}^u . Для нахождения F_{1z}^u удобнее решать уравнения внешней области, записанные с использованием L_{Sa} в качестве ее масштаба. Вывод и решение уравнений представлены в следующем разделе.

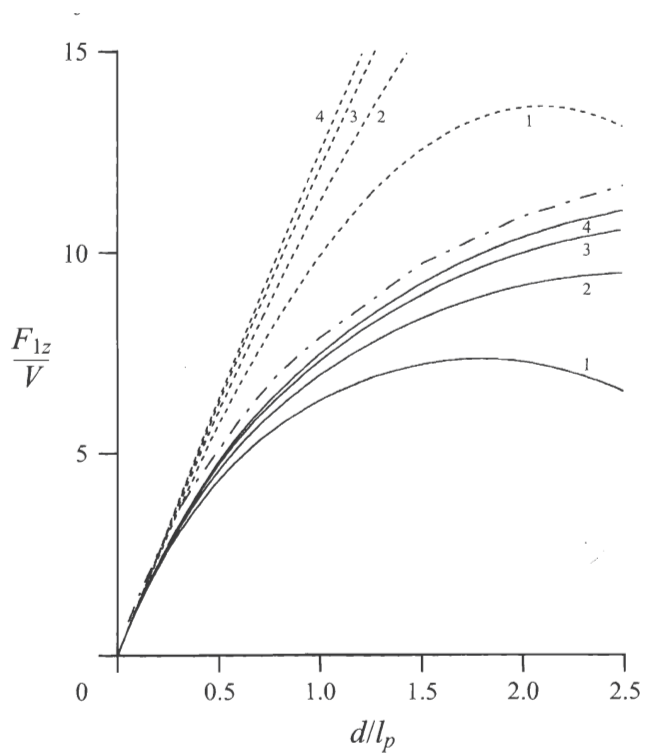


Рис. 2.3. Поперечная сила в зависимости от d/l_p (сплошные кривые) при $\epsilon^2 \ll v \ll 1$ (предел сильного сдвига) в сравнении с результатами работ [82] (штриховые линии) и [90] (штрих-пунктирные кривые). Кривые 1-4 соответствуют $R_c = 100, 300, 1000, 3000$.

Вследствие симметрии течения поперечная сила всегда равна нулю на оси канала. Для частицы, движущейся со скоростью, большей скорости основного течения, $V < 0$, это положение равновесия неустойчиво, а для частицы с $V > 0$ - устойчиво. Частица с отрицательной скоростью скольжения ($V < 0$) имеет устойчивое положение равновесия вблизи стенки. Расстояние до ближайшего к стенке положения равновесия d_{eq}/l_p представлено на Рис. 2.4 как функция v . Значение v , при котором $F_{1z} = 0$ при заданном d_{eq} , вычислялось при помощи метода Ньютона. В работе [92] была рассчитана зависимость $d_{eq}(v)$ при $R_c = 1$. Было показано, что положение равновесия существует для ограниченного диапазона скорости скольжения, $v_{\min} \leq v \leq 0$, где $v_{\min} \approx -0.50$. В наших расчетах было получено чуть большее значение $v_{\min} \approx -0.56$. Для больших чисел Рейнольдса положение равновесия существует для бóльших значений v . Для $-2 \leq v \leq 0$ оно может быть удовлетворительно рассчитано на основе аналитических формул (2.36) [82].

Для больших R_c и $|v|$ могут возникать дополнительные положения равновесия. Зависимости поперечной силы от d/l для $v = 8$, -8 и различных R_c представлены на Рис. 2.5. Два дополнительных положения равновесия появляются при $v = \pm 8$, $R_c = 3000$ и $v = 8$, $R_c = 1000$. Следует заметить, что величина поперечной силы при большой скорости скольжения существенно меньше, чем при $v = O(1)$. Данный эффект был отмечен ранее в [89] для линейного сдвигового потока.

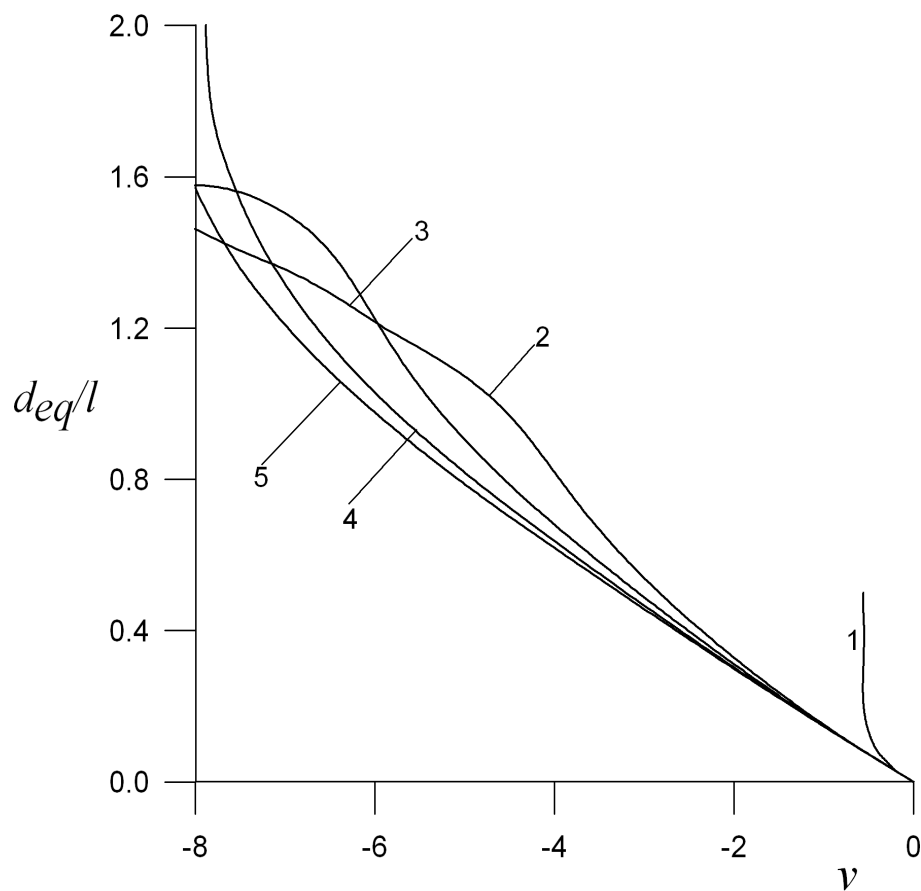


Рис. 2.4. Положение устойчивого равновесия частицы вблизи стенки, d_{eq}/l_p . Кривые 1-5 соответствуют $R_c = 1, 100, 300, 1000, 3000$.

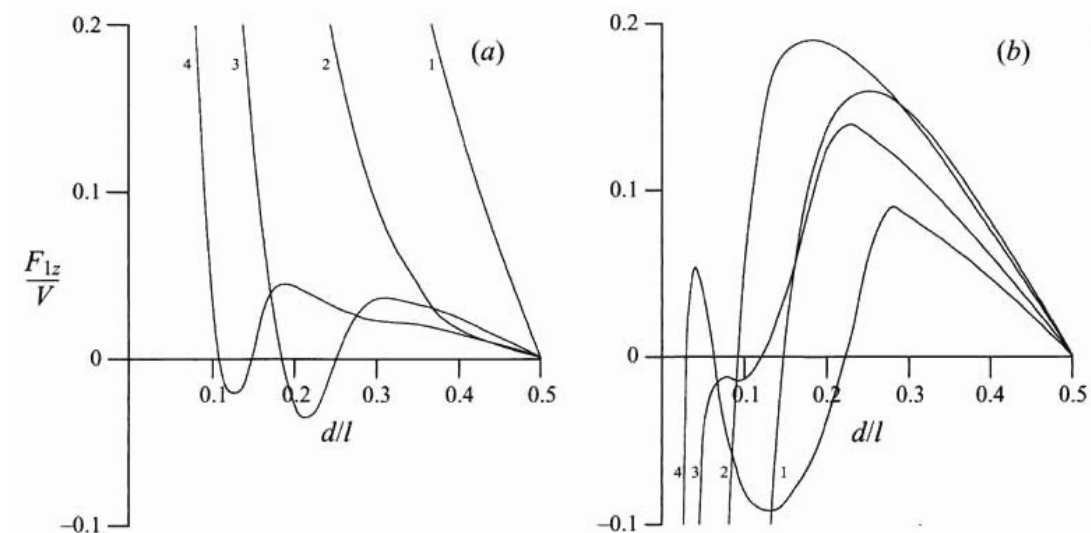


Рис. 2.5. Поперечная сила при больших $|v|$ и различных $R_c = 100, 300, 1000, 3000$ (кривые 1-4). (a) При $v = 8$ возможны одно (кривые 1, 2) или три (кривые 3, 4) положения равновесия. (b) При $v = -8$ имеются два (кривые 1 - 3) или четыре (кривая 4) положения равновесия.

2.1.3. Сравнение с результатами для линейных сдвиговых потоков Уравнения внешней области могут быть записаны также с использованием масштаба Сэфмана L_{Sa} . Поля скорости и давления и сила на частицу также представляются в виде рядов, но вместо ε в качестве малого параметра используется величина $\varepsilon_G = R_G^{1/2} = \gamma^{1/2}\varepsilon$. Безразмерные сила и невозмущенная скорость записываются в виде

$$\mathbf{F} = 6\pi V \mathbf{e}_x + \varepsilon_G \mathbf{F}_G,$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \left(V + z\varepsilon_G \gamma^{1/2} R_c^{-1/2} - 4z^2 \varepsilon_G^2 \gamma^{-1} R_c^{-1} \right) \mathbf{e}_x. \quad (2.37)$$

Новая нормальная координата внешней области определяется соотношением $\zeta = z\varepsilon_G = Z\gamma^{1/2}$. Двумерные преобразования Фурье скорости $\mathbf{\Gamma}(\zeta, q_x, q_y)$ и давления $\Pi(\zeta, q_x, q_y)$ вводятся аналогично (1.31). В результате можно получить следующее уравнение для преобразования Фурье поперечной скорости Γ_z :

$$\left(\tilde{\Delta}_G^2 - iq_x \bar{V}_{Gx} \tilde{\Delta}_G - iq_x 2\sigma \right) \Gamma_z = -iq_x V \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(\zeta)}{d\zeta}, \quad (2.38)$$

$$\zeta = -\gamma^{1/2} R_c^{1/2} d/l, \quad \gamma^{1/2} R_c^{1/2} (1 - d/l) : \quad \Gamma_z = \frac{d\Gamma_z}{d\zeta} = 0. \quad (2.39)$$

$$\tilde{\Delta}_G = d^2/d\zeta^2 - q^2, \quad \bar{V}_{Gx} = \alpha + \zeta - \sigma\zeta^2,$$

$$\alpha = V'(\nu G)^{-1/2} = V\gamma^{-1/2} R_c^{1/2}, \quad \sigma = 4\gamma^{-3/2} R_c^{-1/2}. \quad (2.40)$$

Здесь \bar{V}_{Gx} - профиль невозмущенной скорости, записанный в координатах ζ . Уравнения (2.38), (2.39) аналогичны (2.32), (2.33) и также содержат три основных безразмерных параметра: R_c , α , σ . Безразмерные градиент скорости и расстояние до стенки с учетом (2.40) выражаются через основные параметры

$$\gamma = \left(4\sigma^{-1} R_c^{-1/2} \right)^{2/3}, \quad \frac{d}{l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left(4\sigma^{-1} R_c^{-1/2} \right)^{2/3},$$

$$\frac{d}{L_{Sa}} = (4\sigma^{-1}R_c)^{1/3} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left(4\sigma^{-1}R_c^{-1/2} \right)^{2/3} \right]. \quad (2.41)$$

Разница систем (2.38), (2.39) и (2.32), (2.33) заключается в том, что \bar{V}_{Gx} включает только два параметра в отличие от \bar{V}_x . Третий независимый параметр R_c входит только в граничные условия (2.39). Новые безразмерные параметры α и σ характеризуют величины однородного и квадратичного членов по отношению к линейному в профиле невозмущенной скорости. Параметр скольжения α может быть произвольным. Для второго параметра имеем с учетом (2.40) ограничение $\sigma \geq R_c^{-1/2}/2$, поскольку γ достигает максимального значения $\gamma_w = 4$ на стенке. α и σ стремятся к бесконечности на оси канала, где $\gamma \rightarrow 0$. σ характеризует для данного R_c не только кривизну профиля, но и однозначно определяет расстояние до стенки. Поэтому можно ожидать, что значения поперечной силы, рассчитанные для разных R_c , будут близки для достаточно больших σ и d/L_{Sa} , поскольку влияние стенки на них будет несущественным.

Выражение для поперечной силы в этом случае имеет следующий вид

$$F_L = c_L(\alpha, \sigma, R_c) \mu a^2 V_s (G/\nu)^{1/2},$$

Численный метод, использованный для расчета поперечной скорости в начале координат, аналогичен методу, описанному в предыдущем разделе. На Рис. 2.6 представлен коэффициент поперечной силы c_L в зависимости от σ . Для сравнения приведены также значения коэффициента для линейного сдвигового потока, ограниченного одной стенкой [30, 90], и их асимптоты, соответствующие неограниченному потоку [30, 89] (штрих-пунктирные и штриховые линии соответственно). Для этих кривых σ рассматривается как параметр, определяющий только расстояние до стенки. При этом зависимость от d/L_{Sa} пересчитывалась в зависимость от σ с использованием (2.41). Можно видеть, что для малых σ поперечная сила близка к значениям, полученным для линейного сдвигового потока. В этой области

влияние стенки является основным фактором. Для больших σ , т.е. больших d/L_{Sa} , зависимости, рассчитанные для разных R_c действительно оказываются близки. Они стремятся к предельным значениям c_L , соответствующим неограниченному параболическому потоку. c_L отличаются от значений для линейного сдвигового потока (штриховые линии) даже для достаточно малых значений $\sigma \leq 0.1$. Следует также отметить, что коэффициент c_L зависит только от двух безразмерных параметров α , σ .

2.1.4. Поперечная сила в неограниченном параболическом потоке Преобразование Фурье поперечной скорости Γ_z^u для неограниченного потока удовлетворяет уравнению (2.38) с граничными условиями

$$\zeta \rightarrow \infty : \quad \Gamma_z^u \rightarrow 0. \quad (2.42)$$

Для того, чтобы получить численное решение в этом случае, используется модификация метода ортонормализации Годунова, предложенная в работе [124]. Границы области интегрирования располагаются на достаточно большом расстоянии от сферы, где можно получить аналитические выражения для линейно независимых решений $\varphi_i(\zeta)$, $i = 1 - 4$. Предполагая, что $\varphi_i = \exp(\lambda_i |\zeta|^{\nu_i})$, можно получить для двух убывающих с $|\zeta|$ решений:

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad q = O(1) : \quad \varphi_1 = \exp(-q |\zeta|), \quad \varphi_2 = \exp\left(-\sqrt{i\sigma q_x} \zeta^2/2\right).$$

Здесь во второй формуле выбирается ветвь \sqrt{i} с положительной действительной частью.

На Рис. 2.7 представлены результаты расчетов коэффициента поперечной силы c_L в зависимости от параметра скольжения α для различных значений σ . Для случая $\sigma = 0$, соответствующего линейному сдвиговому потоку результаты очень близки к значениям, полученным в [30, 89]. Максимальные значения меньше, чем для линейного сдвигового потока и убывают с σ . Однако для больших значений скорости скольжения (большие $|\alpha|$), при

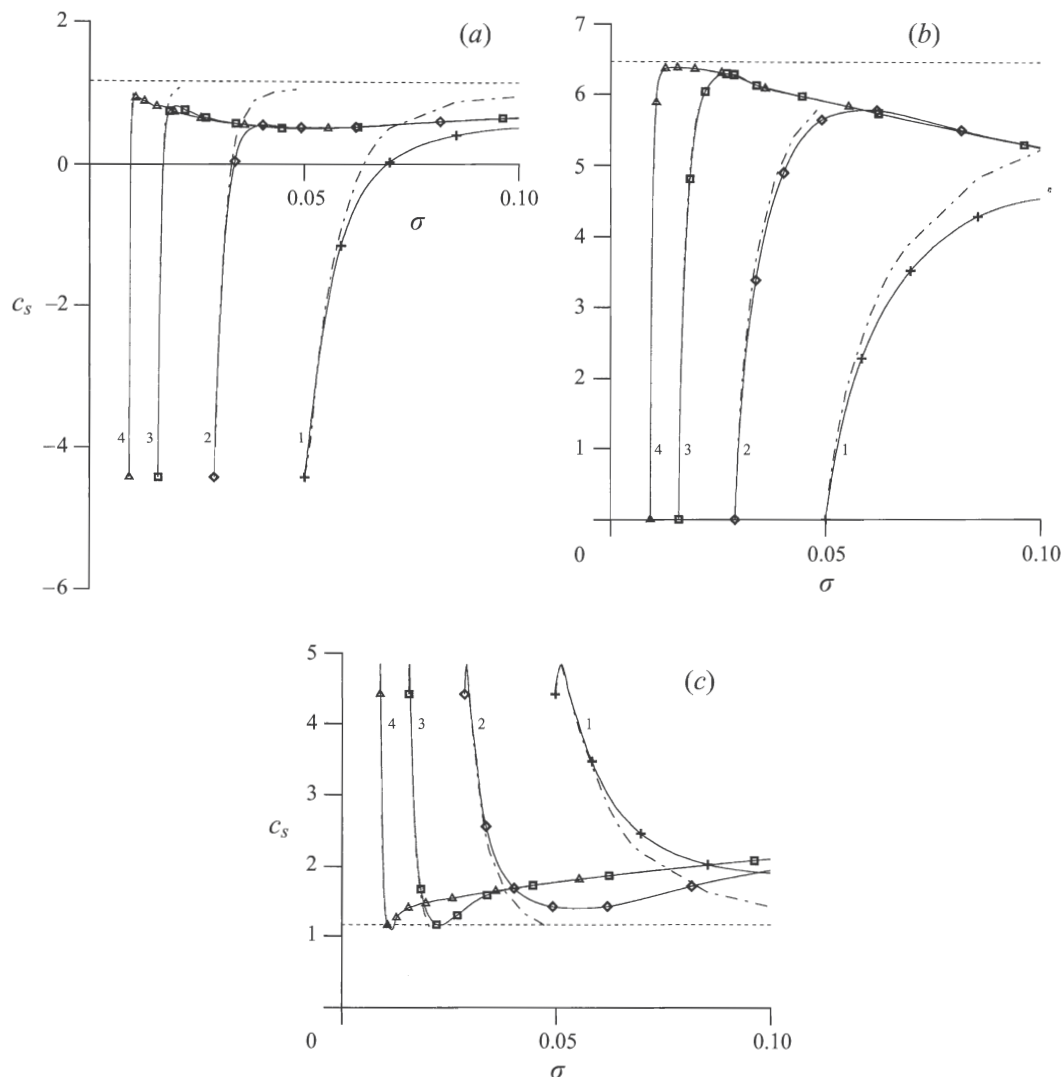


Рис. 2.6. Коэффициент поперечной силы в зависимости от параметра σ при (a) $\alpha = -2.5$, (b) $\epsilon^2 \ll \alpha \ll 1$, (c) $\alpha = 2.5$ и $R_c = 100, 300, 1000, 3000$ (кривые 1-4). Символы на кривых соответствуют значениям (слева направо) $d/l = 0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots$ Штрих-пунктирные кривые - значения коэффициента поперечной силы в линейном сдвиговом потоке, ограниченном одной стенкой, [31, 30, 90], штриховые линии - их асимптоты, соответствующие неограниченному сдвиговому потоку [30, 89].

которых сила мала, имеет место обратная ситуация: коэффициент в неограниченном параболическом потоке во много раз превосходит значения в линейном потоке.

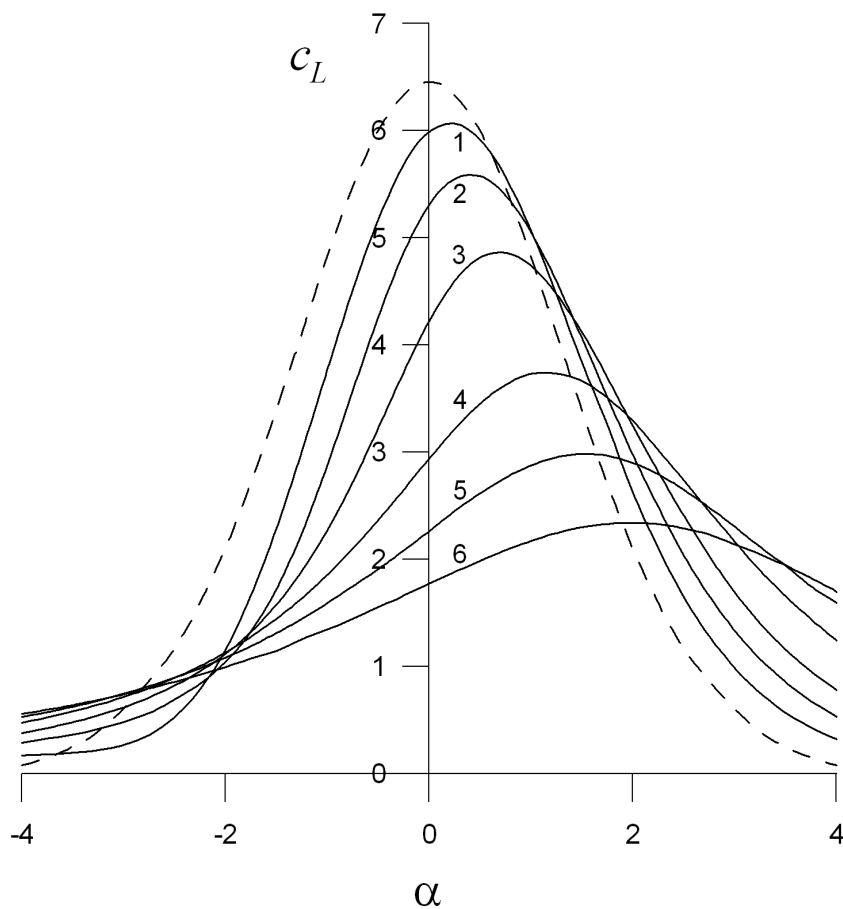


Рис. 2.7. Коэффициент поперечной силы в неограниченном параболическом потоке в зависимости от параметра скольжения α и различных $\sigma = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$ (кривые 1-6). Штриховая линия соответствует неограниченному сдвиговому потоку [30, 89], $\sigma = 0$.

2.2. Сила при конечной скорости скольжения частицы и больших числах Рейнольдса канала

В данном разделе рассматривается случай $V \sim 1$ при больших числах Рейнольдса канала $R_c \gg 1$ [40, 52]. Параметр скольжения $v = VR_c^{1/2}$ при этом велик, т.е. имеет место режим слабого сдвига, когда однородная скорость в профиле невозмущенной скорости (2.28) велика по сравнению со сдвиговым и квадратичным членами. Схема течения показана на Рис. 2.8. При этом число Рейнольдса частицы, вычисляемое по скорости скольжения по-прежнему асимптотически мало. Такая ситуация характерна, например, для движения частиц в вертикальном течении газа в канале. Как было показано в предыдущем разделе, в этом случае возможно появление дополнительных положений равновесия (Рис. 2.5). С другой стороны, данный случай является более сложным для расчета в рамках метода, описанного в предыдущем разделе. Поэтому возникает необходимость рассмотрения задачи при наличии двух асимптотических параметров $R_s \ll 1$, $R_c \gg 1$.

Уравнения Озеена для безразмерных возмущений скорости \mathbf{u} и давления p во внешней области записываются аналогично (2.24):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p - \bar{v}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \frac{d\bar{v}_x}{dz} u_z \mathbf{e}_x &= 6\pi \mathbf{e}_x \delta(\mathbf{r}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

При этом следует иметь в виду, что члены в профиле невозмущенной скорости, соответствующие однородному потоку, существенно больше линейных членов. Поэтому в качестве масштаба внешней области используется не масштаб Сэфмана, а масштаб Озеена $L_{Os} = \nu/V'_s = a/R_s$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'/L_{Os} = (x, y, z), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}'/V'_s R_s.$$

Для невозмущенной скорости $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_x, 0, 0)$ имеем

$$\bar{v}_x = \text{sgn}(V_s) + \beta\gamma z |V_s|^{-1} - \beta^2 4z^2 |V_s|^{-1}, \quad (2.44)$$

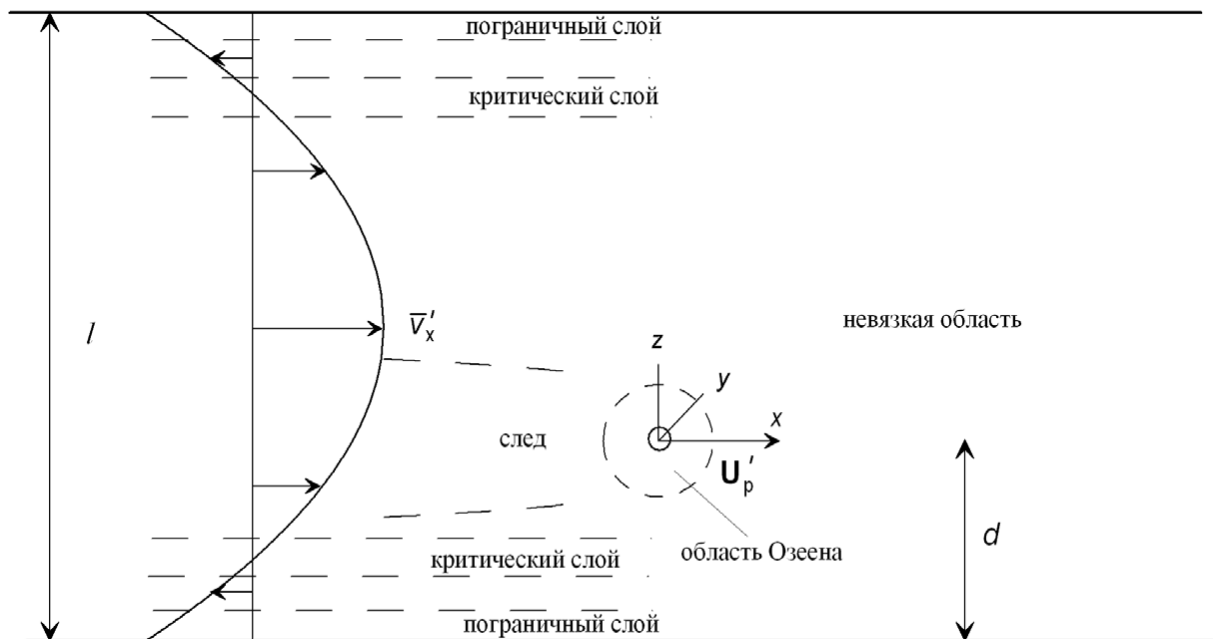


Рис. 2.8. Конфигурация течения при миграции частицы в режиме слабого сдвига

$$\gamma = 4 - 8d/l, \quad V_s = V'_s/U'_m, \quad \beta = (R_c |V_s|)^{-1} = \nu / (l |V_s|).$$

Сила, действующая на сферу, также обезразмеривается с использованием скорости скольжения V'_s ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' / \mu a V'_s.$$

Граничные условия к уравнению (2.43) записываются в виде:

$$\begin{aligned} z &= -d/l\beta, (1 - d/l) / \beta : \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}; \\ x, y &\rightarrow \infty : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Уравнения (2.43) также решаются на основе двумерного преобразования Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Gamma \\ \Pi \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}(x, y, z) \\ p(x, y, z) \end{array} \right\} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

В результате (2.43) преобразуются к виду:

$$\frac{d^4 \Gamma_z}{dz^4} - (2k^2 + ik_x \bar{v}_x) \frac{d^2 \Gamma_z}{dz^2} + \left(k^4 + ik_x k^2 \bar{v}_x + ik_x \frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} \right) \Gamma_z = -ik_x \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(z)}{dz}, \quad (2.45)$$

$$z = -d / (l\beta), (1 - d/l) / \beta : \quad \Gamma_z = \frac{d\Gamma_z}{dz} = 0. \quad (2.46)$$

Для поперечной силы имеем

$$F_z = 6\pi R_s [u_z - u_{zs}] \Big|_{r \rightarrow 0} = 6\pi R_s \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma_z - \Gamma_{zs}) \Big|_{z \rightarrow 0} dk_x dk_y \right]. \quad (2.47)$$

Отличие уравнения (2.45) от (2.32) заключается в том, что ранее число Рейнольдса канала R_c и параметр β считались конечными, а следовательно, и все члены в профиле невозмущенной скорости (2.44) имели одинаковый порядок. Здесь рассматривается случай

$$\beta = (R_c |V_s|) \ll 1.$$

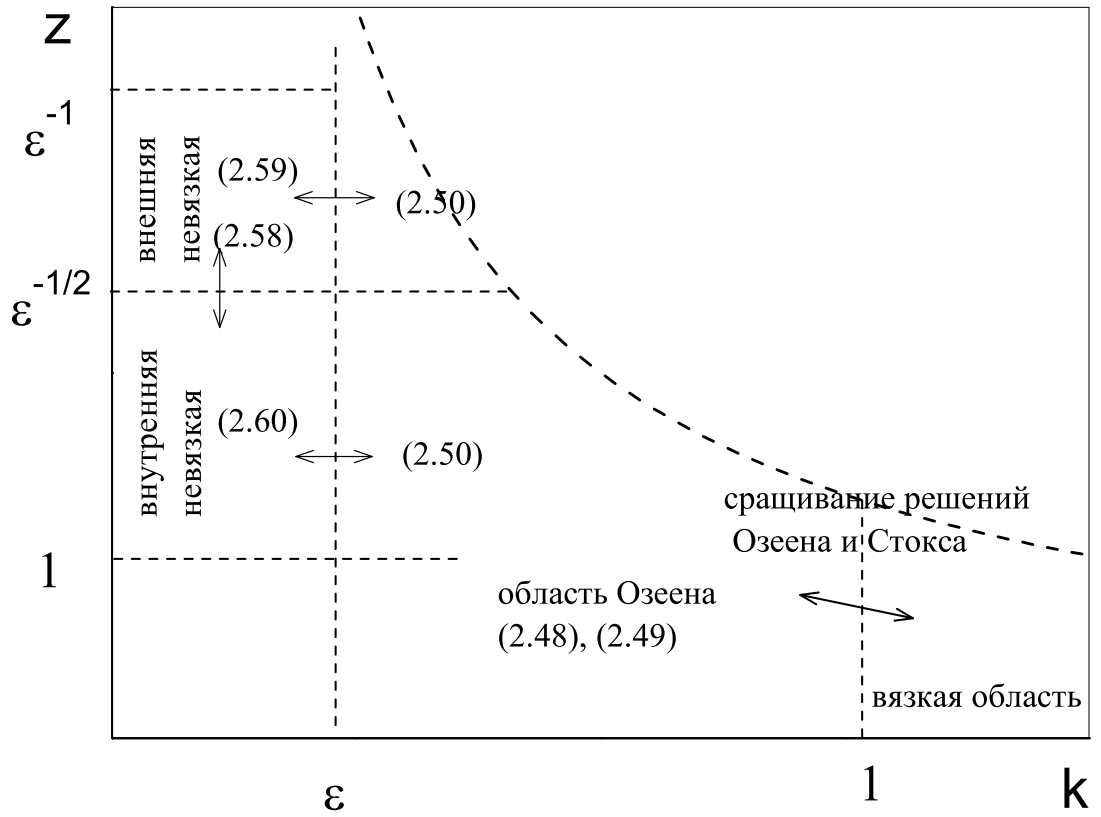


Рис. 2.9. Области в пространстве $k - z$ и сращивание между ними.

Решение (2.45) строится на основе метода сращиваемых асимптотических разложений. В пространстве (\mathbf{k}, z) выделяются несколько областей (см. Рис. 2.9).

Ниже построены решения для малых и конечных значений k , соответствующих большому (невязкая область) и конечным (область Озеена) по сравнению с масштабом Озеена расстояниям от частицы. Показано, что в этом предельном случае основной вклад в поперечную силу обеспечивают малые k , т.е. невязкая область. На основе предсказаний асимптотического метода проведена модификация численного метода: уменьшены шаги интегрирования в дифференциальных уравнениях и обратном преобразовании Фурье в областях, дающих основной вклад в поперечную силу.

Решение (2.45) строится в виде ряда по степеням β :

$$\Gamma_z = \Gamma_z^0 + \beta \Gamma_z^1 + \beta^2 \Gamma_z^2 + \dots; \quad F_z = F_z^0 + \beta F_z^1 + \beta^2 F_z^2 + \dots \quad (2.48)$$

Для области $k \sim 1$, $z \sim 1$ (область Озеена) однородное течение является основным членом в профиле невозмущенной скорости (2.44), поэтому решение в главном приближении представляет собой осесимметричное решение Озеена, в котором поперечная сила равна нулю. Уравнения для членов ряда можно получить, подставляя разложение в (2.45) и собирая члены порядка β^i :

$$\begin{aligned} L_0 \Gamma_z^0 &= -ik_x \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(z)}{dz}, \\ L_0 \Gamma_z^1 &= L_1 \Gamma_z^0, \\ i \geq 2: \quad L_0 \Gamma_z^i &= L_1 \Gamma_z^{i-1} + L_2 \Gamma_z^{i-2}, \\ L_0 &= \frac{d^4}{dz^4} - [2k^2 + ik_x \operatorname{sgn}(V_s)] \frac{d^2}{dz^2} + k^4 + ik_x k^2 \operatorname{sgn}(V_s), \\ L_1 &= ik_x \gamma z |V_s|^{-1} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right), \\ L_2 &= -ik_x 4 |V_s|^{-1} \left[z^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) - 2 \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Из граничных условий (2.46) следует, что при $\beta \ll 1$ расстояния до стенок велики по сравнению с длиной Озеена, за исключением случая, когда частица находится вблизи стенки, $d/l \sim \beta$. Таким образом, течение можно считать неограниченным, $\Gamma_z^i \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $k \sim 1$.

Решение для уравнения главного приближения (2.49), затухающее на бесконечности, было получено в работе [66]:

$$\Gamma_z^0 = \frac{3}{4\pi} \operatorname{sgn}(V_s z) \left(e^{-k|z|} - e^{-t|z|} \right), \quad (2.50)$$

$$t = [k^2 + ik_x \operatorname{sgn}(V_s)]^{1/2}.$$

Необходимо отметить, что полученное решение является нечетной функцией z . Операторы L_0 и L_2 - четные, а L_1 - нечетный по z . Из этого следует, что Γ_z^i - четные функции для четных номеров i и нечетные для нечетных. Следовательно, $\Gamma_z^i(k_x, k_y, 0) = 0$ для четных i , и эти члены не дают вклада в поперечную силу.

Решение для уравнения первого приближения Γ_z^1 то же, что и для линейного неограниченного сдвигового потока в пределе слабого сдвига, поскольку квадратичные члены в профиле невозмущенной скорости (2.44) имеют порядок β^2 . Общее решение может быть записано в виде

$$\Gamma_z^1 = \frac{3}{16\pi} \frac{\gamma}{|V_s|} \frac{|z|}{t^2} \left[|z| t (t^2 - k^2) + 5t^2 - k^2 \right] e^{-t|z|} + C_1 e^{-k|z|} + C_2 e^{-t|z|}. \quad (2.51)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из условия, что Γ_z^1 и ее производные непрерывны при $z = 0$. Поскольку Γ_z^1 нечетная функция, имеем

$$\frac{d\Gamma_z^1}{dz}(0) = \frac{d^3\Gamma_z^1}{dz^3}(0) = 0,$$

откуда следует

$$C_1 = -\frac{3}{4\pi} \frac{\gamma}{|V_s|} \frac{k^2 + t^2}{(t^2 - k^2)k}, \quad C_2 = \frac{3}{16\pi} \frac{\gamma}{|V_s|} \frac{k^4 - 2k^2 t^2 + 9t^4}{t^3(t^2 - k^2)}.$$

Наконец, получим для значения преобразования Фурье в начале координат, знание которого необходимо для вычисления поперечной силы (см. (2.47)),

$$\Gamma_z^1(\mathbf{k}, 0) = C_1 + C_2 = -\frac{3}{16\pi} \frac{\gamma}{|V_s|} \frac{(4t^2 + 3kt + k^2)(t - k)^2}{kt^3(k + t)}.$$

Численное интегрирование (2.47) с $\Gamma_z^1(\mathbf{k}, 0)$ дает величину 10^{-6} , поэтому можно сделать вывод, что $F_z^1 = 0$. Этот результат согласуется с выводами работы [89], в которой для линейного неограниченного сдвигового потока в пределе слабого сдвига было получено: $F_z \sim R_s \beta^3 \ln \beta$. Таким образом, вклад области $k = O(1)$ в поперечную силу имеет порядок β^3 или меньший. Как показано ниже, сила обусловлена вкладом области, $k \sim \beta$, где, как следует из численного решения (2.45), Γ_z сильно отклоняется от (2.50), (2.51). В этой области Фурье-пространства $\Gamma_z = O(1)$, следовательно, вклад $k \sim \beta$ в интеграл (2.47) можно оценить как

$$F_z \sim R_s \Gamma_z k^2 \sim R_s \beta^2,$$

т.е. много больше чем области $k = O(1)$.

2.2.1. Асимптотическое решение при малых волновых числах

В области $k \sim \beta$ разложение (2.48), (2.50), (2.51) неверно. В этом можно убедиться, сравнивая первые два члена разложения, (2.50) и (2.51). Введем новый масштаб для этой области Фурье-пространства: $\mathbf{q} = \mathbf{k}/\beta$, $q = O(1)$. В результате

$$t = \beta^{1/2} T + O(\beta^{3/2}), \quad T = [iq_x \operatorname{sgn}(V_s)]^{1/2},$$

и уравнения (2.50), (2.51), (2.47) переписутся в виде

$$\Gamma_z^0 = \frac{3}{4\pi} \operatorname{sgn}(V_s z) \left[e^{-\beta q |z|} - e^{-\beta^{1/2} T |z|} \right] + O(\beta^{3/2}), \quad (2.52)$$

$$\Gamma_z^1 = \frac{3}{16\pi} \frac{\gamma}{|V_s|} \left\{ -\frac{4}{\beta q} e^{-\beta q |z|} + \left[z^2 \beta^{1/2} T + 5|z| + \frac{9}{\beta^{1/2} T} \right] e^{-\beta^{1/2} T |z|} \right\} + O(\beta),$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_z^1(\mathbf{q}, 0) &= \beta^{-1}H_0 + \beta^{-1/2}H_1 + O(1), \\
F_z &= 24\pi R_s \beta^2 \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} q \Gamma_z(\mathbf{q}, 0) d\theta dq \right], \\
H_0 &= -\frac{3}{4\pi} \frac{\gamma}{q |V_s|} = O(1), \quad H_1 = \frac{27}{16\pi T} \frac{\gamma}{|V_s|} = O(1).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Можно видеть, что Γ_z^0 и Γ_z^1 имеют порядок 1 и β^{-1} , соответственно, при $q \sim 1$. Из (2.52) следует, что Γ_z^0 имеет два асимптотически различных масштаба изменения:

$$k \ll 1: \quad l_{k1} \sim |t|^{-1} \sim k_x^{-1/2}, \quad l_{k2} \sim k^{-1} \gg l_{k1}.$$

Предполагая $k \sim \beta$, будем иметь

$$L_{Os} \ll l_{k1} \sim \beta^{-1/2} \ll l_{k2} \sim \beta^{-1}.$$

Масштабы l_{k1} и l_{k2} можно рассматривать, как масштабы внутренней и внешней областей в Фурье-пространстве. Новое обезразмеривание для нормальной координаты вводится для этих областей следующим образом:

$$\xi_1 = z\beta^{1/2}, \quad \xi_2 = z\beta = z'/l.$$

Профиль невозмущенной скорости записывается в новых переменных в виде

$$\begin{aligned}
\bar{v}_x &= \operatorname{sgn}(V_s) + \beta^{1/2}\gamma\xi_1 |V_s|^{-1} - \beta 4\xi_1^2 |V_s|^{-1}, \\
\bar{v}_x &= \operatorname{sgn}(V_s) + \gamma\xi_2 |V_s|^{-1} - 4\xi_2^2 |V_s|^{-1}.
\end{aligned}$$

Преобразование Фурье в двух областях ищется в виде ряда по степеням $\beta^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
\xi_1 \sim 1: \quad \Gamma_z &= f_0 + \beta^{1/2}f_1 + \dots, \\
\xi_2 \sim 1: \quad \Gamma_z &= g_0 + \beta^{1/2}g_1 + \dots
\end{aligned}$$

Система уравнений для внутренней области может быть получена аналогично (2.49):

$$F_0 f_0 = 0, \quad F_0 f_1 = F_1 f_0, \quad F_0 f_2 = F_1 f_1 + F_2 f_0, \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{d^4}{d\xi_1^4} - iq_x \operatorname{sgn}(V_s) \frac{d^2}{d\xi_1^2}, & F_1 &= \frac{iq_x \gamma \xi_1}{|V_s|} \frac{d^2}{d\xi_1^2}, \\
F_2 &= \left(2q^2 - iq_x \frac{4\xi_1^2}{|V_s|} \right) \frac{d^2}{d\xi_1^2} - iq_x \left[q^2 \operatorname{sgn}(V_s) - \frac{8}{|V_s|} \right], \\
\left[\frac{d^2 f_0}{d\xi_1^2} \right] &= -i \frac{3}{2\pi} q_x.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Уравнения четвертого порядка (2.54) имеют четыре линейно независимых решения. Только одно из них убывает на бесконечности. Из условий сращивания с внешним решением будем отбрасывать только экспоненциально растущее решение. Тогда общее решение (2.54) может быть записано в виде

$$f_0 = a_{10}^\pm + b_{10}^\pm \xi_1 + c_{10}^\pm e^{-T|\xi_1|}. \tag{2.56}$$

С учетом (2.55) константы a_{10}^\pm , b_{10}^\pm , c_{10}^\pm удовлетворяют условиям

$$a_{10}^+ = a_{10}^- + \frac{3}{2\pi} \operatorname{sgn}(V_s), \quad b_{10}^+ = b_{10}^-, \quad c_{10}^+ = -c_{10}^- = -\frac{3}{4\pi} \operatorname{sgn}(V_s).$$

Внешний предел (2.56), переписанный через переменную ξ_2 , имеет вид

$$\Gamma_z \sim a_{10}^\pm + b_{10}^\pm \beta^{-1/2} \xi_2.$$

Поскольку $g_0 = O(1)$, необходимо потребовать $b_{10}^\pm = 0$, так что $f_0 \sim a_{10}^\pm$ при $|\xi_1| \rightarrow \infty$.

С учетом (2.56) общее решение второго уравнения (2.55) может быть записано в виде

$$f_1 = a_{11}^\pm + b_{11}^\pm \xi_1 - \frac{\gamma}{V_s} c_{10}^\pm e^{-T|\xi_1|} \left(\frac{T}{4} \xi_1^2 + \frac{5}{4} |\xi_1| + c_{11}^\pm \right). \tag{2.57}$$

f_1 и его производные непрерывны при $\xi_1 = 0$, что эквивалентно следующим условиям:

$$a_{11}^+ = a_{11}^-, \quad b_{11}^+ = b_{11}^- - 2\frac{\gamma}{V_s} c_{10}^+, \quad c_{11}^+ = c_{11}^- = 9/4T.$$

Двучленное разложение преобразования Фурье в начале координат, знание которого необходимо для вычисления поперечной силы (см. (2.47)), с учетом (2.56) и (2.57), имеет вид

$$\Gamma_z(\mathbf{q}, 0) = a_{10}^+ + c_{10}^+ + \beta^{1/2} \left(a_{11}^+ - \frac{\gamma}{V_s} c_{10}^+ c_{11}^+ \right) + O(\beta). \quad (2.58)$$

Здесь коэффициенты c_{10}^+ и c_{11}^+ известны из внутреннего решения, но a_{10}^+ и a_{11}^+ определяются из условия сращивания с внешним разложением. Трехчленное разложение, переписанное во внешних переменных, преобразуется к виду:

$$\xi_1 \rightarrow \infty : \quad \Gamma_z \sim a_{10}^\pm + b_{11}^\pm \xi_2 + \beta^{1/2} (a_{11}^\pm + b_{12}^\pm \xi_2) + O(\beta).$$

Первые два члена решения во внешней области удовлетворяют уравнениям:

$$\left[\bar{v}_x(\xi_2) \frac{d^2}{d\xi_2^2} - q^2 \bar{v}_x(\xi_2) + \frac{8}{|V_s|} \right] g_i = 0, \quad i = 0, 1. \quad (2.59)$$

Уравнения второго порядка (2.59) соответствуют невязкому течению. Сращивание внутреннего и внешнего решений эквивалентно следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_i(\pm 0) &= a_{1i}^\pm, \quad \frac{dg_i}{d\xi_2}(\pm 0) = b_{1(i+1)}^\pm \quad i = 0, 1, \\ [g_0] &= a_{10}^+ - a_{10}^- = \frac{3}{2\pi} \operatorname{sgn}(V_s), \quad \left[\frac{dg_0}{d\xi_2} \right] = b_{11}^+ - b_{11}^- = \frac{3}{2\pi} \frac{\gamma}{|V_s|}, \\ [g_1] &= a_{11}^+ - a_{11}^- = 0, \quad \left[\frac{dg_1}{d\xi_2} \right] = b_{12}^+ - b_{12}^- = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для замыкания задачи необходимо также поставить граничные условия на стенках канала. Тем не менее, все четыре граничных условия (2.46) не могут быть удовлетворены, т.к. (2.59) являются уравнениями второго порядка. Аналогично обычной задаче о пограничном слое можно показать [40], что в главном приближении необходимо выполнение условия непротекания на стенках:

$$\xi_2 = -d/l, 1 - d/l : \quad g_0 = 0.$$

Для первого приближения были получены следующие граничные условия [40]:

$$\begin{aligned}\xi_2 = -d/l : \quad g_1 &= -\frac{1}{\sqrt{iq_x \bar{v}_x (-d/l)}} \frac{dg_0}{d\xi_2} \\ \xi_2 = 1 - d/l : \quad g_1 &= \frac{1}{\sqrt{iq_x \bar{v}_x (1 - d/l)}} \frac{dg_0}{d\xi_2}.\end{aligned}$$

Для $|V_s| > 1$ уравнение (2.59) решалось при $q \sim 1$ численно с использованием метода ортонормализации. Для больших q применялось асимптотическое разложение

$$q \rightarrow \infty : \quad g_0 \sim \frac{3}{4\pi} \left[\operatorname{sgn}(V_s \xi_2) - \frac{\gamma}{q|V_s|} + O(q^{-2}) \right] e^{-q|\xi_2|}. \quad (2.61)$$

Величина следующего члена разложения, g_1 , который обусловлен только влиянием стенок, асимптотически мала при больших q .

Решения, полученные в двух областях \mathbf{k} -пространства, $k \sim \beta$ и $k \sim 1$, сращиваются в обеих областях переменной z , $z \sim \beta^{-1/2}$ и $z \sim \beta^{-1}$. С учетом (2.56), (2.57) двучленный внешний предел для внутреннего решения записывается в виде

$$\begin{aligned}q \rightarrow \infty : \quad \Gamma_z \sim \frac{3}{4\pi} \left\{ \operatorname{sgn}(V_s \xi_1) \left(1 - e^{-T|\xi_1|} \right) - \frac{\gamma}{q|V_s|} + \beta^{1/2} \left[-\operatorname{sgn}(V_s) q \xi_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma}{|V_s|} \left(|\xi_1| + \frac{e^{-T|\xi_1|}}{4} \left(T \xi_1^2 + 5|\xi_1| + \frac{9}{T} \right) \right) \right] \right\} + O(q^{-2}). \quad (2.62)\end{aligned}$$

Для вычисления вклада области $k \sim \beta$ в поперечную силу необходимо проинтегрировать по \mathbf{q} разницу двух выражений для преобразования Фурье (2.58) и (2.53). В результате будем иметь

$$\begin{aligned}F_z &= 6\pi R_s \beta^2 \int \operatorname{Re} \left[g_0(+0, \mathbf{q}) - \frac{3}{4\pi} \left(\operatorname{sgn}(V_s) - \frac{\gamma}{q|V_s|} \right) + \beta^{1/2} g_1(0, \mathbf{q}) \right] d\mathbf{q} \\ &= R_s \beta^2 \left(I_0 + \beta^{1/2} I_1 \right).\end{aligned} \quad (2.63)$$

$$I_0 = 6\pi \int \operatorname{Re} [g_0(+0, \mathbf{q})] d\mathbf{q}, \quad I_1 = 6\pi \int \operatorname{Re} [g_1(+0, \mathbf{q})] d\mathbf{q}.$$

В размерном виде сила записывается в виде

$$F_z = \rho(a\nu/l)^2 \left(I_0(V_s, d/l) + \beta^{1/2} I_1(V_s, d/l) \right).$$

На основе приведенного асимптотического анализа можно существенно повысить точность вычислений численного решения уравнения (2.45). Для этого следует использовать уменьшенные шаги интегрирования при $k \sim \beta$ и θ , близких к $\pi/2$.

В случае $|V_s| < 1$ необходимо вводить две дополнительные асимптотические области, критические слои. В них так же, как и в пограничных слоях, следует учитывать вязкие члены. Они располагаются вблизи точек ξ_{2c}^\pm , где невозмущенная скорость обращается в ноль при $|V_s| < 1$ (см. Рис. 2.8):

$$\xi_{2c}^\pm = \frac{1}{8} (\gamma \pm D), \quad D = (\gamma^2 + 16V_s)^{1/2},$$

что эквивалентно следующим положениям в размерных координатах:

$$-1 < V_s < 0 : \quad d_c = \frac{1 - (-V_s)^{1/2}}{2} l,$$

$$0 < V_s < 1 : \quad d_c = \frac{1 - (1 - V_s)^{1/2}}{2} l.$$

Асимптотическое решение в критических слоях строилось аналогично работе [125], в которой рассматривалась задача линейной устойчивости течения в канале. Внутренний предел для невязкой области записывается в виде (условие приведено только для нижнего критического слоя) [40]:

$$\Delta\xi_2 \rightarrow 0 : \quad g_0 = A_\pm \left(1 - \frac{8}{D} \Delta\xi_2 \ln |\Delta\xi_2| \right) + B_\pm \Delta\xi_2 + O \left[(\Delta\xi_2)^2 \ln |\Delta\xi_2| \right]. \quad (2.64)$$

Таким образом, решение в невязкой области имеет логарифмическую особенность. В результате было получено условие сращивания

$$A_+ = A_-, \quad B_+ = B_- - i\pi \frac{8}{D} A_-,$$

d/l	$V_s = -3.0$	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0.04	-3942.8	-3701.4	-3456.7	-2955.7	-1340.6	7051.8	5775.3	5332.0	5106.9	4879.3
0.08	-863.8	-738.4	-608.4	-333.7	653.7	2193.7	1719.3	1529.1	1428.2	1323.3
0.12	-328.7	-242.4	-151.2	46.5	798.2	988.8	842.8	744.4	687.4	625.4
0.16	-153.9	-88.2	-17.6	138.2	732.0	377.2	488.7	440.0	406.1	366.3
0.20	-79.3	-27.0	29.8	156.9	643.7	65.0	302.1	284.8	265.0	238.9
0.24	-42.5	-0.3	46.0	150.6	552.4	-41.7	188.9	192.8	182.3	165.1
0.28	-23.0	11.0	48.6	134.0	462.6	-60.9	115.0	133.0	128.5	117.4
0.32	-12.1	14.7	44.6	112.6	375.0	-51.6	65.3	91.7	90.9	84.1
0.36	-6.1	14.3	37.0	89.0	289.5	-36.9	32.3	61.9	63.1	59.1
0.40	-2.9	11.5	27.5	64.1	205.6	-23.5	12.1	39.6	41.5	39.2
0.44	-1.2	7.3	16.8	38.7	122.9	-12.9	2.0	22.0	23.5	22.4
0.48	-0.3	2.5	5.6	12.9	40.9	-4.1	-0.5	7.0	7.6	7.3

Таблица 2.1

Значения I_0 для различных V_s

что эквивалентно скачку g_0 в т. ξ_{2c}^{\pm} при численном решении (2.54).

Интегралы I_0 и I_1 (2.63) определялись численно Их значения для нескольких d и V_s приведены в Таблицах 2.1, 2.2, соответственно.

На Рис. 2.10 показана зависимость главного приближения поперечной силы от положения частицы для различных $|V_s| \geq 1$. Сила положительна при $V_s \geq 1$, а для отрицательной скорости скольжения $V_s^{cr,0} < V_s < 0$ она является знакопеременной функцией, и частица имеет устойчивое положение равновесия поперек канала. Здесь $V_s^{cr,0} = -2.84$ критическое значение

d/l	$V_s = -3.0$	-2.0	-1.5	-1.0	1.0	1.5	2.0	3.0
0.04	-44881.1	-42916.3	-41028.8	-37484.0	63766.5	58448.0	55953.3	53558.1
0.08	-7392.2	-6816.8	-6285.1	-5340.2	14287.6	12059.2	11099.8	10225.4
0.12	-2536.3	-2274.6	-2041.0	-1644.4	6561.3	5050.9	4469.9	3971.7
0.16	-1181.1	-1038.2	-914.3	-711.9	4089.8	2816.2	2391.4	2051.4
0.20	-650.3	-564.0	-491.1	-375.5	3056.2	1827.6	1484.9	1230.5
0.24	-396.6	-341.1	-295.2	-224.4	2601.9	1295.5	1004.3	804.6
0.28	-257.4	-220.4	-190.4	-144.9	2466.1	964.4	712.0	552.3
0.32	-172.5	-147.4	-127.4	-97.5	2578.7	730.8	513.8	386.9
0.36	-115.8	-98.9	-85.6	-66.0	2976.5	545.4	366.2	268.6
0.40	-74.6	-63.7	-55.2	-42.9	3837.9	382.3	246.8	177.2
0.44	-41.9	-35.8	-31.1	-24.2	5760.3	227.9	142.9	101.1
0.48	-13.5	-11.6	-10.0	-7.8	12475.0	75.9	46.8	32.9

Таблица 2.2

Значения I_1 для различных V_s

скорости скольжения, которое следует из решения главного приближения. Таким образом, для случая слабого сдвигового потока появляется дополнительное положение равновесия, обусловленное невязким взаимодействием частицы с параболическим невозмущенным течением и стенками. Оно находится на расстояниях от стенки, сравнимых с шириной канала, в отличие от случая вязкого взаимодействия, рассмотренного выше, когда положение равновесия находится близко от стенки,

$$d_{eq} \sim l_G \sim lR_c^{-1/2} \ll l.$$

На Рис. 2.11 приведены результаты вычисления двучленного асимптотического разложения для поперечной силы в сравнении с точным численным решением уравнения (2.45). Также показана сила в неограниченном сдвиговом потоке в пределе слабого сдвига, полученная в работе [89],

$$\alpha \gg 1, \quad F'_L = -288\pi\mu aV'_s R_G^{1/2} \alpha^{-5} \ln(\alpha^2). \quad (2.65)$$

Двучленное разложение хорошо согласуется с численными результатами. Выражение (2.65) дает отрицательную силу для всех положений частицы и скоростей скольжения, т.е. оно качественно отличается от полученных результатов. Положение равновесия для отрицательной скорости скольжения, меньшей критической скорости ($V_s^{cr} = -2.41, -2,73$ при $R_c = 100, 1000$, соответственно) представлено на Рис. 2.12 в зависимости от V_s .

Для течения с критическими слоями при $0 < V_s < 1$, построено только асимптотическое невязкое решение в главном приближении. На Рис. 2.13 показана зависимость поперечной силы в сравнении с численным решением. Асимптотическая теория предсказывает появление положения равновесия при положительной скорости скольжения, тем не менее количественное отличие от численных результатов больше, чем в случае $|V_s| > 1$ (ср. с Рис. 2.11).

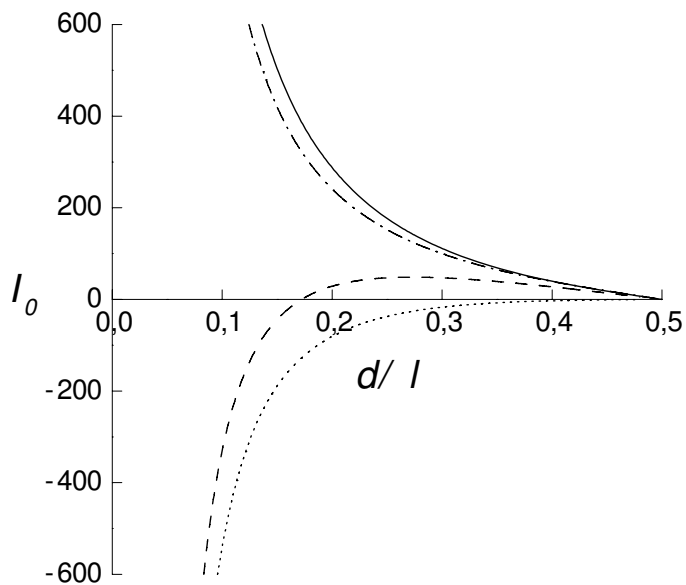


Рис. 2.10. Зависимость главного приближения поперечной силы от положения частицы в режиме слабого сдвига для $|V_s| \geq 1$. Пунктирная, штриховая, сплошная и штрих-пунктирная линии соответствуют

$$V_s = -3, -1.5, 1.5, 3.$$

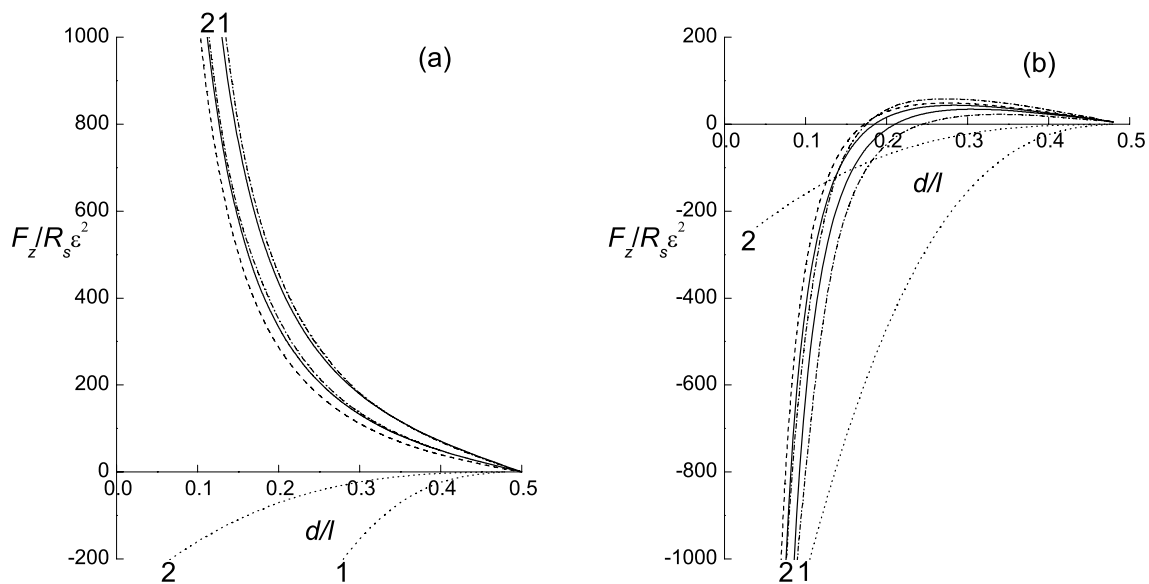


Рис. 2.11. Асимптотическое решение для поперечной силы в сравнении с точным численным решением (штрих-пунктирная линии) для (a) $V_s = 1.5$ and (b) $V_s = -1.5$. Кривые 1, 2 соответствуют $R_c = 100, 1000$, штриховые и сплошные - главному приближению и двучленному разложению, пунктирная - силе в неограниченном сдвиговом потоке в пределе слабого сдвига.

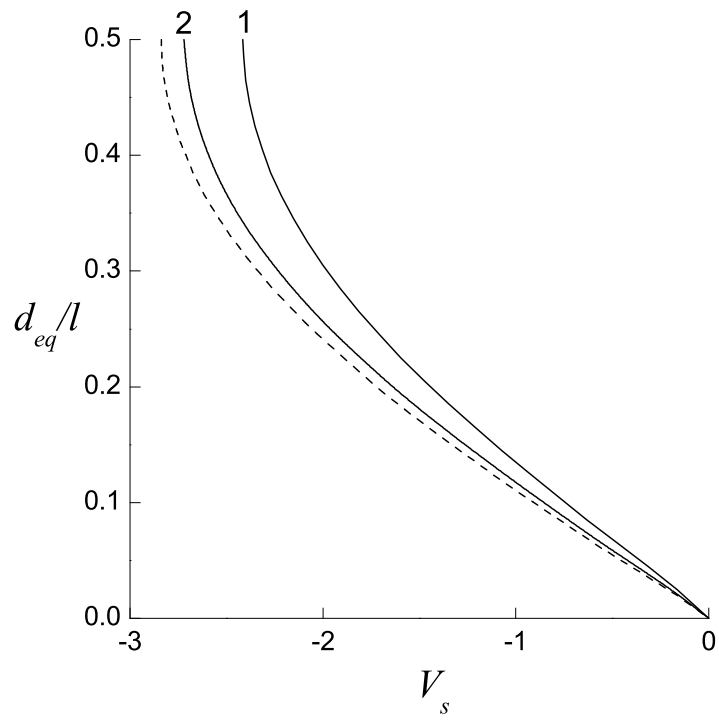


Рис. 2.12. Положение равновесия для отрицательной скорости скольжения.

Сплошные кривые 1, 2 соответствуют $R_c = 100, 1000$, штриховая - главному приближению.

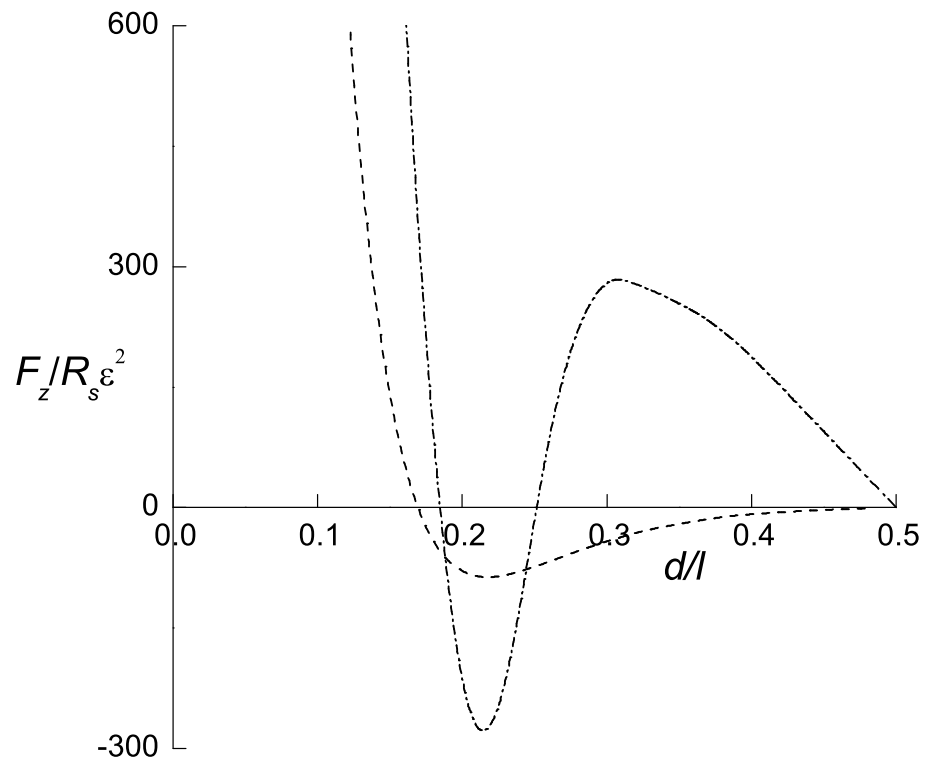


Рис. 2.13. Асимптотическое решение для поперечной силы (штриховая линия) в сравнении с точным численным решением (штрих-пунктирная линия) для $R_c = 1000$, $V_s = 0.8/10^{1/2}$ (режим с критическим слоем).

Асимптотическое решение для случая слабого сдвига построено в данном разделе в виде разложения по двум параметрам $R_s \ll 1$ и $\beta \ll 1$. Большинство предшествующих работ ограничивалось первым членом в разложении по R_s , т.е. искались члены R_s , $R_s\beta$, $R_s\beta^2$... Выше показано, что поперечная сила в этом приближении имеет порядок $R_s\beta^2$. Единственной работой, где была получена поправка $O(R_s^2\beta)$ для случая слабого сдвига, была работа [72]. Таким образом, полученные результаты применимы при условии $R_s \ll \beta \ll 1$.

2.3. Поперечная сила в горизонтальном течении в канале с вертикальными стенками

В данном разделе рассматривается инерционная сила, действующая на частицу в горизонтальном течении в канале с вертикальными стенками [42] (Фиг. 2.14). Такая конфигурация течения характерна, например, для задач о гидроразрыве нефтеносного пласта. Результаты расчета силы использовались для описания таких течений в работах [43, 45].

Число Рейнольдса, вычисляемое по скорости скольжения частицы в вертикальном направлении V'_{sy} , как и ранее, считается малым, $R_s = a |V'_{sy}| / \nu \ll 1$. Для неограниченного линейного сдвигового потока поперечная сила равна нулю в случае, когда скорость скольжения перпендикулярна и скорости основного потока и ее градиенту [126, 127].

Невозмущенная скорость потока в системе координат, связанной с частицей, записывается в виде

$$\mathbf{v}' = v'_x \mathbf{e}_x + v'_y \mathbf{e}_y, \quad (2.66)$$

$$v'_x = U'_m \left(\gamma \frac{z'}{l} - 4 \frac{z'^2}{l^2} \right), \quad v'_y = V_{sy} U'_m.$$

В главном приближении по ε частица перемещается параллельно стенкам, а скорость поперечной миграции асимптотически мала по сравнению со ско-

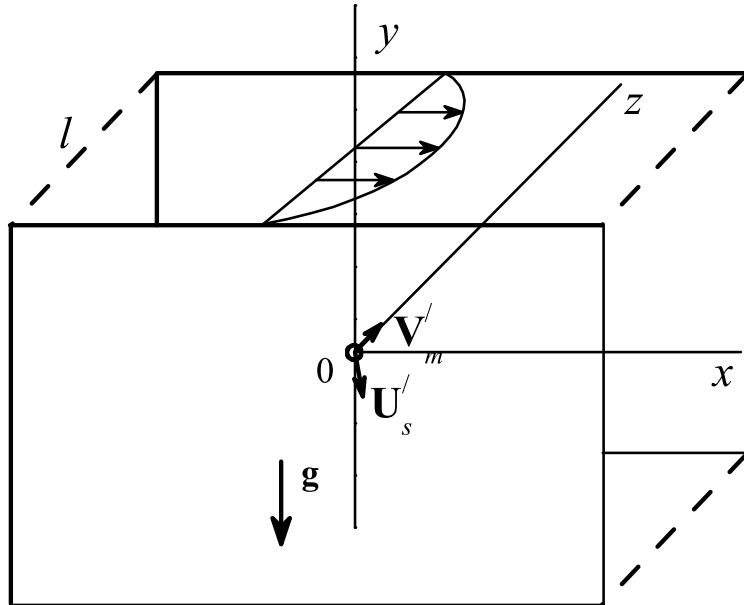


Рис. 2.14. Конфигурация течения при миграции частицы в горизонтальном течении в вертикальном канале.

ростью скольжения. Безразмерная невозмущенная скорость имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'/U'_m = \left(\varepsilon\gamma z R_c^{-1/2} - 4\varepsilon^2 z^2 R_c^{-1} \right) \mathbf{e}_x + V_{sy} \mathbf{e}_y. \quad (2.67)$$

Уравнения и граничные условия для возмущений скорости записываются аналогично (1.11-1.13)

$$\varepsilon R_c^{1/2} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.68)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.69)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{u} = -V_{sy} \mathbf{e}_y + \varepsilon R_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \gamma z \mathbf{e}_x) + 4\varepsilon^2 z^2 R_c^{-1} \mathbf{e}_x, \quad (2.70)$$

$$z = -\varepsilon^{-1} R_c^{1/2} d/l, \quad \varepsilon^{-1} R_c^{1/2} (1 - d/l) : \quad \mathbf{u} = 0, \quad (2.71)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u} \rightarrow 0. \quad (2.72)$$

Отличие данной системы от (1.11-1.13) заключается в том, что в граничном условии (2.70) направление скорости обтекания частицы (первый член) отличается от направления невозмущенной скорости.

Решения во внутренней и внешней областях строятся аналогично §2.1. Поле скорости во внешней области $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z) = O(1)$ описывается уравнениями типа Озеена

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.73)$$

$$V_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + V_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial Y} + \frac{dV_x}{dZ} U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = -6\pi V_{sy} \delta(\mathbf{R}) \mathbf{e}_y,$$

$$Z = -R_c^{1/2} d/l, \quad R_c^{1/2} (1 - d/l) : \quad \mathbf{U} = 0, \quad (2.74)$$

$$R \rightarrow \infty : \quad \mathbf{U} = 0. \quad (2.75)$$

$$V_x = \gamma Z - 4R_c^{-1/2} Z^2, \quad V_y = V_{sy} R_c^{1/2}. \quad (2.76)$$

Основное отличие данной системы от (2.24-2.28) заключается в наличии двух компонент в выражении невозмущенной скорости $\mathbf{V} = (V_x, 0, V_y)$, записанной через внешние координаты.

Система (2.73) решается с использованием двумерного преобразования Фурье. В результате ее можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{U}} &= 0, \\ (ik_x V_x + ik_y V_y) \tilde{\mathbf{U}} + \frac{dV_x}{dZ} \tilde{U}_z \mathbf{e}_x + \tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{U}} &= -\frac{3}{2\pi} V_{sy} \delta(Z) \mathbf{e}_y, \quad (2.77) \\ \tilde{\nabla} &= \left(ik_x, ik_y, \frac{d}{dZ} \right), \quad \tilde{\Delta} = \frac{d^2}{dZ^2} - k^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2. \end{aligned}$$

Система (2.77) преобразуется в единственное обыкновенное дифференциальное для Фурье-образа поперечной скорости:

$$\left[\tilde{\Delta}^2 - (ik_x V_x + ik_y V_y) \tilde{\Delta} - ik_x 8R_c^{-1/2} \right] \tilde{U}_z = -ik_y V_{sy} \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(Z)}{dZ}, \quad (2.78)$$

$$Z = -R_c^{1/2} d/l, \quad R_c^{1/2} (1 - d/l) : \tilde{U}_z = \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} = 0. \quad (2.79)$$

Размерная поперечная сила для рассматриваемой конфигурации течения может быть представлена в виде

$$F'_L = 6\pi\rho V_{sy}'^2 a^2 c_m(d/l, V_{sy}, R_c), \quad (2.80)$$

где $c_m = O(1)$ - коэффициент поперечной скорости миграции. Таким образом, сила квадратично зависит от скорости скольжения, в отличие от случая, рассмотренного в п. 2.1. Поперечная сила рассчитывалась аналогично п. 2.1. в зависимости от трех основных безразмерных параметров: расстояния частицы до стенки d/l , параметра скольжения V_{sy} и числа Рейнольдса невозмущенного потока R_c . Параметры варьировались в широких пределах, $0.001 \leq V_{sy} \leq 4$, $0.1 \leq R_c \leq 1000$.

В работе [81] рассматривалась задача о движении малой сферы параллельно двум стенкам в покоящейся жидкости или при малых числах Рейнольдса невозмущенного потока, $R_c \ll 1$:

$$F'_{L,VC} = 6\pi\rho V_{sy}'^2 a^2 c_m^{VC}(d/l). \quad (2.81)$$

Коэффициент поперечной скорости миграции c_m^{VC} в этом случае зависит только от расстояния до ближайшей стенки. Для этой зависимости была предложена следующая аппроксимация:

$$c_m^{VC} = -0.3125\xi - 0.0996\xi^3 + 14.34\xi^5 - 116.3\xi^7 + 403.7\xi^9 - 518\xi^{11}, \quad (2.82)$$

$$\xi = d/l - 1/2.$$

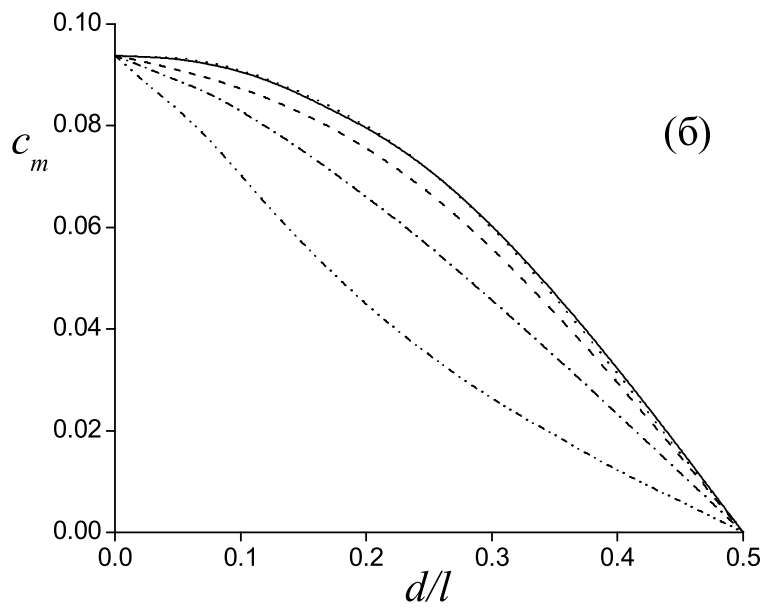
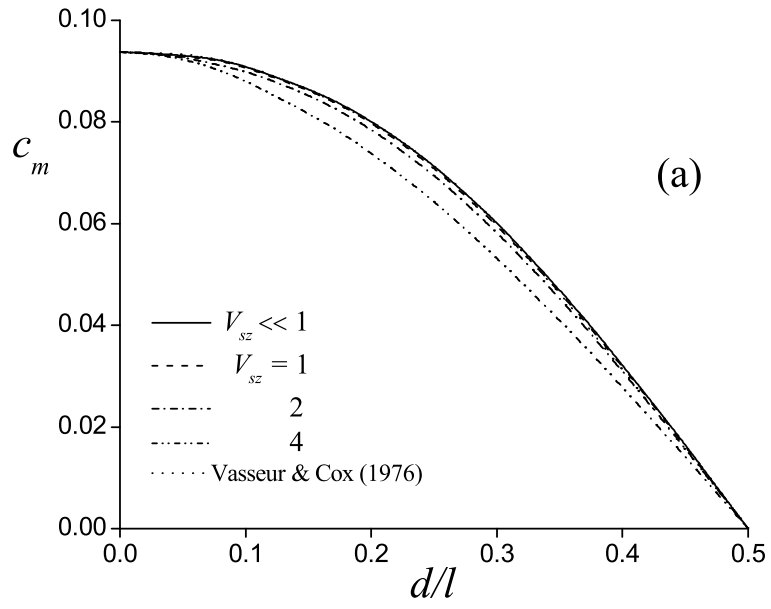
Сила направлена к центру канала, $c_m^{VC} \geq 0$, где находится единственное устойчивое положение равновесия, $c_m^{VC}(1/2) = 0$.

Результаты расчетов коэффициента поперечной скорости миграции показаны на Рис. 2.15 в зависимости от расстояния до стенки для различных V_{sy} , R_c . Для сравнения приведена зависимость (2.82). Коэффициент всегда положителен, т.е. частица мигрирует к устойчивому положению равновесия в центре канала. Вблизи стенки сила обусловлена только инерционным взаимодействием со стенкой и поэтому для всех V_{sy} , R_c

$$c_m(d/l \rightarrow 0) = c_m^{VC}(d/l \rightarrow 0) = 3/32.$$

Для чисел Рейнольдса $R_c \leq 1$ (Рис. 2.15(а)) c_m близок к значениям c_m^{VC} для любых d/l и V_{sy} , т.е. в этом случае задача эквивалентна движению сферы в покоящейся жидкости. При больших числах Рейнольдса (Рис. 2.15(с,д)) можно было ожидать, что коэффициент будет мал вдали от стенки, т.к. масштаб внешней области $lR_c^{-1/2}$ при этом мал, и инерционным взаимодействием со стенкой можно пренебречь. Можно видеть, однако, что зависимости при конечных V_{sy} могут иметь максимумы и превышать значения c_m^{VC} . Данный эффект связан с кривизной профиля невозмущенной скорости, и задачу также можно рассматривать, как движение в неограниченном параболическом потоке. Для ее описания следует ввести масштаб внешней области, основанный на кривизне профиля,

$$L^c = lR_c^{-1/3}.$$



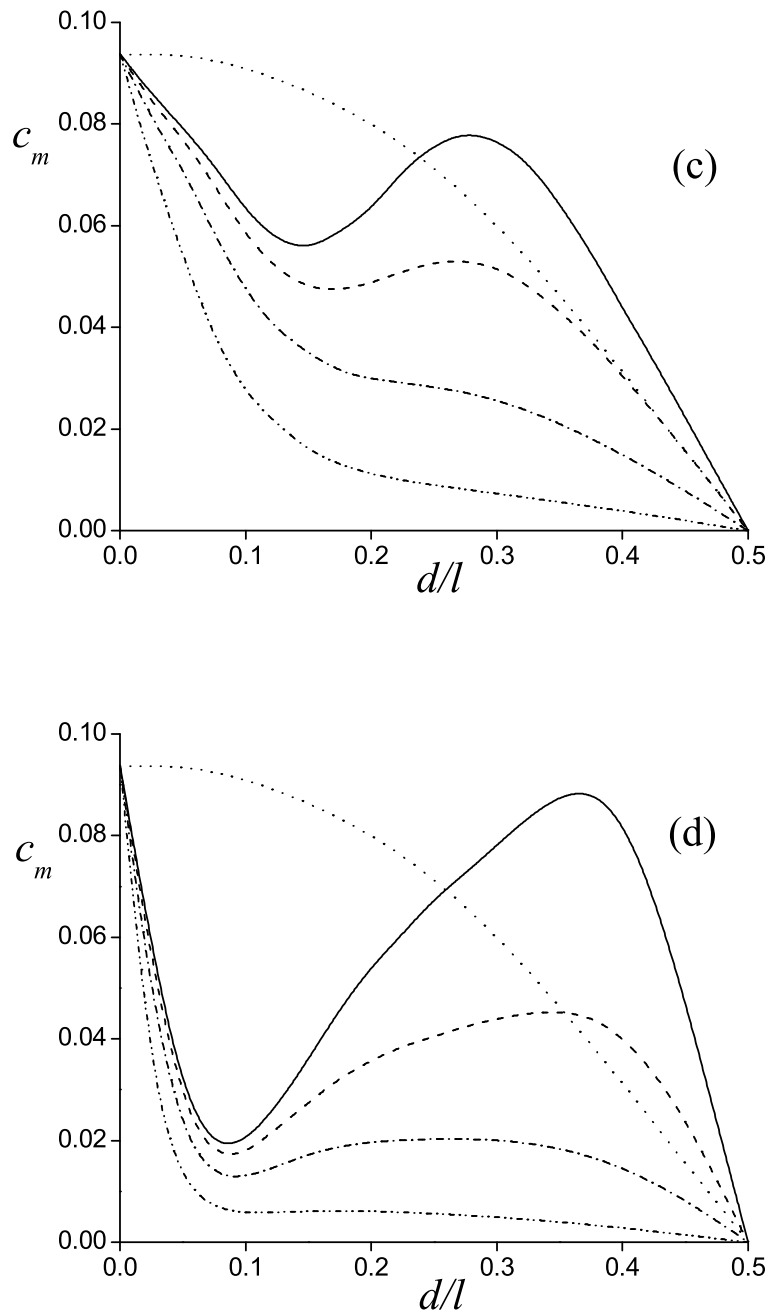


Рис. 2.15. Коэффициент поперечной скорости миграции для различных значений параметра V_{sy} и числа Рейнольдса (а) $R_c = 1$, (б) $R_c = 10$, (в) $R_c = 100$, (г) $R_c = 1000$.

Уравнение для Фурье-образа поперечной скорости (2.78) и граничное условие (2.79) при этом переписываются в виде

$$\left[\tilde{\Delta}^2 - (ik_x V_x^c + ik_y V_y^c) \tilde{\Delta} - 8ik_x \right] \tilde{U}_z = -ik_y V_{sy} \frac{3}{2\pi} \frac{d\delta(Z)}{dZ}, \quad (2.83)$$

$$Z = \pm R_c^{1/3}/2 - \xi : \quad \tilde{U}_z = \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} = 0, \quad (2.84)$$

$$V_x^c = 4(2\xi Z^c - Z^{c2}), \quad V_y^c = V_{sy} R_c^{2/3},$$

$$\xi = (1/2 - d/l) R_c^{1/3}, \quad Z^c = z'/L^c, \quad \mathbf{k}^c = R_c^{1/6} \mathbf{k}.$$

Здесь ξ - безразмерное расстояние частицы до оси канала. При фиксированном значении V_y^c уравнение (2.83) не включает число Рейнольдса. Для положения частицы на расстояниях порядка L^c от оси канала имеем $\xi = O(1)$, стенки находятся на больших расстояниях от частицы (граничное условие (2.84) эквивалентно условию затухания возмущений на бесконечности), и их влияние пренебрежимо мало. Таким образом, решение (2.83), (2.84) не должно зависеть от R_c , а только от двух безразмерных параметров, ξ и V_y^c . На рис. (2.16) показаны результаты расчета коэффициента поперечной силы в зависимости от ξ для различных значений параметра V_y^c . Как и следовало ожидать, зависимости, рассчитанные для нескольких больших значениях чисел Рейнольдса, совпадают для $\xi \sim 1$.

2.3.1. Произвольное направление скорости скольжения Результаты данного и предыдущих разделов могут быть обобщены и для произвольного направления скорости скольжения относительно скорости основного течения.

Поле скорости во внешней области описывается также уравнениями типа Озеена (ось x совпадает с направлением основного течения)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.85)$$

$$V_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + V_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial Y} + \frac{dV_x}{dZ} U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = -6\pi (V_{sy} \mathbf{e}_y + V_{sx} \mathbf{e}_x) \delta(\mathbf{R}),$$

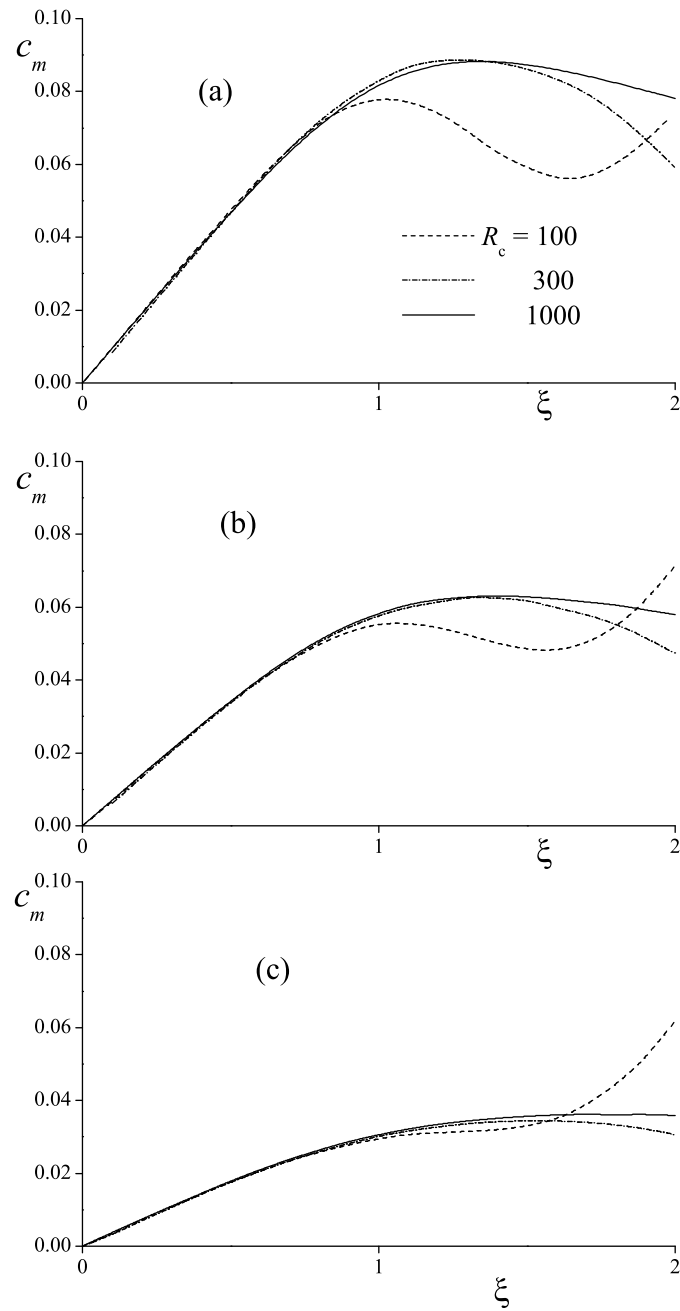


Рис. 2.16. Коэффициент поперечной силы вблизи центра канала для больших чисел Рейнольдса и различных значений параметра скольжения (a) предел сильного сдвига, ($\varepsilon^2 \ll V_{zc} \ll 1$), (b) $V_{zc} = 2$, (c) $V_{zc} = 4$.

$$Z = -R_c^{1/2}d/l, \quad R_c^{1/2}(1 - d/l) : \mathbf{U} = 0, \quad (2.86)$$

$$R \rightarrow \infty : \mathbf{U} = 0. \quad (2.87)$$

$$V_x = V_{sx}R_c^{1/2} + \gamma Z - 4R_c^{-1/2}Z^2, \quad V_y = V_{sy}R_c^{1/2}. \quad (2.88)$$

В данном случае сила, действующая на частицу, имеет две компоненты, параллельную, $6\pi V_{sx}\mathbf{e}_x$, и перпендикулярную, $6\pi V_{sy}\mathbf{e}_y$, основному течению. В соответствии с этим точечная сила в правой части уравнений (2.85) также имеет две компоненты. Поскольку уравнения (2.85) линейны, их решение можно строить в виде суперпозиции решений для параллельного и перпендикулярного относительного движения частицы. При этом, однако, следует иметь в виду, что скорость сдвига частицы входит не только в правую часть (2.85), но и в скорость невозмущенного потока $(V_x, V_y, 0)$ в левой части. Таким образом, в общем случае $V_{sx}, V_{sy} \sim 1$ решения для параллельного и перпендикулярного движения будут зависеть от обоих компонент скорости скольжения. Для случая сильного сдвига $|V_{sx}| \ll 1$, $|V_{sy}| \ll 1$ скоростью скольжения в профиле невозмущенной скорости можно пренебречь, и безразмерная поперечная сила является суммой сил, соответствующих параллельному и перпендикулярному относительному движению:

$$|V_{sx}| \ll 1, \quad |V_{sy}| \ll 1 : \quad F_L = 6\pi R_p^{1/2} \left[F_{1z}(d/l, R_c) + R_c^{-1/2} V_{sy}^2 c_m(d/l, R_c) \right],$$

где F_{1z} - безразмерная поперечная сила для движения в вертикальном течении (кривые 4 на Рис. 2.2).

2.4. Нейтрально плавучая частица

Для нейтрально плавучей частицы уравнения внешней области были впервые выведены в работе [91]. В отличие от указанной работы, где в качестве основного асимптотического параметра использовалась величина $a/l = R_p^{1/2}R_c^{-1/2}$, в настоящей работе для разложения используется параметр

$\varepsilon = R_p^{1/2}$. Если скорость обтекания удовлетворяет условию $|V| \ll \varepsilon^2/R_c$, возмущенное течение вызвано сдвиговым течением и вращением сферы. Разложения для \mathbf{u} и p могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_0^{nb} + o(\varepsilon), \quad p = \varepsilon p_0^{nb} + o(\varepsilon). \quad (2.89)$$

Главное приближение для возмущенного течения во внутренней области по-прежнему описывается уравнениями Стокса (2.14), (2.15), но граничные условия при этом другие:

$$r = 1 : \quad \mathbf{u}_0^{nb} = R_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r} - \gamma z \mathbf{e}_x), \quad (2.90)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u}_0^{nb} \rightarrow 0. \quad (2.91)$$

Следует отметить, что граничные условия (2.90), (2.91) не зависят от кривизны профиля невозмущенной скорости. Решение (2.14), (2.15), (2.90), (2.91) записывается в виде

$$\mathbf{u}_0^{nb} = R_c^{-1/2} \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_p + \frac{\gamma}{2} \mathbf{e}_y \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{5}{2} \gamma \mathbf{r} x z \left(\frac{1}{r^7} - \frac{1}{r^5} \right) - \frac{\gamma}{2r^5} (\mathbf{e}_x z + \mathbf{e}_z x) \right]. \quad (2.92)$$

Данное поле скорости приводит к действию на частицу момента $8\pi R_c^{-1/2} (\boldsymbol{\Omega}_p + \mathbf{e}_y \gamma/2)$, а сила на нее равна нулю. Считается, что частица вращается свободно, т. е. момент равен нулю, поэтому для угловой скорости вращения имеем $\boldsymbol{\Omega}_p = -\mathbf{e}_y \gamma/2$. В результате первый член в квадратных скобках в решении (2.92) также равен нулю.

Поле скорости (2.92) может быть записано во внешних переменных в виде

$$\mathbf{u}_0^{nb} = -\varepsilon^2 \frac{5}{2} R_c^{-1/2} \frac{\gamma \mathbf{R} X Z}{R^5} + O(\varepsilon^4). \quad (2.93)$$

Оно соответствует вязкому течению, индуцированному симметричным диполем в начале координат. С учетом (2.89) и (2.93) разложения скорости и

давления во внешней области обезразмериваются следующим образом

$$\mathbf{u} = \varepsilon^3 \mathbf{U} + o(\varepsilon^3), \quad p = \varepsilon^4 P + o(\varepsilon^2).$$

Условие сращивания выполняется автоматически, если в уравнении импульса для внешней области добавлен сингулярный член, соответствующий симметричному диполю [91]:

$$\nabla^2 \mathbf{U} - \nabla P - \bar{V}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} - \frac{d\bar{V}_x}{dZ} U_z \mathbf{e}_x = \frac{10}{3} \pi \gamma R_c^{-1/2} \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial \delta(\mathbf{R})}{\partial Z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \delta(\mathbf{R})}{\partial X} \right], \quad (2.94)$$

$$\bar{V}_x = \gamma Z - 4R_c^{-1/2} Z^2.$$

Уравнение (2.94) должно быть решено совместно с уравнением неразрывности и граничными условиями (2.26), (2.27). Полученная система также может быть, аналогично (2.24)-(2.27), сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению для Фурье-образа поперечной скорости:

$$\left(\tilde{\Delta}^2 - ik_x \bar{V}_x \tilde{\Delta} - ik_x 8R_c^{-1/2} \right) \tilde{U}_z = ik_x \gamma R_c^{-1/2} \frac{5}{6\pi} \left[\frac{d^2 \delta(Z)}{dZ^2} + k^2 \delta(Z) \right], \quad (2.95)$$

с граничными условиями (2.33). Член в правой части эквивалентен скачку первой и третьей производных в начале координат:

$$\left[\frac{d\tilde{U}_z}{dZ} \right] = ik_x \gamma R_c^{-1/2} \frac{5}{6\pi},$$

$$\left[\frac{d^3 \tilde{U}_z}{dZ^3} \right] = [2k^2 + ik_x \bar{V}_x(0)] \left[\frac{d\tilde{U}_z}{dZ} \right] + ik_x k^2 \gamma R_c^{-1/2} \frac{5}{6\pi} = ik_x k^2 \gamma R_c^{-1/2} \frac{5}{2\pi}.$$

С учетом того, что Фурье-образ поперечной скорости, соответствующий симметричному диполю, является чисто мнимой величиной, поперечная сила на частицу выражается соотношением

$$F_z = 6\pi \varepsilon^3 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_z|_{Z \rightarrow 0} dk_x dk_y \right]. \quad (2.96)$$

Численное решение (2.95) и вычисление интегралов (2.96) производилось аналогично п. 2.1.. Для аппроксимации \tilde{U}_z при больших k использовалось асимптотическое решение (2.95). Для нейтрально плавучей частицы из него можно получить:

$$\operatorname{Re} \tilde{U}_z(k_x, k_y, 0) = \gamma R_c^{-1} \frac{15 k_x^2}{8\pi k^5} + O(k^{-5}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Результаты расчетов F_z представлены на Рис. 2.17 в виде функций от расстояния до стенки для различных чисел Рейнольдса, $15 \leq R_c \leq 3000$. Для $R_c = 15$ рассчитанные значения находятся в хорошем соответствии с кривой, полученной в работе [91] и близки к значениям, найденным в асимптотическом пределе $R_c \ll 1$ [81]. В случае больших чисел Рейнольдса влияние стенки опять проявляется только в тонких пристеночных слоях. В большей части течения ее влияние мало, и величина поперечной силы значительно меньше и убывает с числом Рейнольдса.

Положение равновесия нейтрально плавучей частицы d_{eq}/l_p в зависимости от R_c показано на Рис. 2.18. Число Рейнольдса, для которого поперечная сила равна нулю для данного d_{eq} , вычислялось методом Ньютона.

Для того чтобы разделить эффекты, связанные с влиянием стенки и кривизной профиля невозмущенной скорости, следует получить решение во внешней области, используя L_{Sa} в качестве ее масштаба. Возмущенная скорость при этом обезразмеривается на $U'_G = (\nu G)^{1/2}$ вместо U'_m , а безразмерная сила на частицу записывается в виде $F_z = \varepsilon_G^3 c_{nb} \mathbf{e}_z$, где $c_{nb} = O(1)$ - коэффициент поперечной силы для нейтрально плавучей частицы. Следовательно, для размерной силы имеем выражение:

$$\mathbf{F}' = \rho G^2 a^4 c_{nb} \mathbf{e}_z.$$

2.4.1. Течение в канале Аналогично (2.95) можно получить следующее уравнение для Фурье-образа поперечной скорости:

$$\left(\tilde{\Delta}_G^2 - iq_x \bar{V}_{Gx} \tilde{\Delta}_G - iq_x 2\sigma \right) \Gamma_z = iq_x \frac{5}{6\pi} \left[\frac{d^2 \delta(\zeta)}{d\zeta^2} + q^2 \delta(\zeta) \right]. \quad (2.97)$$

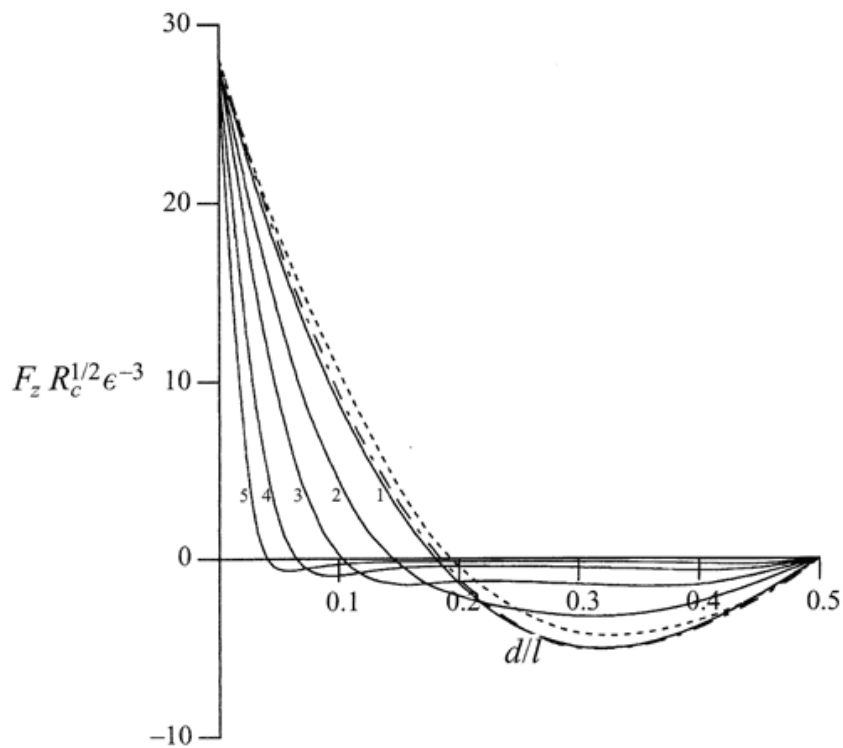


Рис. 2.17. Поперечная сила на нейтрально плавучую частицу при $R_c = 15, 100, 300, 1000, 3000$ (кривые 1-5). Штрих-пунктирная кривая - результаты работы [91] для $R_c = 15$, штриховая линия - результаты работы [82].

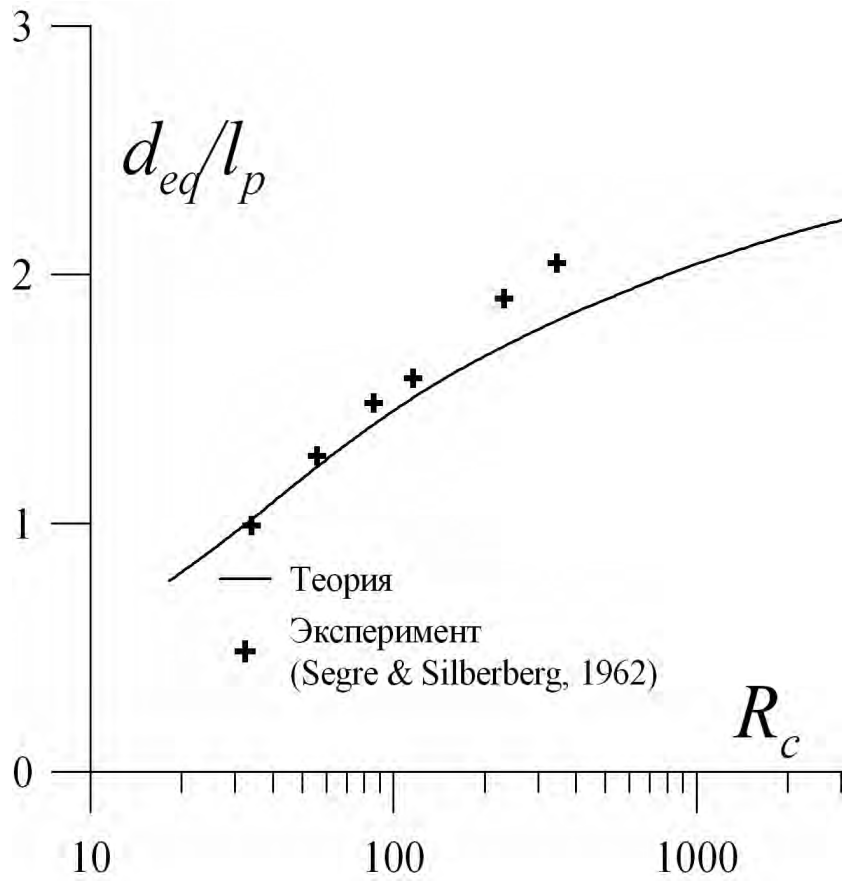


Рис. 2.18. Теоретическое положение устойчивого равновесия нейтрально плавучей частицы в сравнении с экспериментальными ([56], кресты) результатами.

$$\bar{V}_{Gx} = \zeta - \sigma\zeta^2. \quad (2.98)$$

Зависимости коэффициента поперечной силы c_{nb} представлены на Рис. 2.19 в виде функций от σ для различных чисел Рейнольдса. Их поведение аналогично случаю не нейтрально плавучей частицы (см. Рис. 2.6), и они также сходятся к предельной зависимости c_{nb}^u , соответствующей неограниченному потоку и зависящей только от одного параметра в (2.98), σ . Для определения c_{nb}^u использовалась процедура, аналогичная случаю не нейтрально плавучей частицы. Зависимость $c_{nb}^u(\sigma)$ представлена на Рис. 2.20. Величина поперечной силы монотонно растет и равна нулю для неограниченного линейного сдвигового потока ($\sigma = 0$) в силу симметрии.

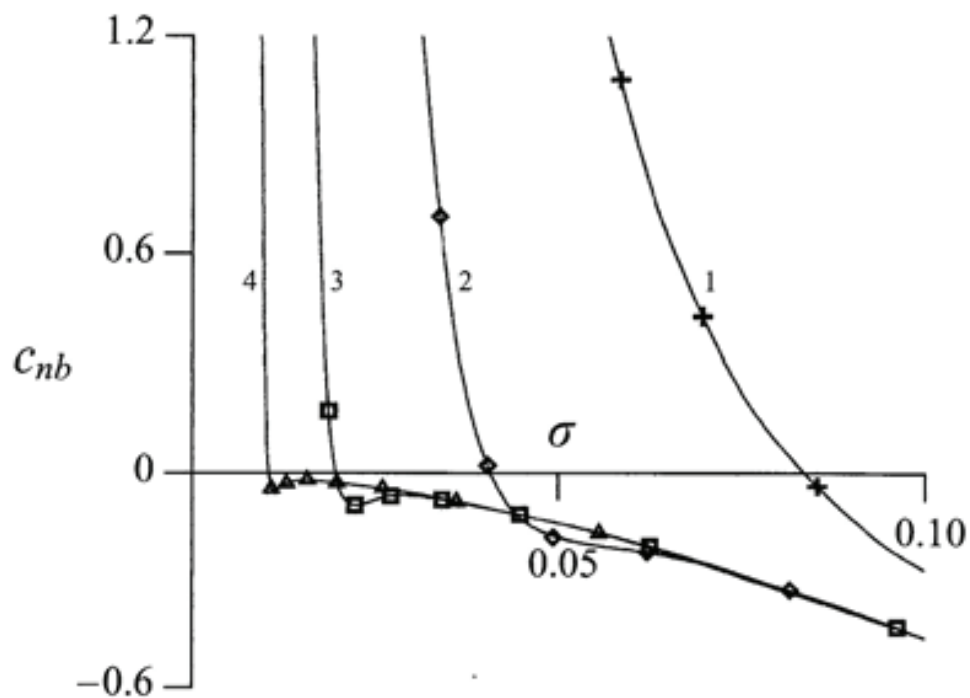


Рис. 2.19. Коэффициент поперечной силы нейтрально плавучей частицы в зависимости от параметра σ для $R_c = 100, 300, 1000, 3000$ (кривые 1-4).

Символы на кривых соответствуют значениям (слева направо)

$$d/l = 0.05, 0.1, 0.15, \dots$$

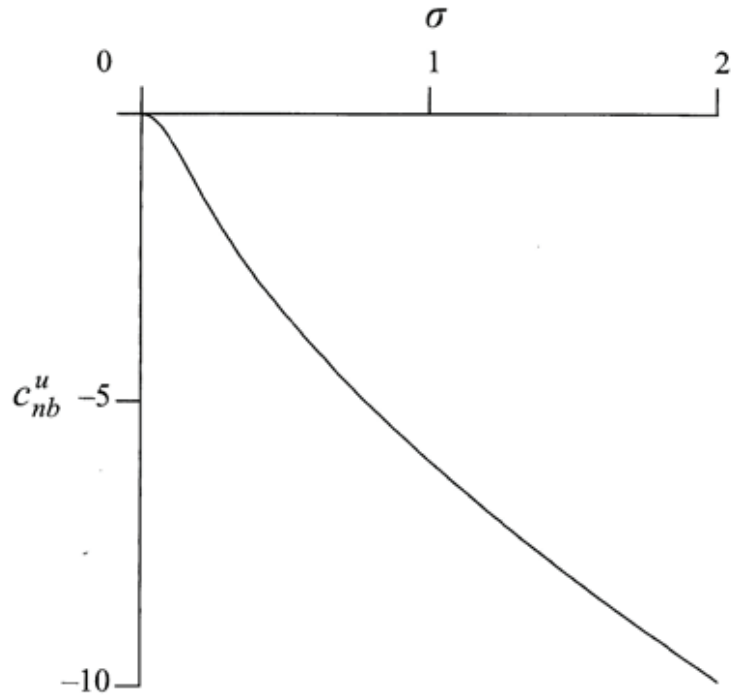


Рис. 2.20. Коэффициент поперечной силы нейтрально плавучей частицы в неограниченном параболическом потоке.

2.4.2. Линейный сдвиговой поток, ограниченный одной стенкой В этом случае поперечная сила вызвана только влиянием стенки. Фурье-образ поперечной скорости также описывается уравнением (2.97), но профиль скорости и граничные условия иные:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{Gx} &= \zeta, \\ \zeta = -\zeta_w < 0 : \quad \Gamma_z &= \frac{d\Gamma_z}{d\zeta} = 0, \\ \zeta \rightarrow +\infty : \quad \Gamma_z &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Границы области интегрирования, как и для случая не нейтрально плавучей частицы располагаются на достаточно большом расстоянии от сферы. Для двух убывающих с $|\zeta|$ решений в этом случае можно получить:

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad q = O(1) : \quad \varphi_1 = \exp(-q\zeta), \quad \varphi_2 = \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{iq_x}\zeta^{3/2}\right),$$

На Рис. 2.21 представлена зависимость $c_{nb}(\zeta_w)$. Сила всегда положительна, т.е. направлена от стенки.

2.5. Сравнение с экспериментальными данными

Теоретические результаты можно сравнить с данными экспериментальных работ [56, 63]. Миграция частиц в вертикальном канале с числами Рейнольдса канала 42 – 230 и числами Рейнольдса частицы 0.02 – 0.5 изучалась в [63]. Результаты сравнения приведены на Рис. 2.22. Там же показаны кривые, рассчитанные в работе [92], в которой не учитывалось влияние однородного потока в профиле невозмущенной скорости, т.е. считалось $|v| \ll 1$. Теоретические зависимости отличаются друг от друга, т.е. роль однородного потока в расчетах поперечной силы существенна даже при небольшом v . Кроме того, теоретические данные обеих работ значительно отличаются от экспериментальных. Причинами отличий могут быть разная геометрия

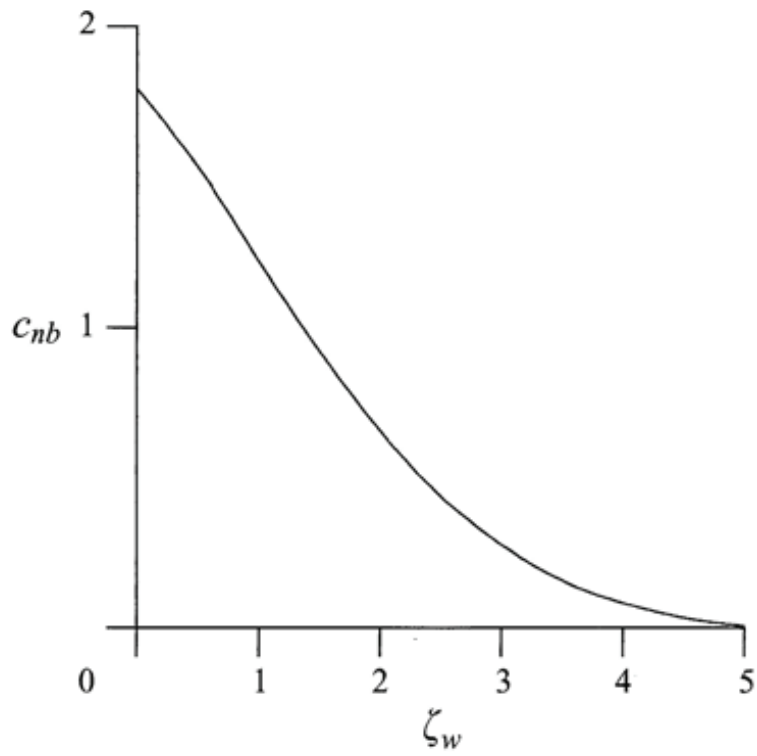


Рис. 2.21. Коэффициент поперечной силы нейтрально плавучей частицы в линейном сдвиговом потоке, ограниченном одной стенкой.

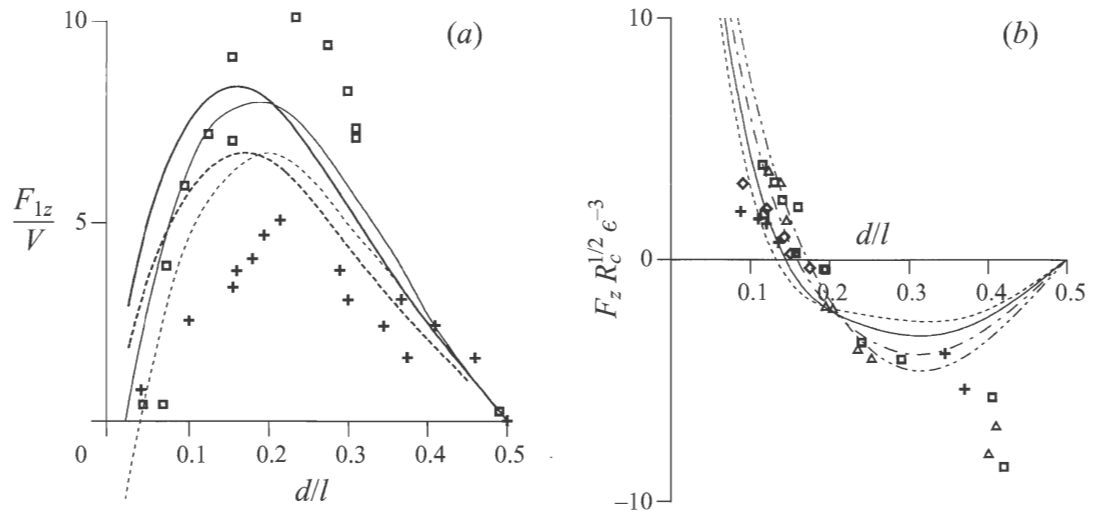


Рис. 2.22. Сравнение результатов теоретических расчетов (кривые) поперечной силы для (а) не нейтрально плавучей и (b) нейтрально плавучей частиц с экспериментальными (символы), [63] и [56], соответственно. (а) $R_c = 90.6$, $v = 0.379$ (штриховые линии, кресты); $R_c = 178$, $v = 0.27$ (сплошные кривые, квадраты). Жирные линии - результаты настоящей работы, тонкие - работы [92].

(b) $R_c = 39.2$ (штрих-двойной-пунктир, треугольники); $R_c = 67.6$ (штрих-пунктирная кривая, квадраты); $R_c = 104.6$ (сплошные кривые, ромбы) $R_c = 144.4$ (штриховые линии, кресты).

(плоская в теории и круговая в эксперименте) и конечность числа Рейнольдса частиц.

Результаты сравнения величины поперечной силы для нейтрально плавающей частицы и положения равновесия с данными [56] приведены на Рис. 2.22(b) и 2.18, соответственно. Расчетные кривые хорошо предсказывают экспериментальные значения, за исключением положений частиц, близких к оси канала. Теоретическая и экспериментальная зависимости положения равновесия очень близки для $R_c \leq 100$. Причиной различия для больших чисел Рейнольдса канала является, видимо, конечность числа Рейнольдса частиц R_p . Так для $R_c = 116, 232, 346$ число R_p в экспериментах составляло 0.34, 0.68 и 1.00.

В заключение данной Главы приведем классификацию различных режимов инерционной миграции при больших R_c в зависимости от параметра скольжения α и расстояния до стенки d (см. Табл. 2.3).

Результаты второй главы опубликованы в работах [37, 47, 48, 49, 40, 52, 42, 43, 45].

Вертикальный канал, не нейтрально плавающие частицы	$\alpha \sim 1$	$d \sim l$	Гл. 1, $F_L \sim \mu a^2 V_s (G/\nu)^{1/2}$. Существенно влияние стенок, кривизной профиля невозмущенной скорости можно пренебречь
Горизонтальный канал, не нейтрально плавающие частицы	$\alpha \sim 1$	$d \sim R_c^{-1/2} l$	Гл. 2.1.4. Влияние стенок несущественно, необходимо учитывать кривизну профиля
Вертикальный канал, не нейтрально плавающие частицы	$\alpha \gg 1$	$d \sim l$	Гл. 2.2. $F_L \sim \mu a^2 V_s^2 R_c^{-2} / \nu$. Невязкое взаимодействие со стенками и параболическим профилем
Горизонтальный канал, не нейтрально плавающие частицы	$\alpha \sim 1$		Гл. 2.3. $F_L \sim \mu a^2 V_s^2 / \nu$
Нейтрально плавающие частицы	$\alpha \ll R_s^2$	$d \sim l$	Гл. 2.4.1. $F_L \sim \rho a^4 G^2$. Влияние стенок несущественно, необходимо учитывать кривизну профиля
Нейтрально плавающие частицы		$d \sim R_c^{-1/2} l$	Гл. 2.4.2. Существенно влияние стенок, кривизной профиля невозмущенной скорости можно пренебречь

Таблица 2.3

Классификация режимов инерционной миграции частиц в течении в канале при больших числах Рейнольдса канала

ГЛАВА 3

ВОЗМУЩЕННОЕ ПОЛЕ СКОРОСТИ ВДАЛИ ОТ ЧАСТИЦЫ

В данной главе рассматривается поле возмущенного течения при обтекании частицы неограниченным сдвиговым потоком [44, 54]. При этом определяются все три компоненты скорости во всех областях течения: вязкой, Озеена, невязкой и в вязких следах (см. Рис. 3.1). Полученные результаты используются также для описания дальнего инерционного взаимодействия пары частиц в сдвиговом потоке.

3.1. Фурье-преобразование поля скорости

Фурье-образ поперечной скорости \tilde{U}_z описывается уравнением (1.35). Для определения двух других компонент, \tilde{U}_x и \tilde{U}_y , вводится двумерное преобразование Фурье поля завихренности,

$$\tilde{\omega}_z \equiv i \left(k_y \tilde{U}_x - k_x \tilde{U}_y \right).$$

Уравнение для $\tilde{\omega}_z$ можно получить из (1.34):

$$\left[\tilde{\Delta} - ik_x (\alpha + Z) \right] \tilde{\omega}_z = ik_y \left[\frac{3}{2\pi} \delta(Z) + \tilde{U}_z \right]. \quad (3.1)$$

С учетом (1.33) Фурье-образы X и Y компоненты скорости можно выразить через $\frac{d\tilde{U}_z}{dZ}$ и $\tilde{\omega}_z$ следующим образом:

$$\tilde{U}_x = ik^{-2} \left(k_x \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} - k_y \tilde{\omega}_z \right), \quad \tilde{U}_y = ik^{-2} \left(k_y \frac{d\tilde{U}_z}{dZ} + k_x \tilde{\omega}_z \right). \quad (3.2)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (1.35), (3.1) интегрировались численно с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности и метода ортонормализации Годунова [123]. Границы области интегрирования устанавливались на достаточно больших расстояниях $|Z|$ от

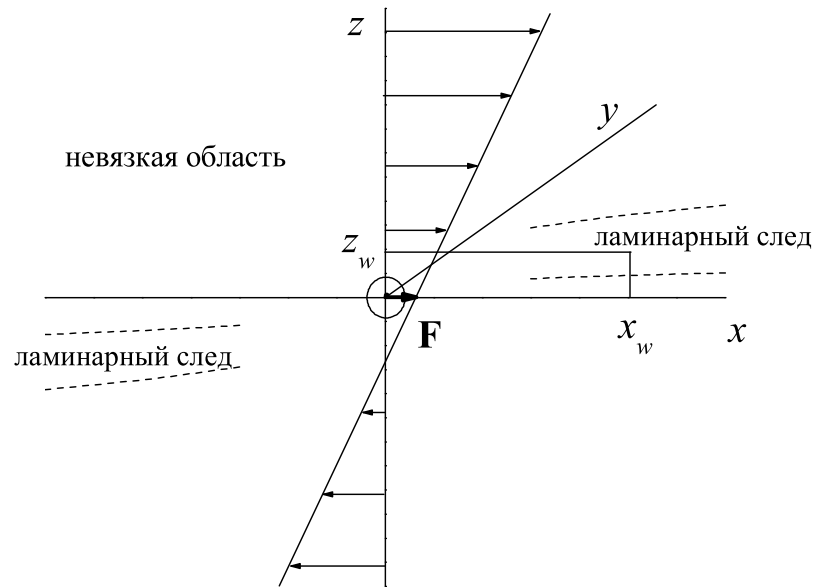


Рис. 3.1. Схема дальнего поля течения, индуцированного сферой в неограниченном сдвиговом потоке.

сферы, где можно получить аналитические выражения для линейно независимых решений $\varphi_i(Z)$, $i = 1 - 4$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (1.35) имеет 4 линейно независимых решения φ_i , $i = 1 - 4$. Предполагая для них следующую экспоненциальную зависимость

$$\varphi_i = \exp(\lambda_i |Z|^{\nu_i}),$$

можно получить два решения, затухающих при больших $|Z|$ [37]:

$$Z \rightarrow \infty, k = O(1): \quad \varphi_1 \sim \exp(-k|Z|), \quad \varphi_2 \sim \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{ik_x}|Z|^{3/2}\right). \quad (3.3)$$

Здесь выбирается ветвь комплексной функции $\sqrt{ik_x}$ с положительной действительной частью. Два решения имеют масштабы $L_1 = k^{-1}$ и $L_2 = |k_x|^{-1/3}$, соответственно.

Возмущения скорости определяются в результате численного интегрирования обратного преобразования Фурье (1.32) с использованием полярных координат k , $\theta = \arccos(k_x/k)$,

$$\mathbf{U} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{U}} \exp[ik(X \cos \theta + Y \sin \theta)] k dk d\theta. \quad (3.4)$$

Из уравнений (1.35), (3.1), (3.2) можно сделать вывод, что \tilde{U}_z и \tilde{U}_x - четные функции k_y , а $\tilde{\omega}_z$ и \tilde{U}_y - нечетные. Кроме того, выполняются соотношения $\tilde{\mathbf{U}}(k_x, k_y, Z) = \tilde{\mathbf{U}}^*(-k_x, k_y, Z)$. Здесь верхний индекс * обозначает комплексно сопряженные величины. В результате достаточно получить решение (1.35) и проинтегрировать (3.4) только для первого квадранта, $k_x \geq 0, k_y \geq 0$:

$$U_{x,z} = 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} \left[\tilde{U}_{x,z} \exp(ikX \cos \theta) \right] \cos(kY \sin \theta) k dk d\theta,$$

$$U_y = -4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \operatorname{Im} \left[\tilde{U}_y \exp(ikX \cos \theta) \right] \sin(kY \sin \theta) k dk d\theta. \quad (3.5)$$

Следствием последних уравнений также является четность U_z и U_x и нечетность U_y по Y . Для предельного случая сильного сдвига ($\alpha \ll 1$) x и z - компоненты возмущенной скорости - четные функции, а y - компонента - нечетная функция \mathbf{R} , т.е.

$$U_{x,z}(\mathbf{R}) = U_{x,z}(-\mathbf{R}), \quad U_y(\mathbf{R}) = -U_y(-\mathbf{R}).$$

Это можно доказать, введя новую систему координат

$$\mathbf{R}' = (X', Y', Z') = -(X, Y, Z), \quad (k'_x, k'_y, Z') = -(k_x, k_y, Z)$$

и поменяв знак точечной силы. Тогда будем иметь из уравнений (1.35), (3.1), (3.2), (3.4):

$$\tilde{\mathbf{U}}' = -\tilde{\mathbf{U}}^*, \quad U'_{x,z}(\mathbf{R}') = -U_{x,z}(\mathbf{R}), \quad U'_y(\mathbf{R}') = U_y(\mathbf{R}).$$

Следует также отметить, что возмущенная скорость для нейтрально-плавающей частицы имеет другую симметрию: U_z и U_x нечетные функции \mathbf{R} [128].

3.1.1. Асимптотика прямых и обратных преобразований Фурье Обратные преобразования Фурье (3.5) интегрируются численно для данного R до значения $k_{\max} = 30R^{-1}$. Для того чтобы вычислить вклад интервала (k_{\max}, ∞) , необходимо найти асимптотику подынтегрального выражения при $k \gg 1$. Кроме того, численное решение конечно-разностных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.35) и (3.2) представляет дополнительные трудности при $k \ll 1$ и $k \gg 1$. Для малых k масштабы линейно независимых решений (3.3), L_1 и L_2 , велики и существенно различаются при $k_x \sim k_y \sim k \ll 1$. В результате решение φ_2 затухает гораздо быстрее, и решение φ_1 является основным в дальней области (смотри (3.6)). Поэтому даже метод ортонормализации не позволяет с достаточной точностью получить решение (1.35) и (3.2), и необходимо построение асимптотических решений для $\tilde{\mathbf{U}}$.

Малые волновые числа соответствуют полю скорости в дальней невязкой области. В работе [90] было получено асимптотическое решение для Фурье-образа нормальной компоненты поля скорости,

$$k \ll 1, |Z| \gg 1: \quad \tilde{U}_z^{as} = A k_x^{2/3} k^{-1} \exp(-k|Z|), \quad (3.6)$$

$$\frac{d\tilde{U}_z^{as}}{dZ} = -A \operatorname{sgn}(Z) k_x^{2/3} \exp(-k|Z|),$$

$$A = \frac{3^{2/3}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Из решения (3.6) была также найдена асимптотика самой скорости на оси Z :

$$|Z| \gg 1: \quad U_z^{as}(0, 0, Z) = 0.9064 |Z|^{-5/3}. \quad (3.7)$$

Следует заметить, что U_z^{as} - четная функция Z , т.е. возмущения антисимметричны, в отличие от симметричных возмущений, возникающих при обтекании сферы однородным потоком.

Уравнение (3.6) не удовлетворяет условию (1.38), т.к.

$$\tilde{U}_z^{as} = O(k^{-1/3}), \quad \left[\frac{d^2 \tilde{U}_z^{as}}{dZ^2} \right] \sim k^{-1/3} L_1^{-2} = O(k^{5/3}),$$

в то время как из (1.38) следует, что скачок второй производной равен $O(k)$. Это означает, что условию (1.38) удовлетворяет второе асимптотическое решение (3.3), т.к. оно изменяется на меньшем масштабе:

$$\left[\frac{d^2 \varphi_2}{dZ^2} \right] \sim \varphi_2 L_2^{-2} = O(k),$$

так что $\varphi_2 = O(k^{1/3}) \ll \varphi_1$. Таким образом, выражение (3.6) действительно определяет основной вклад в Фурье-образ поперечной скорости в дальней области.

Свойства поля скорости U_z в дальней невязкой области, которой соответствуют малые k , можно найти из (3.6). Степенной закон нормальной

скорости (3.7) для $|Z| \gg 1$, полученный в [90], может быть легко получен из зависимости Фурье-образа

$$\tilde{U}_z^{as} \sim k^{-1/3} \exp(-k|Z|)$$

. Обратное преобразование Фурье (3.4) формируется за счет малых значений $k \sim |Z|^{-1} \ll 1$, в результате $U_z \sim \tilde{U}_z k^2 \sim |Z|^{-5/3}$ при $|Z| \gg 1$. Подставляя (3.6) в (1.32) будем иметь

$$R \gg 1: \quad U_z = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_x^{2/3} k^{-1} \exp[-k|Z| + i(k_x X + k_y Y)] dk_x dk_y.$$

Интегрируя по k_y , получим

$$\begin{aligned} \rho \gg 1: \quad U_z &= 2A \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k_x \rho) k_x^{2/3} \exp(ik_x X) dk_x, & (3.8) \\ \rho &= (Y^2 + Z^2)^{1/2} \end{aligned}$$

где K_0 - модифицированная функция Бесселя. Уравнение (3.8) означает, что поле U_z обладает цилиндрической симметрией при больших ρ , $U_z = U_z(X, \rho)$, для любых α и X . При $X = 0$, интегрирование по k_x в (3.8) также можно произвести явно [121]:

$$X = 0, \quad \rho \gg 1: \quad U_z = 2^{4/3} A (\Gamma(5/6))^2 \rho^{-5/3} = 0.9064 \rho^{-5/3}. \quad (3.9)$$

Таким образом, получено обобщение асимптотического результата (3.7), найденного в работе [90] только для оси Z ($X = 0$, $Y = 0$), на всю медианную плоскость, $X = 0$. Возмущение U_z убывает по закону $\rho^{-5/3}$ в невязкой области в сдвиговом потоке, т.е. медленнее, чем в однородном потоке, где имеет место закон убывания ρ^{-2} .

Асимптотическое решение для малых значений k и больших $|Z| \sim k^{-1} \gg 1$ можно также получить для Фурье-образа завихренности $\tilde{\omega}_z$. Член, пропорциональный \tilde{U}_z в правой части (3.1) имеет порядок $k^{-1/3} \gg 1$, а в левой части имеем

$$|\tilde{\Delta}| \sim k^2 \ll |k_x(\alpha + Z)| \sim 1.$$

В результате с учетом (3.6) получим:

$$|Z| \sim k^{-1} \gg 1: \quad -ik_x Z \tilde{\omega}_z^{as} = ik_y \tilde{U}_z = iAk_x^{2/3} k_y k^{-1} \exp(-k|Z|), \quad (3.10)$$

откуда с учетом (3.2) и (3.6) можно получить асимптотическое решение для Фурье-образов \tilde{U}_x и \tilde{U}_y при $|Z| \sim k^{-1} \gg 1$:

$$\tilde{U}_x^{as} = \frac{iA}{k_x^{1/3} k^2} \left(-\operatorname{sgn}(Z) k_x^2 + \frac{k_y^2}{Zk} \right) \exp(-k|Z|), \quad (3.11)$$

$$\tilde{U}_y^{as} = \frac{iAk_x^{2/3} k_y}{k^2} \left(-\operatorname{sgn}(Z) - \frac{1}{Zk} \right) \exp(-k|Z|).$$

Численное интегрирование уравнений (1.35) и (3.1) проводилось в интервале $-20L_2 \leq Z \leq 20L_2$. Для бóльших расстояний использовались асимптотические решения (3.6) и (3.11).

В противоположном предельном случае, при больших волновых числах, необходимо сравнивать полученное численное решение (1.35) с Фурье-образами Стокслета и Озеенлета, $\tilde{\mathbf{U}}^S$ и $\tilde{\mathbf{U}}^O$, полученными в работе [66]

$$\begin{aligned} \tilde{U}_x^S &= \frac{3}{8\pi} \left[-\frac{2}{k} + \frac{k_x^2}{k^3} (1 + k|Z|) \right] \exp(-k|Z|), \\ \tilde{U}_y^S &= \frac{3}{8\pi} \frac{k_x k_y}{k^3} (1 + k|Z|) \exp(-k|Z|), \\ \tilde{U}_z^S &= \frac{3}{8\pi} \frac{ik_x}{k} Z \exp(-k|Z|), \\ \tilde{U}_x^O &= -\frac{3}{4\pi\alpha} \left[\frac{ik_x \exp(-k|Z|)}{k} - \frac{(ik_x - \alpha) \exp(-t|Z|)}{t} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_y^O &= -\frac{3ik_y}{4\pi\alpha} \left[\frac{\exp(-k|Z|)}{k} - \frac{\exp(-t|Z|)}{t} \right], \\ \tilde{U}_z^O &= \frac{3}{4\pi\alpha} \operatorname{sgn}(Z) [\exp(-k|Z|) - \exp(-t|Z|)], \\ t &= \sqrt{k^2 + i\alpha k_x}.\end{aligned}$$

Большие значения k соответствуют полю скорости в вязкой области. Если $|Z| \sim R \ll 1$, основной вклад в интеграл (3.4) дают величины $k \sim R^{-1}$. В результате имеем $\mathbf{U} \sim \tilde{\mathbf{U}}k^2 \sim R^{-1}$, т.е. закон убывания Стокслета.

Разность $\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}^S$ соответствует поправке первого порядка к полю скорости (1.24). Интеграл от нее по большим значениям $k = O(R^{-1})$ приводит к возникновению разрывности решения \mathbf{u}_∞^{PP} в начале координат. Однородная часть решения \mathbf{w}_∞ срачивается с внутренним пределом разности $\mathbf{U} - \mathbf{U}^O$:

$$\mathbf{w}_\infty = \left\{ \int \int (\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}^O) \exp[ik(X \cos \theta + Y \sin \theta)] k dk d\theta \right\} \Big|_{R \rightarrow 0}. \quad (3.12)$$

Найденные численно значения $\tilde{\mathbf{U}}$ близки к $\tilde{\mathbf{U}}^S$ и $\tilde{\mathbf{U}}^O$:

$$k \gg 1: \quad \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^S [1 + O(k^{-1})], \quad \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^O [1 + O(k^{-2})].$$

В результате интеграл (3.12) сходится при $k \gg 1$.

Для значений $|Z| \sim 1$ преобразование Фурье можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{a}(k, \theta, Z) \exp(-k|Z|)$$

при $k \gg |Z|^{-1}$, где вектор \mathbf{a} не содержит экспоненциально больших членов. Тогда для вычисления асимптотического вклада интервала (k_{\max}, ∞) в обратное преобразование Фурье (3.4) используем следующее соотношение

[129]:

$$\begin{aligned}
 & k_{\max} R \gg 1 : \int_{k_{\max}}^{\infty} \mathbf{a} \exp(-kS) k dk \\
 &= \frac{\mathbf{a}(k_{\max}, \theta, Z) k_{\max} \exp(-k_{\max} S)}{S} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_{\max} R}\right) \right], \\
 & S = |Z| - i(X \cos \theta + Y \sin \theta), \quad S = O(R).
 \end{aligned}$$

Основной вклад при интегрировании по θ в (3.4) дает малый интервал вблизи точек $\theta_0 = \arctan(Y/X) \pm \pi$, где $\operatorname{Re} S$ достигает минимумов. В результате в главном приближении по $(k_{\max} R)^{-1}$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{k_{\max}}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{U}} \exp[ik(X \cos \theta + Y \sin \theta)] k dk d\theta \\
 &= 2\operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{2\pi k_{\max}}{\eta}} \frac{\mathbf{a}(k_{\max}, \theta_0, Z) \exp\{i(k_{\max} \eta - \pi/4) - k_{\max} |Z|\}}{i\eta - |Z|} \right],
 \end{aligned}$$

где $\eta^2 = X^2 + Y^2$. Последняя формула верна также при $k_{\max} |Z| \sim 1$, если $k_{\max} R \gg 1$.

3.2. Численные результаты

Численные значения двух компонент инерционной скорости миграции (3.12) совпадают для случая $\alpha \ll 1$ с величинами, найденными ранее: $w_{z\infty} = 0.343$ [72] и $w_{x\infty} = 0.0735$ [127]. Y -компонента скорости миграции равна нулю в силу симметрии: U_y - нечетная функция Y .

Поле нормальной компоненты возмущенной скорости U_z показано на Рис. 3.2-3.4. Поскольку Стокслет $U_z^S = 0$ при $X = 0$, функция U_z имеет конечные пределы при $X \rightarrow 0$ на осях Y и Z . На Рис. 3.2 показаны зависимости $U_z(0, 0, Z)$ для $\alpha \ll 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$. Их значения в начале координат ($\mathbf{w}_{\infty}(\alpha)$, точки на Рис. 3.2(a)) совпадают с величинами, полученными в работах [30, 89]. Разрывность численного решения в начале координат соответствует разрывности части решения \mathbf{u}_{∞}^{PP} . Для больших

$|Z|$ зависимости убывают по степенному закону $|Z|^{-5/3}$ (см. Рис. 3.2(b)) в соответствии с асимптотическим решением (3.7).

На Рис. 3.3 представлена зависимость U_z от координаты Y для тех же значений α и $X = Z = 0$. Для больших Y все кривые близки к асимптотическому решению $0.9064|Y|^{-5/3}$ (уравнение (3.9)). Цилиндрическая симметрия U_z для больших R (уравнение (3.8)) проиллюстрирована на Рис. 3.4, где показаны численные значения линий уровня U_z .

Поле трансверсальной компоненты на оси Y ($X = Z = 0$) представлено на Рис. 3.5. U_y равна нулю при $\alpha \ll 1$ вследствие симметрии. Численные результаты сравниваются с трансверсальной компонентой возмущенной скорости для однородного течения [66],

$$U_{\perp}^{VC} = \frac{3}{4\alpha R^2} (2 - (R\alpha + 2) \exp(-R\alpha/2)). \quad (3.13)$$

Возмущения скорости в сдвиговом потоке всегда больше. Обе зависимости имеют одинаковое значение при $Y \rightarrow 0$:

$$U_y|_{Y \rightarrow 0} = 3\alpha/16 \operatorname{sgn}(Y),$$

равное внешнему пределу внутреннего решения первого порядка (1.26). U_{\perp}^{VC} убывает как R^{-2} при $R \rightarrow \infty$, т.е. в невязкой области. На Рис. 3.5 (b) можно видеть, что U_y убывает в невязкой области как $|Y|^{-4/3}$, т.е. медленнее, чем решение для однородного течения $U_{\perp}^{VC} \sim |Y|^{-2}$.

На Рис. 3.6 и 3.7 представлены изолинии поля U_y и векторное поле (U_y, U_z) в срединной плоскости $X = 0$. Изолинии поля U_y в отличие от U_z вытянуты в трансверсальном направлении.

Рис. 3.8, 3.9 и 3.10 показывают U_x в виде функций Z , Y и X на трех координатных осях. U_x близка к Стокслету на малых расстояниях (уравнение (1.20), пунктирная линия). $U_x(0, 0, Z)$ меняет знак вдали от частицы, при $Z = O(10)$. При больших Z главный вклад в U_x дает интегрирование

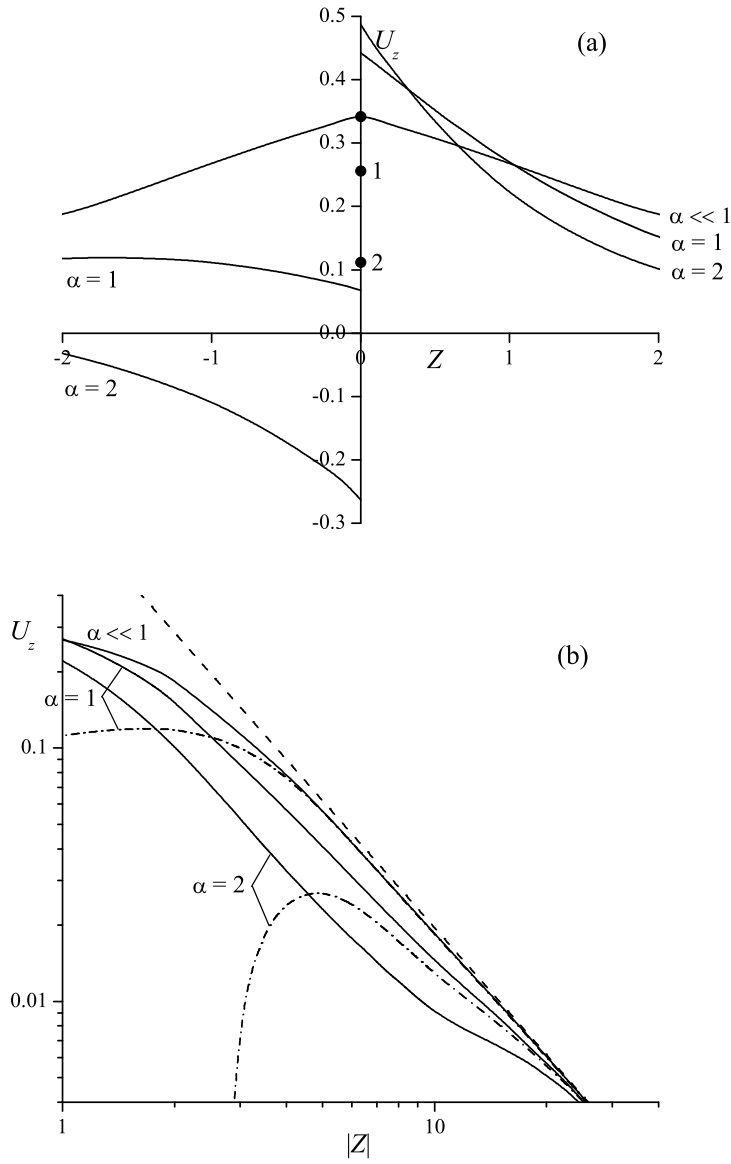


Рис. 3.2. Компонента скорости U_z в зависимости от Z для $X = Y = 0$ на (a) конечных и (b) больших расстояниях от сферы. Точки на (a) - \mathbf{w}_∞ , уравнение (3.12), сплошная и штрих-пунктирная линии на (b) - $Z > 0$ и $Z < 0$, соответственно, штриховая линия - асимптотическое решение

$$U_z^{as} = 0.9064 |Z|^{-5/3}.$$

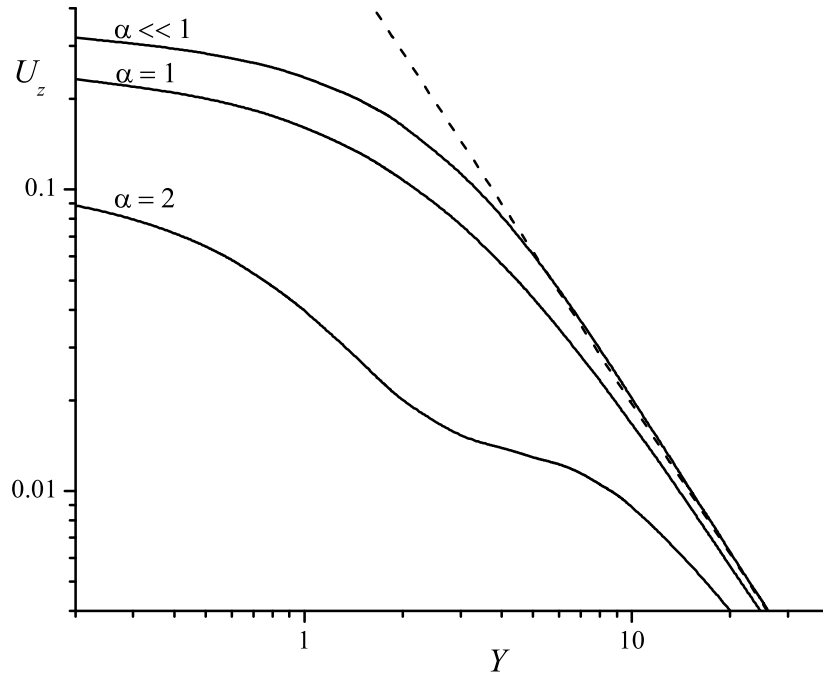


Рис. 3.3. Компонента скорости U_z в зависимости от Y для $X = Z = 0$.

Другие обозначения соответствуют Рис. 3.2.

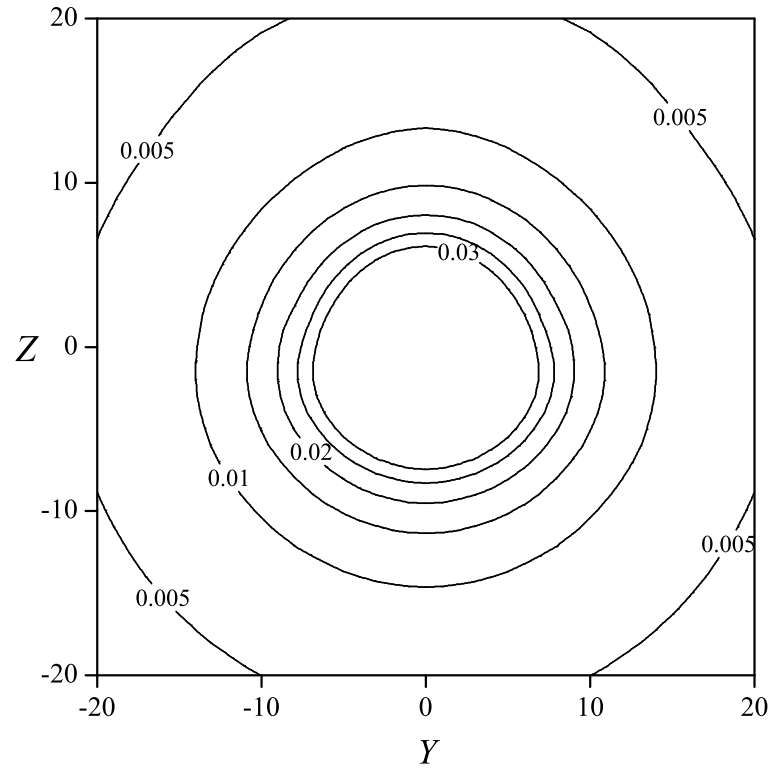


Рис. 3.4. Изолинии U_z для $X = 0$, $\alpha = 1$.

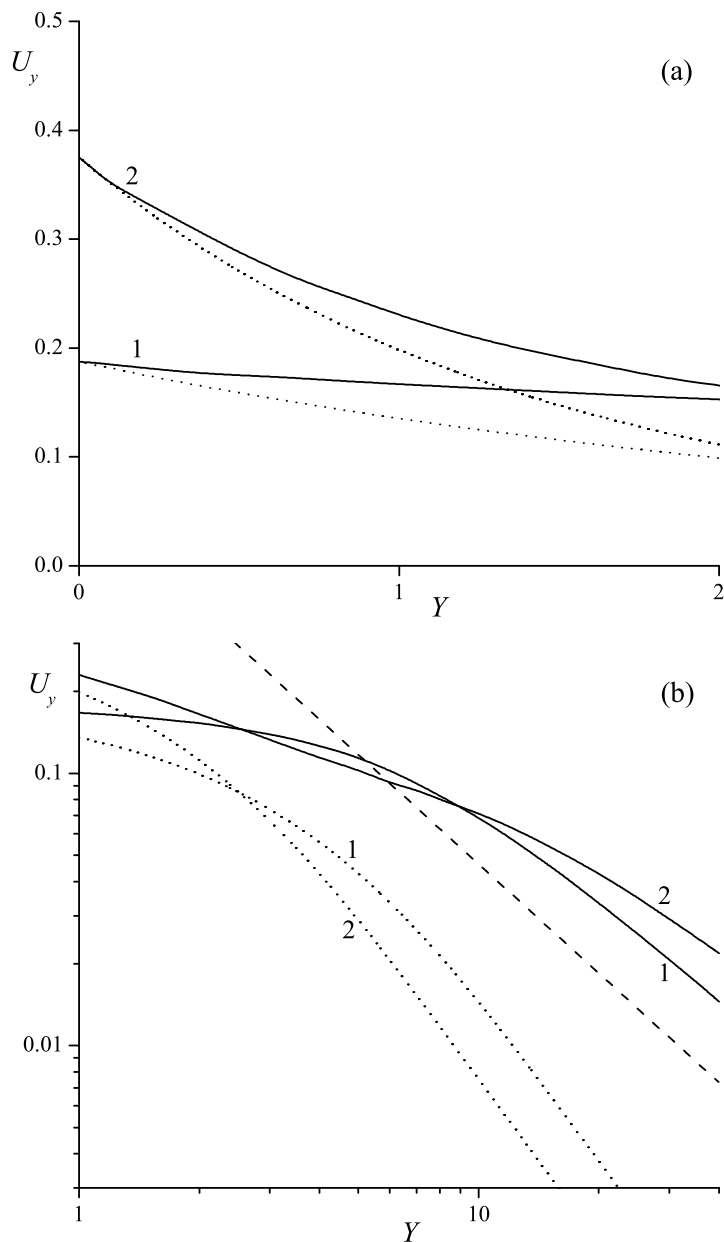


Рис. 3.5. Компонента скорости U_y в зависимости от Y для $X = Z = 0$ на (a) конечных и (b) больших расстояниях от сферы. Числа на кривых обозначают величины параметра α . Пунктирные линии соответствуют зависимости (3.13) для однородного невозмущенного потока, штриховые - $Y^{-4/3}$.

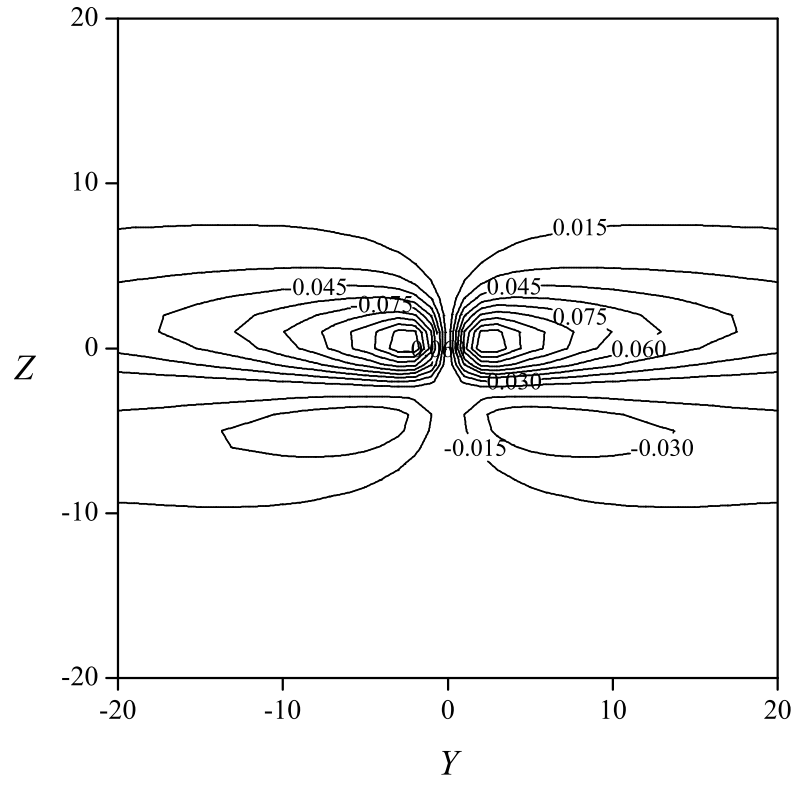


Рис. 3.6. Изолинии U_y для $X = 0$, $\alpha = 1$.

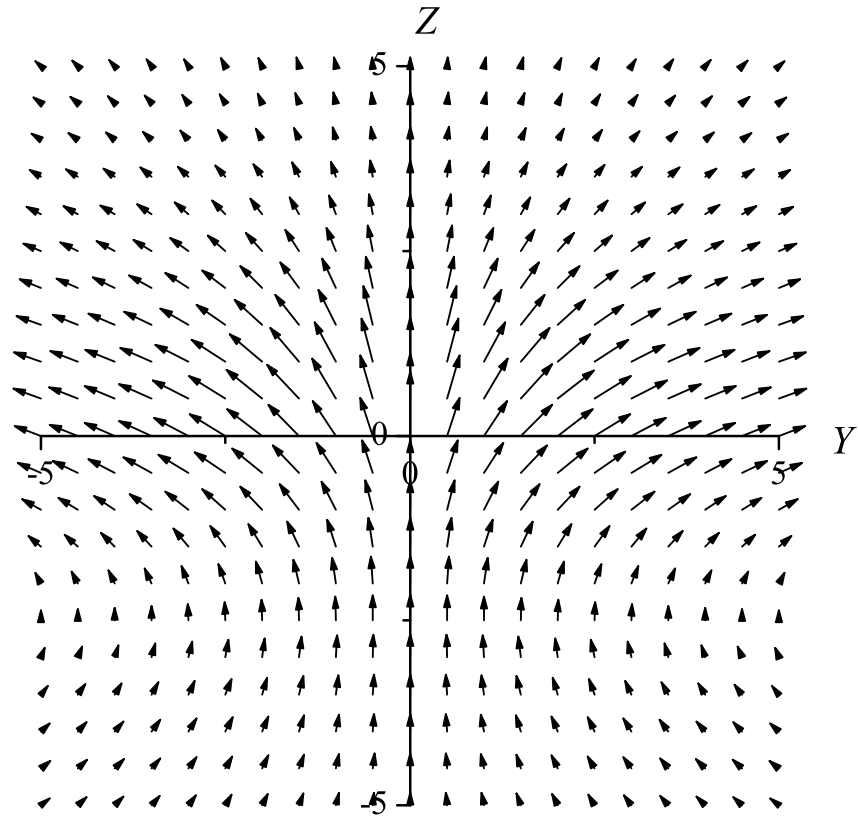


Рис. 3.7. Векторное поле (U_y, U_z) для $X = 0$, $\alpha = 1$.

по малым значениям $k \sim |Z|^{-1}$, где верно асимптотическое решение (3.11) для \tilde{U}_x^{as} . Данное решение, в отличие от \tilde{U}_z^{as} , чисто мнимое и поэтому не дает вклада в интеграл (3.5) при $X = Y = 0$. В результате $U_x(0, 0, Z)$ убывает на больших расстояниях быстрее, чем $|Z|^{-2}$. Зависимость продольной скорости от Y также быстро убывает. Таким образом, U_x меньше остальных компонент скорости на срединной плоскости невязкой области, $R \gg 1$. Тем не менее, как показано в следующем разделе, в ламинарных следах вверх и вниз по потоку она является наибольшей компонентой скорости.

3.3. Ламинарные следы в сдвиговом потоке

Нейтрально плавучая частица индуцирует в окружающей жидкости дефицит суммарного импульса, который вследствие закона сохранения равен ее сопротивлению. Область пониженного импульса жидкости переносится конвективно невозмущенным сдвиговым потоком и растет в поперечном размере вследствие вязкости. Возникновение следа обусловлено взаимодействием двух процессов. Для однородного набегающего потока время, за которое область пониженного импульса переместится вниз по потоку на расстояние x' равно $t^O = x'/V_s$, где штрих обозначает размерные координаты. За это время перенос в поперечном направлении, по аналогии с диффузией, составляет $z_w^O \sim (\nu t^O)^{1/2}$. В результате имеем для ширины ламинарного следа известную зависимость

$$z_w^O \sim (\nu x'/V_s)^{1/2}. \quad (3.14)$$

В линейном сдвиговом потоке дефицит суммарного импульса переносится конвективно вверх и вниз по потоку (см. Рис. 3.1). Образование двух следов ранее было предсказано также для нейтрально плавучей частицы [130]. Следует, однако, отметить существенное отличие двух течений. Сила, действующая на нейтрально плавучую частицу, равна нулю, поэтому в окружающую жидкость переносится не дефицит суммарного импульса, а

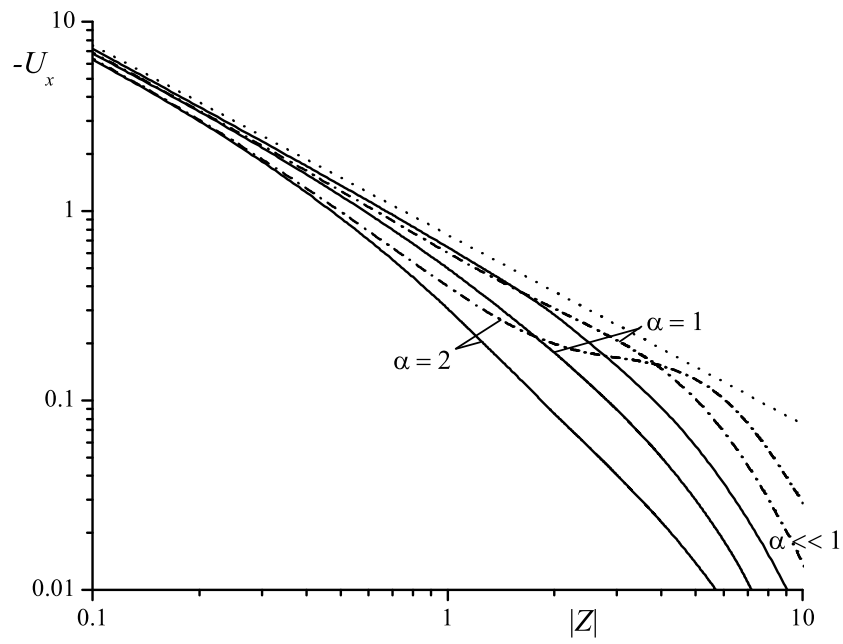


Рис. 3.8. Компонента скорости U_x в зависимости от Z для $X = Y = 0$.
 Пунктирная линия - Стокслет. Другие обозначения соответствуют Рис. 3.2.

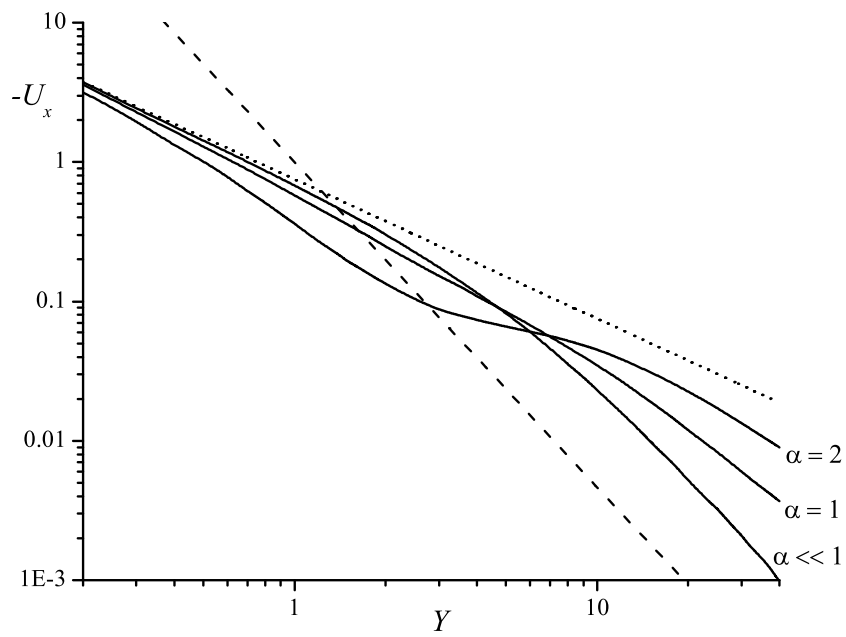


Рис. 3.9. Компонента скорости U_x в зависимости от Y для $X = Z = 0$.

Пунктирная и штриховая линии - Стокслет и $Y^{-7/3}$, соответственно.

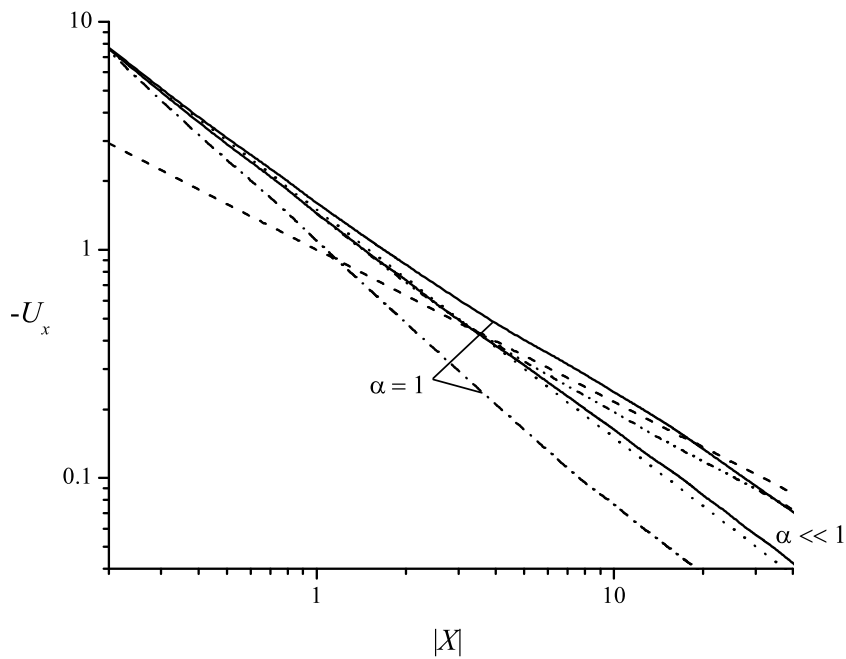


Рис. 3.10. Компонента скорости U_x в зависимости от X для $Y = Z = 0$. Пунктирная и штриховая линии - Стокслет и $X^{-2/3}$, соответственно, штрих-пунктирная линия - максимальная скорость в ядре следа для $\alpha \ll 1$. Другие обозначения соответствуют Рис. 3.2.

только завихренность. Этот случай аналогичен задаче о диффузии в линейном сдвиговом потоке от точечного источника, решенной аналитически в работе [131]. Симметрии течений также различны в двух случаях: для точечной силы и сильного сдвига выше была доказана четность решения ($U_{x,z}(\mathbf{R}) = U_{x,z}(-\mathbf{R})$), в то время как решение, соответствующее обтеканию диполя, нечетно ($U_{x,z}(\mathbf{R}) = -U_{x,z}(-\mathbf{R})$).

В сильном сдвиговом потоке, $\alpha \ll 1$, скорость конвективного переноса равна Gz' , т.е. зависит от поперечной координаты, поэтому следы несимметричны. При $X = O(1)$ максимум возмущенной скорости U_x находится на оси X . Штрих-пунктир-пунктирная линия (максимальная скорость при $\alpha \ll 1$) и сплошная линия (скорость при $Y = Z = 0$ для $\alpha \ll 1$) на Рис. 3.10 совпадают до значений $|X| \simeq 3$. Для бóльших X две кривые расходятся, т.е. максимум скорости U_x располагается вне оси X . Таким образом, ядро следа находится в области, где скорость конвективного переноса достаточно велика. Приравнивая время z'^2/ν , за которое возмущение распространяется поперек потока на расстояние z' , и время x'/Gz' , за которое возмущение конвективно переносится в продольном направлении на расстояние x' , получим оценку для ширины следа:

$$z_w^{sh} \sim (\nu x'/G)^{1/3},$$

или в безразмерных переменных: $Z_w^{sh} \sim X^{1/3}$. Перенос, обусловленный вязкостью, одинаково происходит в направлениях Z и Y , следовательно, ширина следа в обоих направлениях одинакова, $Y_w^{sh} \sim Z_w^{sh}$.

Суммарный поток импульса поперек следа не изменяется, в силу закона сохранения, при обтекании однородным потоком:

$$\int V_s U'_x dy' dz' \sim V_s U'_x (z_w^{sh})^2 = 6\pi\nu a V_s.$$

Последнее равенство, с учетом (3.14), дает закон убывания возмущенной скорости, $U'_x \sim V_s a/x'$. Для сдвигового потока полученные численные результаты показывают, что максимум возмущенной скорости (штрихпунктир-пунктирная линия на Рис. 3.10) убывает с расстоянием по степенному закону $X^{-2/3}$. Дефицит импульса переносится конвективно от частицы только в первом и третьем квадрантах, $X > 0, Z > 0$ и $X < 0, Z < 0$. В двух других квадрантах невозмущенная скорость отрицательна, т.е. линии тока приходят из бесконечности, где возмущения равны нулю. Перенос импульса в эти области происходит в поперечном направлении и обусловлен вязкостью. Здесь дефицит импульса конвективно переносится обратно к частице, поэтому поток импульса поперек следа не постоянен в случае сдвигового потока.

Законы изменения различных компонент скорости в следе проиллюстрированы на Рис. 3.11. На Рис. 3.11(a) показаны профили $U_x X^{-2/3}$ как функции $Z X^{-1/3}$ для $\alpha \ll 1, Y = 0$. Профили, рассчитанные для разных X , мало различаются вблизи ядра следа и при больших положительных Z . В то же время в области возвратного течения ($Z X^{-1/3} < 0$) и вблизи оси X различия значительны. Нормальная скорость убывает в ядре следа пропорционально X^{-1} (см. Рис. 3.11(b)).

В отличие от сильного сдвигового потока ($\alpha \ll 1$), при конечных $\alpha > 0$ два следа при $X > 0$ и $X < 0$ различаются. На Рис. 3.12 показано векторное поле в дальних областях вверх (a) и вниз (b) по потоку для $Y = 0, \alpha = 1$. Большая часть дефицита импульса переносится вниз по потоку, поскольку скорость переноса $Z + \alpha$ больше при $Z > 0$. Ядро следа в этом случае располагается ближе к оси X . След вверх по потоку находится дальше от оси X , поскольку на оси скорость невозмущенного потока направлена к частице.

На Рис. 3.13 представлены профили скоростей U_x и U_z для $\alpha = 1, Y = 0$. В этом случае законы убывания с расстоянием от частицы примерно те же,

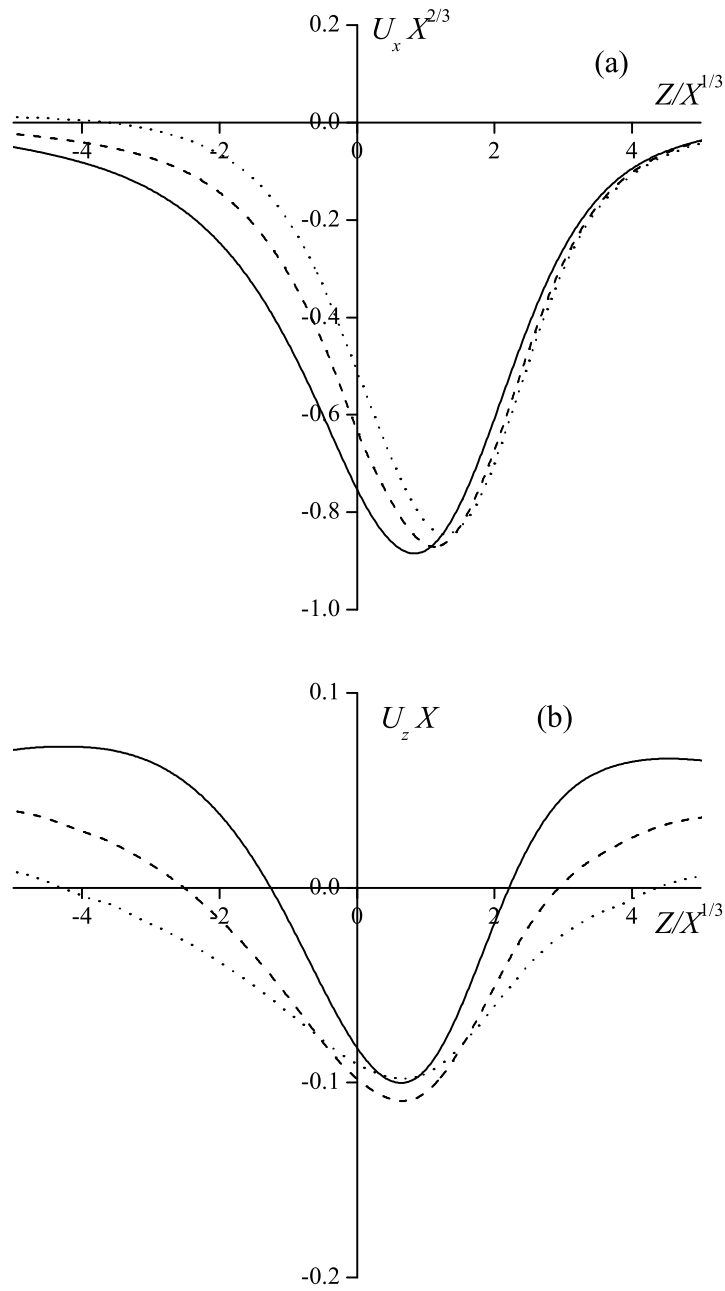


Рис. 3.11. Компоненты скорости (a) $U_x X^{2/3}$ и (b) $U_z X$ в зависимости от $ZX^{-1/3}$ для $\alpha \ll 1$, $Y = 0$ и $X = 10, 20, 40$ (сплошные, штриховые и пунктирные линии, соответственно).

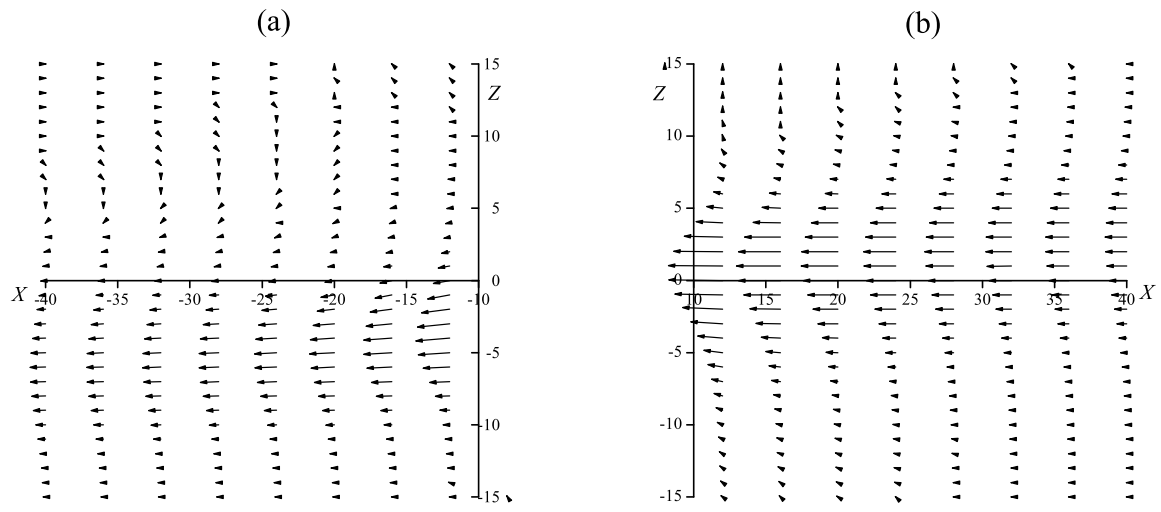


Рис. 3.12. Векторное поле (U_x, U_z) для $Y = 0$, $\alpha = 1$ в дальней области (а) вверх и (б) вниз по течению.

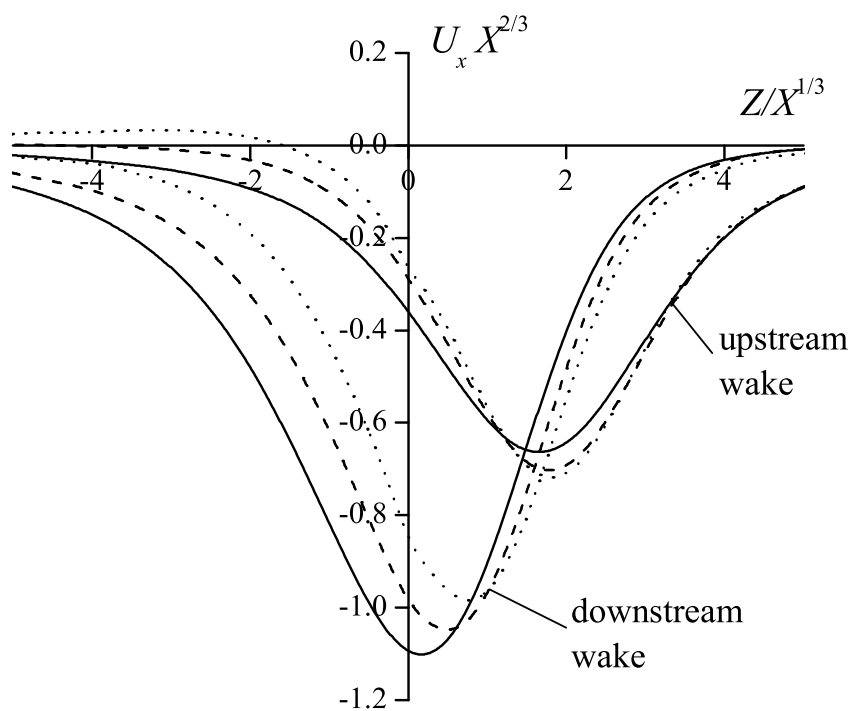


Рис. 3.13. Следы вверх и вниз по течению при $\alpha = 1$, $Y = 0$. (a) $U_x X^{2/3}$ и (b) $U_z X$ в зависимости от $Z X^{-1/3}$ для $X = 10, 20, 40$ (сплошные, штриховые и пунктирные линии, соответственно).

что и в сильном сдвиговом потоке, $X^{-2/3}$ и X^{-1} для скоростей U_x и U_z соответственно.

3.4. Инерционное взаимодействие частиц в неограниченном сдвиговом потоке

Полученные данные о возмущенном поле течения могут быть использованы для описания взаимодействия пары частиц в сдвиговом потоке. Взаимодействие пары одинаковых частиц в рамках уравнений Стокса при любом взаимном расположении не приводит к их относительному перемещению [132]. Инерционное взаимодействие не нейтрально-плавучих частиц рассматривалось аналитически в работе [66] для однородного набегающего потока, когда поле во внешней области описывается уравнениями Озеена, и численно для двумерных частиц в работе [133] и для трехмерных - в [134]. Когда пара частиц располагается параллельно скорости набегающего потока, сила сопротивления, действующая на заднюю сферу, меньше, чем на одиночную, поскольку она находится в следе передней сферы. В результате частицы в этом случае притягиваются друг к другу. Гидродинамическое взаимодействие нейтрально плавучих частиц также может приводить к их притяжению и образованию цепочек частиц в сдвиговых течениях разреженных суспензий [135, 136].

Рассмотрим движение двух твердых сфер A и B в сдвиговом потоке, расположенных в начале координат и в точке \mathbf{R}_B , соответственно, в направлении оси X . Расстояние между ними $|\mathbf{R}_B|$ считается достаточно большим, так что каждая сфера находится в области Сэфмана по отношению к другой. Безразмерное уравнение импульса, описывающее течение во внешней области, может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\alpha_A + Z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = - [F_A \delta(\mathbf{R}) + F_B \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_B)] \mathbf{e}_x. \quad (3.15)$$

Здесь координаты обезразмерены на масштаб Сэфмана $L_{Sa} = (\nu/G)^{1/2}$, F_A , F_B - силы сопротивления действующие на сферы A и B .

В главном приближении частица B перемещается в сдвиговом потоке относительно A со скоростью

$$\mathbf{v}_{0B} = (Z_B/\alpha_A + 1 - V_{sB}/V_{sA}) \mathbf{e}_x,$$

так что ее положение \mathbf{R}_B меняется со временем. Таким образом, задача является нестационарной, в отличие от задачи обтекания одиночной частицы. Уравнение (3.15) линейно и граничные условия к нему - также условие затухание возмущений на бесконечности. Следовательно, поле течения можно разделить на две части,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_A(\mathbf{R}) + \mathbf{U}_B(t, \mathbf{R}),$$

индуцированные двумя точечными силами. Вторую, нестационарную часть, можно рассматривать в другой системе координат, связанной с центром частицы B и перемещающейся со скоростью \mathbf{v}_{0B} относительно первой системы координат. В результате рассматриваемое течение можно представить в виде суперпозиции двух течений, квазистационарных в своих системах координат:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_A(\mathbf{R}) + \mathbf{U}_B(\mathbf{R} - \mathbf{R}_B^0 - \mathbf{v}_{0B}t),$$

где \mathbf{R}_B^0 - начальное положение частицы B . Таким образом, описание взаимодействия пары частиц можно построить, если известно поле $\mathbf{U}(\mathbf{R})$, индуцированное одиночной частицей.

Скорость миграции каждой частицы равна сумме скорости миграции, обусловленной самовоздействием частицы, и скорости возмущенного течения, индуцированного другой частицей,

$$\mathbf{v}_{1A} = \mathbf{w}_\infty(\alpha_A) + \frac{F_B}{F_A} \mathbf{U}(\alpha_B, -\mathbf{R}_B),$$

$$\mathbf{v}_{1B} = \frac{F_B}{F_A} \mathbf{w}_\infty(\alpha_B) + \mathbf{U}(\alpha_A, \mathbf{R}_B).$$

Рассмотрим детально случай одинаковых частиц, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha$, $F_A = F_B = 6\pi$. Тогда скорость относительного движения равна

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \Delta \mathbf{v}_0 + \varepsilon \Delta \mathbf{v}_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.16)$$

$$\Delta \mathbf{v}_0 = \frac{Z_B}{\alpha} \mathbf{e}_x, \quad \Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{U}(\alpha, \mathbf{R}_B) - \mathbf{U}(\alpha, -\mathbf{R}_B).$$

Для произвольного взаимного расположения с $Z_B = O(1)$ основной вклад в относительное движение дает невозмущенное течение $\Delta \mathbf{v}_0$, а инерционное взаимодействие $\Delta \mathbf{v}_1$ - лишь малую поправку, но оно становится важным, если Z_B мало.

В однородном набегающем потоке $\Delta \mathbf{v}_0 = 0$, и инерционное взаимодействие является единственной причиной взаимного движения частиц. В этом случае частицы, расположенные по линии, перпендикулярной набегающему потоку, отталкиваются друг от друга [66]. Скорость относительного движения в трансверсальном направлении равна $\Delta v_{1\perp}^{VC} = 2U_{\perp}^{VC} > 0$, где U_{\perp}^{VC} описывается (3.13). Остальные компоненты относительной скорости равны нулю в силу симметрии. Частицы притягиваются, когда они располагаются параллельно скорости набегающего потока.

В сдвиговом потоке поправка первого порядка к возмущенной скорости близка к распределению Озеена (3.13) при $R \ll 1$. В результате поправка к скорости относительного движения при расстояниях между частицами,

малыми по сравнению с масштабом Сэфмана, также близка к решению, полученному в работе [66]:

$$\Delta \mathbf{v}_1 \Big|_{R_B \rightarrow 0} = 2\mathbf{u}_\infty^{PP}.$$

Когда частицы расположены относительно друг друга в трансверсальном направлении, $\mathbf{R}_B = (0, Y_B, 0)$, имеем $\Delta v_{1y} = 2U_y$ и $\Delta v_{1x} = \Delta v_{1z} = 0$. Частицы отталкиваются при таком взаимном расположении, как и в однородном потоке, при этом скорость их относительного движения больше при любых Y_B (см. Рис. 3.5).

В случае продольного взаимного расположения частицы притягиваются при малых расстояниях:

$$\Delta v_{1x}(X_B, 0, 0) \Big|_{X_B \rightarrow +0} = 2u_{\infty\parallel}^{PP} = -\frac{3\alpha}{4}.$$

При больших расстояниях частицы могут находиться в следах друг друга, поэтому величина относительной скорости в продольном направлении $\Delta v_{1x} = U_x^{dw} - U_x^{uw}$ может быть как положительна, так и отрицательна. Здесь U_x^{dw} и U_x^{uw} - скорости в следах вниз и вверх по потоку, показанных на Рис. 3.13 (a). На Рис. 3.14 представлена зависимость поправки к относительной скорости $\Delta v_{1x}(X_B, 0, Z_B)$, $X_B > 0$, обезразмеренной на $X_B^{-2/3}$, от безразмерного расстояния $Z_B X_B^{-1/3}$ для $\alpha = 1$. Вблизи оси X относительная скорость отрицательна, т.е. частицы притягиваются, аналогично однородному потоку. Это, однако, не означает, что при таком начальном расположении частицы встретятся, т.к. они имеют ненулевую относительную скорость в нормальном направлении, в отличие от однородного потока. Из результатов, показанных на Рис. 3.13 (b), следует, что $\Delta v_{1z} = U_z^{dw} - U_z^{uw}$ положительна в следе при любом Z_B . В результате сближающиеся траектории частиц могут быть получены при конечных положительных X_B и малых отрицательных Z_B , так что $\Delta v_{0x} < 0$ (см. Рис. 3.15). В случае, когда

$|Z_B| \gg \varepsilon$, относительна скорость Δv_{0x} , вызванная невозмущенным сдвиговым потоком, значительно больше инерционной поправки Δv_{1x} . Изменения относительных координат частиц со временем тогда можно оценить с учетом (3.16) следующим образом:

$$X_B \sim -\Delta v_{0x} t_{app} \sim -Z_B t_{app} / \alpha, \quad Z_B \sim -\varepsilon \Delta v_{1z} t_{app} \sim -\varepsilon \alpha X_B t_{app},$$

где t_{app} - время сближения частиц во внешней области. Исключая t_{app} в приведенных оценках получим

$$Z_B \sim -\varepsilon^{1/2} \alpha X_B = -R_G^{1/4} \alpha X_B.$$

Таким образом, частицы сближаются, когда их взаимное расположение почти параллельно скорости набегающего потока.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [44, 54].

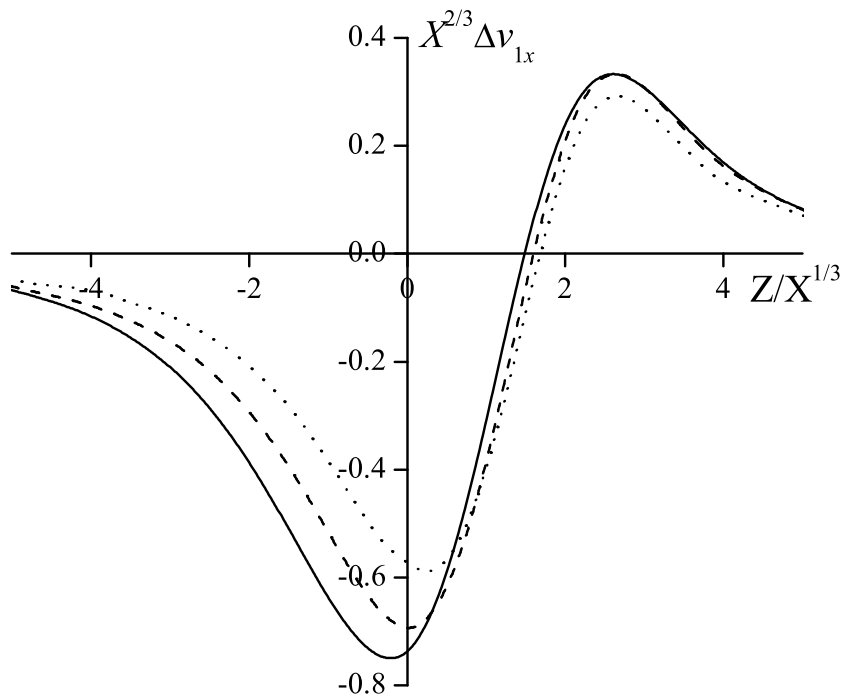


Рис. 3.14. Компонента разности скоростей $X^{2/3} \Delta v_{1x}$ в зависимости от $ZX^{-1/3}$ для $\alpha = 1$, $Y = 0$ и $X = 10, 20, 40$ (сплошные, штриховые и пунктирные линии, соответственно).

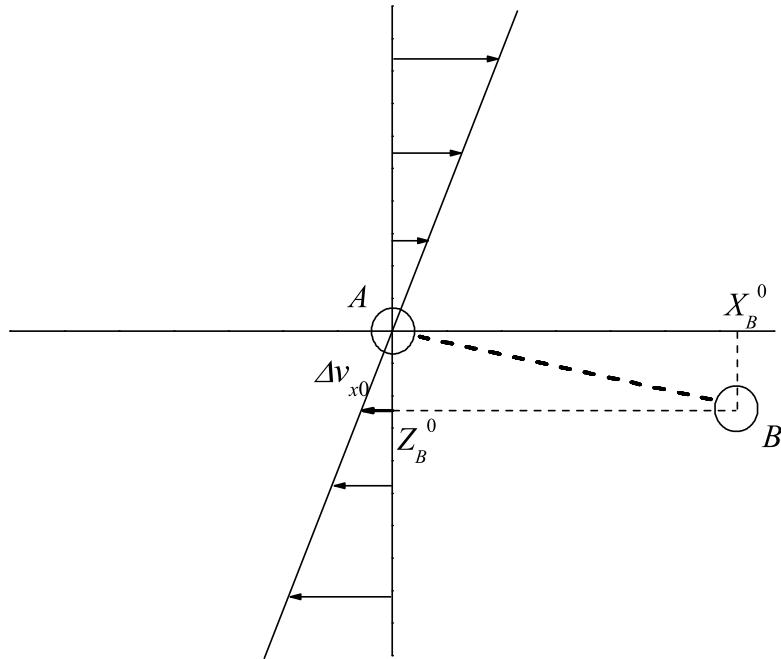


Рис. 3.15. Траектория частицы В относительно А (штриховая линия) в сдвиговом потоке.

ГЛАВА 4

ИНЕРЦИОННЫЕ СИЛЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

В общем случае движение частицы или течение несущей жидкости нестационарно, также нестационарны будут и действующие на частицу силы. В большинстве работ при этом используются более простые выражения для сил, полученные в стационарной постановке. Как показано в Главах 1 и 5 такой подход оправдан для таких важных практических приложений, как, например, поперечная миграция частицы под действием силы тяжести в вертикальном потоке или миграция вследствие ее инерции в пограничном слое, и задачи в этих случаях являются квазистационарными. Поперечное перемещение частицы относительно стенок или изменение скорости обтекания являются медленными, так что нестационарными членами в уравнениях Навье-Стокса, описывающих возмущенное частицей течение, можно пренебречь. Тем не менее, обтекание частиц существенно нестационарно, если имеются флуктуации скорости несущей среды. Такая ситуация характерна, например, при распространении волн неустойчивости в ламинарных течениях запыленных газов, где для описания межфазного обмена импульсом необходимо учитывать не только силу сопротивления, но и поперечную силу [36, 50, 137, 138], для которой обычно используется выражение для стационарной силы Сэфмана. Колебательное движение частицы вблизи стенки может приводить к появлению средней силы притяжения к стенке [139]. Другим примером, где необходим учет нестационарной поперечной силы, является движение частиц в сдвиговых турбулентных течениях [140, 141]. С другой стороны, в турбулентных течениях с частицами важен также учет нестационарности силы сопротивления частиц [142, 143]. Роль нестационарных сил оказывается существенна также для задачи гравитационной конвекции суспензий [144]. В этой связи возникает необходимость определения границ применимости стационарных решений и учета нестационарности при

вычислении инерционных сил при малых, но конечных числах Рейнольдса.

Когда число Рейнольдса стремится к нулю, сила, действующая на частицу, которая движется в покоящейся жидкости с переменной скоростью $V'_p(t)$ описываются известной формулой Бассэ-Буссинеска-Озеена

$$F' = -6\pi\mu a V'_p(t) - 6\rho a^2 (\nu\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^t \frac{dV'_p}{d\tau} \frac{d\tau}{\Delta\tau^{1/2}} - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \frac{dV'_p}{dt}. \quad (4.1)$$

$$\Delta\tau = t - \tau$$

Здесь первый член - сила Стокса, второй - сила Бассэ, которая зависит от ускорения в предшествующие моменты времени, т.е. от "истории" движения. По этой причине ее еще называют "наследственной" силой. Третий член - сила присоединенных масс. Формула получена из решения нестационарных уравнений Стокса,

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}' = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) было обобщено на случай, когда скорость невозмущенного течения жидкости неоднородна, и в него добавлены члены, связанные с ускорением несущей фазы [145].

Нестационарный и вязкий члены уравнения (4.2) имеют одинаковый порядок, если характерное время изменения скорости сравнимо со временем $t_{St} = a^2/\nu$. Также одинаковый порядок в этом случае имеют и три силы в уравнении (4.1). Для более медленных изменений скорости в главном приближении по числу Рейнольдса нестационарным членом в уравнении (4.2) можно пренебречь, и сила, действующая на частицу, равна силе Стокса. Однако, при построении членов следующего порядка и решении уравнений во внешней области, этот член может стать сравнимым с вязким, т.к. он, как и конвективный член, убывает с расстоянием от частицы медленнее, чем вязкий. В этом случае решение, как и в предыдущих главах, может быть

построено методом сращиваемых разложений, но в уравнениях Озеена необходимо учитывать нестационарный член.

Нестационарные инерционные силы сопротивления для осесимметричных течений при обтекании твердых частиц однородным потоком изучались во многих работах последнего времени [146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 115, 153, 39]. Аналогичная проблема для сферического пузырька и капли была рассмотрена в [154]. Было показано, в частности, что "память" о предшествующем движении на больших временах затухает быстрее, чем сила Бассэ. Более подробно результаты, полученные в указанных работах, обсуждаются в параграфе 4.2.

Существенно меньше работ посвящено нестационарной инерционной поперечной силе в сдвиговых потоках. Это связано прежде всего со сложностью решения трехмерных нестационарных задач. Задача определения инерционной поперечной силы в неограниченном сильном сдвиговом потоке рассмотрена для высокочастотных гармонических колебаний скорости скольжения частицы V_s в работе [127], и для произвольного $V_s(t)$ - автором [38]. Подробности решения задачи приведены в следующем параграфе 4.1. В работе [155] было предложено выражение для нестационарной поперечной силы, аналогичное силе Бассэ, т.е. в виде интеграла по предшествующим моментам движения. Значения силы сопротивления и подъемной силы на покоящуюся сферу в осциллирующем пограничном слое при конечном числе Рейнольдса определялись численно методом конечных элементов в работах [107, 108].

Также в данной главе (параграф 4.2.) рассмотрена задача определения инерционной силы сопротивления в однородном потоке [39, 51, 53] при нестационарной скорости скольжения частицы. Предполагается, что время изменения скорости сравнимо с характерными временами для течений во внешней области, которые для двух указанных задач определяются через

масштабы этих областей, соответственно,

$$t_{Sa} = L_{Sa}^2/\nu = G^{-1} = t_{St}R_G^{-1} \gg t_{St},$$

для случая сильного или конечного сдвига, и

$$t_{Os} = L_{Os}^2/\nu = \nu/U_c^2 = t_{St}R_s^{-2} \gg t_{St}.$$

для случая слабого сдвига или однородного обтекания, где U_c - характерное значение скорости скольжения частицы

Силы, вычисленные в следующем по числу Рейнольдса приближении, отличаются от стационарной силы Сэфмана в случае обтекания сдвиговым потоком и от классической силы Бассэ для однородного набегающего потока. Сила присоединенных масс является внепорядковым членом для таких медленных изменений скорости, т.к. имеет порядок R_s^2 .

4.1. Поперечная сила в неограниченном сдвиговом потоке

При движении частицы в сдвиговом потоке в общем случае и скорость скольжения, и градиент скорости невозмущенного потока могут быть нестационарны. Ниже рассматривается задача определения инерционной поперечной силы при условии, что только скорость скольжения изменяется по времени на масштабе t_{Sa} , а градиент скорости стационарен. Для предельного случая сильного сдвигового потока $|\alpha| \ll 1$ удастся получить зависимость поперечной силы при произвольном изменении скорости скольжения.

Данная упрощенная постановка, в частности, соответствует условиям задачи устойчивости течения запыленного газа в пограничном слое на плоской пластине, когда скорость скольжения частицы обусловлена распространяющейся волной неустойчивости, а не неоднородностью пограничного слоя. В работе [36] задача устойчивости была решена без учета поперечной силы в предположении, что длина волны Толлмина-Шлихтинга сравнима с

толщиной пограничного слоя, но мала по сравнению с расстоянием от передней кромки пластины. Это означает, что градиент невозмущенной скорости в системе отсчета, связанной с частицей, свободно перемещающейся в пограничном слое, изменяется медленно по сравнению с изменением скорости скольжения, вызванной волной Толлмина-Шлихтинга. Было также показано, что для правильного описания задачи устойчивости необходимо учитывать поперечную силу.

По аналогии с уравнением Озеена (1.28) уравнение импульса для возмущений скорости во внешней области в нестационарном случае может быть записано в виде [38]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + U_z \mathbf{e}_x + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = -F(t) \delta(\mathbf{R}) \mathbf{e}_x. \quad (4.3)$$

Здесь время обезразмерено на G^{-1} .

Рассмотрим сначала случай, когда скорость скольжения и сила сопротивления, действующая на частицу, изменяются гармонически по времени,

$$V_s = \tilde{V}_s e^{-i\Omega t}, \quad F = \tilde{F} e^{-i\Omega t}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{F} = 6\pi \tilde{V}_s, \quad (4.5)$$

где частота обезразмерена на G . В случае $|\alpha| \ll 1$ возмущенное поле течения также является гармоническим:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} e^{-i\Omega t}, \quad P = \tilde{P} e^{-i\Omega t}. \quad (4.6)$$

В результате (4.3) можно переписать в виде уравнения для Фурье-гармоник по времени:

$$-i\Omega \tilde{\mathbf{U}} + Z \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial X} + \tilde{U}_z \mathbf{e}_x + \nabla \tilde{P} - \nabla^2 \tilde{\mathbf{U}} = -\tilde{F} \delta(\mathbf{R}) \mathbf{e}_x \quad (4.7)$$

При выводе (4.7) существенно, что рассматривается режим сильного сдвига, т.е. выполняется предположение Сэфмана, $|\alpha| \ll 1$. В общем случае

конечного параметра скольжения $\alpha = O(1)$ решение нельзя искать в виде (4.6), поскольку член, соответствующий однородному потоку в (1.28), является произведением двух функций, $\alpha = V_s (\nu G)^{-1/2}$ и $\partial \mathbf{U} / \partial X$, зависящих от времени. В результате необходимо учитывать нелинейное взаимодействие различных гармоник.

Для решения (4.7) совместно с уравнением неразрывности применяется трехмерное преобразование Фурье по пространственным координатам, предложенное Сэфманом [72] для решения аналогичной стационарной задачи:

$$\mathbf{U} = e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^* e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (4.8)$$

$$P = e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P^* e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (4.9)$$

Данный подход применялся также в работе [89]. Подставляя выражения (4.8) и (4.9) в (4.7), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для \mathbf{U}^* :

$$-i\Omega \mathbf{U}^* = -i\mathbf{k}P^* - k^2 \mathbf{U}^* - U_z^* \mathbf{e}_x + k_x \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial k_z} - \frac{\tilde{F}}{8\pi^3} \mathbf{e}_x. \quad (4.10)$$

Используя затем условие неразрывности, записанное через преобразование Фурье,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}^* = 0,$$

получим

$$U_z^* = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\tilde{V}_s k_x}{k^2} \int_0^{\infty} e^{(\psi' - \psi)} (\zeta k_x + k_z) d\zeta, \quad (4.11)$$

$$\psi' - \psi = -\frac{1}{3} k_x^2 \zeta^3 - k_z k_x \zeta^2 - k^2 \zeta + i\Omega \zeta. \quad (4.12)$$

Выражение в правой части (4.12) отличается от соответствующего выражения для стационарного случая [72] только последним членом. В результате размерную поперечную силу можно выразить следующим образом:

$$\tilde{F}_L = \frac{9}{\pi} \rho a^2 \tilde{V}_s (G\nu)^{1/2} J(\Omega), \quad (4.13)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\zeta \left\{ \frac{k_3^2}{k^2} - \frac{k_1 k_3 (2k_1 k_3 + \zeta k_3^2)}{k^4} \right\} + i \frac{k_1 k_3}{k^4} \Omega \right] e^{-(k_3^2 \zeta^3 / 3 + k_1 k_3 \zeta^2 + k^2 \zeta)} e^{i\Omega \zeta} d\zeta d\mathbf{k}, \quad (4.14)$$

Переходя в (4.14) к сферическим координатам в Фурье-пространстве, можно вычислить явно интеграл по $|k|$:

$$J = \frac{\pi^{1/2}}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [I_1 \{s^2 - 2s^2(1-s^2) \cos^2 \phi\} - I_2 s^3 (1-s^2)^{1/2} \cos \phi + 2i I_3 s (1-s^2)^{1/2} \cos \phi] ds d\phi, \quad (4.15)$$

$$I_1(s, \phi) = \int_0^{\infty} \zeta A^{-3} e^{i\Omega \zeta} d\zeta, \quad (4.16)$$

$$I_2(s, \phi) = \int_0^{\infty} \zeta^2 A^{-3} e^{i\Omega \zeta} d\zeta, \quad (4.17)$$

$$I_3(s, \phi) = \int_0^{\infty} \Omega A^{-1} e^{i\Omega \zeta} d\zeta, \quad (4.18)$$

$$A^2 = \frac{s^2 \zeta^3}{3} + s(1-s^2)^{1/2} \zeta^2 \cos \phi + \zeta, \quad s = \cos \theta. \quad (4.19)$$

В общем случае $\Omega \sim 1$ интегралы в (4.15) определяются численно. В предельных случаях $\Omega \ll 1$ и $\Omega \gg 1$, можно, однако, получить аналитические выражения. При этом следует иметь в виду, что при $\Omega \gg 1$ предполагается, тем не менее, $\Omega \ll \nu/Ga^2 = R_G^{-1}$.

В случае $\Omega \ll 1$ интегралы J ищутся в виде рядов по степеням Ω . Коэффициенты при степенях определяются численно. В результате получим

$$J = 2.254 + 3.894\Omega i + O(\Omega^2). \quad (4.20)$$

Первый член в (4.20) соответствует значению, полученному для стационарного случая ($\Omega = 0$) [72]. Второй член чисто мнимый, т.е. возникает сдвиг фаз между скоростью скольжения и поперечной силой.

Для того, чтобы определить асимптотические значения интегралов I_1 , I_2 и I_3 при $\Omega \gg 1$, перепишем (4.19) в виде

$$A = \left[\frac{\xi}{\Omega} \left(1 + \frac{\xi s (1 - s^2)^{1/2} \cos \phi}{\Omega} + \frac{\xi^2 s^2}{3\Omega^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.21)$$

$$\xi = \zeta \Omega.$$

Тогда будем иметь для главных членов I_1 и I_3 в разложениях по степеням $\Omega^{-1/2}$

$$I_1^0 = \Omega^{-1/2} D, \quad (4.22)$$

$$I_3^0 = \Omega^{1/2} D, \quad (4.23)$$

$$D = \int_0^\infty \xi^{-1/2} e^{i\xi} d\xi = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (1 + i), \quad (4.24)$$

и $I_2 \sim \Omega^{-3/2}$. Интеграл по ϕ от члена, пропорционального I_3^0 , дает значение 0. Таким образом, необходимо вычислять член следующего порядка:

$$I_3^1 = \Omega^{1/2} \int_0^\infty \left[\left(1 + \frac{\xi s (1 - s^2)^{1/2} \cos \phi}{\Omega} \right)^{-1/2} - 1 \right] \xi^{-1/2} e^{i\xi} d\xi. \quad (4.25)$$

Интегрирование последнего интеграла по частям дает

$$I_3^1 = \frac{1}{4i} \Omega^{-1/2} D s (1 - s^2)^{1/2} \cos \phi. \quad (4.26)$$

Подставляя выражения для I_1^0 и I_3^1 в (4.15) и интегрируя по ϕ и s , окончательно получим

$$J = \frac{7\pi^2}{60(2\Omega)^{1/2}} (1 + i). \quad (4.27)$$

Случай высоких частот ранее был рассмотрен в работе [127]. Выражение (4.27) совпадает с результатами данной работы. Соотношение действительной и мнимой частей в (4.27) означает, что сдвиг фаз между скоростью скольжения и поперечной силой составляет $\pi/4$.

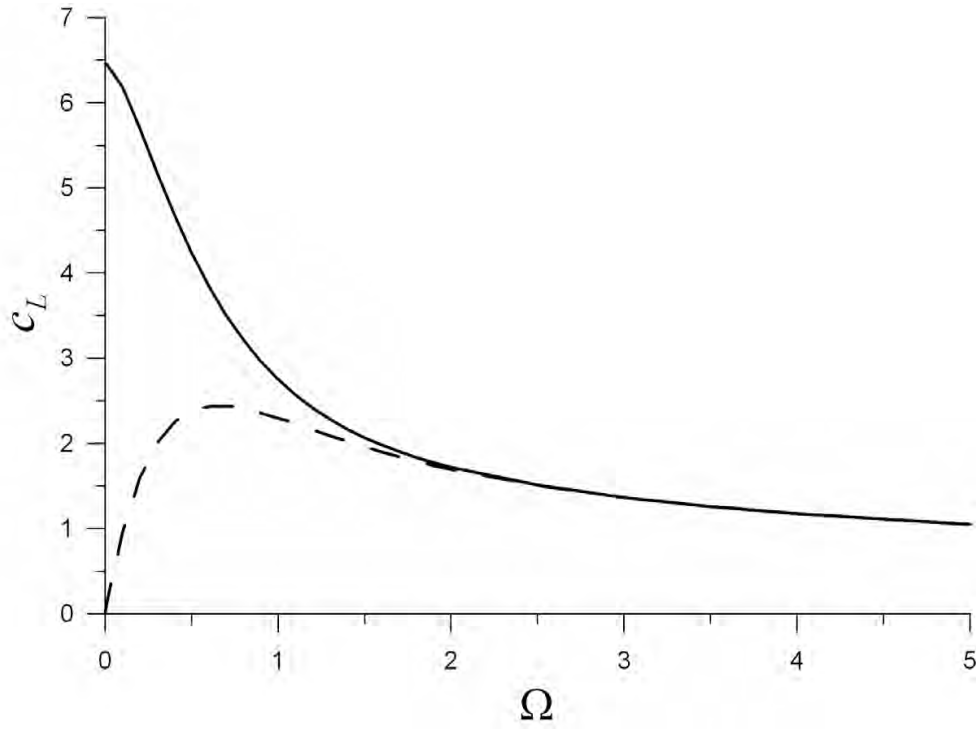


Рис. 4.1. Коэффициент поперечной силы в нестационарном сдвиговом потоке. Сплошная и штриховая линии - действительная и мнимая части, соответственно.

Результаты расчета коэффициента поперечной силы $c_L = 9J/\pi$ при $\Omega = O(1)$, полученные численным интегрированием (4.15), показаны на Рис. 4.1.

Для приложений можно использовать следующую аппроксимацию численных результатов:

$$J_{r,i} = \frac{a_0 + a_1\Omega + a_2\Omega^2 + a_3\Omega^3 + a_4\Omega^{7/2}}{1 + a_5\Omega + a_6\Omega^2 + a_7\Omega^3 + a_8\Omega^4}, \quad (4.28)$$

где J_r и J_i обозначают действительную и мнимую части, соответственно. Значения констант в (4.28) приведены в Таблице 1. Абсолютные отклонения от численных результатов не превышают 0.008 для J_r и 0.014 для J_i .

Таблица 4.1

Константы в Уравнении (4.28)

a_i	J_r	J_i
a_0	2.254	0
a_1	4.528	3.378
a_2	-2.378	1.391
a_3	-0.648	-0.575
a_4	2.079	1.139
a_5	2.009	0.523
a_6	4.048	5.199
a_7	-3.545	-1.396
a_8	2.554	1.399

Уравнение (4.13), полученное для гармонического изменения скорости скольжения, можно легко обобщить для произвольной зависимости $V_s(t)$, используя обратное преобразование Фурье по времени:

$$\tilde{V}_s = \int_{-\infty}^{\infty} V_s(t) e^{i\Omega t} dt,$$

$$F_L = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_L(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega.$$

4.2. Сила сопротивления в нестационарном однородном потоке

Безразмерное уравнение импульса для поля скорости во внешней области, возникающего в результате прямолинейного движения сферической частицы в покоящейся жидкости может быть записано в системе координат, движущейся с частицей, в виде [156, 39]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - V_p \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X} + \nabla P - \nabla^2 \mathbf{U} = 6\pi V_p \mathbf{e}_x \delta(\mathbf{R}). \quad (4.29)$$

Здесь скорость частицы $V_p(t)$, которая равна скорости скольжения с обратным знаком, обезразмерена на ее характерную величину U_c , возмущенная скорость жидкости $\mathbf{U}(t, \mathbf{R})$ - на $R_s U_c$, $R_s = a U_c / \nu \ll 1$, пространственные координаты и время - на Озеевские масштабы длины и времени, $L_{Os} = \nu / U_c \gg a$, $t_{Os} = L_{Os}^2 / \nu = \nu / U_c^2 \gg t_{st}$.

Для решения уравнения (4.29) совместно с уравнением неразрывности так же, как и в предыдущем разделе, использовалось трехмерное преобразование Фурье по пространственным координатам

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}^* \\ P^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{8\pi^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{Bmatrix} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{R}. \quad (4.30)$$

Данный подход для задачи о нестационарной силе сопротивления впервые был предложен в работе [157]. Система уравнений была сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению для \mathbf{U}^* по времени, решение которого может быть получено при произвольной скорости движения частицы:

$$\mathbf{U}^* = -\frac{3}{4\pi^2} \int_{-\infty}^t \exp[-k^2 \Delta\tau + ik_x \Delta X_p(\tau)] \left(\frac{k_x \mathbf{k}}{k^2} - \mathbf{e}_x \right) V_p(\tau) d\tau, \quad (4.31)$$

$$k = |\mathbf{k}|, \quad \Delta\tau = t - \tau, \quad \Delta X_p = X_p(t) - X_p(\tau), \quad X_p(t) = \int_{-\infty}^t V_p(\tau) d\tau.$$

Здесь $X_p(t)$ зависимость перемещения частицы от времени. С использованием обратного преобразования Фурье

$$\mathbf{U} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^* \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) d\mathbf{k}. \quad (4.32)$$

и сферической системы координат (R, θ, φ) , было получено выражение для функции тока для осесимметричного течения в виде двойного интеграла:

$$\psi = \frac{3R^2 \sin^2 \theta}{2\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{V_p(\tau)}{R_1^2} \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{R_1^2 s^2}{4\Delta\tau}\right) ds - \exp\left(-\frac{R_1^2}{4\Delta\tau}\right) \right] \frac{d\tau}{\Delta\tau^{1/2}}, \quad (4.33)$$

$$R_1^2 = R^2 + 2X\Delta X_p + \Delta X_p^2.$$

В результате сила сопротивления частицы, обезразмеренная на $\mu a U_c$, записывается в виде:

$$F = -6\pi \left[V_p(t) + \frac{R_s}{\pi^{1/2}} \left\{ \int_{-\infty}^t \frac{dV_p}{d\tau} \frac{d\tau}{\Delta\tau^{1/2}} - 3 \int_0^1 \int_0^{X_p(t)} (\exp(-A^2 s^2) - \exp(-A^2) + (s^2 - 1) A^2) \frac{d\Delta X_p}{\Delta X_p^2 \Delta\tau^{1/2}} ds \right\} \right] + O(R_s^2 \ln R_s), \quad (4.34)$$

$$A = \frac{\Delta X_p}{2\Delta\tau^{1/2}}. \quad (4.35)$$

Член главного порядка по R_s представляет собой квазистационарную силу Стокса, члены порядка R_s разделены на классическую силу Бассэ (первый член в фигурных скобках) и дополнительную силу, также обусловленную предисторией движения частицы. При движении с малым характерным

временем t'_c , $a^2/\nu \ll t'_c \ll t'_O$, можно показать, что первый член является основным. Тем не менее, при $t'_c \sim t'_O$ разделение членов в (4.34) является искусственным, поскольку влияние предистории движения в этом случае связано с возмущением поля скорости во внешней области (область Озеена), и проявляется, так же, как и при рассмотрении инерционной поперечной силы в виде поправки $O(R_s)$ к однородному течению в месте нахождения частицы.

В работе [150] на основе теоремы обратимости Лоренца было получено более простое выражение для нестационарной силы Озеена:

$$F_O = -3\pi^{1/2} R_s \int_{-\infty}^t \left\{ V_p(t) - \frac{3V_p(\tau)}{2A^2} \left[\frac{\pi^{1/2}}{2A} \operatorname{erf}(A) - \exp(-A^2) \right] \right\} \frac{d\tau}{\Delta\tau^{3/2}}. \quad (4.36)$$

Сила присоединенных масс сохраняется для рассматриваемых медленных изменений скорости, но является малым по порядку R_s членом по сравнению с (4.36).

Различные зависимости перемещения частицы $X_p(t)$ изучались в работах [146, 147, 148, 149, 150, 151, 158] для определения поведения нестационарной силы Озеена в пределе $t \gg 1$. Так для движения с постоянной скоростью $V_p(t) = 1$, начинающегося в момент $t = 0$, было получено следующее выражение для силы сопротивления [146, 147]:

$$F = -6\pi \left\{ 1 + \frac{\delta(t)}{3} + \frac{3}{8} R_s \left[\left(1 + \frac{4}{t^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{t^{1/2}}{2} \right) + \frac{2}{(\pi t)^{1/2}} \left(1 - \frac{2}{t} \right) \exp \left(-\frac{t}{4} \right) \right] + \frac{9}{40} R_s^2 \log R_s + O(R_s^2) \right\}. \quad (4.37)$$

Сила Озеена стремится к стационарному значению $-\frac{9\pi}{4} R_s$ при $t \gg 1$, нестационарная часть при этом затухает пропорционально t^{-2} , т.е. существенно быстрее, чем классическая сила Бассэ, убывающая пропорционально $t^{-1/2}$ для данной зависимости $V_p(t)$.

В данном разделе представлен вывод других, более простых чем (4.33), (4.34), (4.36), выражений для возмущенного поля скорости и силы Озеена [39].

4.2.1. Нестационарное поле скорости. Выражение (4.31) может быть переписано для преобразования Фурье продольной компоненты скорости, используя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
 U_x^* &= \frac{3}{4\pi^2} \int_{-\infty}^t \exp(-k^2 \Delta\tau + ik_x \Delta X_p) \frac{k_z^2 + k_y^2}{k^2} dX_p(\tau) \\
 &= \frac{3}{4\pi^2} \int_{-\infty}^t \exp[-k^2 \Delta\tau + ik_x X_p(t)] \frac{i(k_z^2 + k_y^2)}{k_x k^2} d \exp[-ik_x X_p(\tau)] \\
 &= \frac{3}{4\pi^2} \left[\frac{i(k_z^2 + k_y^2)}{k_x k^2} - \int_{-\infty}^t \exp(-k^2 \Delta\tau + ik_x \Delta X_p) \frac{i(k_z^2 + k_y^2)}{k_x} d\tau \right] \\
 &= \frac{3}{4\pi^2} \int_{-\infty}^t \exp(-k^2 \Delta\tau) \frac{i(k_z^2 + k_y^2)}{k_x} E(k_x, \tau) d\tau, \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

$$E = 1 - \exp(ik_x \Delta X_p) = 1 - \exp \left[ik_x \int_{\tau}^t V_p(s) ds \right].$$

Последнее уравнение для U_x^* более удобно для вычисления интегралов по k_z и k_y в обратном преобразовании Фурье (4.32). В результате получим

$$\begin{aligned}
 U_x &= \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t \frac{i}{k_x} \exp \left(ik_x X - k_x^2 \Delta\tau - \frac{\rho^2}{4\Delta\tau} \right) \left(\frac{1}{\Delta\tau^2} - \frac{\rho^2}{4\Delta\tau^3} \right) E(k_x, \tau) d\tau dk_x \\
 &= \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t \frac{i}{k_x} \exp(ik_x X - k_x^2 \Delta\tau) E(k_x, \tau) d \exp \left(\frac{-\rho^2/4\Delta\tau}{\Delta\tau} \right) dk_x \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{4\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\Delta\tau} \exp \left(ik_x X - k_x^2 \Delta\tau - \frac{\rho^2}{4\Delta\tau} \right) \\
 &\quad \times [k_x E(k_x, \tau) + iV_p(\tau) \exp(ik_x \Delta X_p)] d\tau dk_x. \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

$$\rho^2 = Z^2 + Y^2.$$

Последнее уравнение получено из (4.39) посредством интегрирования по частям по переменной τ . Наконец, интегрирование по k_x позволяет предста-

вить U_x в виде однократного интеграла:

$$U_x = \frac{3}{8\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^t Q(X, \rho, t, \tau) d\tau \quad (4.41)$$

$$= \frac{3}{8\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^t [2V_p(\tau) \Delta\tau - X - \Delta X_p] \exp\left(-\frac{(X + \Delta X_p)^2 + \rho^2}{4\Delta\tau}\right) \frac{d\tau}{\Delta\tau^{5/2}} + \frac{3X}{2R^3}, \quad (4.42)$$

$$Q = \frac{1}{\Delta\tau^{5/2}} \left\{ [2V_p(\tau) \Delta\tau - X - \Delta X_p] \exp\left(-\frac{(X + \Delta X_p)^2 + \rho^2}{4\Delta\tau}\right) + X \exp\left(-\frac{R^2}{4\Delta\tau}\right) \right\}. \quad (4.43)$$

В пределе $R \ll 1$ полученное поле скорости сращивается с квазистационарным Стокслетом,

$$U_{xS} = \frac{3}{4} V_p(t) \left(\frac{1}{R} + \frac{X^2}{R^3} \right).$$

Очевидно, что поле скорости вблизи частицы связано с ее движением в течение малого промежутка времени около $\tau = t$. Данный вывод следует также из (4.42), если считать $X \sim \rho \sim R \ll 1$. Экспоненты в (4.43) не малы только для промежутков времени $\Delta\tau_S \sim R^2 \ll 1$, и интегрирование (4.42) по этому малому интервалу дает сингулярное поведение Стокслета при $R \ll 1$. С учетом того что

$$\Delta X_p = V_p(t) \Delta\tau + O(\Delta\tau^2)$$

при $\Delta\tau \ll 1$, можно представить подинтегральное выражение (4.41) в виде ряда по $\Delta\tau$:

$$Q = \frac{1}{\Delta\tau^{5/2}} \left[(V_p(t) \Delta\tau - X) \exp\left(-\frac{XV_p(t)}{2}\right) + X + O(\Delta\tau^{3/2}) \right] \exp\left(-\frac{R^2}{4\Delta\tau}\right) = Q_S + O(\Delta\tau^{-1}) \quad \text{при} \quad \Delta\tau \sim R^2 \ll 1.$$

$$Q_S = V_p(t) \left(\frac{1}{\Delta\tau^{3/2}} + \frac{X^2}{2\Delta\tau^{5/2}} \right) \exp\left(-\frac{R^2}{4\Delta\tau}\right).$$

Интегрирование Q_S по τ дает Стоксово поле скорости U_{xS} , а разница

$$U_x - U_{xS} = \frac{3}{8\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^t (Q - Q_S) d\tau, \quad (4.44)$$

регулярна при $R \rightarrow 0$.

Решение (4.42) для продольной компоненты скорости позволяет также найти радиальную компоненту, или, эквивалентно, функцию тока осесимметричного течения ψ . Для этого удобно использовать цилиндрическую систему координат (X, ρ, ϕ) , в которой

$$U_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad U_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}.$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано с учетом (4.41):

$$\psi = \int_0^\rho \rho_1 U_x(X, \rho_1) d\rho_1 = \frac{3}{4\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^t Q \Delta\tau \left[\exp\left(\frac{\rho^2}{4\Delta\tau}\right) - 1 \right] d\tau. \quad (4.45)$$

Решения (4.42) и (4.45) соответствуют обычному решению Озеена для стационарного движения, $V_p(t) = 1$, $\Delta z_p = \Delta\tau$. Выполнив интегрирование в (4.42) и (4.45) получим

$$U_X^{Os} = \frac{3}{4R} \left[\frac{2X}{R^2} + \exp\left(-\frac{R+X}{2}\right) \left(1 - X \frac{2+R}{R^2}\right) \right], \quad (4.46)$$

$$\psi^{Os} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{X}{R}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{R+X}{2}\right)\right], \quad (4.47)$$

что совпадает с известными решениями [159, 160].

Часто рассматриваемый тип нестационарного движения - начало движения с постоянной скоростью $V_p(t) = 1$, $X_p(0) = 0$, начинающегося в момент $t = 0$, так что $V_p = 0$, $z_p(0) = 0$ при $t < 0$. Уравнение (4.42) можно использовать в этом случае при условии $R' \gg a$, $t' \gg a^2/\nu$, или в безразмерном виде, $R \gg R_s$, $t \gg R_s^2$. Частица не производит возмущений при $t < 0$, однако подинтегральное выражение в (4.41) не равно нулю при $\tau < 0$. Поскольку

частица находится в покое при $\tau < 0$, так что $\Delta X_p = X_p(t)$, интеграл по данному интервалу может быть вычислен явно. В результате поле скорости записывается в виде

$$U_x = \frac{3}{8\pi^{1/2}} \int_0^t Q d\tau + \frac{3}{t} [\zeta_0 h(\eta_0) - \zeta h(\eta)], \quad (4.48)$$

$$h(X) = \frac{1}{4\pi^{1/2} X^2} \exp(-X^2) - \frac{1}{8X^3} \operatorname{erf}(X), \quad (4.49)$$

$$\zeta = \frac{X}{2t^{1/2}}, \quad \eta = \frac{R}{2t^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\rho}{2t^{1/2}},$$

$$\zeta_0 = \frac{X + X_p(t)}{2t^{1/2}} = \zeta + \zeta_p,$$

$$\eta_0 = \left[\frac{(X + X_p(t))^2 + \rho^2}{4t} \right]^{1/2} = (\zeta_0^2 + \xi^2)^{1/2}, \quad \zeta_p = \frac{X_p(t)}{2t^{1/2}}.$$

Таким образом, поле скорости для этого типа движения включает, помимо интегрального члена, разность функции $\frac{3}{t}\zeta h(\eta)$, вычисляемой в точке текущего положения частицы и положения начала движения $(0, 0, -X_p(t))$. В работах [161, 153] аналогичное поведение дальнего поля скорости при $R \gg t^{1/2}$ было выведено для движения с постоянной скоростью после начала движения из рассмотрения следа за сферой:

$$R \gg t^{1/2}: \quad U_x = \frac{3}{2} \left\{ \frac{X}{R^3} - \frac{X + X_p}{\left[(X + X_p(t))^2 + \rho^2 \right]^{3/2}} \right\}. \quad (4.50)$$

Уравнение (4.48) является обобщением (4.50) для $R \sim t^{1/2}$ и произвольного $V_p(t)$. Для больших R и произвольного $V_p(t)$ уравнение (4.50) можно легко получить из (4.42) и (4.48). Для любой точки, лежащей на пути частицы, т.е. для $(X + \Delta X_p)^2 + \rho^2 \gg t$ и для любого τ все экспоненты в (4.48) и (4.49) асимптотически малы. Главный вклад в дальнее поле обусловлен функцией h , для которой при этом можно записать

$$X \rightarrow +\infty : \quad h(X) = -\frac{1}{8X^3}, \quad (4.51)$$

и (4.48) сводится к (4.50).

Функция тока для начала движения с учетом (4.45) и (4.48) имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_0^t Q \Delta\tau \left[\exp\left(\frac{\rho^2}{4\Delta\tau}\right) - 1 \right] d\tau \right. \\ & \left. + \frac{\zeta_0 \operatorname{erf}(\eta_0)}{\eta_0} - \operatorname{sgn}(\zeta_0) \operatorname{erf}(|\zeta_0|) + \operatorname{sgn}(\zeta) \operatorname{erf}(|\zeta|) - \frac{\zeta \operatorname{erf}(\eta)}{\eta} \right\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ - интеграл вероятности. Не интегральные члены в (4.48), (4.52) зависят от новых безразмерных координат ζ , η и ξ , расстояния до точки начала движения η_0 и перемещения частицы ζ_p . Все они обезразмериваются на длину диффузии $l_D(t) = 2t^{1/2}$, или в размерном виде, $l'_D = 2(\nu t')^{1/2}$. Эти члены описывают диффузионный перенос импульса, произведенного в момент начала движения $t = 0$. В общем случае импульс сообщается жидкости непрерывно, и решение для поля скорости (4.42) учитывает в интегральном виде его диффузионный перенос. Функция $A(t, \tau)$, задаваемая (4.35), представляет собой отношение относительного перемещения частицы и длины диффузии $l_D(\Delta\tau) = 2(t - \tau)^{1/2}$, соответствующей интервалу $\Delta\tau$.

Для расстояний $R \sim 1$ экспонента в подинтегральном выражении (4.42) конечна для конечных или больших интервалов $\Delta\tau$. Поле в Озеевской области обусловлено интегрированием по $\Delta\tau \sim 1$, поскольку вклад больших интервалов затухает пропорционально $\Delta\tau^{-3/2}$. Функция A при этом имеет порядок единицы, и это означает, что конвекция и диффузия импульса имеют одинаковый порядок в этой области. Поле в дальней области при $R \gg 1$ связано с $\Delta\tau \gg 1$, поскольку только большие интервалы дают возможность получить конечные экспоненты в подинтегральном выражении (4.42).

4.2.2. Нестационарная сила Озеена. Сила Озеена при движении с характерным временем t'_O , так же как и инерционная поперечная сила, обусловлена однородной частью возмущенного поля скорости в той точке, где находится частица. Таким образом, для ее определения необходимо вычислить $U_x - U_{xS}$ при $R = 0$, и с учетом (4.44) безразмерная сила запишется в виде

$$F_O = \frac{9\pi^{1/2}}{4} R_s \int_{-\infty}^t \{ [2V_p(\tau) \Delta\tau - \Delta X_p] \exp(-A^2) - V_p(t) \Delta\tau \} \frac{d\tau}{\Delta\tau^{5/2}}. \quad (4.53)$$

Поскольку

$$\frac{d \exp(-A^2)}{d\tau} = \exp(-A^2) A \frac{2V_p(\tau) \Delta\tau - \Delta X_p}{2\Delta\tau^{3/2}},$$

можно получить более простое выражение для силы:

$$F_O = \frac{9\pi^{1/2}}{4} R_s \int_{-\infty}^t \left[\frac{4\Delta\tau}{\Delta X_p} \frac{d \exp(-A^2)}{d\tau} - V_p(t) \right] \frac{d\tau}{\Delta\tau^{3/2}}. \quad (4.54)$$

Для начала движения данное уравнение можно переписать, с учетом (4.48), в виде:

$$F_O = \frac{9\pi^{1/2}}{4} R_s \left\{ \int_0^t \{ [2V_p(\tau) \Delta\tau - \Delta X_p] \exp(-A^2) - V_p(t) \Delta\tau \} \frac{d\tau}{\Delta\tau^{5/2}} - \frac{2V_p(t)}{t^{1/2}} + \frac{8\pi^{1/2}\zeta_p}{t} h(\zeta_p) \right\} \quad (4.55)$$

$$= \frac{9\pi^{1/2}}{4} R_s \left\{ \int_0^t \left[\frac{4\Delta\tau}{\Delta X_p} \frac{d \exp(-A^2)}{d\tau} - V_p(t) \right] \frac{d\tau}{\Delta\tau^{3/2}} - \frac{2V_p(t)}{t^{1/2}} + \frac{8\pi^{1/2}\zeta_p}{t} h(\zeta_p) \right\}. \quad (4.56)$$

Все известные решения для частных видов движения (малые колебания или скачкообразное изменение скорости обтекания), полученные ранее, описываются уравнениями (4.54), (4.55), (4.56). Так, например, для начала

движения с постоянной скоростью, $V_p(t) = 1$ при $t > 0$, имеем

$$\Delta X_p = \Delta\tau, \quad A = \Delta\tau^{1/2}/2, \quad \zeta_p = t^{1/2}/2.$$

Производя интегрирование (4.55), получим результат (4.37).

Быстрое перемещение. Уравнение (4.33) описывает диффузию и конвекцию импульса, введенного в жидкость в разные моменты τ . Различные типы нестационарного движения можно классифицировать в зависимости от поведения функции $A(t, \tau)$, которая представляет собой отношение относительного перемещения частицы и длины диффузии $l_D(\Delta\tau) = 2(t - \tau)^{1/2}$, в пределе $\Delta\tau \rightarrow \infty$. Когда перемещение велико:

$$t - \tau \gg 1: \quad |X_p(t) - X_p(\tau)| \gg (t - \tau)^{1/2}, \quad (4.57)$$

конвекция является доминирующим механизмом в дальней области. Баланс диффузии и конвекции имеет место только в ламинарном следе за частицей. Известным примером движения, удовлетворяющего условию (4.57) является стационарное движение, $V_p(t) = 1$. Решение в ламинарном следе в этом случае имеет вид [159]:

$$\rho^2 \sim |X| \gg 1, \quad X < 0: \quad U_x = -\frac{3}{2X} \exp\left(\frac{\rho^2}{4X}\right). \quad (4.58)$$

В остальной части потока поле соответствует точечному источнику массы:

$$U_x = \frac{3}{2} \frac{X}{R^3}. \quad (4.59)$$

Течение в следе (4.58) может быть также выражено через время, прошедшее с момента, когда частица находилась в точке X (в лабораторной системе), т.е. $t = -X$:

$$U_x = \frac{3}{2t} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4t}\right). \quad (4.60)$$

Особенности течения, вызванного быстрым нестационарным перемещением, в дальней области аналогичны стационарному случаю. Соответствующие решения (4.59) и (4.60) верны и в нестационарном случае с $V_p(t) > 0$, удовлетворяющем (4.57). Выражение для течения в следе можно получить, производя асимптотический переход в (4.42) для $X < 0$, $|X| \gg 1$. Время $\tau_e(X)$, в которое частица находилась в X , может быть найдено из следующего уравнения:

$$X_p(\tau_e) = X + X_p(t).$$

Экспонента в выражении (4.42) описывает диффузию импульса за время $\Delta\tau_e = t - \tau_e$, прошедшее с момента, когда импульс был сообщен жидкости в точке X . В пределе $\Delta\tau_e \gg 1$ подинтегральное выражение (4.42) не экспоненциально мало при условии, что

$$|\Delta X_p + X| \sim \Delta\tau_e^{1/2} \ll \Delta\tau_e \sim |X|, \quad \rho \sim \Delta\tau_e^{1/2}.$$

Время $\Delta\tau$ для этой области, малой по сравнению с $|X|$, в главном приближении постоянно, $\Delta\tau = \Delta\tau_e \left[1 + O\left(\Delta\tau_e^{-1/2}\right)\right]$, поэтому предэкспоненциальный множитель в первом члене в (4.43) можно записать в виде

$$\frac{2V_p(\tau) \Delta\tau - X - \Delta X_p}{\Delta\tau^{5/2}} = \frac{2V_p(\tau)}{\Delta\tau_e^{3/2}} \left[1 + O\left(\Delta\tau_e^{-1/2}\right)\right].$$

В результате получим для интеграла (4.42) в главном приближении по $\Delta\tau_e^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \rho \sim \Delta\tau_e^{1/2}, \quad X < 0: \quad U_x &= \frac{3}{4\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(X + \Delta X_p)^2 + \rho^2}{4\Delta\tau_e}\right] \frac{V_p(\tau) d\tau}{\Delta\tau_e^{3/2}} \\ &= \frac{3}{4\pi^{1/2}} \int \exp\left[-\frac{(X + \Delta X_p)^2 + \rho^2}{4\Delta\tau_e}\right] \frac{d[-(X + \Delta X_p)]}{\Delta\tau_e^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$= \frac{3}{2\Delta\tau_e} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\Delta\tau_e}\right). \quad (4.62)$$

Таким образом, уравнение для скорости в следе, выраженное через прошедшее время совпадает для стационарного и нестационарного случаев. Оно не зависит даже от скорости частицы $V_p(\tau_e)$. Это объясняется тем, что сила Стокса равна $6\pi V_p(\tau_e)$, т.е. величина импульса, сообщаемого жидкости на единице длины, 6π , не зависит от скорости.

Потенциальное течение точечного источника также можно получить из (4.42) для $R \gg 1$, $\rho^2 \gg |X|$ или $X \gg 1$. Подинтегральное выражение в (4.42) экспоненциально мало для всех τ т.к. $\Delta X_p \gg \Delta \tau^{1/2}$, и скорость равна последнему члену в (4.42), что эквивалентно (4.59).

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [36, 50], [38]–[53].

ГЛАВА 5

ДВИЖЕНИЕ ДИСПЕРСНОЙ ПРИМЕСИ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ГАЗЕ

Проскальзывание частиц относительно жидкости или газа может быть результатом не только действия гравитации, но и ускоренного движения несущей фазы. В этом случае обтекание вызвано инерцией частиц. Указанная ситуация наиболее характерна для течений запыленного газа, для которого плотности вещества частиц и несущей фазы различаются на три порядка. Задачи о влиянии силы Сэфмана на течения запыленного газа в ламинарном пограничном слое активно изучались в последнее время [8],[26]–[29], [32]–[34], [162]– [172]. В большинстве теоретических работ использовалась формула Сэфмана с максимальным значением коэффициента силы $c_{Sa} = 6.46$. В пограничном слое на плоской пластине, где частицы опережают поток газа, сила Сэфмана направлена к поверхности пластины. В результате частицы могут оседать на поверхности на начальном участке течения. Были получены предельные профили концентрации частиц на расстояниях от начала пластины, больших по сравнению с масштабом торможения частиц [28]. Влияние зависимости коэффициента силы Сэфмана c_L от параметра α на скорость и плотность дисперсной примеси для пограничных слоев на различных телах рассматривалось в работах [29, 32, 33, 46, 34].

В данной главе исследуется движение малой дисперсной примеси в пограничных слоях под действием сил Стокса и Сэфмана. В отличие от работ [26, 28, 162], где использовалось предельное значение поперечной силы с коэффициентом $c_{Sa} = 6.46$ [72], в данной главе скорость и плотность дисперсной примеси определяются с учетом зависимости коэффициента поперечной силы от параметра скольжения.

Рассмотрим движение дисперсной примеси, состоящей из частиц одина-

кового радиуса a , с массовой плотностью

$$\rho_p = \frac{4}{3}\pi n_p a^3 \rho_s,$$

где n_p - числовая плотность частиц, ρ_s - массовая плотность их вещества. При этом ρ_p считается малой, а ρ_s - большой по сравнению с плотностью газа ρ , так что влияние дисперсной примеси на течение несущего газа можно не учитывать.

В ламинарном пограничном слое частица обтекается неоднородным в поперечном направлении потоком. Вследствие этого помимо силы Стокса, совпадающей по направлению со скоростью скольжения, на нее действует поперечная сила Сэфмана (см. Рис. 5.1). Масштаб области Сэфмана, представляющий собой характерный размер области, в которой решаются уравнения возмущенного движения газа около частицы, при любом продольном масштабе L пограничного слоя мал по сравнению с его толщиной δ :

$$L_{Sa} = \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^{-1/2} \sim L \text{Re}_L^{-3/4} \ll \delta \sim L \text{Re}_L^{-1/2}.$$

Здесь и далее штрихом обозначаются размерные величины скоростей и координат, u' - продольная скорость газа, $\text{Re}_L \gg 1$ - число Рейнольдса пограничного слоя. По этой причине влияние поверхности пластины на величину силы Сэфмана сказывается лишь на расстояниях от частицы до пластины порядка $L_{Sa} \ll \delta$, а кривизна профиля невозмущенной скорости на масштабе L_{Sa} асимптотически мала. Течение вблизи частицы нестационарно: по мере ее движения меняются скорость обтекания и градиент скорости, которые входят в выражение для силы Сэфмана. При этом характерное время этого изменения можно оценить как L/V , где V - характерная скорость набегающего потока газозвеси. Характерное время для уравнений Озее-на, т.е. время изменения, при котором нужно учитывать нестационарность возмущенного течения, составляет (см. Главу 4)

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^{-1} \sim \delta/V \ll L/V.$$

Последнее неравенство означает, что обтекание сферы в системе отсчета, связанной с ее центром, можно считать квазистационарным. Таким образом, при рассмотрении движения дисперсной примеси в основной части пограничного слоя с поперечным масштабом δ условия обтекания частицы на масштабе L_{Sa} соответствуют неограниченному стационарному линейному сдвиговому потоку, и для силы Сэфмана можно использовать значения коэффициента поперечной силы $c_L^\infty(\alpha)$, полученного в Главе 1 (уравнение (1.49)). Параметр скольжения α , характеризующий соотношение чисел Рейнольдса, вычисляемых соответственно по скорости обтекания отдельной частицы и по величине невозмущенного поперечного градиента скорости, задается выражением

$$\alpha = \pm \frac{R_s}{R_G^{1/2}} = (u' - u'_p) \left(\nu \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^{-1/2},$$

где u'_p - размерная продольная скорость частиц. Направление силы определяется знаком скорости скольжения, который зависит от продольного ускорения несущей фазы.

В качестве одного из характерных продольных масштабов течения дисперсной смеси в пограничном слое можно принять масштаб релаксации продольной скорости частиц [173, 174, 175]:

$$\lambda_{St} = \frac{2 a^2 \rho_s V}{9 \mu},$$

где μ - вязкость газа. Соответствующее этому масштабу число Рейнольдса

$$\begin{aligned} \text{Re}_{St} &= \frac{\rho V \lambda_{St}}{\mu} = \frac{2 a^2 \rho_s \rho V^2}{9 \mu^2} = \frac{2}{9} \theta^{-1} R_V^2, \\ \theta &= \frac{\rho}{\rho_s}, \quad R_V = \frac{a \rho V}{\mu}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

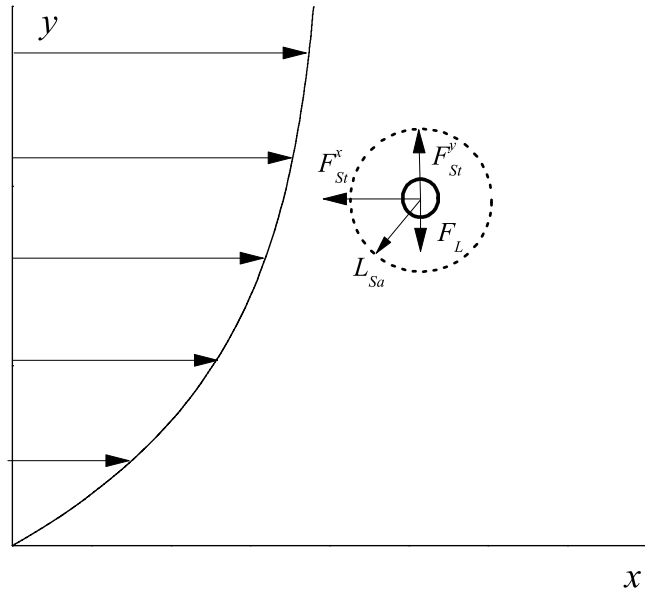


Рис. 5.1. Схема течения запыленного газа в пограничном слое на плоской пластине и действующие на частицу силы

предполагается обычно асимптотически большим параметром, что позволяет решать уравнения движения дисперсной смеси в приближении пограничного слоя. Здесь и далее числа Рейнольдса, характеризующие продольные масштабы течения дисперсной смеси в пограничном слое, обозначаются Re , а характеризующие обтекание частиц - R .

Из равенства (5.1) нетрудно видеть, что условие $Re_{st} \gg 1$ должно быть связано с предположением об асимптотически большой величине по крайней мере одного из параметров:

$$\theta^{-1} \gg 1, \quad R_V \gg 1. \quad (5.2)$$

При движении частиц в газе обычно $\theta \sim 10^{-3}$. Ниже будем считать, что выполняется первое асимптотическое неравенство (5.2), а $R_V \sim 1$.

Поскольку коэффициент силы Сэфмана является величиной порядка 1, нормальные силы, действующие на частицу при движении на масштабе λ_{st} , можно оценить как

$$F_{st}^y(\lambda_{st}) \sim \mu a (v' - v'_p) \sim \mu a V Re_{st}^{-1/2} \sim \mu a V R_V^{-1} \theta^{1/2},$$

$$F_L(\lambda_{st}) \sim \mu a (u' - u'_p) R_G^{1/2}(\lambda_{st}) \sim \mu a V R_V Re_{st}^{-1/4} \sim \mu a V R_V^{1/2} \theta^{1/4}.$$

Можно видеть, что при выполнении (5.2) всегда имеем $F_L(\lambda_{st}) \gg F_{st}^y(\lambda_{st})$. Это означает, что поперечные силы становятся величинами одного порядка на расстояниях больших по сравнению с λ_{st} , где скорость скольжения мала, $|(u' - u'_p)/V| \ll 1$, и необходимо введение нового продольного масштаба двухфазного пограничного слоя $\lambda_{sa} \gg \lambda_{st}$.

5.1. Пограничный слой на плоской пластине

Запишем безразмерные уравнения импульса для дисперсной примеси в рамках модели запыленного газа [173, 174] в виде (движение газа вследствие ма-

лости массовой доли примеси описывается обычными уравнениями Прандтля)

$$u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} = \frac{9}{2} (u - u_p) \frac{\theta \text{Re}_{\text{Sa}}}{R_V^2}, \quad (5.3)$$

$$u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y} = \frac{9}{2} (v - v_p) \frac{\theta \text{Re}_{\text{Sa}}}{R_V^2} + \frac{3}{4\pi} c_L^\infty(\alpha) (u - u_p) \frac{\theta \text{Re}_{\text{Sa}}^{5/4}}{R_V} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Здесь число Рейнольдса Re_{Sa} вычисляется по продольному масштабу λ_{Sa} , который определяется ниже из анализа порядков членов в уравнении (5.3), (5.4), пространственные координаты x и y обезразмерены, как обычно в приближении пограничного слоя, соответственно на λ_{Sa} и $\lambda_{\text{Sa}} \text{Re}_{\text{Sa}}^{-1/2}$, продольные скорости u , u_p - на V , поперечные v , v_p - на $V \text{Re}_{\text{Sa}}^{-1/2}$.

Поскольку $\text{Re}_{\text{Sa}} \gg \text{Re}_{\text{St}} \sim \theta^{-1} R_V^2$, безразмерные коэффициенты при первых членах в правых частях уравнений (5.3), (5.4), соответствующих продольной и поперечной силам Стокса асимптотически велики, $\varepsilon^{-1} = \text{Re}_{\text{Sa}} \theta R_V^{-2} \gg 1$. Это означает, что решением первого уравнения в главном приближении является $u_p^0 = u$, т. е. в продольном направлении частицы «вморожены» в газ.

Безразмерный параметр $\theta \text{Re}_{\text{Sa}}^{5/4} R_V^{-1}$ при втором члене в правой части уравнения (5.4), соответствующем силе Сэфмана, как легко видеть, асимптотически велик по сравнению с ε^{-1} . В случае, когда он является величиной $O(\varepsilon^{-2})$, для определения поперечной скорости частиц v_p в главном приближении требуется знание скорости u_p не только в главном, но и в следующем приближении по ε :

$$|v - v_p| \sim |u - u_p| \frac{\theta \text{Re}_{\text{Sa}}^{5/4}}{R_V} \sim 1.$$

Указанное условие

$$\frac{\theta \text{Re}_{\text{Sa}}^{5/4}}{R_V} \sim \varepsilon^{-2} \sim \frac{\theta^2 \text{Re}_{\text{Sa}}^2}{R_V^4},$$

выполняется, если $\text{Re}_{\text{Sa}} \sim \theta^{-4/3} R_V^4$. Примем

$$\text{Re}_{\text{Sa}} = D\theta^{-4/3} R_V^4, \quad \lambda_{\text{Sa}} = D(V/\mu)^3 a^4 \rho^{5/3} \rho_s^{4/3}, \quad (5.5)$$

где D - численный коэффициент, величина которого определяется ниже.

Поперечная сила вычислялась при условии, что числа Рейнольдса, определяемые по размеру частиц и скорости обтекания R_s и по величине невозмущенного поперечного градиента скорости R_G , малы. Для данных чисел с учетом (5.3), (5.4) на масштабе λ_{Sa} можно получить следующие оценки:

$$R_s = |u - u_p| R_V \sim \frac{R_V^3}{\theta \text{Re}_{\text{Sa}}} \sim \frac{\theta}{R_V} \ll 1, \quad R_G \sim \frac{R_V^2}{\text{Re}_{\text{Sa}}^{1/2}} \sim \theta^{2/3} \ll 1.$$

Таким образом, условия малости чисел Рейнольдса действительно выполняются на масштабе λ_{Sa} .

Параметр скольжения, от которого зависит коэффициент поперечной силы c_L^∞ , представим в виде

$$\alpha = (u - u_p) \text{Re}_{\text{Sa}}^{1/4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1/2}. \quad (5.6)$$

Выражая с учетом (5.6) и равенства $u_p^0 = u$ скорость обтекания $(u - u_p)$ в уравнениях (5.3), (5.4) через α и отбрасывая внепорядковые члены, будем иметь в главном приближении

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v_p \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{9}{2} D^{3/4} \alpha R_V \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2}, \quad (5.7)$$

$$0 = \frac{9}{2} (v - v_p) + \frac{3}{4\pi} c_L^\infty(\alpha) \alpha R_V \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (5.8)$$

В полученных уравнениях перейдем к переменным Блазиуса , $\eta = yx^{-1/2}$, так что

$$u = f', \quad v = x^{-1/2} (\eta f' - f) / 2,$$

$$f''(0) = 0.332,$$

где $f(\eta)$ - известная функция Блазиуса, исключим v_p , а коэффициент D определим следующим образом:

$$D^{3/4} = c_L^\infty(0) [f''(0)]^{3/2} (27\pi)^{-1}.$$

В результате имеем $D = 3.56 \times 10^{-3}$, а для параметра α получим уравнение

$$\chi(\alpha) = \alpha Q(x, \eta) + Z(\eta), \quad (5.9)$$

$$\chi = c_L^\infty(\alpha) \alpha,$$

$$Q = c_L^\infty(0) x^{3/4} \left[\frac{f''(\eta)}{f''(0)} \right]^{-3/2}, \quad Z = \frac{3\pi f(\eta)}{R_V f''(\eta)}.$$

Как следует из данного уравнения, на масштабе λ_{Sa} распределение параметра $\alpha(x, \eta)$ и выражающиеся через него скорости $u - u_p$ и v_p определяются в каждой точке пограничного слоя локальными значениями параметров невозмущенного потока газа. Таким образом, задача нахождения квазиравновесного (т.е. такого, при котором действующая на частицу суммарная поперечная сила равна нулю) распределения скоростей свелась к нелинейному алгебраическому уравнению (5.9). Его решение, вообще говоря, не является единственным. Этот вывод проиллюстрирован на Рис. (5.2), где сплошной линией изображен график левой части уравнения (5.9). Правая часть этого уравнения представляет собой линейную функцию от α , с коэффициентами, зависящими от координат x, η и числа R_V . На Рисунке нанесены прямые 1, 2, 3, рассчитанные для различных значений x и $\eta = 0$. Решения уравнения соответствуют точкам пересечения сплошной линии и прямых. Таким образом, уравнение может иметь три (точки K, L, M), два (точки N, O) или один (точка P) корня.

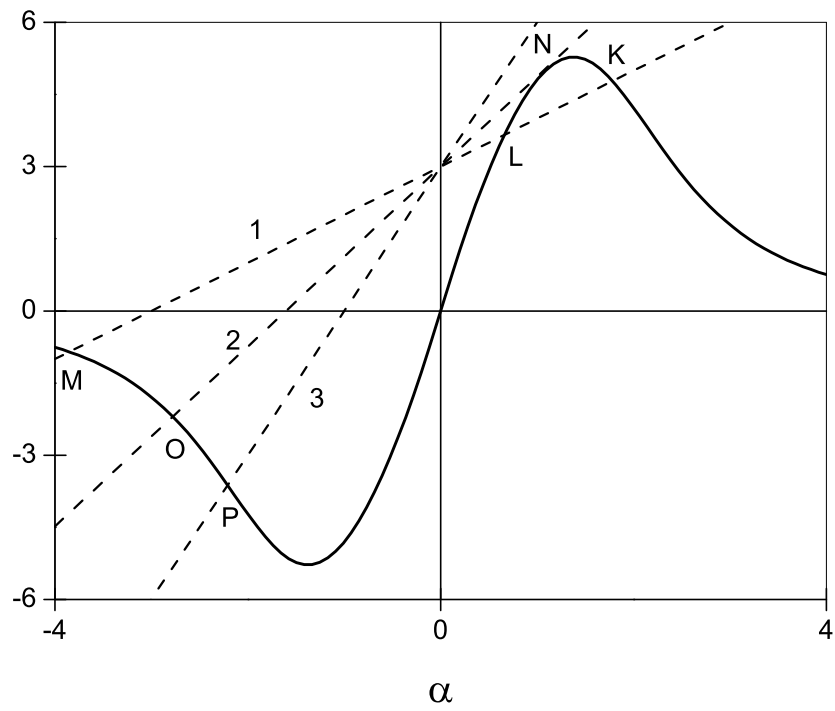


Рис. 5.2. Графическое решение уравнения (5.9).

Отрицательный корень α существует для всех значений пространственных переменных, а положительный — лишь для $x < 1$. В связи с неединственностью решения уравнений квазиравновесного движения частиц под действием сил Стокса и Сэфмана возникает необходимость рассмотрения задачи о начальной стадии движения частиц на масштабе времени τ_{St} и пространственном масштабе λ_{St} . Ее решение приведено в работе [32], где получены также предельные решения, соответствующие установившемуся квазиравновесному движению. Если в начальный момент времени продольная скорость частицы отличается на свою величину от скорости газа, то с учетом (5.6) имеем $|\alpha| \gg 1$. По этой причине член, соответствующий силе Сэфмана, асимптотически мал по сравнению с остальными членами, т. е. на начальной стадии движения происходит торможение продольного и поперечного относительного движения частицы под действием только силы Стокса. В результате предельные решения при $t \gg \tau_{St}$ зависят только от знака параметра α в начальный момент, совпадающего со знаком начальной разности продольных скоростей частицы и газа. Отрицательные α соответствуют частицам, опережающим поток газа. Такая ситуация имеет место, например, при обтекании пластины потоком газозвеси. Сила Сэфмана в этом случае направлена к поверхности пластины. Средний из трех корней (точка L) не может быть достигнут, т.к. он неустойчив. Положительные α могут быть реализованы, если покоящиеся частицы поднимаются с поверхности пластины. Положительной силой Сэфмана можно объяснить подъем пыли с плоской поверхности в пограничном слое за ударной волной [176, 177, 178]. Другие случаи, где газ разгоняется в пограничном слое, течения около клина и сферы, и где в результате также реализуются квазиравновесные режимы с положительным α , рассмотрены в следующих разделах.

Для течения запыленного газа в пограничном слое на плоской пластине с отрицательными α определим сначала предельные распределения $\alpha(x, y)$

при $x \ll 1$ и $x \gg 1$, следующие из решения (5.9). Для $x \gg 1$ параметр α убывает пропорционально $x^{-3/4}$, т.к. первый член в правой части (5.9) должен оставаться конечным. В результате коэффициент $c_L^\infty(\alpha)$ стремится к своему предельному значению $c_L^\infty(0) = 6.46$, и член, соответствующий силе Сэфмана во втором уравнении (5.8),

$$\frac{3}{4\pi} c_L^\infty(\alpha) \alpha R_V \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim x^{-5/4},$$

убывает быстрее, чем поперечная сила Стокса, $\frac{9}{2}(v - v_p) \sim x^{-1/2}$. Таким образом, для значений $x \gg 1$ имеем $v_p \simeq v$, т.е. равенство продольной и поперечной скоростей фаз достигается на расстоянии от края пластины, большом по сравнению с масштабом λ_{Sa} .

Для предельных значений координаты $x \ll 1$ влияние силы Сэфмана на распределение поперечной скорости v_p также несущественно. Действительно, поскольку коэффициент $c_L^\infty(\alpha)$ при больших значениях α быстро убывает,

$$\alpha \gg 1 : \quad c_L^\infty(\alpha) \sim \alpha^{-4} \ln |\alpha|,$$

член в левой части уравнения (5.9) мал по сравнению с правой частью, и поэтому решение (5.9) в этом случае записывается в виде

$$x \ll 1 : \quad \alpha = -Z(\eta) / Q(x, \eta) \sim x^{-3/4},$$

т.е. параметр скольжения также пропорционален $x^{-3/4}$. В результате, несмотря на большую скорость обтекания частиц, пропорциональную α , член в правой части второго уравнения (5.8), соответствующий силе Сэфмана, стремится к нулю при $x \ll 1$, в то время как поперечная сила Стокса возрастает, так как поперечная скорость газа $v \sim x^{-1/2}$. Таким образом, при $x \ll 1$ также имеем $v_p \simeq v$.

Для значений $x = O(1)$ уравнение (5.9) решалось численно. Результаты расчета параметра α для $R_V = 3$ и значений координат $x = 0,8$ и $x = 1,5$

приведены соответственно на Рис. 5.3(a, b). Параметр скольжения конечен, и поэтому коэффициент поперечной силы значительно отличается от предельного значения $c_L^\infty(0) = 6.46$. На рисунке нанесены также зависимости поперечной скорости частиц $v_p(\eta)$, вычисленные с учетом (5.8). Штриховой линией для сравнения обозначена зависимость поперечной скорости газа $v(\eta)$ в пограничном слое. Распределения $\alpha(\eta)$, $v_p(\eta)$ качественным образом различаются для $x < 1$ и $x > 1$ вблизи поверхности пластины. При $x < 1$, $\eta \rightarrow 0$ имеем из (5.9)

$$c_L^\infty(\alpha) = c_L^\infty(0) x^{3/4} < c_L^\infty(0),$$

что дает отличные от нуля предельные значения для $\alpha(x, \eta)$. Из этого с учетом (5.8) следует, что при $x < 1$ частицы приближаются к поверхности пластины с конечной скоростью.

Для значений $x > 1$ выражение в квадратных скобках в уравнении (5.9) всегда положительно и поэтому α и v_p стремятся к нулю вблизи стенки:

$$x > 1, \eta \rightarrow 0: \quad \alpha = \frac{3\pi\eta^2}{c_L^\infty(0)(x^{3/4} - 1)R_V}, \quad v_p = \frac{f''(0)(x^{3/4} - 2)\eta^2}{4(x^{3/4} - 1)x^{1/2}}.$$

Из последней формулы следует, что при $x < 2^{4/3}$ вблизи поверхности пластины имеется область, где $v_p < 0$, а при $x > 2^{4/3}$ имеем $v_p > 0$ для всех значений $\eta > 0$. Полученные распределения $v_p(\eta)$ качественно совпадают с приведенными в [162] результатами расчетов течения дисперсной примеси на масштабе λ_{St} .

Распределение плотности частиц $\rho_p(\eta)$, обезразмеренное на ее величину в невозмущенном потоке дисперсной смеси, определялось из условия сохранения массового расхода частиц в элементарной трубке тока дисперсной фазы. Для того, чтобы определить значение указанного инварианта, необходимо продолжить траектории частиц в область малых значений x , где

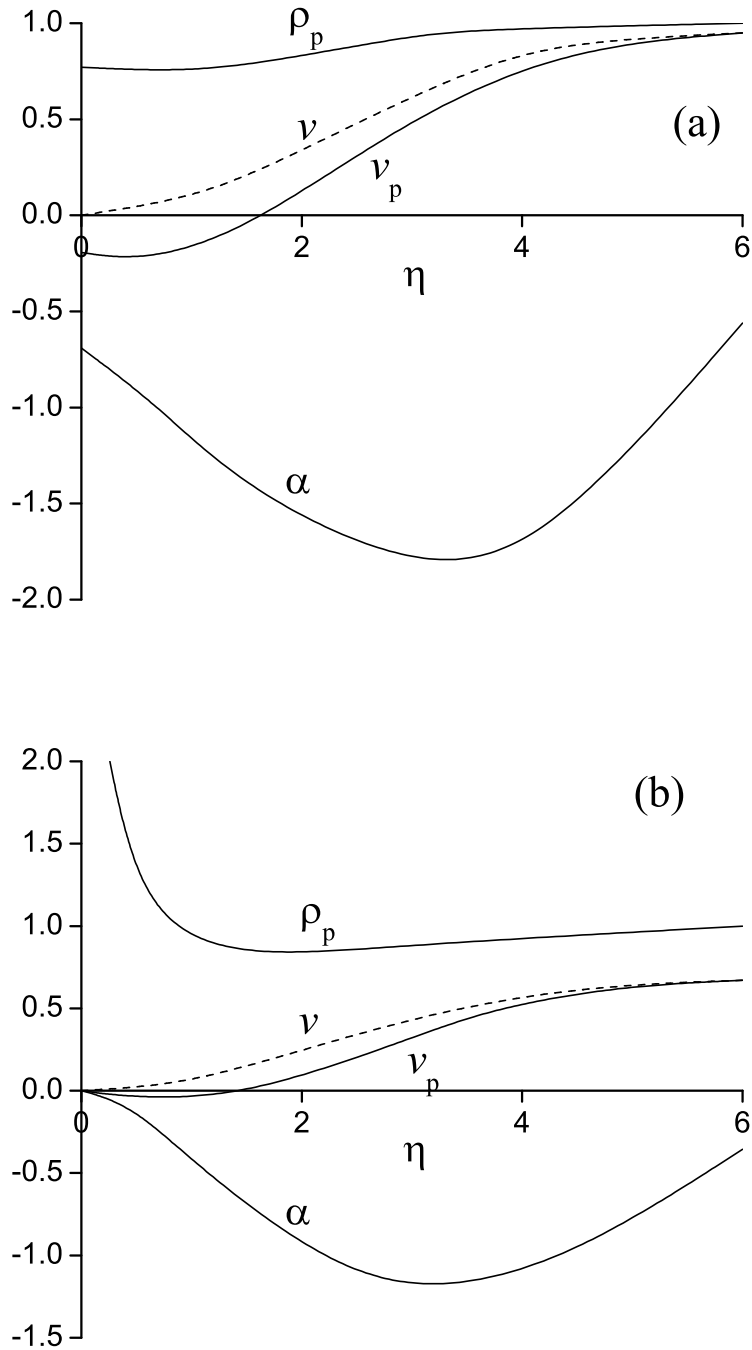


Рис. 5.3. Распределения параметра скольжения, поперечной скорости и плотности частиц и скорости газа в пограничном слое на плоской пластине для $R_V = 3$, (a) $x = 0.8$, (b) $x = 1.5$.

величина плотности частиц равна невозмущенному значению. Результаты расчета $\rho_p(\eta)$ приведены на Рис. 5.3(a, b). Можно видеть, что отмеченные выше качественные различия в распределениях α и v_p вблизи поверхности пластины для значений $x < 1$ и $x > 1$ приводят и к различиям в распределении плотности: при $x < 1$ частицы приближаются к поверхности пластины с конечной скоростью, поэтому конечно и значение плотности. При $x > 1$ также имеется область, где поперечная скорость частиц отрицательна. Тем не менее приближающиеся к поверхности пластины частицы не достигают ее, поскольку $v_p \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$, что приводит к появлению неинтегрируемой особенности плотности $\rho_p \sim \eta^{-1}$ при $\eta \rightarrow 0$. Особенности плотности частиц, движущихся только под действием силы Стокса, изучались ранее в работах [179, 180].

Выше предполагалось, что поперечная сила не зависит от расстояния до стенки. Это верно в основной части пограничного слоя, но в тонком пристенном слое толщиной $L_{Sa} \ll \delta$ коэффициент поперечной силы $c_L(\alpha, y)$ уменьшается в результате взаимодействия частицы со стенкой, а затем становится отрицательным, т.е. поперечная сила отталкивает частицы от стенки (см. Рис. 1.3(a, b)).

Для описания движения частиц в данной области использовалась следующая аппроксимация коэффициента поперечной силы [41], которая описывает численные значения [30] с относительной точностью 0.05 и совпадает с решениями для предельных случаев $y'/L_{Sa} \ll 1$ и $y'/L_{Sa} \gg 1$,

$$c_L = c_L^\infty(\alpha) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1.77\alpha}{c_L^\infty(\alpha)} \right) \exp \left[-\frac{(0.453 + |\alpha|^{1.93}) y'}{L_{Sa}} \right] \right\} \quad (5.10)$$

В результате по мере приближения частиц к поверхности происходит их торможение, и они не достигают стенки, а скапливаются в пристенной области (см. Рис. 5.4). Вблизи стенки образуется область чистого газа.

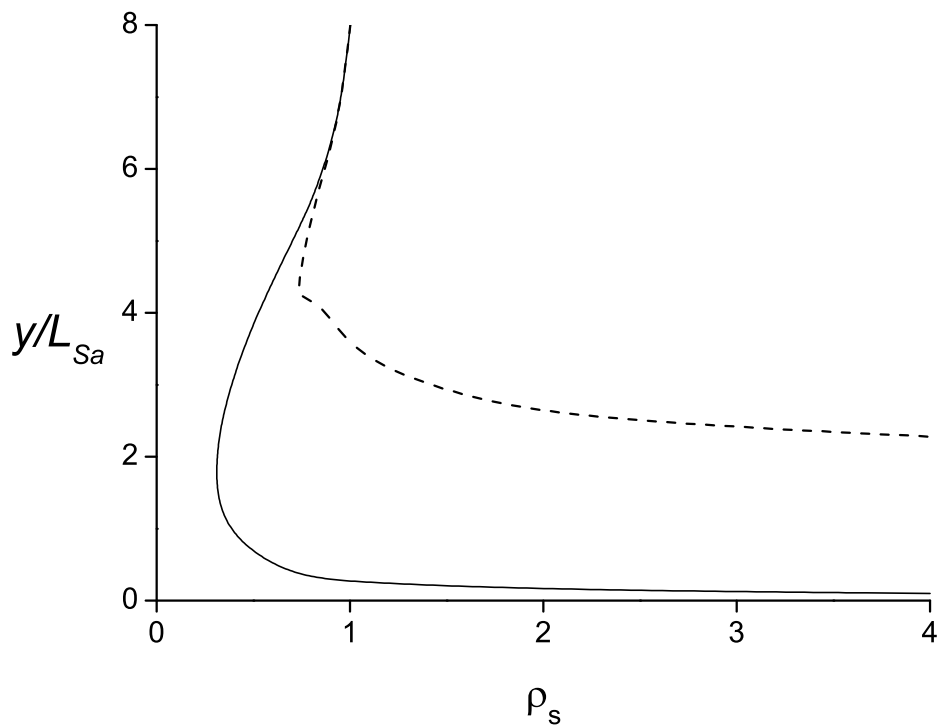


Рис. 5.4. Асимптотическое распределение плотности частиц на больших расстояниях. Сплошная кривая - расчет для коэффициента поперечной силы, равного максимальному значению c_{Sa} , штриховая - для зависимости $c_L(\alpha, y'/L_{Sa})$, задаваемой (5.10) [41].

5.2. Пограничный слой при обтекании клина

В градиентном пограничном слое, в отличие от течения на плоской пластине, продольное ускорение несущей фазы и связанные с ним скорость обтекания частиц и сила Сэфмана могут иметь любой знак. Результатом действия на частицы положительной (направленной от поверхности тела) поперечной силы является возникновение отрыва дисперсной фазы, т. е. наличие области вблизи поверхности, где частицы отсутствуют. В качестве примера, иллюстрирующего указанный эффект, может быть рассмотрена задача об обтекании клина [33], для которой имеются известные решения, описывающие распределение скорости газа в невязкой области и в пограничном слое. Движение дисперсной фазы в невязкой области для указанной геометрии рассматривалось в работе [181], а в пограничном слое без учета силы Сэфмана для сходной задачи (течение в окрестности критической точки затупленного тела) — в работе [182].

Запыленный газ движется в ламинарном пограничном слое над клином с углом при вершине $\pi\beta$, $0 < \beta < 1$ (схема течения приведена на Рис. 5.5). Массовая плотность дисперсной фазы, $\rho_p^\infty = 4\pi n_p^\infty \rho_s a^3/3$, предполагается малой по сравнению с плотностью газа ρ . Для рассматриваемого течения можно выделить две области, где имеет место скоростная неравновесность фаз. В области 1 вблизи вершины клина течение газа является невязким, а характерное время изменения его скорости равно времени релаксации скорости частиц под действием силы Стокса $\tau_{St} = 2\rho_s a^2/(9\mu)$. Поскольку скорость газа степенным образом растет вдоль поверхности клина

$$U = cx^m, \quad m = \frac{\beta}{2-\beta} > 0, \quad (5.11)$$

для линейного масштаба указанной области будем иметь

$$\lambda_{St} = (c\tau_{St})^l, \quad l = (1-m)^{-1}.$$

В результате того, что дисперсная фаза не успевает отслеживать скорость несущей фазы, часть ее, находящаяся в набегающем потоке на расстояниях от оси симметрии r , меньших некоторого критического значения $r_0 \sim \lambda_{St}$, выпадает на поверхность клина (траектория A) [181]. Другая часть, для которой $r > r_0$ (траектория B), продолжает движение вдоль поверхности тела и входит в пограничный слой.

Причиной различия скоростей фаз в пограничном слое (область 3 на рис. 5.5) является то, что помимо силы Стокса на частицы действует поперечная сила. В качестве масштаба, на котором строятся уравнения движения дисперсной примеси, в данном случае можно принять величину

$$\lambda_c = \left(\frac{U_c}{c} \right)^{1/m}, \quad U_c = \frac{\mu}{\rho a}.$$

Соответствующее значениям λ_c и U_c число Рейнольдса будем считать асимптотически большим параметром:

$$\text{Re}_c = \rho \lambda_c U_c / \mu \gg 1.$$

Кроме того, будем считать, что для введенных асимптотических параметров Re_c и θ выполняется неравенство $\text{Re}_c \gg \theta^{-1}$ (только такое их соотношение обеспечивает выполнение условий малости чисел Рейнольдса частиц).

Следует отметить, что размеры λ_{St} и λ_c для характерных значений скорости набегающего потока и размеров частиц, как правило, невелики по сравнению с размерами обтекаемого тела. По этой причине полученные ниже для модельной задачи об обтекании клина результаты соответствуют также реальным распределениям скорости и плотности частиц в некоторой окрестности передней кромки обтекаемого тела, где поле скорости газа в невязкой области описывается степенной зависимостью (5.11). Так, например, если течение газа, соответствующее обтеканию клина с углом при вершине $2\pi/3$, реализуется на участке длиной $x_* = 0.1$ м и при этом скорость

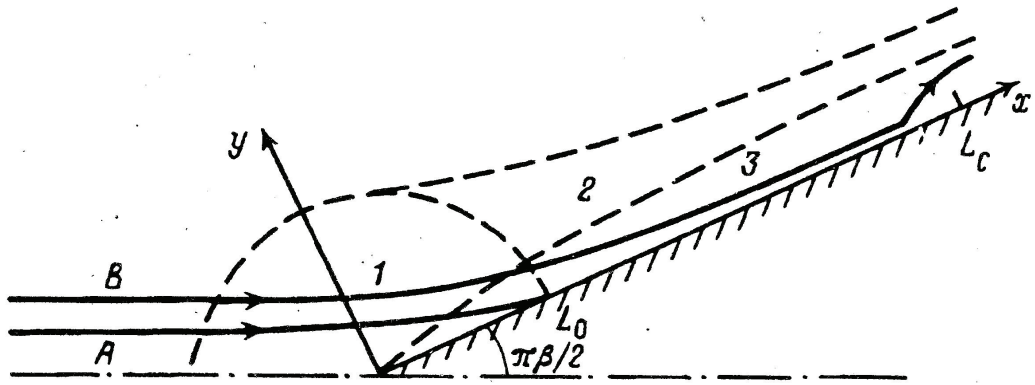


Рис. 5.5. Схема течения запыленного газа в пограничном слое на клине

газа на расстоянии x_* от вершины будет равна 10 м/с, то для капель воды радиуса $a = 6$ мкм при нормальных условиях будем иметь $\lambda_{St} = 2 \cdot 10^{-4}$ м и $\lambda_c = 10^{-2}$ м, $Re_c = 2 \cdot 10^3$.

Запишем аналогично (5.7), (5.8) безразмерные уравнения квазиравновесного движения дисперсной примеси в пограничном слое на масштабе λ_c :

$$\varepsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v_p \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u - u_p, \quad (5.12)$$

$$\frac{c_L^\infty(\alpha)(u_p - u)}{\gamma \varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2} = v - v_p, \quad (5.13)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{9\theta Re_c} \ll 1, \quad \gamma = 27\pi\theta Re_c^{3/4},$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1/2} (u - u_p) Re_c^{1/4}.$$

Из (5.12) имеем, как и ранее, $u_p = u + O(\varepsilon)$, т.е. продольная скорость скольжения мала. Будем предполагать для асимптотических параметров $\theta \sim Re_c^{-3/4} \sim \varepsilon^3$, так что $\gamma = O(1)$. Такая ситуация представляет больший интерес, т.к. поперечная скорость скольжения $v - v_p$ сравнима со скоростью газа v , и, кроме того, в этом случае необходимо учитывать изменение коэффициента поперечной силы $c_L^\infty(\alpha)$ при движении дисперсной примеси. Уравнения (5.12), (5.13) можно преобразовать в алгебраическое уравнение, аналогичное (5.9):

$$\chi(\alpha) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \gamma \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2} = -6\pi \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (5.14)$$

Основное отличие (5.14) от (5.9) заключается в ускорении газа (член в правой части (5.14)), которое для течения на клине может иметь разный знак. В зависимости от знака этого члена решения для α , а следовательно, и характер траекторий частиц могут быть качественно различными.

В пограничном слое над клином автомодельное распределение скорости газа выражается через функцию, являющуюся решением уравнения Фокнера-Скэн [183]

$$\begin{aligned} u &= x^m \Phi', & v &= -\kappa x^{(m-1)/2} \left(\Phi + \frac{m-1}{m+1} \xi \Phi' \right) \\ \xi &= \kappa y x^{(m-1)/2}, & \kappa &= \sqrt{(m+1)/2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

С учетом (5.15) уравнение (5.14) и выражение для нормальной скорости дисперсной фазы переписутся в виде

$$\chi(\alpha) - \gamma \alpha \xi^\nu q(\xi) + \xi^{-m} s(\xi) = 0, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} v_p &= -\kappa x^{(m-1)/2} \left(\Phi + \frac{m-1}{m+1} \xi \Phi' - x^m \Phi'' \frac{\chi(\alpha)}{6\pi} \right), \\ q &= (\kappa \Phi'')^{-3/2}, & s &= -6\pi \left[\frac{\Phi}{\Phi''} - m \left(\frac{\Phi'}{\kappa \Phi''} \right)^2 \right], & \nu &= \frac{3(1-3m)}{4}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Важным свойством полученного уравнения для параметра α является рассмотренная выше неединственность его решения, связанная с нелинейностью функции $\chi(\alpha)$. В общем случае оно имеет две устойчивых ветви решения, и задача описания квазиравновесного движения дисперсной смеси осложняется возможностью перехода с одной ветви решения на другую. Указанное явление имеет место в случае, когда ускорение газа является знакопеременной функцией. Если же ускорение имеет одинаковый знак во всем пограничном слое, то квазиравновесные распределения параметра α и выражающейся через него поперечной скорости частиц соответствуют единственной ветви решения. Так, для течения дисперсной смеси в пограничном слое над плоской пластиной ускорение отрицательно для всех значений x, y и поэтому распределение скорости v_p единственно. Для этой ветви решения скорость обтекания частиц отрицательна, а сила Сэфмана направлена к поверхности пластины. При обтекании клина функция s в уравнении (5.16), пропорциональная ускорению, положительна для всех значений x, y ,

а решение описывается единственной ветвью, если $\beta > 0.5$. Ограничимся в данном разделе рассмотрением только этого случая, для которого сила Сэфмана положительна во всем поле течения, что приводит к отрыву потока дисперсной примеси. Случай $\beta < 0.5$, характеризующийся переходом с одной ветви решения на другую, подробно рассмотрен в работе [35].

Определим сначала предельные распределения $\alpha(\xi)$, $v_p(\xi)$ при $x \ll 1$ и $x \gg 1$. Для значений $x \ll 1$ влияние силы Сэфмана на распределение поперечной скорости $v_p(\xi)$, как и при обтекании плоской пластины, несущественно. Действительно, решение (5.16) при $x \ll 1$ можно записать в виде

$$x \ll 1 : \alpha = x^{-m-\nu} s (\gamma q)^{-1}. \quad (5.18)$$

Подставляя данное выражение в (5.17), можно убедиться, что член, соответствующий силе Сэфмана, асимптотически мал по сравнению с остальными членами, и поэтому поперечные скорости фаз при $x \ll 1$ равны для всех значений параметра β .

Для предельных значений координаты $x \gg 1$ соотношение поперечных сил Стокса и Сэфмана различно в зависимости от угла при вершине клина $\pi\beta$. При $0.9 < \beta < 1$ распределение α описывается соотношением (5.18), и вследствие этого поперечные скорости фаз равны. В случае $0.5 < \beta < 0.9$ не происходит уменьшения влияния силы Сэфмана. Действительно, с учетом асимптотики зависимости $c_L^\infty(\alpha) \sim 31.9\alpha^{-4}$ при $\alpha \gg 1$ решение (5.16) запишется в виде

$$0.5 < \beta < 0.9, x \gg 1 : \alpha = \left(\frac{\gamma x^\nu q(\xi)}{31.9} \right)^{-1/4}$$

В результате член, который соответствует силе Сэфмана в формуле (5.17) и пропорционален $x^m \chi(\alpha) \sim x^{m+3\nu/4}$, убывает медленнее с ростом x , чем остальные члены. По этой причине при $x \gg 1$ поперечная скорость частиц асимптотически велика по сравнению с поперечной скоростью газа.

Для значений $x \sim 1$ уравнение (5.16) решалось численно методом Ньютона. Найденные с учетом (5.17) зависимости поперечной скорости дисперсной фазы для $\gamma = 40$ и значения угла при вершине клина $\beta = 0.75$, ($m = 0.6$) представлены на Рис. 5.6. Сплошные кривые 1-3 соответствуют значениям $x = 2; 10; 20$. Можно видеть, что распределения $v_p(\xi)$ качественным образом различаются для $x < x_r = [c_L^\infty(\alpha)/\gamma q(0)]^{1/\nu}$ и $x > x_r$. При $x < x_r$ величины α и v_p стремятся к нулю вблизи поверхности тела, так как для любых значений α второй член в левой части (5.16) больше первого, и поэтому с учетом того, что $s \sim \xi^2$ при $\xi \ll 1$, получим

$$\begin{aligned} \xi \ll 1, x < x_r : \alpha &= \frac{6\pi(1-m)\xi^2}{(1+m)p(x)x^m}, \\ v_p &= \kappa x^{(m-1)/2} \frac{\xi^2 \Phi''(0)}{m+1} \left(1 - 3m + \frac{1-m}{p(x)} \right), \\ p &= \gamma q(0) x^\nu - c_L^\infty(\alpha). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для значений $x > x_r$ уравнение (5.16) при $\xi \ll 1$ можно переписать в виде

$$c_L^\infty(\alpha) = \gamma q(0) x^\nu.$$

Последнему уравнению удовлетворяет конечное значение параметра α , которому с учетом (5.17) соответствует также конечная поперечная скорость:

$$\xi \ll 1, x > x_r : v_p = \kappa x^{(3m-1)/2} \Phi''(0) \frac{\chi(\alpha)}{6\pi}. \quad (5.20)$$

Из формул (5.19), (5.20) следует, что нулевая линия тока дисперсной фазы, проходящая при $x < x_r$ у поверхности клина, при $x > x_r$ удаляется от нее на конечные расстояния. Таким образом, результатом действия силы Сэфмана при обтекании клина является оттеснение дисперсной фазы от его поверхности и образование области, куда частицы не могут попасть, независимо от их начального положения. Это явление можно назвать отрывом потока дисперсной фазы в пограничном слое.

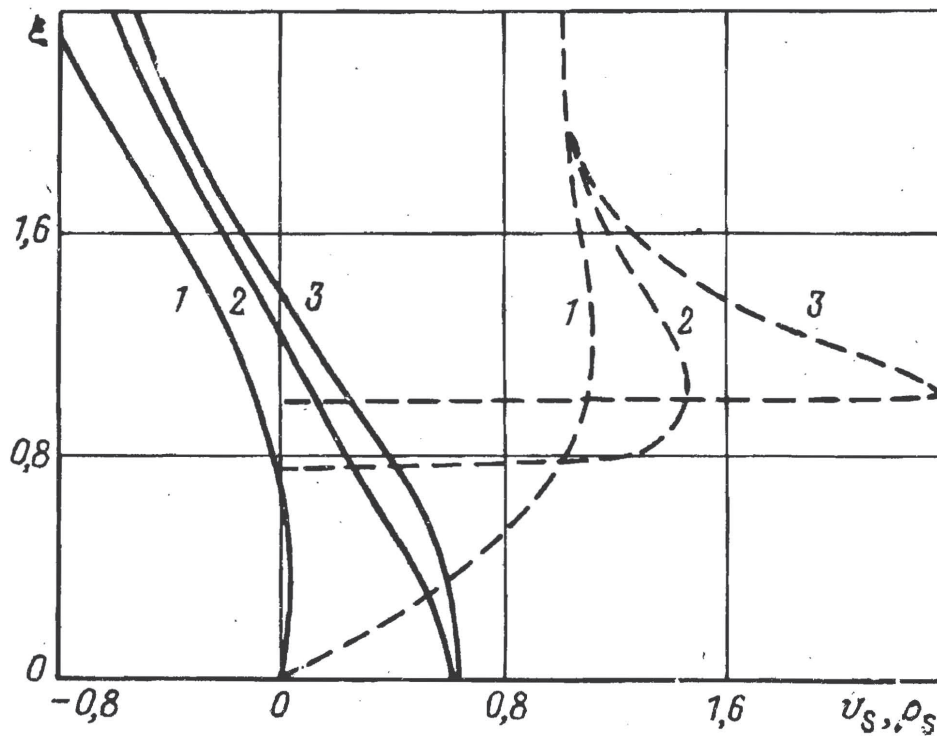


Рис. 5.6. Распределения $v_p(\xi)$ (сплошные кривые) и $\rho_p(\xi)$ (штриховые кривые) в пограничном слое на клине. Кривые 1-3 соответствуют значениям $x = 2; 10; 20$.

Для иллюстрации сказанного построим в пространстве переменных (x, ξ) траектории частиц, которые могут быть найдены в результате интегрирования уравнений движения частиц:

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt} &= u = x^m \Phi'(\xi), \\ \frac{d\xi_p}{dt} &= \kappa x^{(m-1)/2} v_p + \frac{m-1}{2} x^{m-1} \xi \Phi'.\end{aligned}$$

На рис. 5.7(a) приведены несколько характерных траекторий частиц, которые начинаются на внешней границе пограничного слоя и соответствуют значениям параметров $\beta = 0.75$, $\gamma = 5$. Нулевая линия тока дисперсной фазы, проходящая через точку $(x_r, 0)$, является, очевидно, границей области отрыва. Штриховые кривые 1 – 3 обозначают границы областей отрыва для различных значений параметра $\gamma = 5; 10; 15$.

В случае $\beta = 0.5$, ($m = 1/3$), в отличие от $\beta > 0.5$, показатель степени ν в уравнении (5.16) равен нулю. В результате поперечная скорость на поверхности клина одинакова при всех x и зависит только от γ . Для значений $\gamma > \gamma_r = c_L^\infty(0)/q(0) = 4.2$ распределение $v_p(x, \xi)$ вблизи поверхности при всех x описывается формулой (5.19), а при $\gamma < \gamma_r$ – (5.20). Границы области отрыва для этого случая показаны на Рис. 5.7(b) для значений $\gamma = 0.5; 1; 3$, меньших критического (соответственно штриховые кривые 1 – 3). Там же построены несколько характерных траекторий частиц для $\gamma = 1$. В отличие от $\beta > 0.5$, область, в которую не попадает дисперсная фаза, при $\beta = 0.5$ начинается при $x = 0$, т. е. вблизи поверхности клина частицы отсутствуют при всех значениях x . Для значений $\beta = 0.5$, $\gamma > \gamma_r$ поперечная скорость на поверхности клина при всех x равна нулю и поэтому для любой точки (x, ξ) существует траектория, которая проходит через эту точку и начинается на внешней границе пограничного слоя. Таким образом, для указанных значений параметра γ не происходит отрыва потока дисперсной фазы.

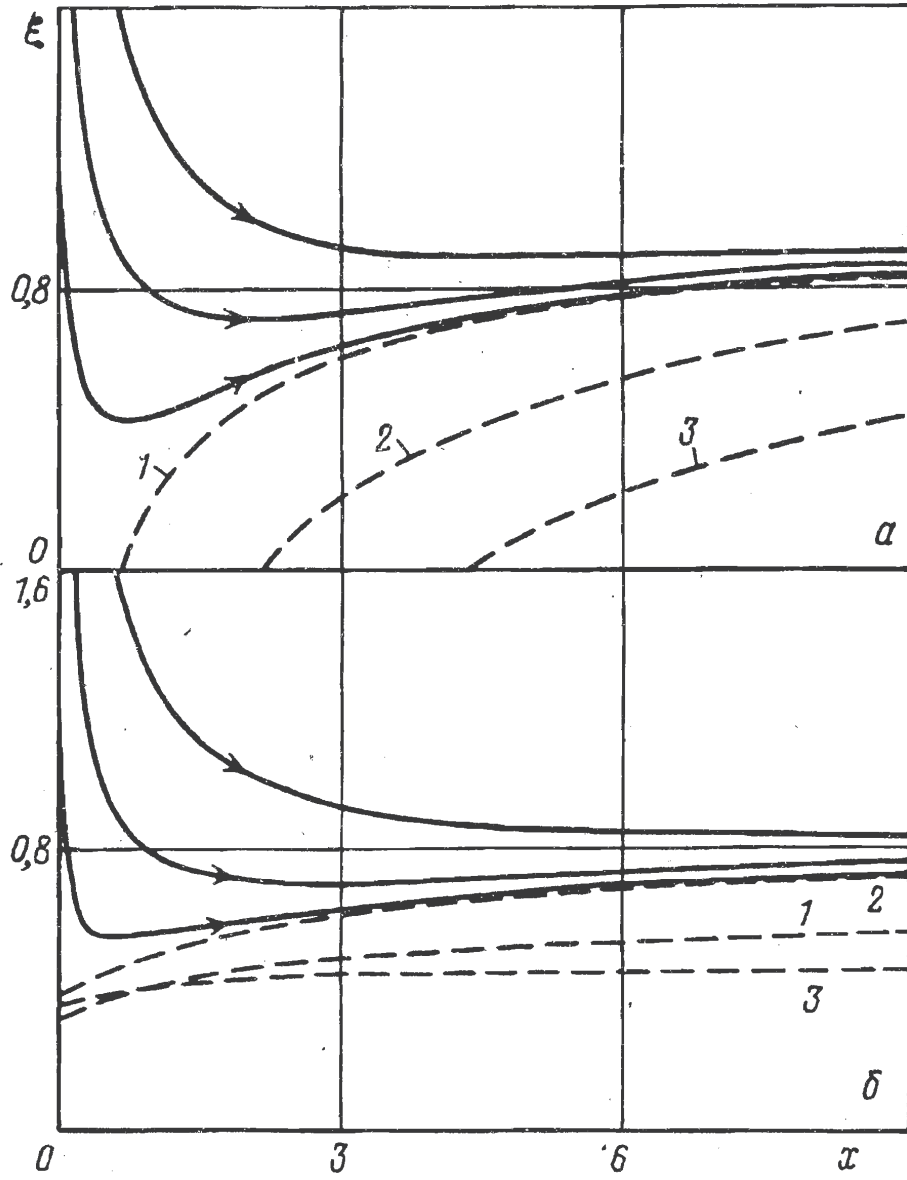


Рис. 5.7. Траектории частиц в пограничном слое на клине

5.3. Пограничный слой при обтекании критической точки затупленного тела

Предложенный выше метод описания движения дисперсной фазы под действием силы Сэфмана может быть также применен для пограничного слоя на затупленном теле [34]. Дополнительной сложностью при этом является наличие действующей на частицы центробежной силы, если, как обычно, используется криволинейная система координат, связанная с поверхностью обтекаемого тела. В этом случае масштаб релаксации частиц вводится аналогично (5.5) (отличие заключается только в численном коэффициенте),

$$\lambda_{Sa} = \frac{V^3}{81\pi^{4/3}\mu^3} a^4 \rho^{5/3} \rho_s^{4/3}, \quad (5.21)$$

который предполагается асимптотически большим по сравнению с характерным масштабом (радиусом кривизны в критической точке тела) L .

Рассмотрим подробнее случай, когда все три нормальные силы имеют одинаковый порядок, и кроме того, параметр скольжения $\alpha = O(1)$. Эти условия выполняются для течения в малой окрестности критической точки тела, на расстояниях порядка $\lambda_c = L\text{Re}_L^{-1/6} \ll L$, когда $\theta \sim \text{Re}_L^{-1/2}$, $R_V \sim \text{Re}_L^{1/6}$ [34]. Тогда безразмерные уравнения движения дисперсной примеси в пограничном слое на масштабе λ_c запишутся аналогично (5.12), (5.13)

$$\varepsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v_p \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u - u_p, \quad (5.22)$$

$$v - v_p + \frac{c_L^\infty(\alpha)(u_p - u)}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2} + \frac{\kappa}{\gamma} u^2 = 0, \quad (5.23)$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{\varepsilon} (u - u_p) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1/2}, \quad (5.24)$$

$$\varepsilon = \frac{2R_V^2}{9\theta\text{Re}_L} \ll 1,$$

$$\kappa = 12\pi^{5/3}\theta^{-1/3}R_V^{-1} \sim 1, \quad \gamma = \frac{2}{3}\pi^{1/3}\text{Re}_L^{-1/2}\theta^{-2/3}R_V \sim 1.$$

Здесь продольные координата и скорости обезразмерены на λ_c и $V\lambda_c/L$, поперечные - на $L\text{Re}_L^{-1/2}$ и $V\text{Re}_L^{-1/2}$, соответственно, так что все скорости имеют порядок единицы, последний член в левой части (5.23) соответствует центробежной силе. Подставляя (5.24) в (5.23), получим единственное уравнение для α , аналогичное (5.14),

$$\chi(\alpha) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{1/2} = -\gamma \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \kappa u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (5.25)$$

Отличие полученного уравнения от (5.14) заключается в последнем члене в правой части, соответствующем центробежной силе. Распределение скорости газа в окрестности критической точки описывается уравнением [184]

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2} x \phi'(\eta), & v &= -\sqrt{3} \phi(\eta), \\ \eta &= \sqrt{3} y, \end{aligned}$$

где функция $\phi(\eta)$ также удовлетворяет уравнению Фокнера-Скэн. В результате уравнения (5.25) и (5.23) преобразуются к виду

$$\chi(\alpha) - \alpha Q(x, \eta) = Z(x, \eta), \quad (5.26)$$

$$v_p = \sqrt{3} \left[-\phi + \frac{3\chi(\alpha)}{2\gamma} x \phi''(\eta) \right] + \frac{9\kappa}{4\gamma} x^2 \phi'^2(\eta), \quad (5.27)$$

$$Q = \left(\frac{3\sqrt{3}x\phi''}{2} \right)^{-3/2}, \quad Z = -\frac{\gamma}{3x} \left[\left(\frac{\phi'}{\phi''} \right)^2 - \frac{2\phi'}{\phi''} \right] - \frac{\kappa\sqrt{3}x\phi'^2}{2\phi''}.$$

Таким образом, распределение скорости частиц, аналогично течениям на пластине и клине, может быть найдено из алгебраических уравнений (5.26), (5.27).

Также аналогично течению на клине в рассматриваемом течении возникает отрыв потока дисперсной фазы. Точка $(x_s, 0)$, в которой происходит отрыв, определяется из условия

$$c_L^\infty(0) = \left(\frac{\partial u(x_s, 0)}{\partial y} \right)^{-3/2},$$

из чего следует

$$x_s = \frac{2c_L^\infty(0)^{-2/3}}{3\sqrt{3}\phi''(0)} \simeq 0.12.$$

Следует заметить, что положение данной точки не зависит от двух безразмерных параметров γ и κ .

Распределения $\alpha(\eta)$ и $v_p(\eta)$, полученные из (5.26), (5.27) для $\gamma = 1$ и $\kappa = 2$ и для различных значений x , приведены на Рис. 5.8, соответственно (a) и (b). Также для сравнения штриховыми линиями показаны зависимости, рассчитанные без учета силы Сэфмана. На малых расстояниях от критической точки роль силы Сэфмана незначительна, т.к. $\alpha(\eta)$ и $v_p(\eta)$ близки к значениям, полученным без учета данной силы, и равны нулю на стенке. При значениях $x > x_s$ зависимости, полученные с учетом и без учета силы Сэфмана, существенно различаются. Скорость на стенке становится положительной и конечной, что соответствует отходу дисперсной фазы от стенки, т.е. ее отрыву. Таким образом, отрыв происходит только в результате действия поперечной силы. Это явление проиллюстрировано также на Рис. 5.9, где показаны траектории частиц в пограничном слое и граница области без частиц (жирная линия). На Рис. 5.10 приведены распределения плотности частиц, обезразмеренные на значения в набегающем потоке. Можно видеть, что потоки частиц фокусируются в тонком слое вблизи границы области отрыва, где плотность частиц многократно превышает значения в набегающем потоке.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [29, 32, 33, 46, 34, 35, 41].

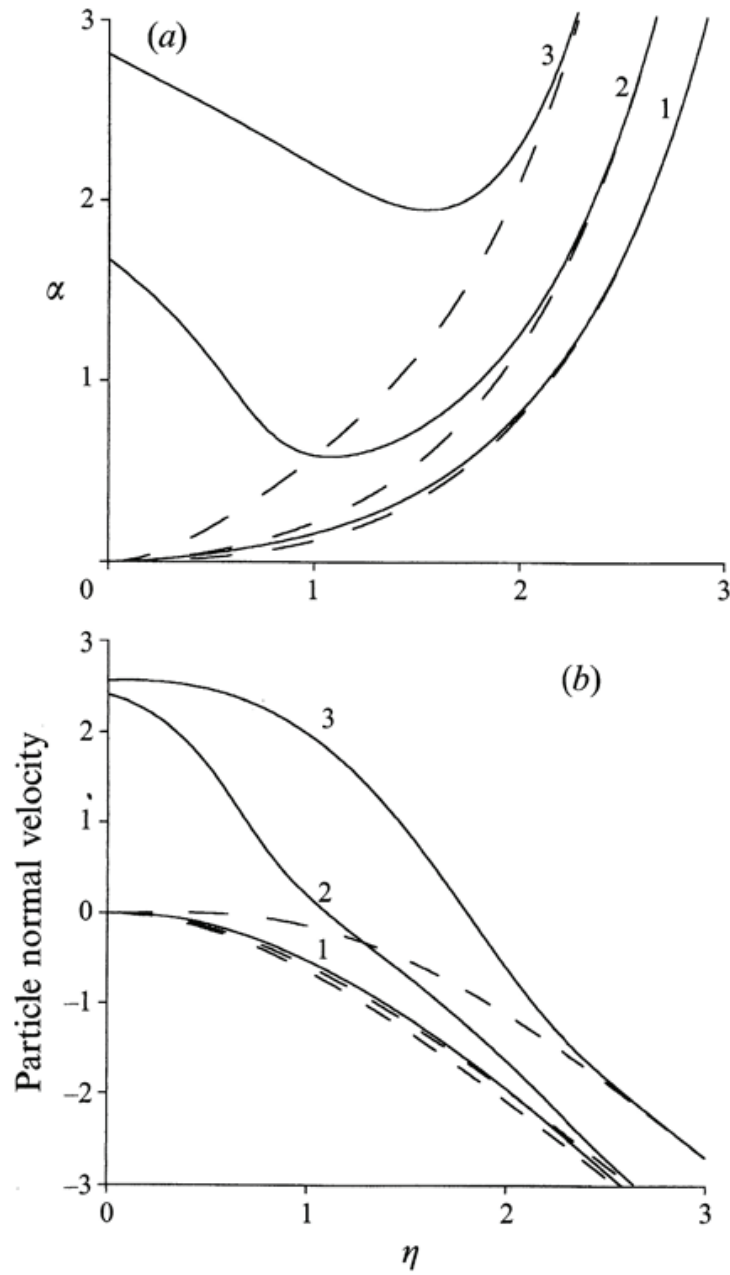


Рис. 5.8. Распределения (а) параметра скольжения $\alpha(\eta)$ и (б) нормальной скорости $v_p(\eta)$ в пограничном слое на сфере при $\gamma = 1$, $\kappa = 2$ и $x = 0.1, 0.2, 0.5$ (соответственно кривые 1-3). Штриховые линии - те же параметры, рассчитанные без учета силы Сэфмана.

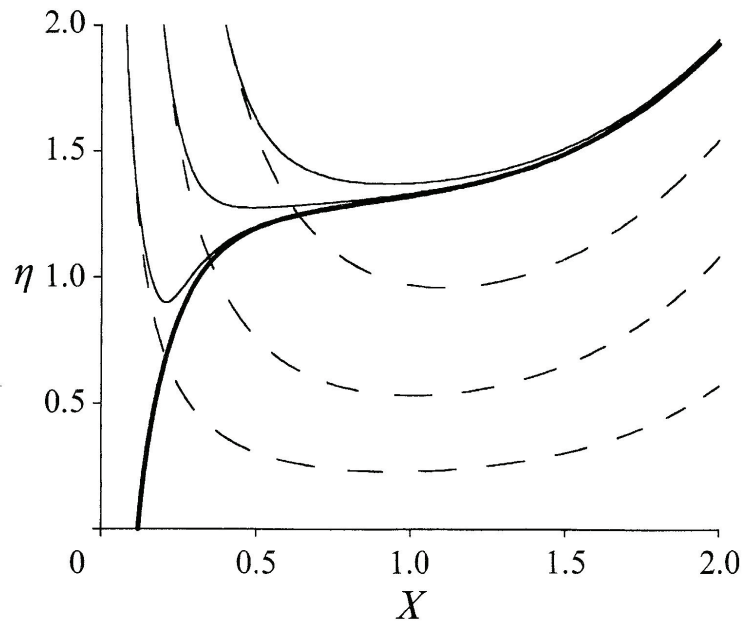


Рис. 5.9. Траектории частиц в пограничном слое на сфере и граница области без частиц (жирная линия) при $\gamma = 2$, $\kappa = 1$. Штриховые линии - траектории, рассчитанные без учета силы Сэфмана.

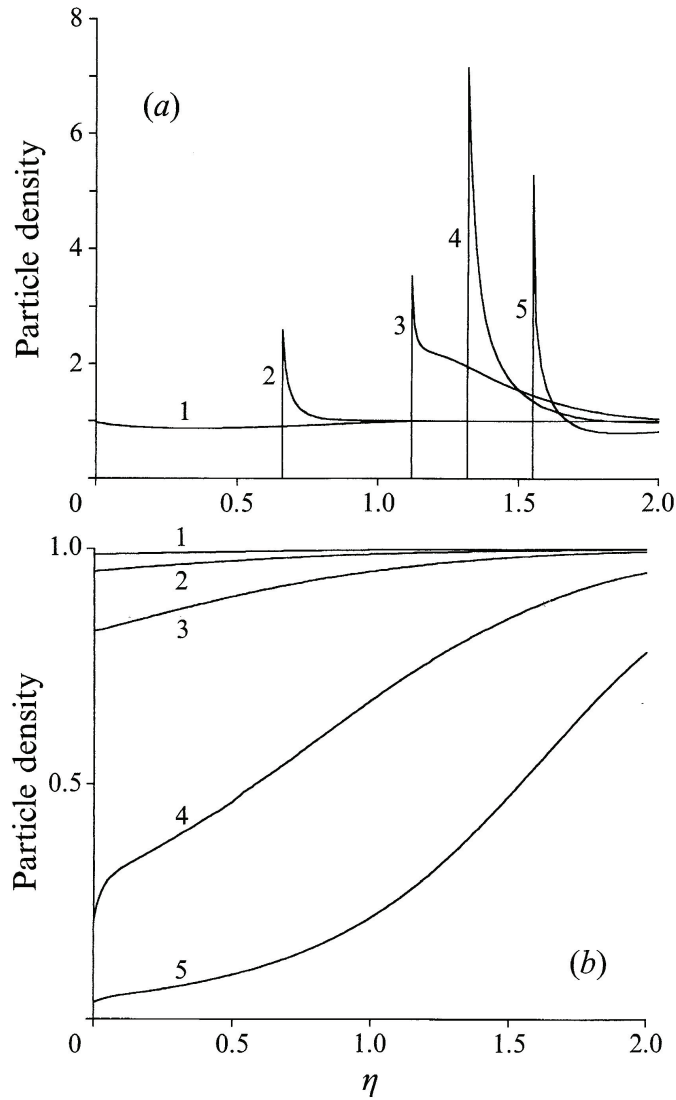


Рис. 5.10. (а) Безразмерные распределения $\rho_p(\eta)$ в пограничном слое на сфере при $\gamma = 2$, $\kappa = 1$ и $x = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5$ (соответственно кривые 1-5). (б) - те же параметры, рассчитанные без учета силы Сэфмана.

Заключение

1. В работе на основе методов возмущений и сращиваемых асимптотических разложений сформулирована задача о динамике сферических частиц в сдвиговых и нестационарных потоках при малых, но конечных числах Рейнольдса. Течение во внутренней области (на масштабе радиуса частицы) в главном приближении по числу Рейнольдса соответствует классической задаче Стокса об обтекании сферы однородным неограниченным потоком. Распределение скорости во внешней области (на масштабе Сэфмана) описывается уравнениями Озее-на. Для решения уравнений внешней области используется двумерное преобразование Фурье. Поперечная сила вычисляется через обратное преобразования Фурье.
2. Для частицы, движущейся с постоянной скоростью скольжения в ограниченном стенкой линейном сдвиговом потоке, определены зависимости поперечной силы от двух безразмерных параметров: параметра скольжения, характеризующего отношение однородного и сдвигового потоков во внешней области, и расстояния до стенки, отнесенного к масштабу Сэфмана. Таким образом, данные результаты являются обобщением известного выражения для силы Сэфмана, полученного для неограниченного потока и в пределе малого параметра скольжения. Для частиц, опережающих несущий поток (отрицательный параметр скольжения), сила является знакопеременной функцией расстояния до стенки. Такие частицы имеют устойчивое положение равновесия, где сила равна нулю.
3. Для течения в плоском канале найдены поперечные инерционные силы для различных направлений (параллельная и перпендикулярная основному потоку) и величин скорости скольжения, в том числе предельные случаи сильного и слабого сдвиговых потоков. При больших

- числах Рейнольдса канала проведено сравнение результатов для поперечной силы в линейном и параболическом потоках. Влияние стенок существенно в тонких пристеночных слоях, где поперечная сила близка к значениям, полученным для ограниченного одной стенкой линейного потока. В основной части канала влияние стенок мало, но роль кривизны профиля невозмущенной скорости остается существенной. Таким образом, в этой части течения коэффициент силы соответствует неограниченному параболическому потоку и зависит от двух безразмерных параметров: параметра скольжения и кривизны профиля.
4. Определены устойчивые положения равновесия частиц для течения в канале. Положения равновесия при больших числах Рейнольдса канала и конечных параметрах скольжения или для нейтрально плавучих частицы находятся на малых расстояниях от стенок. При больших параметрах скольжения появляются дополнительные положения равновесия на конечных расстояниях от стенок.
 5. Построено асимптотическое решение для возмущенного поля скорости вдали от нейтрально плавучей частицы в сдвиговом потоке. Получены степенные законы зависимостей возмущений всех компонент скорости от расстояния до частицы в дальней невязкой области. Вверх и вниз по потоку образуются два вязких следа, ширина которых растет пропорционально расстоянию от частицы в степени одна третья. Возмущения продольной скорости в следах убывают, как расстояние в степени минус две третьих. Результаты использованы для описания парного гидродинамического взаимодействия частиц в дальней области.
 6. Задача определения инерционной поперечной силы обобщена на нестационарный случай, когда скорость скольжения частицы в неограниченном сильном сдвиговом потоке меняется по гармоническому закону. Из решения нестационарного уравнения Озеена получены выраже-

ния для действительной и мнимой частей силы в зависимости от частоты колебаний скорости. Для произвольного закона изменения скорости поперечная сила выражается в виде обратного интеграла Фурье по частоте.

Определено нестационарное поле возмущенной скорости для частицы, движущейся прямолинейно с произвольной скоростью в покоящейся жидкости. Получено выражение для нестационарной силы Озеена (обобщенной силы Бассэ), которая зависит от "истории" движения в предшествующие моменты времени. Память об изменении скорости затухает быстрее, чем в классической силе Бассэ.

7. Решены задачи о течениях газозвеси в ламинарных пограничных слоях на различных телах: плоской пластине, клине и затупленном теле. Показано, что условия обтекания частицы в основной части пограничного слоя соответствуют неограниченному квазистационарному линейному сдвиговому потоку, при этом, однако, необходимо учитывать зависимость коэффициента поперечной силы от параметра скольжения. Определен продольный масштаб течения, на котором влияние поперечной силы конечно. Получены распределения плотности и скорости частиц. В пограничном слое на плоской пластине частицы движутся к поверхности пластины, и плотность частиц в пристеночной области превышает значения в набегающем потоке. В пограничных слоях на клине и затупленном теле поперечная сила направлена от поверхности тела. Результатом ее действия является возникновение отрыва дисперсной фазы, т. е. наличие области чистого газа вблизи поверхности, где частицы отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. — М.: Издательство АН СССР, 1955. — 351с.
2. Левин Л.М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. — М.: Издательство АН СССР, 1961. — 267с.
3. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976 — 630с.
4. Волощук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975. — 320с.
5. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975 — 384с.
6. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 326с.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. — М.: Наука, 1978. — 326с.
8. Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. — М.: Физматлит, 2003. — 192с.
9. Терехов В. И., Пахомов, М.А. Тепломассоперенос и гидродинамика в газочапельных потоках. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008 — 283с.
10. Leal L. Particle motions in a viscous fluid // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 1980. — Vol. 12, no. 1. — P. 435–476.
11. Loth E. Numerical approaches for motion of dispersed particles, droplets and bubbles // *Progr. Energy Combust. Sci.* — 2000. — Vol. 26, no. 3. — P. 161–223.
12. Koch D. L., Hill R. J. Inertial effects in suspension and porous-media flows // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 33, no. 1. — P. 619–647.
13. Michaelides E. *Particles, bubbles & drops: their motion, heat and mass transfer.* — World Scientific Singapore, 2006.

14. Poiseuille J. Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires // *Ann. Sci. Nat. Ser.* — 1836. — Vol. 5. — P. 111–115.
15. Bretherton F. P. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1962. — Vol. 24. — P. 284–304.
16. Aerosol flow through a long micro-capillary: collimated aerosol beam / I.S. Akhatov, J.M. Hoey, O.F. Swenson, D.L. Schulz // *Microfluidics and Nanofluidics.* — 2008. — Vol. 5, no. 2. — P. 215–224.
17. Aerosol focusing in micro-capillaries: Theory and experiment / I.S. Akhatov, J.M. Hoey, O.F. Swenson, D.L. Schulz // *J. Aerosol Sci.* — 2008. — Vol. 39, no. 8. — P. 691–709.
18. A review on aerosol-based direct-write and its applications for microelectronics / J. M. Hoey, A. Lutfurakhmanov, D. L. Schulz, I. S. Akhatov // *Journal of Nanotechnology.* — 2012. — Vol. 2012.
19. Aerosol flow through a converging-diverging micro-nozzle / S. Bhattacharya, A. Lutfurakhmanov, J. M. Hoey et al. // *Nonlinear Engineering.* — 2013. — Vol. 2, no. 3-4. — P. 103–112.
20. Williams P. S., Koch T., Giddings J. C. Characterization of near-wall hydrodynamic lift forces using sedimentation field-flow fractionation // *Chem. Eng. Commun.* — 1992. — Vol. 111. — P. 121–147.
21. Williams P. S., Moon M. H., et al. Effect of viscosity on retention time and hydrodynamic lift forces in sedimentation/steric field-flow fractionation // *Chem. Eng. Sci.* — 1996. — Vol. 51. — P. 4477–4488.
22. Di Carlo D., Irimia D., et al. Continuous inertial focusing, ordering, and separation of particles in microchannels // *Proc. of the National Academy of Sciences.* — 2007. — Vol. 104, no. 48. — P. 18892–18897.
23. Bhagat A., Kuntaegowdanahalli S., Papautsky I. Continuous particle separation in spiral microchannels using dean flows and differential migration // *Lab on a Chip.* — 2008. — Vol. 8, no. 11. — P. 1906–1914.

24. Di Carlo D. Inertial microfluidics // *Lab on a Chip*. — 2009. — Vol. 9, no. 21. — P. 3038–3046.
25. Bhagat A., Hou H., et al. Pinched flow coupled shear-modulated inertial microfluidics for high-throughput rare blood cell separation // *Lab on a Chip*. — 2011. — Vol. 11, no. 11. — P. 1870–1878.
26. Otterman B., Lee S. Particulate velocity and concentration profiles for laminar flow of a suspension over a flat plate // *Proc. 1970 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*, T. Sarpkaya, ed. — 1970. — P. 311.
27. Lee S. Aspects of suspension shear flows // *Adv. Appl. Mech.* — 1982. — Vol. 22. — P. 1–65.
28. Осипцов А. Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // *Изв. АН СССР. МЖГ*. — 1988. — № 6. — С. 80.
29. Асмолов Е. С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на плоской пластине // *Изв. РАН. МЖГ*. — 1992. — № 1. — С. 66–73.
30. Асмолов Е. С. О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ*. — 1990. — № 6. — С. 91–96.
31. Асмолов Е. С. О поперечной силе, действующей на сферическую частицу в ламинарном пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ*. — 1989. — № 5. — С. 66–71.
32. Асмолов Е. С. Движение частиц в ламинарном пограничном слое на масштабе релаксации поперечной скорости // *Изв. РАН. МЖГ*. — 1993. — № 1. — С. 86–93.
33. Асмолов Е. С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое при обтекании клина // *Изв. РАН. МЖГ*. — 1993. — № 1. — С. 34–42.

34. Asmolov E. S. Dusty-gas flow in a laminar boundary layer over a blunt body // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 305. — P. 29–46.
35. АСМОЛОВ Е. С. Движение дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на клине при неоднозначном распределении скорости частиц // *Ученые записки ЦАГИ.* — 1996. — Т. 27, № 1. — С. 91–99.
36. Asmolov E. S., Manuilovich S. V. Stability of a dusty-gas laminar boundary layer on a flat plate // *J. Fluid Mech.* — 1998. — Vol. 365, no. 1. — P. 137–170.
37. Asmolov E. S. The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1999. — Vol. 381. — P. 63–87.
38. Asmolov E. S., Mclaughlin J. B. The inertial lift on an oscillating sphere in a linear shear flow // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1999. — Vol. 25. — P. 739–751.
39. Asmolov E. S. Flow past a sphere undergoing unsteady rectilinear motion and unsteady drag at small Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 446. — P. 95–120.
40. Asmolov E. S. The inertial lift on a small particle in a weak-shear parabolic flow // *Phys. Fluids.* — 2002. — Vol. 14. — P. 15.
41. Osipov A. A., Asmolov E. S. Asymptotic model of the inertial migration of particles in a dilute suspension flow through the entry region of a channel // *Phys. Fluids.* — 2008. — Vol. 20. — P. 123301.
42. Asmolov E. S., Osipov A. A. The inertial lift on a spherical particle settling in a horizontal viscous flow through a vertical slot // *Phys. Fluids.* — 2009. — Vol. 21. — P. 063301.
43. АСМОЛОВ Е. С., Лебедева Н. А., Осипов А. А. Инерционная миграция осаждающихся частиц при течении суспензии в ячейке Хеле-Шоу // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2009. — № 3. — С. 85–101.

44. Asmolov E. S., Feuillebois F. Far-field disturbance flow induced by a small non-neutrally buoyant sphere in a linear shear flow // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 643. — P. 449–470.
45. Lebedeva N. A., Asmolov E. S. Migration of settling particles in a horizontal viscous flow through a vertical slot with porous walls // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2011. — Vol. 27. — P. 453–461.
46. Asmolov E. S. Suspension flow in laminar boundary layer over a flat plate and a wedge // 2nd EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Warsaw, Poland, 20-24 September 1994. Abstracts of Papers. — 1994.
47. Asmolov E. S. The inertial lift on a small particle in a channel flow // XIXth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Kyoto, Japan, 25-31 August 1996. — 1996. — P. 138.
48. Asmolov E. S. The inertial lift on a spherical particle in a channel flow // Proceedings of International Conference "Asymptotics in Mechanics", St. Petersburg, Russia, 13-16 October 1996. — 1996. — P. 17–24.
49. Asmolov E. S. The lift exerted by the fluid on a small particle in a channel flow // Proceedings of the 1999 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, FEDSM'99, San Francisco, California, USA, 18-23 July 1999 (CD-ROM). — 1999. — P. 99–7774.
50. Asmolov E. S., Manuilovich S. Strong effect of small particles on the stability of the channel flow with non-uniform distribution of particle density // Proceedings of the 1999 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, FEDSM'99, San Francisco, California, USA, 18-23 July 1999 (CD-ROM). — 1999. — P. 99–7857.
51. Asmolov E. S. Unsteady drag on a sphere in a rectilinear motion at small Reynolds number // 4th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Eindhoven, Netherlands, 19-21 November 2000. Book of Abstracts. — 2000. — P. 17.

52. Asmolov E. S. The inertial lift on a small particle in a weak-shear channel flow at large channel Reynolds number // 4th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Eindhoven, Netherlands, 19-21 November 2000. Book of Abstracts. — 2000. — P. 213.
53. Asmolov E. S. Unsteady flow past a sphere undergoing unidirectional motion at small Reynolds number // XXth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Chicago, USA, 27 August - 2 September 2000. Book of Abstracts. — 2000. — P. 78.
54. Asmolov E. S., Feuillebois F. Disturbance flow of a non-neutrally buoyant sphere in an unbounded linear shear flow // 8th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Bad Reichenhall, Germany, 13-16 September 2010. Book of Abstracts. — 2010. — P. S3–4.
55. Segré G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1. Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 14. — P. 115–135.
56. Segré G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2. Experimental results and interpretation // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 14. — P. 136–157.
57. Oliver D. Influence of particle rotation on radial migration in the Poiseuille flow of suspensions // Nature. — 1962. — Vol. 194. — P. 1269–1271.
58. Tachibana M. On the behaviour of a sphere in the laminar tube flows // Rheologica Acta. — 1973. — Vol. 12, no. 1. — P. 58–69.
59. Matas J.-P., Morris J. F., Guazzelli E. Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow // J. Fluid Mech. — 2004. — Vol. 515. — P. 171–195.

60. Matas J.-P., Morris J. F., Guazzelli E. Lateral force on a rigid sphere in large-inertia laminar pipe flow // *J. Fluid Mech.* — 2009. — Vol. 621. — P. 59–67.
61. Han M., Kim C., et al. Particle migration in tube flow of suspensions // *Journal of Rheology.* — 1999. — Vol. 43, no. 5. — P. 1157–1174.
62. Eichorn R., Small S. Experiments on the lift and drag of spheres suspended in Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* — 1964. — Vol. 20. — P. 513–527.
63. Jeffrey R. C., Pearson J. R. A. Particle motion in laminar vertical tube flow // *J. Fluid Mech.* — 1965. — Vol. 22. — P. 721–735.
64. Karnis A., Goldsmith H., Mason S. The flow of suspensions through tubes: V. inertial effects // *Canadian Journal of Chemical Engineering.* — 1966. — Vol. 44, no. 4. — P. 181–193.
65. Aoki H., Kurosaki Y., Anzai H. Study on the tubular pinch effect in a pipe-flow. 1. lateral migration of a single-particle in laminar Poiseuille flow // *Bulletin of the JSME-Japan Society of Mechanical Engineers.* — 1979. — Vol. 22, no. 164. — P. 206–212.
66. Vasseur P., Cox R. G. The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid // *J. Fluid Mech.* — 1977. — Vol. 80. — P. 561–591.
67. Cherukat P., McLaughlin J. B. The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall // *J. Fluid Mech.* — 1994. — Vol. 263. — P. 1–18.
68. Hall D. Measurements of the mean force on a particle near a boundary in turbulent flow // *J. Fluid Mech.* — 1988. — Vol. 187. — P. 451–466.
69. Mollinger A., Nieuwstadt F. Measurement of the lift force on a particle fixed to the wall in the viscous sublayer of a fully developed turbulent boundary layer // *J. Fluid Mech.* — 1996. — Vol. 316. — P. 285–306.

70. Rubinow S., Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* — 1961. — Vol. 11, no. 03. — P. 447–459.
71. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* — 1957. — Vol. 2. — P. 237–262.
72. Saffman P. G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1965. — Vol. 22. — P. 385–400.
73. Saffman P. G. Corrigendum // *J. Fluid Mech.* — 1968. — Vol. 31. — P. 624.
74. Oseen C. Stokes' formula and a related theorem in hydrodynamics // *Ark. Math. Astronom. Fys.* — 1910. — Vol. 6.
75. Brenner H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface // *Chem. Eng. Sci.* — 1961. — Vol. 16. — P. 242.
76. Goldman A. J., Cox R. G., Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - II Couette flow // *Chem. Eng. Sci.* — 1967. — Vol. 22. — P. 653–660.
77. Charru F., Larrieu E., et al. Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow // *J. Fluid Mech.* — 2007. — 1. — Vol. 570. — P. 431–453.
78. Dubov A. L., Schmieschek S., Asmolov, E. S., et al. Lattice-Boltzmann simulations of the drag force on a sphere approaching a superhydrophobic striped plane // *J. Chem. Phys.* — 2014. — Vol. 140, no. 3. — P. 034707.
79. Pimponi D., Chinappi M., et al. Mobility tensor of a sphere moving on a superhydrophobic wall: application to particle separation // *Microfluidics Nanofluidics.* — 2014. — Vol. 16. — P. 571–585.

80. Cox R. G., Brenner H. The lateral migration of solid particles in Poiseuille flow. I. Theory. // *Chem. Eng. Sci.* — 1968. — Vol. 23. — P. 147–173.
81. Vasseur P., Cox R. G. The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows // *J. Fluid Mech.* — 1976. — Vol. 78. — P. 385–413.
82. Cox R. G., Hsu S. K. The lateral migration of solid particles in a laminar flow near a plane // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1977. — Vol. 3. — P. 201–222.
83. Ho B., Leal L. Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows // *J. Fluid Mech.* — 1974. — Vol. 65. — P. 365–400.
84. Yahiaoui S., Feuillebois F. Lift on a sphere moving near a wall in a parabolic flow // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 662. — P. 447–474.
85. Leighton D., Acrivos A. The lift on a small sphere touching a plane in the presence of a simple shear flow // *Z. Angew. Math. Phys.* — 1985. — Vol. 36, no. 1. — P. 174–178.
86. Krishnan G. P., Leighton Jr. D. T. Inertial lift on a moving sphere in contact with a plane wall in a shear flow // *Phys. Fluids.* — 1995. — Vol. 7, no. 11. — P. 2538–2545.
87. Drew D. A. The lift force on a small sphere in the presence of a wall // *Chem. Engng. Sci.* — 1988. — Vol. 43. — P. 769–773.
88. Shibata M., Mei C. C. Inertia effects of a localised force distribution near a wall in a slow shear flow // *Phys. Fluids A.* — 1990. — Vol. 2. — P. 1094–1104.
89. McLaughlin J. B. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 224. — P. 261–274.
90. McLaughlin J. B. The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows // *J. Fluid Mech.* — 1993. — Vol. 246. — P. 249–265.

91. Schonberg J. A., Hinch E. J. Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow // J. Fluid Mech. — 1989. — Vol. 203. — P. 517–524.
92. Hogg A. J. The inertial migration of non-neutrally buoyant spherical particles in two-dimensional shear flows // J. Fluid Mech. — 1994. — Vol. 272. — P. 285–318.
93. Dandy D., Dwyer H. A sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of shear on particle lift, drag, and heat transfer // J. Fluid Mech. — 1990. — Vol. 216. — P. 381–410.
94. Cherukat P., McLaughlin J. B., Dandy D. S. A computational study of the inertial lift on a sphere in a linear shear flow field // Int. J. Multiphase Flow. — 1999. — Vol. 25. — P. 15–33.
95. Feng J., Hu H., Joseph D. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. Part 2: Couette and Poiseuille flows // J. Fluid Mech. — 1994. — Vol. 277. — P. 271–301.
96. Patankar N. A., Huang P. Y., et al. Lift-off of a single particle in Newtonian and viscoelastic fluids by direct numerical simulation // J. Fluid Mech. — 2001. — Vol. 438. — P. 67–100.
97. Glowinski R. Finite element methods for incompressible viscous flow // Handbook of numerical analysis. — 2003. — Vol. 9. — P. 3–1176.
98. Ben Salem M., Oesterle B. A shear flow around a spinning sphere: numerical study at moderate Reynolds numbers // Int. J. Multiphase Flow. — 1998. — Vol. 24. — P. 563–585.
99. Kurose R., Komori S. Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow // J. Fluid Mech. — 1999. — Vol. 384. — P. 183–206.
100. Kurose R., Misumi R., Komori S. Drag and lift forces acting on a spherical bubble in a linear shear flow // Int. J. Multiph. Flow. — 2001. — Vol. 27, no. 7. — P. 1247–1258.

101. Bagchi P., Balachandar S. Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate Re // *Phys. Fluids*. — 2002. — Vol. 14, no. 8. — P. 2719–2737.
102. Patankar N., Ko T., et al. A correlation for the lift-off of many particles in plane poiseuille flows of newtonian fluids // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 445. — P. 55–76.
103. Choi H. G., Joseph D. D. Fluidization by lift of 300 circular particles in plane poiseuille flow by direct numerical simulation // *J. Fluid Mech.* — 2001. — Vol. 438. — P. 101–128.
104. Joseph D., Ocando D. Slip velocity and lift // *J. Fluid Mech.* — 2002. — Vol. 454. — P. 263–286.
105. Yu Z., Phan-Thien N., Tanner R. I. Dynamic simulation of sphere motion in a vertical tube // *J. Fluid Mech.* — 2004. — Vol. 518. — P. 61–93.
106. Di Carlo D., Edd J. F., et al. Particle segregation and dynamics in confined flows // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102, no. 9. — P. 094503.
107. Fischer P. F., Leaf G. K., Restrepo J. M. Forces on particles in oscillatory boundary layers // *J. Fluid Mech.* — 2002. — Vol. 468. — P. 327–347.
108. Fischer P. F., Leaf G. K., Restrepo J. M. Influence of wall proximity on the lift and drag of a particle in an oscillatory flow // *J. Fluids Eng.* — 2005. — Vol. 127, no. 3. — P. 583–594.
109. Feng Z., Michaelides E. Interparticle forces and lift on a particle attached to a solid boundary in suspension flow // *Phys. Fluids*. — 2002. — Vol. 14. — P. 49–60.
110. Feng Z.-G., Michaelides E. E. Equilibrium position for a particle in a horizontal shear flow // *Int. J. Multiph. Flow*. — 2003. — Vol. 29, no. 6. — P. 943–957.
111. Chun B., Ladd A. J. C. Inertial migration of neutrally buoyant particles in a square duct: An investigation of multiple equilibrium positions // *Phys. Fluids*. — 2006. — Vol. 18. — P. 031704.

112. Dünweg B., Ladd A. Lattice Boltzmann simulations of soft matter systems // *Adv. Polymer Sci.* — 2008.
113. Derksen J., Larsen R. Drag and lift forces on random assemblies of wall-attached spheres in low-Reynolds-number shear flow // *J. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 673. — P. 548–573.
114. Miura K., Itano T., Sugihara-Seki M. Inertial migration of neutrally buoyant spheres in a pressure-driven flow through square channels // *J. Fluid Mech.* — 2014. — Vol. 749. — P. 320–330.
115. Mei R. Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the sphere at finite Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1994. — Vol. 270. — P. 133–174.
116. Legendre D., Magnaudet J. A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-reynolds-number shear flow // *Phys. Fluids.* — 1997. — Vol. 9, no. 11. — P. 3572–3574.
117. Legendre D., Magnaudet J. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1998. — Vol. 368. — P. 81–126.
118. Takemura F., Takagi S., et al. Drag and lift forces on a bubble rising near a vertical wall in a viscous liquid // *J. Fluid Mech.* — 2002. — Vol. 461. — P. 277–300.
119. Van Nierop E. A., Luther S., et al. Drag and lift forces on bubbles in a rotating flow // *J. Fluid Mech.* — 2007. — Vol. 571. — P. 439–454.
120. Mortazavi S., Tryggvason G. A numerical study of the motion of drops in Poiseuille flow. Part 1. Lateral migration of one drop // *J. Fluid Mech.* — 2000. — Vol. 411. — P. 325–350.
121. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. Справочник по специальным функциям: Пер. с англ. — Наука, 1979. — С. 832с.

122. Mei R. An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number // *Int. J. Multiphase Flow*. — 1992. — Vol. 18, no. 1. — P. 145–147.
123. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*. — 1961. — Т. 16, № 3 (99). — С. 171–174.
124. Mack L. M. A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer // *J. Fluid Mech.* — 1976. — Vol. 73, no. 03. — P. 497–520.
125. Рыжов О. С., Жук В. И. . Об асимптотике решений уравнения Орра-Зоммерфельда, задающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса // *Докл. АН СССР*. — 1983. — Т. 268, № 6. — С. 1328–1332.
126. Harper E. Y., Chang I.-D. Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1968. — Vol. 33. — P. 209–225.
127. Miyazaki K., Bedeaux D., Avalos J. B. Drag on a sphere in slow shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1995. — Vol. 296. — P. 373–390.
128. Lin C. J., Peery J. H., Schowalter W. R. Simple shear flow round a rigid sphere: Inertial effects and suspension rheology // *J. Fluid Mech.* — 1970. — Vol. 44. — P. 1–17.
129. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — Наука, 1976. — С. 408с.
130. Subramanian G., Koch D. L. Inertial effects on the transfer of heat or mass from neutrally buoyant spheres in a steady linear velocity field // *Phys. Fluids*. — 2006. — Vol. 18. — P. 073302.
131. Elrick D. E. Source functions for diffusion in uniform shear flow // *Australian Journal of Physics*. — 1962. — Vol. 15, no. 3. — P. 283–288.

132. Batchelor G. K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // *J. Fluid Mech.* — 1972. — Vol. 52. — P. 245–268.
133. Feng J., Joseph D. The unsteady motion of solid bodies in creeping flows // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1995. — Vol. 303. — P. 83–102.
134. Subramanian G., Koch D. L. Evolution of clusters of sedimenting low-reynolds-number particles with oseen interactions // *J. Fluid Mech.* — 2008. — Vol. 603. — P. 63–100.
135. Matas J.-P., Glezer V., et al. Trains of particles in finite-Reynolds-number pipe flow // *Phys. Fluids.* — 2004. — Vol. 11. — P. 4192–4195.
136. Kulkarni P. M., Morris J. F. Pair-sphere trajectories in finite-Reynolds-number shear flow // *J. Fluid Mech.* — 2008. — Vol. 596. — P. 413–435.
137. Боронин С.А., Осипцов, А.Н. Устойчивость течения дисперсной смеси в пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2008. — № 1. — С. 76–87.
138. Боронин С.А., Осипцов, А.Н. Модальная и немодальная устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ.* — 2014. — № 6. — С. 80–93.
139. Effects of vibrations on particle motion near a wall: Existence of attraction force / S. Hassan, T. P. Lyubimova, D. V. Lyubimov, M. Kawaji // *Int. J. Multiphase Flow.* — 2006. — Vol. 32, no. 9. — P. 1037 – 1054.
140. On the role of the lift force in turbulence simulations of particle deposition / Q. Wang, K.D. Squires, M. Chen, J.B. McLaughlin // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1997. — Vol. 23, no. 4. — P. 749–763.
141. Young J., Leeming A. A theory of particle deposition in turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* — 1997. — Vol. 340. — P. 129–159.
142. Reeks M., McKee S. The dispersive effects of Basset history forces on particle motion in a turbulent flow // *Phys. Fluids.* — 1984. — Vol. 27, no. 7. — P. 1573–1582.

143. Mei R., Adrian R. J., Hanratty T. J. Particle dispersion in isotropic turbulence under Stokes drag and Basset force with gravitational settling // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 225. — P. 481–495.
144. Невский Ю.А., Осипцов А. Н. О роли нестационарных и «наследственных» сил в задачах гравитационной конвекции суспензий // *Вест. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика.* — 2008. — Т. 4. — С. 37–40.
145. Maxey M. R., Riley J. J. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phys. Fluids.* — 1983. — Vol. 26, no. 4. — P. 883–889.
146. Bentwich M., Miloh T. The unsteady matched Stokes-Oseen solution for the flow past a sphere // *J. Fluid Mech.* — 1978. — Vol. 88, no. 01. — P. 17–32.
147. Sano T. Unsteady flow past a sphere at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1981. — Vol. 112. — P. 433–441.
148. Mei R., Lawrence C., Adrian R. Unsteady drag on a sphere at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 233. — P. 613–631.
149. Mei R., Adrian R. Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1992. — Vol. 237. — P. 323–341.
150. Lovalenti P. M., Brady J. F. The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1993. — Vol. 256. — P. 561–605.
151. Lovalenti P. M., Brady J. F. The force on a sphere in a uniform flow with small-amplitude oscillations at finite Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1993. — Vol. 256. — P. 607–614.
152. Lovalenti P. M., Brady J. F. The force on a bubble, drop, or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number // *Phys. Fluids.* — 1993. — Vol. 5. — P. 2104–2116.

153. Mei R., Lawrence C. The flow field due to a body in impulsive motion // J. Fluid Mech. — 1996. — Vol. 325. — P. 79–112.
154. Magnaudet J. Small inertial effects on a spherical bubble, drop or particle moving near a wall in a time-dependent linear flow // J. Fluid Mech. — 2003. — Vol. 485. — P. 115–142.
155. Coimbra C., Kobayashi M. H. On the viscous motion of a small particle in a rotating cylinder // J. Fluid Mech. — 2002. — Vol. 469. — P. 257–286.
156. Childress S. The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid // J. Fluid Mech. — 1964. — Vol. 20, no. 2. — P. 305–314.
157. Ockendon J. The unsteady motion of a small sphere in a viscous liquid // J. Fluid Mech. — 1968. — Vol. 34, no. 02. — P. 229–239.
158. Michaelides E. Review — the transient equation of motion for particles, bubbles, and droplets // J. Fluids Eng. — 1997. — Vol. 119, no. 2. — P. 233–247.
159. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — Наука, 1986. — С. 733с.
160. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. — Academic Press New York, 1964. — Vol. 964.
161. Hinch E. J. The approach to steady state in Oseen flows. Appendix D to Lovalenti & Brady // J. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 256. — P. 601–604.
162. Наумов В. А. Расчет ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1988. — № 6. — С. 171–173.
163. Наумов В. А. Расчет неизотермического ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // ТВТ. — 1990. — Т. 28, № 4. — С. 814–816.

164. Циркунов Ю.М. Моделирование течений примеси в задачах двухфазной аэродинамики. Эффекты пограничного слоя // Моделирование в механике. Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО РАН. — 1993. — Т. 7, № 2. — С. 151–193.
165. Hussainov M., Kartushinsky A., et al. Properties of solid particle distribution in two-phase laminar boundary layers of various shapes and particle sedimentation // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. — 1994. — Vol. 42, no. 4. — P. 237–249.
166. Hussainov M., Kartushinsky A., et al. Experimental and theoretical study of the distribution of mass concentration of solid particles in the two-phase laminar boundary layer on a flat plate // Int. J. Multiphase Flow. — 1995. — Vol. 21, no. 6. — P. 1141–1161.
167. Наумов В. А. Влияние подъемной силы Саффмэна на движение частицы в слое Куэтта // ИФЖ. — 1995. — Т. 68, № 5. — С. 840–844.
168. Osipov A. Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Appl. Mech. Rev. — 1997. — Vol. 50, no. 6. — P. 357–370.
169. Osipov A. Modified Lagrangian method for calculating the particle concentration in dusty-gas flows with intersecting particle trajectories // Proceedings 3rd International Conference on Mulyiphase Flow, ICMF. — Vol. 98. — 1998.
170. Foster M., Duck P., Hewitt R. Boundary layers in a dilute particle suspension // Proc. R. Soc. A. — 2006. — Vol. 462. — P. 136–168.
171. Рыбдылова О.Д. Поперечная миграция частиц в пограничном слое на плоской пластине // Наука и образование: эл. научно-техн. изд. — 2012. — № 77-30569/318597.
172. Рыбдылова О.Д. Поперечная миграция и фокусировка инерционной примеси в сдвиговых потоках : Дисс. . . кандидата наук / Рыбдылова О.Д. — Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2012. — С. 123.

173. Marble F. E. Dynamics of dusty gases // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1970. — Vol. 2, no. 1. — P. 397–446.
174. Saffman P. On the stability of laminar flow of a dusty gas // *J. Fluid Mech.* — 1962. — Vol. 13, no. 01. — P. 120–128.
175. Стулов В.П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1979. — № 1. — С. 51–60.
176. Osipov A., Veselyi S., et al. The flow structure of dilute gas-particle suspensions behind a shock wave moving along a flat surface // *Appl. Math. Mech.* — 1991. — Vol. 12, no. 6. — P. 531–538.
177. Ван Бо-И, Осипцов А.Н. . Пристеночный пограничный слой за ударной волной в запыленном газе // *Изв. РАН, МЖГ.* — 1999. — № 4. — С. 61–73.
178. Wang B., Xiong Y., Osipov A. N. Two-way coupling model for shock-induced laminar boundary-layer flows of a dusty gas // *Acta Mechanica Sinica*. — 2005. — Vol. 21, no. 6. — P. 557–563.
179. Осипцов А. Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластинке // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1980. — С. 48–54.
180. Киселев С.П., Фомин В.М. Исследование каустик в двухфазной среде газ-частицы // *ПМТФ.* — 1987. — № 4. — С. 164–170.
181. Healy J. V. Two-phase concave-type corner flows // *J. Fluid Mech.* — 1971. — Vol. 46, no. 01. — P. 33–42.
182. Осипцов А. Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1985. — № 5. — С. 99–107.
183. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* — М.: Наука, 1987.
184. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* — 1974.