МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

На правах рукописи

Никитин Илья Вячеславович

Задача навигации наземного объекта на основе данных БИНС и одометра.

Специальность 01.02.01 теоретическая механика
Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., А. А. Голован

Москва, 2015 г.

Содержание

1 Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию задачи навигации подвижного объекта, навигационный комплекс которого состоит из

- инерциально-измерительного блока (ИИБ), состоящего из триады ньютонометров (акселерометров), триады датчиков угловой скорости (ДУС) или гироскопов;
- датчика пройденного пути — одометра.

Возможным дополнительным источником навигационной информации в рассматриваемой задаче могут быть известные координаты реперных (или маркерных) точек, мимо которых перемещается объект, позиционные, скоростные показания спутниковых систем навигации GPS, ГЛОНАСС, а также неявная скоростная информация о нулевой скорости во время остановок объекта.

Совокупный приборный состав комплекса и навигационной информации избыточен, что позволяет анализировать различные функциональные схемы решения задачи и обосновывать оптимальные, в некотором смысле, алгоритмы интеграции.

Исследуемая задача не нова, ей занимались и занимаются разные коллективы для разных приложений:

- задачи навигации внутритрубных диагностических снарядов (ВДС) – дефектоскопов – магистральных нефте- и газопроводов;
- задача навигации наземных (колесных, гусеничных) объектов – или задача топопривязки;
- задачи навигации составов и диагностики путей на железнодорожном транспорте.

В информационном смысле родственными задачами служат специфические задачи морской и воздушной навигации, когда роль одометрической информации играют показания лага, системы воздушно-скоростных параметров.

Предваряя обзор литературы, отметим отличия представляемой диссертационной работы от ранее проведенных исследований по данной тематике, которые состоят в следующем:

- значительное внимание уделено анализу возможных функциональных схем решения задачи и их интерпретации с точки зрения механики корректируемых инерциальных навигационных систем. Это важно для приложений, поскольку становится доступной картина возможных алгоритмических решений и их особенностей;
- измерения одометра (рассматриваемые как позиционная информация в отличие от обычно используемой ее скоростной интерпретации) в сочетании с инерциальной информацией об ориентации корпуса объекта используются для независимого кинематического одометрического навигационного счисления. Далее, результаты этого счисления служат корректирующей информацией для инерциального счисления;
- алгоритмы коррекции основаны на алгоритмах оценивания калмановского типа с использованием так называемых обратных корректирующих связей [7], [18] (методически близких к моделям расширенного фильтра Калмана);

- разработанные модели и алгоритмы не привязаны к типу инерциальных датчиков, их классу точности, разрешающей способности одометра, составу возможной внешней корректирующей информации, и, в этом смысле, унифицированы;

- разработанные модели и алгоритмы адаптированы к задаче постобработки, когда финальное интеграционное решение строится с использованием алгоритмов сглаживания, учитывающих при этом специфику применяемых обратных связей;

- разработанные алгоритмы строят интегрированные решения для главных параметров траекторного движения объекта:

  – координат (географическая широта φ, долгота λ, высота h);
  – компонент вектора скорости (восточной V_E, северной V_N, вертикальной V_{UP});
  – углов истинного курса ψ, крена γ, тангажа ϑ;

- атрибутом проведенных исследований явилась разработка компьютерного имитатора задачи. В разработанном имитаторе акцент сделан на моделировании первичной навигационной информации – идеальных показаний инерциальных датчиков и одометра. Далее, на основе имитации первичной информации, проводилось максимально приближенное к реальности моделирование задачи навигации:

  – либо путем компьютерной имитации инструментальных погрешностей инерциальных датчиков,
  – либо путем использованием стендовых записей показаний конкретных инерциальных датчиков.

  На полученных данных отлаживались алгоритмы решения задачи.

Диссертационное исследование было инициировано совместными научно-исследовательскими работами лаборатории управления и навигации МГУ им. М.В. Ломоносова с рядом профильных организаций.

История работ лаборатории управления и навигации МГУ по задаче топопривязки

В начале 90-х годов XX века эта задача решалась с использованием инерциальной навигационной системы платформенного типа (использовалась система И-21 разработки Московского института электромеханики и автоматики). Одометр не входил в состав приборного комплекса, поскольку для платформенных ИНС достаточно эффективным был режим периодических остановок объекта, когда становилась доступной неявная скоростная корректирующая информация о нулевой скорости объекта. В англоязычной литературе этот режим называется Zero Velocity Update technology – ZUPT. Были проведены натурные испытания комплекса. Задача топопривязки решалась в режиме постобработки. Благодаря высокой точности и стабильности автономного функционирования системы И-21 были получены высокие точности решения навигационной задачи [8]. Результатом проведенных исследований явилась разработка программно-математического обеспечения алгоритмов коррекции ИНС, включая алгоритмы сглаживания.

В 2007 году у лаборатории появились заказные работы по задаче навигации внутритрубных диагностических снарядов (ВДС) для магистральных газопроводов (разработано и внедрено алгоритмическое обеспечение в ЗАО "Нефтегазкомплектсервис", позже ЗАО "Везерфорд трубопроводный сервис", а ныне соответствующий сегмент компании принадлежит АО "Бейкер Хьюз Технологии и Трубопроводный Сервис") и автомобиля-лаборатории (разработано и внедрено программное обеспечение в НПО "Регион") для диагностики геометрии уложенного дорожного полотна. В отличие от предыдущего аппаратного состава, платформенные ИНС здесь не использовались, а использовались ИИБ среднего класса точности (или бескарданные инерциальные навигационные системы - БИНС) и одометр(ы). В случае дорожного приложения использовались позиционная, скоростная информация, доставляемая приемником сигналов GPS. ZUPT-режим специально не оговаривался и не применялся.

В процессе выполнения этих работ было разработано программное обеспечение задачи навигации ВДС и автомобиля, включая алгоритмы постобработки [19], [20]. При этом информация от одометра(ов) интерпретировалась как скоростная. Обратные связи вводились по части инструментальных погрешностей. Решения были разработаны только для так называемых горизонтальных каналов БИНС или для плановых координат. Вопросы сравнительного анализа возможных функциональных схем решения задачи не обсуждались.

Актуальность темы и цели работы

Актуальность темы обусловлена востребованными практическими приложениям – трехмерной задачей навигации внутритрубных инспекционных снарядов для магистральных нефте- и газопроводов, задачами навигации и топривязки для объектов автомобильного, гусеничного, железнодорожного транспорта.

Целями диссертационной работы являются:

- анализ возможных функциональных схем решения задач навигации и топопривязки объектов, использующих ИИБ (или БИНС) и одометр(ы);
- разработка математических моделей, численных алгоритмов решения задачи, которая ставится как линейная стохастическая задача оценивания и сглаживания;
- тестирование разработанных решений при помощи экспериментальных данных (навигационный эксперимент с ВДС в магистральном газопроводе, городские автомобильные испытания, а также при помощи разработанного имитатора).

Обзор литературы

Из основных задач, для решения которых используется интеграция данных БИНС и одометра, можно выделить следующие:

- задача навигации внутритрубных инспекционных снарядов, целью которых является привязка выявленных дефектов магистрального нефте- или газопровода к карте местности;

- задача навигации наземного транспортного средства с привлечением информации GPS в городских условиях или на специальных полигонах (например, задача навигации аэропортового транспортного средства [15]);

- задача навигации на железнодорожном транспорте, цель которой, помимо навигационной составляющей, может содержать привязку обнаруженных дефектов пути к карте;

- специфические военные приложения, для которых важно не зависеть от информации, предоставляемой приемником сигналов GPS и/или ГЛОНАСС.

Набор измерительных устройств, используемый для построения решений, может дополнительно включать следующие элементы: GPS, магнитометр, датчик курса. Последние два датчика в совокупности с показаниями одометра используются некоторыми авторами для построения независимого от БИНС позиционного решения ([11], [15]).

В России данной тематикой занимались, занимаются (не претендуя на полноту списка) в следующих учебных и научно-исследовательских, научно-производственных организациях:

- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ». Основное направление решаемых задач – железнодорожные приложения [17], [4], [5], [13], [6];

- МГТУ им. Баумана. Автомобильные приложения [11];

- Московский авиационный институт. Автомобильные приложения [15];

- Красноярский государственный технический университет (КГТУ). Внутритрубные инспекционные снаряды [1], [2];

- МГУ им. Ломоносова. Решаются задачи автомобильного приложения и навигации внутритрубных инспекционных снарядов [19], [20].

Среди научно-промышленных предприятий можно выделить следующие:

- Всероссийский научно-исследовательский институт "Сигнал", основные направления деятельности – гироскопические системы ориентирования наземных объектов, системы навигации и топопривязки наземных объектов, в основном, военной техники;

- ОАО "Пермская научно-производственная приборостроительная компания". Важнейшими направлениями ее деятельности являются: производство высокоточных инерциальных датчиков, авиационное приборостроение, разработка и изготовление изделий морской и наземной техники, производством навигационных систем различного назначения и товаров народного потребления;

- АО " Концерн "ЦНИИ Электроприбор" – один из ведущих институтов страны в области высокоточной навигации, гироскопии, гравиметрии. В 90-е годы группа с участием Дмитриева С.П. [12] и других сотрудников ЦНИИ "Электроприбор" занимались решением задачи топопривязки наземного транспортного объекта на основе данных установленной ИНС на борту и о периодических остановках с коррекцией по нулевой скорости;

- ОАО “Оргэнергогаз”, обслуживание и мониторинг магистральных трубопроводов, в частности, дефектоскопия;
- АО “Бейкер Хьюз Технологии и Трубопроводный Сервис” обслуживание и мониторинг магистральных трубопроводов, в частности, дефектоскопия;
- АО “ЦНИИАГ” разработка точных систем управления и приводов для комплексов вооружений.

Из зарубежных компаний, занимающихся решением задачи интеграции БИНС и одометра следует выделить французские кампании “Sagem”, “SBG Systems”, немецкую “iMAR Navigation GmbH’, австралийскую “Advanced Navigation”, английскую кампанию “Datron Technology”.

Фирма “Sagem” известна своей навигационной системой Sigma 30, поставляющей комплексное навигационное решение по любому набору данных от БИНС, одометра и GPS. Система является общепризнанным эталоном точности навигационного решения.

Общий обзор по теме интеграции БИНС и одометра.

Наиболее распространенное приложение алгоритмов комплексирования данных БИНС и одометра – навигация наземных транспортных средств. Работами по этому направлению занимается большое количество различных учебных заведений и конструкторских бюро. Далее речь пойдет о доступных публикациях. Касательно интеграции БИНС-одометр можно выделить работы Вавиловой Н.Б., Панева А.А. [19] — МГУ им. М.В.Ломоносова; Горбачева А.Ю. [11] — МГТУ им. Баумана; Кузнецова И.М, Пронькина А.Н., Веремеенко К.К. [15] — МАИ; Мочалова А.В [17], Боронахина А.М. [4], [6], [5], Казанцева А.В. [13] – ЛЭТИ; Андропова А.В. – КГТУ.

Среди доступных зарубежных работ выделяются алгоритмы повышения точности комплексного позиционного решения БИНС/GPS/одометр, как основное направление исследований. Решаются задачи повышения точности в периоды недоступности или недостоверности GPS сигнала [23], [21], [29].

В качестве дополнительной информации к набору перечисленных измерительных систем могут использоваться привязка к цифровой карте [21] и дополнительные датчики, такие как магнитометр [15], датчик курса [25], [11].

Встречаются работы по калибровке погрешности масштабного коэффициента одометра в движении по данным GPS [26]. Используются два варианта формирования корректирующих БИНС измерений по показаниям одометра: по скоростной ([23], [22], [25], [24]) и позиционной информации [30], [31], [29], [15]. Интересна работа Мальгина Н.В., Нестерова И.И., Кутмана А.Б., Чудинова А.Ю. [16] (ООО "Гиролаб"), в которой рассматривается калибровка масштаба одометра и юстировочных углов для навигационной системы М500 при прямолинейном движении объекта по короткому участку. Здесь используется неявная информация о нулевых скоростях по поперечным и вертикальным осям, связанным с объектом.

Некоторые работы, рассматривающие позиционную коррекцию по одометру, включают в модель ошибки одометрического счисления погрешность масштабного коэффициента и угловые ошибки установки БИНС относительно связанных с объектом осей [30], [31]. В ряде публикаций учитывается несовпадение приведенного центра БИНС и точки касания поверхности движущимся колесом, на котором установлен одометр [22], [24], [29].

Встречаются труды авторов, в которых приводятся уравнения ошибок одометрического счисления координат [1], [15]. Уравнения выводятся путем варьирования непрерывных уравнений приращения пройденного пути, полученные на основе дискретной модели приращения координат по приращениям пройденного пути по показаниям одометра.

Далее более подробно описываются некоторые конкретные прикладные задачи, в которых совместно используется информация БИНС и датчика пройденного пути.

Интеграция данных одометра и БИНС для железнодорожных приложений

Своими исследованиями в области навигации на железнодорожных путях известен Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ». Главное задача, решаемая с целью практического применения, это диагностика рельсового пути на предмет различного рода деформаций и трещин. Все контролируемые параметры состояния рельсовой колеи фиксируются как функция пройденного измерительным вагоном пути. Тематика описывается в работах Мочалова А.В [17], Боронахина А.М. [4], [6], [5], Казанцева А.В. [13].

В качестве основного датчика для привязки дефектов к пройденной дистанции используется одометр. БИНС в этом случае используется только как вспомогательный источник информации об угловой ориентации вагона и, в ряде случаев, о компонентах скорости его движения. Поскольку погрешность такой интеграции одометра и БИНС может приводить к ошибке до 5 метров на 1 километр, главный акцент в рассматриваемых авторами алгоритмах оценивания погрешностей одометра делается на использование спутниковой информации (СНС) или же контрольных отметок пройденного пути: либо при помощи своевременного нажатия кнопки синхронизации прохождения вагоном километровых столбов, либо с использованием автоматической коррекции по установленным в колее магнитным датчикам на определенных километрах рельсового пути. Второй вариант, естественно, позволяет получить гораздо большую точность даже на высоких скоростях движения состава, но является гораздо более трудоемким и дорогостоящим.

Интересна математическая модель погрешностей δS датчика пути, сформированная годами работы авторов в этом направлении, характеризующаяся как инструментальными погрешностями (уменьшение диаметра колеса в процессе эксплуатации), так и проскальзыванием колеса. Модель имеет следующую структуру:

$$\delta S = \delta S_0 + l\sum(m_1 + m_2 V + m_3\dot{V})\left(1 - \frac{m_3(1 + m_5\,\mathrm{sign}V)}{R}\right) + \mathrm{v}_{\text{ДП}},$$

где δS_0 – ошибка начальной выставки; m_1 – относительная погрешность одометра; m_2, m_3, m_4 – коэффициенты зависимости погрешности от скорости, ускорения и движения по криволинейному участку пути; m_5 – коэффициент зависимости погрешности от направления движения; l – приращение пройденного пути по одометру; $\mathrm{v}_{\text{ДП}}$ – случайная инструментальная погрешность.

В работах авторов рассматриваются следующие основные способы коррекции одометра:

- коррекция одометра по измерениям географических координат СНС/контрольных точек;

- коррекция одометра по скорости движения, вычисляемой БИНС, интегрированной со спутниковой навигационной системой.

В алгоритмах авторов из «ЛЭТИ» основной привязкой обнаруженных дефектов железнодорожного полотна является пройденный путь от отправной точки состава. И в качестве опорного решения используется решение, получаемое при помощи кинематического счисления по одометру. БИНС и СНС используются как дополнительная и корректирующая информация.

Интеграция одометра и БИНС для навигации внутритрубных инспекционных снарядов

Одна из важных практических задач – навигация внутритрубных инспекционных снарядов (ВИС), цель которых определение различного рода деформаций и потенциальных разрывов нефте/газо-трубопроводов, возникаемых в результате, например, воздействия коррозии стенок трубы, оползней, провалов грунта. Показания одометра и инерциальных датчиков БИНС привязываются к общей метке времени. На основе этих данных необходимо решить задачу навигации для привязки обнаруженных дефектов к координатам снаряда. Способы решения задачи предлагаются в работах Андропова А.В. [2], [1] Красноярского государственного технического университета, а также в работах Вавиловой Н.Б., Панева А.А. [19], [20] Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

При построении навигационного решения Андропов А.В рассматриваются различные схемы комплексирования: разомкнутая (режим оценивания), замкнутая (режим обратных связей) и разомкнуто-замкнутая схема (режим обратной связи для части компонент вектора состояния).

В работах Андропова А.В. производится кинематическое счисление географических координат по одометру и вводятся уравнения ошибок этого счисления для формирующего фильтра Калмана.

Рассматриваются следующие способы коррекции БИНС:

- коррекция БИНС по одометрической скорости;

- коррекция БИНС по координатам контрольных точек;

- коррекция координат кинематического одометрического счисления по координатам контрольных точек.

Принципиальное отличие описываемых в данной диссертации моделей от рассматриваемых Андроповым А.В. заключается в том, что уравнения ошибок счисления координат по одометру в первом случае выведены в рамках нотации механики корректируемых инерциальных навигационных систем. В работах Андропова А.В, также, не рассматриваются угловые погрешности установки блока БИНС на подвижный объект (ВИС); не рассматривается модель коррекции географических координат БИНС по координатам одометрического счисления.

Научная новизна

1. Разработаны, обоснованы, проанализированы функциональные схемы интеграции данных БИНС и одометра, новые для этой задачи;

2. Выведены и применены на практике новые коррекционные модели для задачи интеграции БИНС-одометр. Основная идея построения новых алгоритмов коррекции состоит в применении результатов кинематического одометрического счисления для непрерывной коррекции БИНС в движении. Последующий вывод коррекционных моделей основан на базовых понятиях механики корректируемых навигационных систем;

3. Разработан алгоритм введения обратных связей в модельные уравнения для рассматриваемых схем интеграции по всем компонентам вектора состояния уравнений ошибок, учитывающий значимые параметры инструментальных погрешностей инерциальных датчиков, погрешность масштабного коэффициента одометра, геометрические погрешности взаимной установки приборов;

4. Разработан алгоритм сглаживания, который учитывает специфику применения обратных корректирующих связей в алгоритмах реального и обратного времени;

5. Разработан имитатор как инструмент численного исследования задачи и отладки алгоритмов.

Практическое применение

Разработанные математические модели задачи интеграции БИНС-одометр и построенные на их основе алгоритмы применяются и могут быть использованы в приложениях, когда приборный навигационный комплекс объекта включает в свой состав БИНС (того или иного класса точности) и одометр. К числу уже упоминавшийся приложений относятся:

1. задача навигации дорожно-транспортного средства с установленными на нем БИНС и датчиком пройденного пути;

2. задача навигации внутритрубного диагностического снаряда в магистральных газопроводах;

3. задача навигации путеизмерительных вагонов в том числе с целью диагностики железнодорожных путей.

Здесь выделим два момента:

1. Разработанные алгоритмы в силу их унификации, независимости от класса точности БИНС, детерминированной составляющей моделей интеграции БИНС-одометр, могут быть применены с минимальными (настроечными) модификациями в разных приложениях – задаче топопривязки, предполагающей использование достаточно точных БИНС, задаче навигации дефектоскопа магистральных газо-

нефтепроводов, когда применяется БИНС среднего или грубого класса точности. Приводимые в диссертации примеры практического применения алгоритмов подтверждают вышесказанное;

2. Эти же алгоритмы с минимальные видоизменениями могут быть применены в информационно схожих задачах интеграции БИНС с датчиками продольной скорости. Таковыми являются задачи морской навигации, где роль «одометра» играет лаг (или гидроакустический лаг). В воздушной навигации такая роль отведена системе воздушно- скоростных параметров, а именно, датчику путевой скорости воздушного судна.

В настоящее время идет процесс передачи и внедрения программного обеспечения заинтересованным организациям.

Описание структуры диссертации

Диссертационная работа содержит введение, обзор литературы, четыре главы, заключение, список литературы и приложения.

В первой главе:

- с точки зрения механики корректируемых систем анализируются и обосновываются возможные функциональные схемы интеграции данных БИНС, одометра;
- вводится идеализированная модель одометра;
- приводятся опорные (идеальные) модели инерциального и одометрического счислений;

Во второй, основной, главе приводится описание интеграционых моделей, полученных в результате исследования задачи интерации БИНС-одометр. К их числу, в частности, относятся:

- реалистичная модель одометра и модели измерений на основе показаний датчика пройденного пути;
- дифференциальные уравнения ошибок одометрического счисления координат;
- математические модели задачи коррекции БИНС при помощи географических координат, полученных при одометрическом счислении;
- объединенные модели коррекции БИНС и одометрического счисления при помощи внешней информации о координатах реперных (контрольных) точках;

В третьей главе приводится описание информационно-эквивалентных схем коррекции – варианты оценивания и введения обратных связей в модельные уравнения. Также приводится описание алгоритма реализации этих схем.

В четвертной главе приводятся результаты обработки:

- данных, полученных с помощью имитатора;
- экспериментальных данных для задачи навигации внутритрубного диагностического (инспекционного) снаряда;

- экспериментальных данных с городских дорожных поездок транспортного средства.

В заключении приведены основные выводы. В списке литературы приведены работы, цитируемые в данной диссертации. В приложении кратко приводятся справочные материалы, используемые при построении моделей интеграции БИНС-одометр и моделей имитатора задачи.

Публикации по теме диссертации

1. **Голован А.А., Никитин И.В. Задачи интеграции БИНС и одометра с точки зрения механики корректируемых инерциальных навигационных систем. Часть 1. «Вестник московского университета. Математика. Механика.» №2, стр. 69-72, Москва, 2015**;

   A.A. Golovan, I.V. Nikitin. Combined use of strapdown inertial navigation systems and odometers from the standpoint of mechanics of inertial navigation systems. Part 1. Moscow University Mechanics Bulletin. March 2015, Volume 70, Issue 2, pp 46-49;

2. **Голован А.А., Никитин И.В. Задачи интеграции БИНС и одометра с точки зрения механики корректируемых инерциальных навигационных систем. Часть 2. «Вестник московского университета. Математика. Механика.» №4, стр. 68-72, Москва, 2015**;

   A.A. Golovan, I.V. Nikitin. Combined use of strapdown inertial navigation systems and odometers from the standpoint of mechanics of inertial navigation systems. Part 2. Moscow University Mechanics Bulletin. July 2015, Volume 70, Issue 4, pp 101-105;

3. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Козлов А.В., Никитин И.В., Панёв А.А., Парусников Н.А., Соловых И.А., Никифоров С.В., Лавырев А.М., Морозов С.В., Афанасьев А.В., Весновский И.В., Конон А.В., Лаптиев А.А., Турусиков Д.В. Результаты разработки и тестирования навигационных систем дефектоскопов магистральных нефте- и газопроводов. Сборник материалов XXII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2015. Стр. 318-323;

   Vavilova N.B., Golovan A.A., Kozlov A.V., Nikitin I.V., Panyov A.A., Parusnikov N.A., Solovyh I.A., Nikiforov S.V., Lavyrev A.M., Morozov S.V., Afanasyev A.V., Vesnovskiy I.V., Konon A.V., Laptiev A.A., Turusikov D.V. A navigation system of a pipeline inspection system for oil and gas pipelines: the results of the development and testing. 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, Concern CSRI Elektropribor, JSC Saint-Petersburg. 2015, pp 357-362;

4. Никитин И.В., Задача автономной навигации автомобиля на основе данных бескарданной инерциальной навигационной системы и и одометра. / Сборник трудов XXII Международного научно-практического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации 18-24 сентября 2013 г., Алушта - с. 228 - 229.

Доклады на конференциях

Результаты работы докладывались на международных конференциях:

1. Результаты разработки и тестирования навигационных систем дефектоскопов магистральных нефте- и газопроводов (пленарный). XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, 25-27 мая 2015г., Санкт-Петербург, Россия, Санкт-Петербург, Россия, 25-27 мая 2015;

2. Задача автономной навигации автомобиля на основе данных бескарданной инерциальной навигационной системы и и одометра. / XXII Международный научно-практический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации 18-24 сентября 2013 г., Алушта

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, Головану Андрею Андреевичу.

Автор также благодарит за помощь и полезные советы профессора Парусникова Николая Алексеевича, кандидата физико-математических наук ведущего научного сотрудника Вавилову Нину Борисовну, а также профессора Болотина Юрия Владимировича за конструктивную критику.

Глава 2

2 Возможные функциональные схемы решения задачи интеграции данных БИНС и одометра и их сравнительный анализ

В главе проводится анализ возможных функциональных схем решения задачи интеграции БИНС-одометр с точки зрения механики корректируемых инерциальных навигационных систем. Этот анализ позволяет построить важную для навигационных приложений, использующих БИНС и одометр, общую картину возможных алгоритмических решений.

В главе также приводятся справочные, поясняющие опорные модели (или уравнения идеальной работы [3]) автономного инерциального навигационного счисления, кинематического одометрического счисления, включая идеализированную модель измерений одометра.

На основе проводимой классификации далее в последующей главе приводится детальный вывод соответствующих алгоритмических решений.

Обозначения

В последующем изложении будут использоваться обозначения и представления, принятые в лаборатории управления и навигации и на кафедре прикладной механики и управления МГУ [9], [10] (см. также пункт 7.1). Кратко опишем их.

Обозначение систем координат состоит из заглавной и строчной букв, например, $O\xi(O\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Заглавная буква O обозначает начало координат, прописная ξ – наименование ее осей.

Векторы обозначаются либо малыми, либо большими строчными буквами: ω, V. Нижний индекс $_\xi$ вектора ω_ξ означает, что вектор $\overline{\omega}$ задан своими проекциями в осях системы координат $O\xi$.

Матрицы ориентации обозначаются большими прописными буквами: A, B. Если обозначение матрицы ориентации содержит два нижних индекса, например, $A_{\xi\eta}$, то эта матрица взаимной ориентации систем координат $O\xi$ и $O\eta$, причем для произвольного вектора ω справедливо:

$$a_\xi = A_{\xi\eta} a_\eta.$$

Символ $^\top$ – знак транспонирования вектора или матрицы.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a^\top d = d^\top a.$$

Трехмерному вектора $\overline{a}$ ставится в соответствие кососимметрическая матрица $\widehat{a}$:

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матричная форма векторного произведения векторов $\overline{a}, \overline{b}$:

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \widehat{a}^{\top} b = -\widehat{a} b.$$

Координаты некоторой точки M, например, в системе координат $O\xi$ будут обозначаться следующим образом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\top}$.

$'$ — обозначение модельных переменных БИНС. $''$ — обозначение модельных переменных кинематического одометрического счисления.

V — обозначение для вектора линейной скорости точки или объекта относительно вращающейся Земли.

v — обозначение для вектора абсолютной скорости точки или объекта.

Ω — обозначение для вектора угловой скорости трехгранника относительно вращающейся Земли.

ω — обозначение для вектора абсолютной угловой скорости трехгранника в инерциальном пространстве.

u — обозначение для вектора (и модуля) угловой скорости вращения Земли.

r — обозначение для радиус-вектора точки.

φ, λ, h – широта, долгота, высота – географические координаты точки.

g^0 — обозначение для нормальной составляющей удельной силы тяготения.

g — обозначение для нормальной составляющей удельной силы тяжести.

ψ, γ, ϑ — обозначения для углов истинного курса, крена и тангажа.

R_1 (R_E), R_2 (R_N) – экваториальный и меридианальный радиусы Земли в точке M.

БИНС — бескарданная инерциальная навигационная система.

СНС — спутниковая навигационная система.

2.1 Функциональные схемы решения задач коррекции в инерциальной навигации

Для дальнейшего изложения понадобится описание известной классификации [10] возможных функциональных схем решения задачи коррекции в инерциальной навигации. Кратко изложим этот материал.

Напомним, что инерциальные навигационные системы моделируют движение двух механических объектов:

- материальной точки M, движущейся в поле сил земного тяготения g^0 под действием внешней силы f, доступной измерению;
- приборного трехгранника, тем или иным способом связанного с движущимся объектом и в осях которого измеряется упомянутая внешняя сила f.

Далее будем рассматривать движение такого совокупного динамического объекта.

Пусть поведение динамического объекта описывается векторным уравнением:

$$\dot{X} = F(X, U), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где X – вектор состояния, U – внешнее воздействие на систему, доступное измерению, F – известная вектор-функция.

В инерциальной навигации компонентами вектора состояния X служат координаты (например, географические) характерной точки объекта M – местоположения приведенного центра БИНС, а именно, центра блока ньютонометров БИНС, компоненты вектора линейной скорости этой точки (относительной или абсолютной), параметры ориентации приборного трехгранника Mz, жестко связанного с осями чувствительности ньютонометров БИНС.

Компонентами вектора измеряемого внешнего воздействия U служат показания инерциальных датчиков – ньютонометров, датчиков угловой скорости или гироскопов.

Предполагается известной информация о начальном состоянии объекта $X'(t_0) = X'_0$. В каждый момент времени измеряется $U(t)$, результат измерения обозначим $U'(t)$. Тогда с указанным начальным состоянием могут интегрироваться уравнения, структурно повторяющие уравнения движения объекта (принцип инвариантности):

$$\dot{X}' \;=\; F(X', U'). \tag{2}$$

Информация $X'(t_0), U'(t)$ называется основной.

Здесь вектор X' является модельным, числовым образом исходного динамического объекта, причем поведение этого модельного объекта подчиняется тем же законам, что и реальный объект. Поэтому в инерциальной навигации уравнения (2) называются модельными уравнениями.

Выходной вектор X' определяет координаты второй модельной точки M' и ориентацию нескольких модельных трехгранников, в частности, числового образа приборного трехгранника Mz - трехгранника $M'y$.

Помимо основной информации, доставляемой инерциальными датчиками, в навигационных системах используется внешняя дополнительная информация неинерциальной природы. Например, позиционные, скоростные решения СНС, измерения высотомера, лага, одометра и т.п.

Приведем известные подходы к комплексному использованию основой и дополнительной информации для решения так называемой задачи коррекции в инерциальной навигации. Возможны три принципиально различные **функциональные схемы** использования дополнительной информации по отношению к основной [9], [10]:

1. В модельных уравнениях с помощью дополнительной информации образуются некоторые связи, меняющие динамические свойства системы. Совокупно используемая информация избыточна, организуется она как необходимая и достаточная. Количество используемых инерциальных датчиков остается прежним;

2. Часть основной информации может заменяться дополнительной таким образом, что совокупно используемая информация оказывается необходимой и достаточной для однозначного определения вектора состояния. В этом случае не используется часть датчиков основной информации;

3. Дополнительная информация используется для комплексной обработки в сочетании с основной. Избыточность информации в этом случае позволяет решать задачу оптимизации и тем самым потенциально повысить точность системы.

Схема 1. Пусть векторное уравнение движения объекта представлено в виде

$$\dot{X} = F(X, Y, U), \qquad Y = \Theta(X),$$

где Y – дополнительная информация о состоянии X системы, доступная измерению, Θ – известная вектор-функция. Пусть также имеется основная $X'(t_0), U'(t)$ и дополнительная информация Z^*, с точностью до инструментальных погрешностей r равная величине Y:

$$Z^* = Y + r.$$

В этом случае вектор состояния динамического объекта может быть определен при помощи алгоритма, описываемого модельным уравнением:

$$\dot{X}^* = F(X^*, Z^*, U'), \qquad X^*(t_0) = X'(t_0).$$

Схема 2. Пусть векторы X, U представлены в виде

$$X = \begin{pmatrix} X_I \\ X_{II} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} U_I \\ U_{II} \end{pmatrix},$$

а уравнение (1) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{X}_I &= F_1(X_I, X_{II}, U_I), \\ \dot{X}_{II} &= F_2(X_I, X_{II}, U_{II}), \end{aligned}$$

и в нашем распоряжении есть дополнительная информация Z^*, которая с точностью до инструментальных погрешностей совпадает с величиной X_{II}.

Тогда определение вектора состояния динамического объекта X может осуществляться при помощи модельных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{X}_I^* &= F_1(X_I^*, X_{II}^*, U_I'), \\ X_{II}^* &= Z^*. \end{aligned}$$

Здесь через X_I^*, X_{II}^* обозначены новые модельные переменные.

Схема 3. Рассмотрим постановку задачи коррекции в общем виде. Будем рассматривать уравнение движения (1). Структура основной и дополнительной информации может быть описана в виде моделей ошибок:

$$\begin{aligned} X_0' &= X(t_0) + x_0, \\ X'(t) &= X(t) + x(t), \\ U'(t) &= U(t) + u(t), \\ Z(t) &= \Theta(X(t)) + r(t), \end{aligned}$$

где x_0 – начальная ошибка вектора состояния, $x(t)$ – ошибка вектора состояния, $u(t)$ – инструментальная погрешность измерения величины $U(t)$, $r(t)$ – инструментальная погрешность дополнительных измерений.

Пусть по основной информации интегрируются модельные уравнения

$$\dot{X}' = F(X', U'), \qquad X'(t_0) = X_0'.$$

Уравнения ошибок такой системы относительно вектора $x(t) = X'(t) - X(t)$ имеют вид

$$\dot{x} = Ax + q, \tag{3}$$

где

$$A = \frac{\partial F(X', U')}{\partial X}, \quad q = \frac{\partial F(X', U')}{\partial U}, \quad x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Введем величину $z = Z - \Theta(X')$. Разложив величину $\Theta(X') = \Theta(X+x)$ в ряд Тейлора и оставив только линейные члены разложения, получим:

$$z = Hx + r, \tag{5}$$

где

$$H = -\frac{\partial \Theta(X')}{\partial X}.$$

Задача сводится к определению (оцениванию) величины x, удовлетворяющей уравнению (3) при помощи корректирующих измерений z (5).

Обозначим через $\tilde{x}$ оценку величины x, доставляемую неким алгоритмом оценивания L (линейным, несмещенным, калмановского типа...)

$$\tilde{x} = L[z].$$

Тогда оценка $\tilde{X}$ фазового вектора динамического объекта примет вид:

$$\widetilde{X} = X' - \tilde{x}.$$

2.2 Общие функциональные схемы решения задачи коррекции БИНС при использовании показаний одометра

Как уже отмечалось, в инерциальной навигации компонентами вектора состояния X служат координаты, компоненты вектора скорости точки M, параметры ориентации приборного трехгранника. Соответственно представим вектор X в коагулированном виде:

$$X = \left(X^{(c)^T}, X^{(v)^T}, X^{(a)^T} \right)^T, \tag{6}$$

где подвектор $X^{(c)}$ характеризует координаты точки M, $X^{(v)}$ характеризует компоненты вектора линейной скорости точки M, $X^{(a)}$ – параметры ориентации корпуса объекта.

Обозначим через V^d идеальные измерения одометра. Измерение одометра V^d является скалярной величиной, интерпретируемой либо как локальная продольная скорость объекта, либо как локальное перемещение объекта вдоль его продольной оси.

Тогда состояние объекта можно описать отличным от (1) уравнением

$$\dot{X}^{(c)} = F^d \left(X^{(c)}, X^{(a)}, V^d \right), \tag{7}$$

представляющего модель кинематического одометрического счисления (F^d соответствующая ему известная вектор-функция), в которой помимо собственно измерения V^d используется информация об ориентации корпуса объекта, содержащаяся в компонентах подвектора $X^{(a)}$.

Соответственно, второй вариант модельных уравнений, определяющих состояние вектора координат $X^{(c)}$ примет вид:

$$\dot{X}'' = F^d(X'', X^{(a)'}, V''), \qquad X'' = X^{(c)''}, \tag{8}$$

где V'' – реальное измерение одометра, вектор $X'' = X^{(c)''}$ – второй модельный набор координат.

Этот вариант не является автономным, поскольку он предполагает использование дополнительной сторонней информации о параметрах ориентации $X^{(a)'}$, предоставляемых первым модельным объектом (2).

Поэтому для замыкания модели (8) следует использовать избыточное представление

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= F(X', U'), \qquad X' = \left(X^{(c)'T}, X^{(v)'T}, X^{(a)'T} \right)^T, \\ \dot{X}'' &= F^d(X'', X^{(a)'}, V''). \end{aligned} \tag{9}$$

Избыточность здесь понимается в том смысле, что первая и вторая подсистемы модельных уравнений определяют модельные значения координат $X^{(c)}$ и скорости $X^{(v)}$ одного и того же объекта.

Вектор X'' является вторым модельным, числовым образом "части" исходного динамического объекта, поведение которого подчиняется тем же законам, что и реальный объект. Выходной вектор X'' определяет координаты и скорость второй модельной точки M'', и, в частности, ориентацию модельного географического трехгранника.

Далее нас будет интересовать применение функциональной **схемы 3** для решения задачи коррекции, поскольку последняя ставиться как оптимизационная задача оценивания вектора ошибок x динамического объекта при помощи внешней информации.

В случае использования измерений одометра здесь возникает два варианта.

- Измерение одометра V'' интерпретируется как измерение продольной скорости и оно является корректирующим измерением. Именно этот вариант встречается на практике [20];

- Вектор X'', являющийся результатом кинематического одометрического счисления (9), служит вектором позиционной коррекции модельного объекта (2).

  В этом варианте введем позиционную ошибку одометрического счисления:

  $$x^d(t) = X'' - X^{(c)}.$$

  Тогда уравнения ошибок навигационного счисления для избыточной модельной системы (9) примут вид (см. (3), (4)):

  $$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ q^d \end{pmatrix}, \tag{10}$$

  где

  $$A_{21} = \frac{\partial F^d}{\partial X}, \quad A_{22} = \frac{\partial F^d}{\partial X^{(c)}}, \quad q^d = \frac{\partial F^d}{\partial V}.$$

  Структурные свойства коагулированной системы уравнений ошибок таковы, что ошибка x^d одометрического счисления будет зависеть от ошибок инерциального счисления, а ошибка x инерциального счисления от одометрического - нет.

  Появление, например, внешней позиционной $Z = \Theta(X) + r$ информации приводит к формированию пар векторов коррекции как для инерциального модельного объекта (2), так и для одометрического модельного объекта (8) ($_{ins} \to$ БИНС, $_{odo} \to$ одометр)

  $$\begin{aligned} z_{ins} &= Z - \Theta(X') = H_{ins}x + r, \qquad H_{ins} = \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \\ z_{odo} &= Z - \Theta(X'') = H_{odo}x^{(c)} + r, \qquad H_{odo} = \frac{\partial \Theta}{\partial X^{(c)}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Наконец, одометрическое решение X'' естественно использовать к качестве коррекционной позиционной информации для модельного объекта (2):

$$z_{ins/odo} \;=\; X' - X'' \simeq x - x^d. \tag{12}$$

В данной работе нас будет интересовать именно второй вариант, означающий применение непрерывной позиционной коррекции БИНС при помощи результатов одометрического счисления.

2.3 Функциональные схемы решения задачи коррекции БИНС при использовании показаний одометра

Для последующего изложения воспользуемся удобной классификацией и терминологией задач комплексирования (или интеграции) инерциальных и спутниковых навигационных систем. Кратко напомним эту классификацию.

В этих задачах используются следующие четыре уровня интеграции [28], [14]:

- Раздельные системы (Separate Systems). Данные о скорости и координатах СНС могут замещать соответствующие данные ИНС;
- Свободно соединенные системы (Loosely Coupled Systems). Оценка текущего положения доставляется фильтром Калмана, на вход которого подаются выходная информация ИНС и выходная информация СНС (координаты, скорость);
- Тесно соединенные системы (Tightly Coupled Systems). Отличие от предыдущего варианта в том, что в качестве выходной информации СНС для коррекции БИНС используются измерения приемоиндикатора СНС (кодовые, доплеровские, фазовые измерения);
- Глубокое интегрирование (Deep Integration). Комплексирование на приборном уровне, на уровне измерений инерциальных датчиков и первичных спутниковых измерений.

В рассматриваемой задаче интеграции БИНС и одометра классификация, описанная в предыдущем пункте, и классификация уровней интеграции ИНС и СНС, порождает следующие функциональные схемы комплексирования. Условно назовем их «**одометр + БИНС**» и «**БИНС + одометр**».

1. Схема «**одометр+БИНС**». Эта схема, достаточно распространенная на практике, соответствует **схеме 2**: показания одометра заменяют часть основной инерциальной информации и становятся главными для определения координат объекта. Углы ориентации БИНС служат источником информации об ориентации объекта в пространстве. При этом, возможности комплексной обработки информации БИНС и одометра не реализуются полностью.

   Подварианты интеграции в рамках принятой схемы «одометр+БИНС».

   (a) **Слабосвязанные системы.** Автономная БИНС доставляет углы ориентации объекта, используемые для перепроектировки векторных измерений одометра на оси модельного географического (квазимодельного) трехгранника с целью последующего интегрирования кинематических уравнений для географических координат.

(b) **Модифицированные слабосвязанные системы.** Отличие этого варианта от предыдущего заключается в добавлении процедуры коррекции углов ориентации автономной БИНС – углов курса, крена и тангажа, обусловленной несовпадением модельного географического трехгранника БИНС и модельного одометрического географического трехгранника. Угловые ошибки первого из них могут быть значительными в сравнении со вторым при длительном функционировании БИНС.

2. Схема «**БИНС+одометр**». В этой схеме показания одометра (интепретируемые либо как позиционная, либо как скоростная информация) служат корректирующими измерениями для БИНС. В частности, коррекция может производится по решению, полученному в схеме «одометр+БИНС». Это означает, что возможности, заложенные в совокупной информации, реализуются полностью. Соответствующая задача оптимизации может быть решена в линейной постановке.

   Подварианты интеграции в рамках принятой схемы «БИНС+одометр».

   (a) **Тесно связанные системы.** В линейной постановке в варианте **оценивания** ставится и решается задача коррекции БИНС при помощи измерений одометра. Вариант применим для достаточно точных БИНС с ограниченным временем функционирования.

   (b) **Глубоко связанные системы.** Эта же задача коррекции БИНС решается в линейной постановке в варианте **введения обратных связей** в алгоритмы навигационного счисления БИНС и одометра.

2.4 Уравнения идеальной работы БИНС и кинематического одометрического счисления

Для пояснения моделей динамических объектов, рассмотренных выше, приведем краткое описание так называемых уравнений идеальной работы инерциальной навигационной системы, и, в частности, БИНС; а также моделей кинематического одометрического счисления.

2.4.1 Уравнения идеальной работы БИНС

Полная система дифференциальных уравнений движения материальной точки M и приборного трехгранника Mz БИНС может быть записана в следующей форме для заданного варианта ориентации опорного географического трехгранника – ориентации осей по сторонам света:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{x^0} &= (\widehat{\Omega}_{x^0} + 2\widehat{u}_{x^0})V_{x^0} + D^{\top}_{zx^0} f_z + g_{x^0}, \\
\dot{D}_{zx^0} &= \widehat{\omega}_z D_{zx^0} - D_{zx^0}(\widehat{u}_{x^0} + \widehat{\Omega}_{x^0}), && (13) \\
\dot{B}_{x^0\eta} &= \widehat{\Omega}_{x^0} B_{x^0\eta}, \\
\dot{h} &= V_{x^0_3}. && (14)
\end{aligned}$$

Здесь

- V_{x^0} – вектор относительной линейной скорости точки M в осях сопровождающего географического трехгранника Mx^0, оси которого ориентированы по сторонам света: на Восток, Север, вверх;

- Ω_{x^0} – вектор относительной угловой скорости географического трехгранника Mx^0 в собственных осях;

- u_{x^0} – вектор угловой скорости вращения Земли в осях Mx^0;

- f_z – вектор внешней удельной силы, действующих на объект, в осях приборного трехгранника Mz;

- g_{x^0} – вектор удельной силы **тяжести** в осях Mx^0;

- D_{zx^0} – матрица ориентации приборного трехгранника Mz относительно географического Mx^0. Отметим, что в пособиях [9], [10] для матрицы D_{zx^0} используется обозначение L;

- ω_z – вектор абсолютной угловой скорости приборного трехгранника Mz;

- $B_{x^0\eta}$ – матрица ориентации географического трехгранника Mx^0 относительно гринвичского $O\eta$ (O – центр навигационного эллипсоида). Элементы матрицы $B_{x^0\eta}$ являются известными функциями географических координат точки M – географической широты φ, долготы λ;

- h, $V_{x_3^0}$ – высота и вертикальная скорость.

2.4.2 Уравнения идеального кинематического одометрического счисления

Идеализированная модель одометра.

Пусть одометр представляет собой устройство, измеряющее число оборотов колеса. Первичной измерительной информацией служат целые числа N_i, представляющие собой значение целочисленного счетчика парциальных углов поворота колеса на интервале времени $[t_0, t_i]$ (в начальный момент времени t_0 для определенности $N_0 = 0$). Пусть n – число равномерно установленных по окружности колеса меток, тогда величина парциального угла Δa в радианах:

$$\Delta a = \frac{2\pi}{n}.$$

Пусть R – значение радиуса колеса. Тогда пройденный путь s точкой контакта колеса с поверхностью дороги на интервале времени $[t_0, t_i]$ будет равен:

$$s(t_i) \;=\; \frac{2\pi R N_i}{n} = K N_i, \qquad K = \Delta a R, \tag{15}$$

где параметр K имеет смысл масштабного коэффициента одометра, переводящего первичные целочисленные измерения в пройденный путь, изменение значение счетчика N_i произошло именно в момент времени t_i.

Разность $\Delta N_i = N_i - N_{i-1}$ характеризует пройденный путь Δs_i на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$:

$$\Delta s_i = K \Delta N_i.$$

Это есть истинное значение приращения пути, если именно в моменты времени t_{i-1}, t_i происходило увеличение счетчика N до величин N_{i-1}, N_i.

Идеализированная модель одометра представляет из себя модель датчика, связанного с продольной осью объекта и измеряющего дискретным образом пройденный путь $s(t_i)$ (скалярную величину) приведенного центра БИНС M, находящегося на этой оси. То есть считается, что пройденный путь s, зафиксированный одометром, совпадает с пройденным путем приведенного центра БИНС. Предполагается, что:

- движение объекта происходит без проскальзывания;
- объект постоянно сцеплен с дорогой, то есть не подлетает и не проваливается, и отсутствует снос объекта в поперечном направлении.

Это позволяет перейти от скалярной интерпретации измерения приращения пути одометром к векторной: вектор скорости объекта в осях связанной с корпусом системы координат Ms представляет вектор с двумя нулевыми компонентами (проекции на боковую Ms_1, и вертикальную Ms_3 оси), и одной ненулевой компоненты Δs_i (при движении объекта) по продольной оси Ms_2:

$$\Delta s_s \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s_i \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Аналогичная интерпретация справедлива для локальной продольной средней скорости V_i на интервале времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$:

$$V_s \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ V_i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}, \tag{17}$$

где V_s – вектор истинной относительной скорости точки M в связанной системе координат Ms.

Непрерывная и дискретная модели одометрического счисления.

Используя описанные модели приращения пройденного пути (16) и продольной скорости (17), значения матрицы ориентации D_{zx^0}, совпадающую с матрицей D_{sx^0} в идеальном случае установки приборной Mz системы координат БИНС по осям связанной системы Ms, приведем непрерывную и дискретную модели кинематического счисления географических координат - широты φ, долготы λ и высоты h:

- Непрерывная модель.

$$\dot{\lambda} \quad = \quad \frac{V_E}{R_E \cos\varphi}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{V_N}{R_N} \qquad \dot{h} = V_{UP}, \quad \begin{pmatrix} V_E \\ V_N \\ V_{UP} \end{pmatrix} = D^T_{sx^0} V_s. \tag{18}$$

  Здесь V_E, V_N, V_{UP} – восточная , северная, вертикальная составляющие вектора скорости, R_E, R_N – соответствующие радиусы кривизны.

- Дискретная модель

$$
\begin{aligned}
\Delta s^d_{x^0} &= \begin{pmatrix} \Delta s_{x^0_1} \\ \Delta s_{x^0_2} \\ \Delta s_{x^0_3} \end{pmatrix} = D^{\top}_{sx^0} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s_i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_i &= \lambda_{i-1} + \frac{\Delta s_{x^0_1}}{R_E \cos \varphi_{i-1}}, \\
\varphi_i &= \varphi_{i-1} + \frac{\Delta s_{x^0_2}}{R_N}, \\
h_i &= h_{i-1} + \Delta s_{x^0_3},
\end{aligned} \tag{19}
$$

где $\varphi_0 = \varphi(t_0), \lambda_0 = \lambda(t_0), h_0 = h(t_0)$ – координаты стартовой точки.

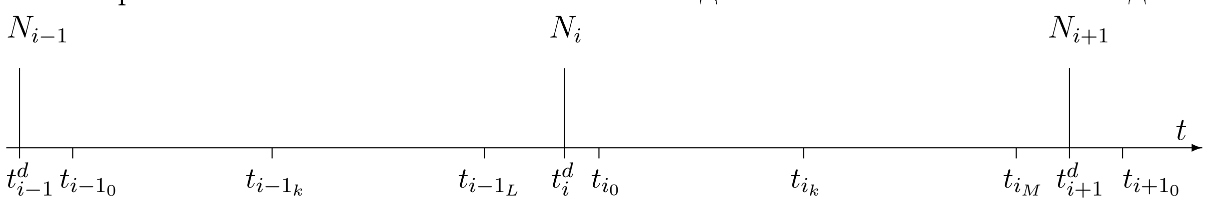
Если рассматривается идеальная ситуация, когда отсутствуют ошибки инерциальных датчиков БИНС, одометра, ошибки начальных условий, то оба способа вычисления географических координат точки M приведут к одинаковому результату в счислении.

Отталкиваясь от приведенных в этой главе общих схем интеграции, идеальных моделей счисления, в следующей главе приведем детальное наполнение интеграционных моделей задачи БИНС-одометр.

2.5 Сравнение позиционной и скоростной интерпретации измерений одометра с информационной точки зрения

Выделим несколько пунктов в сравнительном анализе позиционной и скоростной интерпретации измерений одометра с информационной и навигационной точек зрения.

Рассмотрим временную ось t, на которой отмечены моменты времени обновления показаний датчиков БИНС и одометра:



Ниже оси t через t^d_j обозначены моменты времени обновления показаний датчика пройденного пути; через t_j – моменты времени обновления показаний инерциальных датчиков и решений БИНС. Обычно, частота регистрации данных БИНС больше частоты опроса одометра, поэтому моменты t^d_j отмечены реже чем t_j.

Выше оси t отмечена привязка целочисленного счетчика N парциальных углов поворота колеса ко времени. То есть в момент времени t^d_i счетчик изменился и принял значение N_i. Для определенности, будем считать, что счетчик одометра менялся на 1: $N_{i+1} - N_i = 1, N_i - N_{i-1} = 1$.

Рассмотрим интервал времени $\left[t^d_i, t^d_{i+1}\right]$ на котором изменилось значение счетчика парциальных углов поворота колеса со значения N_i до значения N_{i+1}. Считаем, что показания одометра фиксируются с привязкой к моментам времени регистрации показаний датчиков БИНС. Тогда отрезком времени, в рамках которого было зафиксировано данное приращение, будет $[t_{i_0}, t_{i+1_0}]$.

Регистрация показаний одометра и датчиков БИНС может быть не полностью синхронизирована, что на момент времени t_{i+1_0} выражается во временных отрезках $[t^d_i, t_{i_0}]$

и $[t^d_{i+1}, t_{i+1_0}]$. Другими словами, в каждый момент времени t_{i_0} нам известно показание датчика пройденного пути с точностью до цены одного парциального угла колеса Δa.

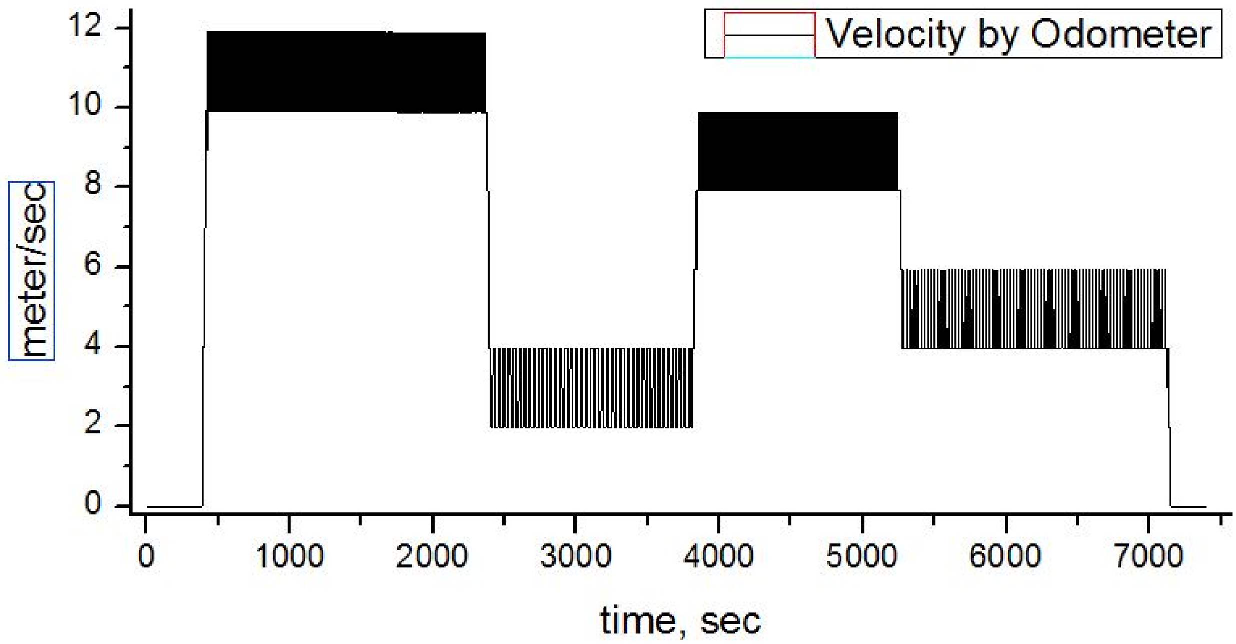


Рис. 1: Пример скоростной интерпретации показаний одометра

Скоростная интерпретация – прямое численное дифференцирование позиционного измерения одометра

Скоростная интерпретация показаний одометра представляет собой оценку продольной скорости объекта, которая определяется путем прямого численного дифференцирования позиционного измерения одометра – приращения пройденного пути на соответствующем интервале времени.

Для скоростной интерпретации имеем:

1. Средняя продольная скорость V , определяемая на основе формулы прямого численного дифференцирования
$$V = K\frac{1}{t_{i+1_0} - t_{i_0}}$$
связана с интервалом $[t_{i_0}, t_{i+1_0}]$ шкалы времени именно БИНС;

2. Вычисленную скорость V естественно отнести к середине интервала $[t_{i_0}, t_{i+1_0}]$, то есть к моменту времени $\frac{t_{i_0}+t_{i+1_0}}{2}$;

3. Тем самым возникает запаздывание на половину длины интервала в значении скорости, которое следует учитывать при построении алгоритмов комплексирования в части формирования сигнала коррекции БИНС по одометрической скорости;

4. Величина запаздывания – переменная, поскольку она зависит от скорости движения объекта, чем выше скорость, тем меньше длина интервала $[t_{i_0}, t_{i_M}]$;

5. На практике учет запаздывание сводят к введению в модель задачи интеграции БИНС-одометр шума одометрической скорости, интенсивность которого подстраивают под скорость движения, частоту опроса показаний одометра, частоту решения навигационной задачи БИНС;

6. В аппаратной части уменьшение влияния запаздывания решают путем увеличения частоты опроса одометра, уменьшения значения масштабного коэффициента.

Позиционная интерпретация – приращение показаний одометра

В отличии от скоростной, позиционная интерпретация предполагает, что на интервале времени $[t_{i_0}, t_{i+1_0}]$ путь, пройденный объектом, изменился на величину $\Delta s = K \cdot 1$ в продольном направлении. Полученное при этом кинематическое одометрическое решение относится к моменту времени t_{i+1_0}.

В данном случае отсутствует значимое запаздывание информации, нет необходимости вводить логически сложные модели шума измерений, ослабляются требования к частоте опроса одометра и к величине его масштабного коэффициента.

Скоростная, позиционная интерпретации и калибровка одометра

Калибровка одометра заключается в оценивании погрешности κ масштабного коэффициента, угловых ошибок $\varkappa_1$, $\varkappa_3$ привязки его "измерительной" оси на основе специально организуемых экспериментов с привлечением позиционной информации.

При использовании скоростной интепретации, калибровка одометра, может осуществляться опосредовано через решение задачи коррекции БИНС при помощи локальной одометрической скорости. Из-за указанных выше особенностей скоростной интерпретации, ее результаты не всегда являются устойчивыми.

Поэтому под задачу калибровки одометра выделяют отдельный технологический этап. Организуется специальная мерная трасса, к которой предъявляются определенные требования: протяженность трассы не менее Xкм., прямолинейность, горизонтальность трассы, привязка с высокой точностью к карте маркерных точек трассы. При таком подходе к калибровке одометра его скоростная интерпретация не используется.

Калибровка, например, масштабного коэффициента проводится на основе сравнения расстояния между маркерными точками с расстоянием, вычисленному по приращению показаний одометра.

Однако, в случае позиционной интерпретации, когда параллельно осуществляется инерциальное счисление БИНС, кинематическое одометрическое счисление, коррекция БИНС по одометрическому счислению, автоматически осуществляется докалибровка масштабного коэффициента, перекосов одометра в движении. А при наличии легко организуемой (не далеко от точки старта) маркерной точки, проводимая в этой точке позиционная коррекция БИНС и одометрического счисления, позволяет с разумной точностью оценить калибровочные параметры одометра.

Тем самым, отпадает необходимость в организации специальной мерной трассы, в реализации специального калибровочного режима.

Также в случае наличия маркерных точек (или иной внешней позиционной информации) корректируется кинематическое одометрическое счисление, которое хранит всю историю показаний приращений пройденного пути. В случае скоростной интерпретации учитывается только локальное приращение пройденного пути продифференцированного по времени.

Учитывая все выше изложенное, можно считать, что в задаче интеграции БИНС-одометр следует использовать позиционную интерпретацию показаний одометра и соответствующее одометрическое кинематическое счисление.

Глава 3

3 Модели и алгоритмы интеграции БИНС-одометр

В данной главе:

- в качестве справочного материала, необходимого для дальнейшего изложения, приводится описание одного из вариантов модельных уравнений БИНС, описание модели уравнений ошибок БИНС, используемой лабораторией управления и навигации МГУ при решении прикладных задач;
- приводятся вывод и описание моделей одометрического кинематического счисления в рамках схемы «**одометр+БИНС**». К их числу относятся:
  - реалистичная модель измерения одометра и ее векторные интерпретации;
  - модели одометрического счисления в рамках вариантов **слабосвязанные системы** и **модифицированные слабосвязанные системы**;
- приводится вывод уравнения ошибок одометрического счисления для вариантов **слабосвязанные системы** и **модифицированные слабосвязанные системы**;
- в рамках схемы «**БИНС+одометр**» приводятся сводные модели задачи коррекции БИНС при помощи результатов кинематического одометрического счисления. А именно:
  - сводные модели уравнений ошибок системы «**БИНС+одометр**»;
  - сводные модели уравнений корректирующих измерений при помощи позиционной информации, доставляемой одометрическим счислением, возможной внешней информации о координатах реперных точек.

3.1 Математические модели БИНС

3.1.1 Модельные уравнения БИНС

Будем предполагать, что в качестве опорного географического трехгранника, в осях которого записываются так называемые уравнения идеальной работы БИНС, используется географический трехгранник Mx^0 с ориентацией осей по сторонам света: первая ось ориентирована на Восток, вторая – на Север, третья – вверх по географической вертикали места.

Модельные уравнения БИНС описывают движение:

- модельной материальной точки M' – числового образа истинной (реальной) точки M;
- модельного приборного трехгранника $M'y$ – числового образа приборного трехгранника Mz. Поскольку БИНС крепится на корпусе объекта, то, не нарушая общности, считаем, что приборный трехгранник Mz БИНС своими осями задает ориентацию связанной с корпусом объекта системы координат;

- модельного географического трехгранника $M'y^x$ – числового образа географического трехгранника Mx^0.

Входными данными для модельных уравнений БИНС служат измерения инерциальных датчиков:

- ДУС: $\omega_y = \omega'_z = (\omega'_{z_1}, \omega'_{z_2}, \omega'_{z_3})^\top$ – результат измерения абсолютной угловой скорости $\omega_z = (\omega_{z1}, \omega_{z2}, \omega_{z3})^\top$ приборного трехгранника Mz;
- ньютонометров (акселерометров): $f'_z = (f'_{z_1}, f'_{z_2}, f'_{z_3})^\top$ – результат измерения внешней удельной силы, действующей на объект.

По показаниям ДУС и опосредовано по показаниям акселерометров вычисляется матрица ориентации D_{yy^x} модельного трехгранника $M'y$ относительно модельного географического (квазимодельного) $M'y^x$ трехгранника. Матрица D_{yy^x} является функцией модельных углов истинного курса ψ', крена γ' и тагнгажа ϑ'.

В инерциальной навигации, при выводе уравнений ошибок и для их интерпретации используется понятие квазиприборного трехгранника Mz^x – числового образа приборного трехгранника Mz в географических осях. Иногда этот трехгранник называют виртуальной гироплатфомой или просто платформой.

Формально, квазиприборный трехгранник Mz^x задается так: его матрица ориентации относительно приборного трехгранника Mz есть матрица D_{yy^x}, то есть для любого вектора l, справедливо:

$$l_{z^x} = D^\top_{yy^x} l_z.$$

Система модельных уравнений движения точки M' в осях квазимодельного географического трехгранника $M'y^x$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{V}'_{y^x} &= (\widehat{\Omega}'_{y^x} + 2\widehat{u}_{y^x})V'_{y^x} + f'_{y^x} + g_{y^x}, \\
\dot{D}_{yy^x} &= \widehat{\omega}_y D_{yy^x} - D_{yy^x}(\widehat{u}_{y^x} + \widehat{\Omega}'_{y^x}), \qquad (20)\\
\dot{B}_{y^x\eta} &= \widehat{\Omega}'_{y^x} B_{y^x\eta}, \\
\dot{h}' &= V'_{y^x_3},
\end{aligned}$$

$$\Omega'_{y^x} = \left(-\frac{V'_{y^x2}}{R_N + h'}, \frac{V'_{y^x1}}{R_E + h'}, \frac{V'_{y^x1}}{R_E + h'} \operatorname{tg}\varphi'\right), \qquad (21)$$

где

- V'_{y^x} – модельная линейная относительная скорость точки M';
- ω_y – измерения ДУС;
- $f'_{y^x} = D_{y^x y} f'_z$ – измерения ньютонометров, спроектированные с помощью матрицы $D_{y^x y}$ на оси квазимодельного географического трехгранника $M'y^x$;
- g_{y^x} – вектор нормальной удельной силы тяжести в осях $M'y^x$;
- Ω'_{y^x} – вектор модельной угловой относительной скорости трехгранника $M'y^x$ в проекции на свои же оси;

- u'_{y^x} – вектор угловой скорости вращения Земли в проекции на оси $M'y^x$;

- $B'_{y^x\eta}$ – матрица ориентации трехгранника $M'y^x$ относительно гринвичской системы координат $O\eta$, определяющая модельные географические координаты точки M' - широту φ' и долготу λ';

- h', $V'_{y^x_3}$ – модельные высота и вертикальная скорость.

3.1.2 Принятые модели инструментальных погрешностей

Обычно достаточно полная модель инструментальных погрешностей инерциальных датчиков включает в себя такие параметры как смещение нулевого сигнала, погрешности масштабных коэффициентов, перекосы осей чувствительности и т.п., шумы измерений.

Будем предполагать, что после проведения процедур стендовой калибровки инерциальных датчиков, остаточная модель инструментальных погрешностей будет включать в себя только смещение нулевого сигнала (смещение в запуске) и шумовую составляющую.

Принимается следующая модель инструментальных погрешностей инерциальных датчиков БИНС:

- модель погрешностей ДУС

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_z - \nu_z, \\ \nu_z &= \nu_z^0 + \nu_z^s, \end{aligned} \tag{22}$$

  где $\nu_z^0 = (\nu_{z_1}^0, \nu_{z_2}^0, \nu_{z_3}^0)^\top$ – систематическая составляющая гироскопического дрейфа ДУС; $\nu_z^s = (\nu_{z_1}^s, \nu_{z_2}^s, \nu_{z_3}^s)^\top$ – случайные (шумовые, немоделируемые) оставляющие погрешности ДУС, для которых применяется, для определенности, модель центрированного белого шума заданной интенсивности.

  Замечание. Знак минус использован для согласования уравнений ошибок БИНС с уравнениями ошибок платформенных ИНС [9].

- модель погрешностей ньютонометров

$$\begin{aligned} f'_z &= f_z + \Delta f_z, \\ \Delta f_z &= \Delta f_z^0 + \Delta f_z^s, \end{aligned} \tag{23}$$

  где $\Delta f_z^0 = (\Delta f_{z_1}^0, \Delta f_{z_2}^0, \Delta f_{z_3}^0)$ – смещения нулей ньютонометров; $\Delta f_z^s = (\Delta f_{z_1}^s, \Delta f_{z_2}^s, \Delta f_{z_3}^s)$ – случайные составляющая погрешностей нютонометров – процессы типа белого шума с заданными интенсивностями.

3.1.3 Уравнения ошибок БИНС

В теории инерциальной навигации при выводе уравнений ошибок БИНС и их интерпретации используются представление о двух точках: идеальной (реальной) M и модельной M' – числовом образе точки M (решения БИНС) и пяти трехгранниках:

- географическом (опорном) $Mx^0(Ox^0)$;

- приборном $Mz(Oz)$;
- модельном $M'y(Oy)$ – числовом образе Mz приборного трехгранника;
- квазимодельном $M'y^x(Oy^x)$ – числовом образе Mx^0;
- квазиприборном $Mz^x(Oz^x)$ – так называемой виртуальной платформе, числовом образе приборного трехгранника в географических осях.

Трехранники $\{Oz, Oy\}$ и $\{Ox^0, Oy^x, Oz^x\}$ близки друг к другу и их взаимная ориентация может быть охарактеризована соответствующими векторами малых поворотов.

Взаимная ориентация между приведенными трехгранниками может быть описана в виде следующей диаграммы связей:

$$
\begin{tikzcd}
 & Ox^0 & \\
Oy^x \arrow[ur, "\gamma^0"] & & Oz^x \arrow[ul, "\alpha^0"'] \arrow[ll, "\beta_x"'] \\
Oy \arrow[u, "D_{yy^x}"] & & Oz \arrow[u, "D_{yy^x}"'] \arrow[ll, "\beta_y"']
\end{tikzcd}
,
$$

где

- вектор малого поворота $\alpha^0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top$ – определяет матрицу ориентации квазиприборного трехгранника Mz^x относительно опорного Mx^0:

$$A_{z^x x^0} = E + \widehat{\alpha}^0, \qquad Ox^0 \quad \overset{\alpha^0}{\longrightarrow} \quad Oz^x;$$

- вектор малого поворота $\beta_x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$ – характеризует матрицу ориентации квазиприборного трехгранника Mz^x относительно квазимодельного $M'y^x$:

$$A_{z^x y^x} = E + \widehat{\beta}_x, \qquad Oz^x \quad \overset{\beta_x}{\longrightarrow} \quad Oy^x;$$

- вектор малого поворота $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0)^\top$ – характеризует матрицу ориентации квазимодельного $M'y^x$ относительно опорного Mx^0:

$$A_{y^x x^0} = E + \widehat{\gamma}^0, \qquad Oy^x \quad \overset{\gamma^0}{\longrightarrow} \quad Ox^0,$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi \\ \Delta\lambda \cos\varphi' \\ \Delta\lambda \sin\varphi' \end{pmatrix};$$

- D_{yy^x} – матрица ориентации модельного трехгранника $M'y$ относительно квазимодельного географического $M'y^x$;

- вектор малого поворота $\beta_y = (\beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3})^\top$ – характеризует матрицу ориентации приборного трехгранника Mz относительно модельного $M'y$:

$$A_{zy} = E + \widehat{\beta}_y, \qquad Oz \quad \xrightarrow{\beta_y} \quad Oy,$$

  причем связь между векторами β_y, β_x определяется соотношением:

$$\beta_y = D_{yy^x}\beta_x.$$

Здесь α_1, α_2 – являются ошибками построения приборной вертикали; γ^0 – угловые ошибки, характеризуют позиционные ошибки, вызванные несовпадением географических трехгранников в реальной M и модельной M' точках; $\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h$ – ошибки вычисления географических координат; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ – азимутальные ошибки ориентации.

Имеет место соотношение:

$$\alpha^0 \;\; = \;\; \beta_x + \gamma^0. \tag{24}$$

Замечание. Третья компонента α_3 вектора α^0 ни в каких коррекционных моделях ИНС/БИНС появиться не может [9].

Вектор состояния БИНС X и модельный вектор X' включают географические координаты, вектор линейной скорости и углы ориентации:

$$\begin{aligned} X \;\; &= \;\; (\varphi, \lambda, h, V_{x_1^0}, V_{x_2^0}, V_{x_3^0}, \psi, \gamma, \vartheta)^\top, \\ X' \;\; &= \;\; (\varphi', \lambda', h', V'_{y_1^x}, V'_{y_2^x}, V'_{y_3^x}, \psi', \gamma', \vartheta')^\top. \end{aligned}$$

Тогда вектор ошибок БИНС $x^{(i)} = X' - X$ состоит из следующих компонент:

$$x^{(i)} \;\; = \;\; (\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h, \Delta V_{y^x}^\top, \Delta\psi, \Delta\gamma, \Delta\vartheta)^\top,$$

где $\Delta V_{y^x} = V'_{y^x} - V_{x^0}|_{y^x}$ — вектор полной ошибки линейной относительной скорости в модельных осях Oy^x, $\Delta\psi, \Delta\gamma, \Delta\vartheta$ – ошибки определения углов ориентации.

Здесь и далее индексом $^{(i)}$ будет обозначаться отношение вектора к автономному алгоритму БИНС.

Вектор состояния уравнений ошибок БИНС $\xi^{(i)}$ включает в себя полные ошибки определения местоположения, динамические ошибки линейной скорости, кинематические ошибки ориентации квазимодельного трехгранника и инструментальные погрешности инерциальных датчиков:

$$\xi^{(i)} = \left(\Delta y^\top, \delta V_{y^x}^\top, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \nu_z^{0\top}, \Delta f_z^{0\top}\right)^\top, \tag{25}$$

где Δy – вектор полных ошибок определения местоположения в осях трехгранника $M'y^x$ (ошибки в восточном, северном, вертикальном направлениях); δV_{y^x} – вектор динамических ошибок определения составляющих относительной линейной скорости; α_1, α_2 –

угловые ошибки построения приборной вертикали; β_3 – азимутальная кинематическая ошибка; $\nu_z^0, \Delta f_z^0$ – векторы погрешностей ДУС и ньютонометров соответственно.

Взаимосвязь между векторами $x^{(i)}$ и $\xi^{(i)}$ представима в следующем векторном виде:

$$x^{(i)} = X' - X = C'\xi^{(i)}, \tag{26}$$

где матрица C' строится на основе покомпонентной связи между этими векторами [9] :

$$\begin{aligned}
\Delta V_{y^x} &= \delta V_{y^x} + \widehat{\beta}_x V'_{y^x}, \\
\Delta\varphi &= \frac{\Delta y_2}{R_N}, \quad \Delta\lambda = \frac{\Delta y_1}{R_E\cos\varphi'}, \quad \Delta h = \Delta y_3, \\
\Delta\gamma &= \frac{1}{\cos\vartheta'}(\alpha_1\sin\psi' - \alpha_2\cos\psi'), \\
\Delta\vartheta &= -\alpha_1\cos\psi' - \alpha_2\sin\psi', \\
\Delta\psi &= -\beta_3 - \Delta\lambda\sin\varphi' - \Delta\gamma\sin\vartheta'.
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь и далее будут рассматриваться уравнения ошибок именно для вектора $\xi^{(i)}$.

В вектор ξ в части малых углов ошибок ориентации включены компоненты α_1, α_2 и не включены компоненты кинематической ошибки ориентации β_1, β_2. Формулы, выражающие эти составляющие через компоненты вектора состояния уравнений ошибок, с учетом (24), имеют следующий вид:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \frac{\Delta y_2}{R_N}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\Delta y_1}{R_E}.$$

Уравнения ошибок БИНС, соответствующие приведенному вектору ошибок, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{y} &= \widehat{\Omega}'_{y^x}\Delta y + \delta V_{y^x} + \widehat{\beta}_x V'_{y^x}, \\
\delta\dot{V}_{y^x} &= \left(\widehat{\Omega}'_{y^x} + 2\widehat{u}_{y^x}\right)\delta V_{y^x} + \left(\widehat{u}_{y^x}\widehat{\beta}_x - \widehat{\beta}_x\widehat{u}_{y^x} - \widehat{\nu}_{z^x}\right)V'_{y^x} + \Delta f_{z^x} + \left(-\alpha_2 g, \alpha_1 g, 2\omega_0^2\Delta h\right)^T, \\
\dot{\alpha}_1 &= -\frac{\delta V_{y_2^x}}{R_N} + u_{y_3^x}\beta_2 - u_{y_2^x}\beta_3 + \nu_{z_1^x}, \\
\dot{\alpha}_2 &= \frac{\delta V_{y_1^x}}{R_E} - u_{y_3^x}\beta_1 + u_{y_1^x}\beta_3 + \nu_{z_2^x}, \\
\dot{\beta}_3 &= \left(\Omega'_{y_2^x} + u_{y_2^x}\right)\left(\alpha_1 + \frac{\Delta y_2}{R_N}\right) - \left(\Omega'_{y_1^x} + u_{y_1^x}\right)\left(\alpha_2 - \frac{\Delta y_1}{R_E}\right) + \nu_{z_3^x}, \\
\dot{\nu}_z^0 &= 0, \\
\Delta\dot{f}_z^0 &= 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

где $\nu_{z^x} = D^\top_{yy^x}\nu_z$, $\Delta f_{z^x} = D^\top_{yy^x}\Delta f_z$ векторы дрейфов ДУС и погрешностей ньютонометров, соответственно, в проекциях на оси квазиприборного трехгранника Mz^x; g – номинальное значение ускорения силы тяжести; ω_0 – частота Шулера; Δh – ошибка высоты.

3.2 Математические модели одометрического счисления

3.2.1 Реалистичная модель одометра

В предыдущей главе была описана модель показаний датчика пройденного пути (15) в идеализированных предположениях. Реалистичная модель измерений одометра s'' предполагает учет следующих возможных факторов (реальное измерение одометра будем обозначать двумя штрихами $''$):

1. относительная погрешность масштабного коэффициента κ, переводящего первичное измерение в пройденное расстояние:

   $$\frac{K''}{K} = 1 + \kappa,$$

   где K – номинальное значение масштабного коэффициента, K'' – используемое значение для вычислений.

   Предполагаем, что в указанной модели ошибка κ не изменяется со временем;

2. наличие зоны нечувствительности измерения, обусловленная упомянутой целочисленностью первичной измерительной информации.

   Рассмотрим интервал времени $[t_{i-1}, t_i]$ со значениями счетчика N_{i-1}, N_i. В этом случае можно сказать, что измеряемое приращение пути $\Delta s_i''$ есть сумма истинного приращение пути Δs_i, ошибки, вызванной погрешностью масштаба κ, и случайной погрешности Δs_i^s:

   $$\Delta s_i'' = K''(N_i - N_{i-1}) + \Delta s_i^s = \Delta s_i + \kappa \Delta s_i'' + \Delta s_i^s.$$

   Наличие случайной составляющей вызвано тем, что неподвижная точка колеса, контактирующая с дорогой, случайным образом может лежать на дуге парциального угла поворота колеса. Иными словами это ошибка синхронизации снимаемых данных с инерциальных датчиков и с одометра. Для параметра Δs_i^s можно использовать, например, модель случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, K]$;

3. погрешности, зависящие от продольной скорости и продольного ускорения, погрешности, обусловленные наличием ненулевого угла сноса в процессе поворота объекта;

4. "измерительная" ось одометра и продольная приборная ось БИНС Mz_2 могут быть несоосны.

   Данная ошибка может быть описана при помощи введения вектора малого поворота $\varkappa_z = (\varkappa_{z_1}, \varkappa_{z_2}, \varkappa_{z_3})^\top$, характеризующего взаимную ориентацию приборного трехгранника БИНС Mz и связанного с корпусом объекта системы координат Ms:

   $$l_z = (E + \widehat{\varkappa}_z) l_s, \tag{29}$$

   где l_z, l_s – один и тот же вектор l.

   Считаем, что ошибка $\varkappa_z$ также не изменяется со временем.

5. приведенный центр БИНС точка M и точка контакта колеса с поверхностью дороги, пройденный путь которой собственно и измеряет одометр, не совпадают.

Для простоты последующего описания ограничимся рассмотрением погрешности масштабного коэффициента κ, наличием зоны нечувствительности, несоосностью продольной оси объекта и продольной приборной оси БИНС, характеризуемую компонентами вектора малого поворота $\varkappa_z$.

3.2.2 Модели измерения одометра

С учетом предположений, в которых была сформирована векторная интерпретация приращения пройденного пути по одометру (16) в идеализированном случае, сформируем аналогичное векторное представление показаний одометра для описанной и принятой выше реалистичной модели:

$$\Delta s_s'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s_i'' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Аналогичная (17) интерпретация для измеренной локальной продольной скорости:

$$V_s'' = \begin{pmatrix} 0 \\ V_i'' \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_i'' = \frac{\Delta s_i''}{\Delta t_i}, \tag{31}$$

Соответственно имеем:

1. Модель векторного измерения приращения координат, когда одометр рассматривается как датчик локального перемещения объекта в связанной системе координат Ms:

$$\begin{aligned} \Delta s_s'' &= \Delta s_s + \kappa \Delta s_s'' + \Delta s_s^{d^s} = \\ &= \Delta s_z - \widehat{\varkappa}_z \Delta s_s'' + \kappa \Delta s_s'' + \Delta s_s^{d^s} = \\ &= \Delta s_z + \Delta s_i'' \begin{pmatrix} -\varkappa_{z_3} \\ \kappa \\ \varkappa_{z_1} \end{pmatrix} + \Delta s_s^{d^s}, \end{aligned} \tag{32}$$

   где Δs_s, Δs_z – векторы истинного приращения локальных координат в проекции на связанные Ms и приборные Mz оси соответственно, $\Delta s_s^{d^s}$ – вектор, составленный из случайной составляющей модели погрешности одометра $\Delta s_i^{d^s}$:

$$\Delta s_s^{d^s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s_i^{d^s} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

2. Модель векторного скоростного измерения, когда одометр рассматривается как датчик продольной скорости движения объекта в связанной системе координат

Ms:

$$
\begin{aligned}
V_s'' = &\quad V_s + \kappa V_s'' + \Delta V_s^{d^s} &= \\
= &\quad V_z - \widehat{\varkappa}_z V_s'' + \kappa V_s'' + \Delta V_s^{d^s} &= \\
= &\quad V_z + V_i'' \begin{pmatrix} -\varkappa_{z_3} \\ \kappa \\ \varkappa_{z_1} \end{pmatrix} + \Delta V_s^{d^s},
\end{aligned} \tag{34}
$$

где V_s, V_z – векторы истинной относительной линейной скорости объекта в проекции на связанную Ms и приборную Mz системы координат, соответственно, $V_s^{d^s}$ – вектор, соответствующий случайной составляющей показаний одометра:

$$
\Delta V_s^{d^s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta V_i^{d^s} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta V_i^{d^s} = \frac{\Delta s_i^{d^s}}{\Delta t}. \tag{35}
$$

Далее в (32) и в (34) нижний индекс $_i$ при скалярных величинах приращения пройденного пути $\Delta s_i''$ и продольной скорости по одометру V_i'' будем опускать.

3.2.3 Вторая модельная точка M'', дополнительные модельный одометрический $M''y^d$ (Oy^d), квазиприборный одометрический $Mz^d\,(Oz^d)$ трехгранники

Как уже отмечалось, при исследовании задач интеграции БИНС с иными источниками навигационной информации, построение соответствующих алгоритмов комплексной обработки используются представления о

- двух точках: реальной M и модельной M';
- пяти трехгранниках: идеальном (опорном) $Mx^0(Ox^0)$, приборном $Mz(Oz)$, модельном трехгранниках $M'y$ (Oy), а также о квазиприборном Mz^x (Oz^x) и квазимодельном $M'y^x$ (Oy^x).

Описание взаимосвязи указанных механических объектов, отражающие, по сути, взаимосвязь ошибок БИНС, позволяет корректно описывать соответствующие интеграционные модели.

В рассматриваемой задаче интеграции БИНС и одометра позиционное решение по схеме интеграции **«одометр+БИНС»** , описанной в пункте 2.3, пополняют выше приведенные представления, появляются:

- вторая модельная точка M'' (одометрическая),
- второй модельный географический одометрический трехгранник $M''y^d\,(Oy^d)$.
- кроме того, в схеме интеграции **«одометр+БИНС» + модифицированный слабосвязанный вариант** появляется второй квазиприборный одометрический трехгранник $Mz^d\,(Oz^d)$, поскольку в алгоритмах одометрического счисления используется вторая модельная (одометрическая) матрица ориентации — матрица D_{yy^d}.

Дальнейшее изложение построено таким образом:

- Приводится описание математических моделей одометрического кинематического счисления для схемы **«одометр+БИНС»** в двух вариантах: слабосвязанный вариант и модифицированный слабосвязанный вариант.

- Выводятся соответствующие уравнения ошибок навигационного счисления, включая сводные модели уравнений ошибок системы «**БИНС+одометр**».

- Далее выводятся сводные модели уравнений корректирующих измерений при помощи позиционной информации, доставляемой одометрическим счислением, внешней информации о координатах реперных точек.

Тем самым приводится описание всех необходимых коррекционных моделей для случая, когда задача интеграции БИНС-одометр решается в варианте оценивания, то есть по схеме **«БИНС+одометр» + тесно связанные системы**.

3.3 Модели схемы БИНС+одометр, слабосвязанный вариант

3.3.1 Модельные уравнения одометрического счисления.

По приращению пройденного пути для каждого такта съема показаний одометра (32) производится кинематическое счисление координат аналогично (19). Результат вычисления - географические координаты $\varphi''_i, \lambda''_i, h''_i$, определяющие вторую модельную точку M''.

В этом варианте БИНС работает в автономном (не корректируемом) режиме (20), в котором вычисляется модельная матрица ориентации $D_{yy^x} = D_{yy^x}(\psi', \vartheta', \gamma')$, используемая для перепроектировки "векторного" измерения пройденного пути одометром (32):

$$\begin{aligned}
\Delta s''_{y^x} &= \begin{pmatrix} \Delta s''_{y^x_1} \\ \Delta s''_{y^x_2} \\ \Delta s''_{y^x_3} \end{pmatrix} = D^{\top}_{yy^x} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s''_i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda''_i &= \lambda''_{i-1} + \frac{\Delta s''_{y^x_1}}{R_E \cos\varphi''_{i-1}}, \\
\varphi''_i &= \varphi''_{i-1} + \frac{\Delta s''_{y^x_2}}{R_N}, \\
h''_i &= h''_{i-1} + \Delta s''_{y^x_3},
\end{aligned} \tag{36}$$

где $\varphi''_0 = \varphi(t_0), \lambda''_0 = \lambda(t_0), h''_0 = h(t_0)$ – координаты стартовой точки.

3.3.2 Диаграммы соотношений координатных трехгранников, векторы малых поворотов

В этом пункте описывается диаграмма связей между описанными системами координат, соответствующих варианту интеграции в схеме «БИНС+одометр» для варианта слабосвязанной схемы интеграции с одометром (далее, для краткости, «БИНС+одометр» в слабосвязанном варианте):

$$\begin{tikzcd}
& Oy^d \arrow[d, "\gamma^d"] & \\
& Ox^0 & \\
Oy^x \arrow[uur, "\delta\gamma^d"] \arrow[ur, "\gamma^0"] & & Oz^x \arrow[uul, "\beta_{z^d}"'] \arrow[ul, "\alpha^0"'] \arrow[ll, "\beta_x"] \\
Oy \arrow[u, "D_{yy^x}"] & & Oz \arrow[u, "D_{yy^x}"'] \arrow[ll, "\beta_y"']
\end{tikzcd}$$

где

- вектор малого поворота γ^d – характеризует матрицу ориентации модельного географического одометрического $M''y^d$ относительно опорного Mx^0:

$$A_{y^d x^0} = E + \widehat{\gamma}^d, \qquad Ox^0 \xrightarrow{\gamma^d} Oy^d,$$

- вектор малого поворота $\beta_{z^d} = \alpha^0 - \gamma^d$ – характеризует матрицу ориентации квазиприборного трехгранника Oz^x относительно модельного географического одометрического Oy^d:

$$A_{z^x y^d} = E + \widehat{\beta}_{z^d}, \qquad Oz^x \xrightarrow{\beta_{z^d}} Oy^d;$$

- вектор малого поворота $\delta\gamma^d$ – характеризует матрицу относительной ориентации модельного географического Oy^x относительно модельного географического одометрического трехгранника Oy^d:

$$A_{y^x y^d} = E + \widehat{\delta\gamma^d}, \qquad Oy^d \xrightarrow{\delta\gamma^d} Oy^x.$$

Вектор $\delta\gamma^d$ характеризует позиционную ошибку модельной точки БИНС M' относительно модельной одометрической точки M''. Можно показать, что в линейном приближении:

$$\delta\gamma^d = \begin{pmatrix} -\delta\varphi^d \\ \delta\lambda^d \cos\varphi' \\ \delta\lambda^d \sin\varphi' \end{pmatrix}, \quad \delta\varphi^d = \varphi' - \varphi'',\ \delta\lambda^d = \lambda' - \lambda''. \tag{37}$$

Вектор γ^d характеризует полную позиционную ошибку координат модельной одометрической точки M'':

$$\gamma^d = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi^d \\ \Delta\lambda^d \cos\varphi'' \\ \Delta\lambda^d \sin\varphi'' \end{pmatrix}, \quad \Delta\varphi^d = \varphi'' - \varphi,\ \Delta\lambda^d = \lambda'' - \lambda. \tag{38}$$

3.3.3 Уравнения ошибок одометрического счисления

В этом пункте приводится вывод уравнений ошибок одометрического счисления для схемы «одометр+БИНС» в слабосвязанном варианте (2.3).

Уравнения движения точек M'' и M в осях одометрического трехгранника Oy^d таковы:

$$\begin{aligned} \dot{y}'' &= \widehat{\Omega}'' y'' + V''_{y^x}, \\ \dot{y}^d &= \widehat{\Omega}'' y^d + V_{y^d}. \end{aligned}$$

Здесь

- y'' – радиус-вектор точки M'' в осях одометрического квазимодельного трехгранника Oy^d;
- y^d – радиус-вектор истинной точки M в осях Oy^d;
- V_{y^d} – вектор относительной линейной скорости точки M в осях Oy^d;
- V''_{y^x} – вектор относительной линейной скорости точки M'', полученный проектированием "скоростного" измерения одометра (34) на оси Oy^x с помощью матрицы D_{yy^x};
- $\Omega'' = \Omega''(V''_{y^x})$ – вектор относительной угловой скорости Oy^d.

Уравнения в вариациях имеют вид:

$$\Delta\dot{y}^d = \widehat{\Omega}''\Delta y^d + \Delta V^d_{y^x}, \tag{39}$$

где Δy^d – полная позиционная ошибка одометрического счисления, $\Delta V^d_{y^x}$ – полная одометрическая скоростная ошибка:

$$\begin{aligned} \Delta y^d &= y'' - y^d, \\ \Delta V^d_{y^x} &= V''_{y^x} - V_{y^d}. \end{aligned}$$

Опишем представление вектора $\Delta V^d_{y^x}$ для каждого из рассматриваемых вариантов интеграции в схеме «одометр+БИНС».

В слабосвязанном варианте вектор скорости V''_{y^x} представляется в следующем виде:

$$V''_{y^x} = D^\top_{yy^x} V''_s = D_{y^x x^0} D_{x^0 z} D_{zy} V''_s = \left(E + \widehat{\gamma}^0\right) D_{x^0 z}(E + \widehat{\beta}_y) V''_s.$$

Раскрывая скобки, с учетом выражения (34) для V''_s и вспомогательного соотношения

$$D_{y^x y}\widehat{l}_z V''_s = -D_{y^x y}\widehat{V}''_s l_z = -D_{y^x y}\widehat{V}''_s D^\top_{y^x y} l_{z^x} \simeq -\widehat{V_{y^x}}'' l_{z^x} = \widehat{l}_{z^x} V''_{y^x},$$

справедливого в силу ортогональности матрицы ориентации $D_{y^x y}$, в линейном приближении, получим соотношение:

$$V''_{y^x} = V_{x^0} + \widehat{\alpha}^0 V''_{y^x} - D_{y^x y}\widehat{\varkappa}_z V''_s + \kappa V''_{y^x} + \Delta V^{d^s}_{y^x}. \tag{40}$$

где

$$\Delta V^{d^s}_{z^x} = D_{y^x y}\Delta V^{d^s}_z.$$

Отметим, что слагаемое $D_{y^x y}\widehat{\varkappa}_z V_s''$ здесь и далее в линейном приближении зависит лишь от компонент $\varkappa_{z_1}, \varkappa_{z_3}$ в силу выражения (31) для скорости V_s''. Это позволяет не рассматривать $\varkappa_{z_2}$ в качестве компоненты вектора состояния уравнений ошибок.

Рассмотрим вектор истинной линейной скорости $V_{y^d} = D_{y^d x^0} V_{x^0}$ в проекции на одометрический квазипроборный трехгранник My^d:

$$V_{y^d} \;=\; B_{y^d x^0} V_{x^0} \;=\; B_{y^d y^x} B_{y^x x^0} V_{x^0} \;=\; (E - \widehat{\delta\gamma^d})(E + \widehat{\gamma}^0) V_{x^0}.$$

В линейном приближении:

$$V_{y^d} \;=\; V_{x^0} + (\widehat{\gamma}^0 - \widehat{\delta\gamma^d}) V_{x^0}, \tag{41}$$

для вариации $\Delta V_{y^x} = V''_{y^x} - V_{y^d}$ будет справедливо:

$$\Delta V^d_{y^x} \;=\; \left(\widehat{\beta}_x + \widehat{\delta\gamma^d}\right) V''_{y^x} - D_{y^x y}\widehat{\varkappa}_z V_s'' + \kappa V''_{y^x} + \Delta V^{d^s}_{y^x}.$$

Тогда уравнение ошибок (39) одометрического счисления в случае слабосвязанного варианта запишется в виде:

$$\Delta\dot{y}^d \;=\; \widehat{\Omega}'' \Delta y^d + \left(\widehat{\beta}_x + \widehat{\delta\gamma^d}\right) V''_{y^x} - D_{y^x y}\widehat{\varkappa}_z V_s'' + \kappa V''_{y^x} + \Delta V^{d^s}_{y^x}. \tag{42}$$

Уравнение (42) дополняется формирующими уравнениями для ошибок масштаба κ и погрешности углов установки БИНС на корпусе $\varkappa_{z1}, \varkappa_{z3}$:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= 0, \\ \dot{\varkappa}_{z1} &= 0, \\ \dot{\varkappa}_{z3} &= 0. \end{aligned}$$

3.3.4 Вектор состояния сводной системы уравнений ошибок

После того, как описаны уравнения ошибок БИНС (28) и одометрического счисления (42) по схеме «одометр+БИНС» в слабосвязанном варианте, формируется полный набор переменных вектора состояния уравнений ошибок для схемы интеграции «БИНС+одометр» в слабосвязанном вариенте:

$$\xi \;=\; (\xi^{(i)^\top}, \xi^{(d)^\top})^\top, \tag{43}$$

где

1. $\xi^{(i)}$ — вектор состояния уравнений ошибок БИНС, включает упомянутые ранее полные позиционные ошибки БИНС Δy, динамические скоростные ошибки δV_{y^x}, ошибки построения приборной вертикали α_1, α_2, азимутальную кинематическую ошибку β_3, параметры моделей гироскопического дрейфа ν^0_z и погрешностей ньтонометров Δf^0_z:

$$\xi^{(i)} \;=\; \left(\Delta y^\top, \delta V^\top_{y^x}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \nu^{0\top}_z, \Delta f^{0\top}_z\right)^\top; \tag{44}$$

2. $\xi^{(d)}$ — вектор состояния уравнений ошибок в одометрическом счислении, состоит из полных позиционных ошибок одометрического счисления Δy^d, погрешности масштаба одометра κ и малых углов ошибки установки БИНС $\varkappa_{z_1}, \varkappa_{z_3}$ относительно оси одометра:

$$\xi^{(d)} \;=\; \left(\Delta {y^d}^\top, \kappa, \varkappa_{z_1}, \varkappa_{z_3}\right)^\top. \tag{45}$$

Вектор состояния одометрического счисления X'' и истинный вектор состояния X в рассматриваемом варианте интеграции интеграции принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= (\varphi, \lambda, h)^\top, \\ X'' &= (\varphi'', \lambda'', h'')^\top. \end{aligned}$$

Вектор $x^{(d)}$ ошибок вектора состояния одометрического счисления X'':

$$\begin{aligned} x^{(d)} &= (\Delta\varphi^d, \Delta\lambda^d, \Delta h^d)^\top, \\ x^{(d)} &= X'' - X = C''\xi, \end{aligned}$$

где матрица C'' формируется на основе выражений для позиционных географических ошибок одометрического счисления:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^d &= \frac{\Delta y_2^d}{R_N}, \\ \Delta\lambda^d &= \frac{\Delta y_1^d}{R_E \cos\varphi^d}, \\ \Delta h^d &= \Delta y_3^d; \end{aligned} \tag{46}$$

Соответствующий вектору состояния уравнений ошибок (43) модельный X^* вектор состояния совокупной системы БИНС и одометра представляется в виде:

$$X^* \;=\; ({X'}^\top, {X''}^\top)^\top.$$

Вектор ошибок совокупной системы:

$$x \;=\; (x^{(i)\top}, x^{(d)\top})^\top.$$

Взаимосвязь между векторами x и ξ представима в следующем виде:

$$x \;=\; X^* - X = C^*\xi, \tag{47}$$

где матрица C^* - комбинация матриц C' (27) и C'' (46).

3.4 БИНС+одометр в модифицированном слабосвязанном варианте

Отличие этого варианта интеграции в схеме «БИНС+одометр» от слабосвязанного заключается в том, что в качестве матрицы для перепроектировки модельного вектора приращения пройденного пути по одометру (32) используется матрица D_{yy^d} ориентации модельного трехгранника $M'y$ относительно квазимодельного одометрического $M''y^d$.

3.4.1 Модельные уравнения одометрического счисления.

Система уравнений кинематического счисления координат по приращениям одометра для этого варианта имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta s''_{y^d} &= \begin{pmatrix} \Delta s''_{y_1^d} \\ \Delta s''_{y_2^d} \\ \Delta s''_{y_3^d} \end{pmatrix} = D^\top_{yy^d} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s''_i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda''_i &= \lambda''_{i-1} + \frac{\Delta s''_{y_1^d}}{R_E \cos\varphi''_{i-1}}, \\
\varphi''_i &= \varphi''_{i-1} + \frac{\Delta s''_{y_2^d}}{R_N}, \\
h''_i &= h''_{i-1} + \Delta s''_{y_3^d},
\end{aligned} \tag{48}$$

где матрица D_{yy^d} может быть вычислена по формуле:

$$\begin{aligned}
D_{yy^d} &= D_{yy^x} B^\top_{\eta y^x} B_{\eta y^d}, \\
B_{\eta y^d} &= B_{\eta y^d}(\varphi''_{i-1}, \lambda''_{i-1}, h''_{i-1}).
\end{aligned} \tag{49}$$

Матрице D_{yy^d} соответствуют углы ориентации $\psi'', \gamma'', \vartheta''$. Они связаны с углами ориентации $\psi', \gamma', \vartheta'$, вычисляемыми БИНС, следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\psi'' &= \psi' - \delta\psi^d, \\
\gamma'' &= \gamma' - \delta\gamma^d, \\
\vartheta'' &= \vartheta' - \delta\vartheta^d,
\end{aligned}$$

где поправки $\delta\psi^d, \delta\gamma^d, \delta\vartheta^d$ к автономным углам БИНС вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\delta\vartheta^d &= \delta\varphi^d \cos\psi' + \delta\lambda^d \cos\varphi' \sin\psi', \\
\delta\gamma^d &= \frac{1}{\cos\vartheta'}(\delta\varphi^d \sin\psi' - \delta\lambda^d \cos\varphi' \cos\psi'), \\
\delta\psi^d &= \delta\lambda^d \sin\varphi' + \delta\gamma^d \sin\vartheta',
\end{aligned} \tag{50}$$

где $\delta\varphi^d$, $\delta\lambda^d$ – позиционные ошибки координат одометрической модельной точки M'' относительно модельной точки БИНС M':

$$\begin{aligned}
\delta\varphi^d &= \varphi' - \varphi'', \\
\delta\lambda^d &= \gamma' - \gamma''.
\end{aligned}$$

Модифицированный вариант интеграции БИНС и одометра представляется точнее варианта слабосвязанных систем, поскольку ошибки одометрического счисления координат могут быть существенно меньше позиционных ошибок БИНС.

3.4.2 Диаграммы соотношений координатных трехгранников

В этом пункте описывается диаграмма связей между системами координат, соответствующих варианту интеграции в схеме «БИНС+одометр» в модифицированном слабосвязанном варианте. Набор систем координат в этом случае относительно слабосвязанного варианта пополняется квазиприборным одометрическим трехгранником Oz^d. Диаграмма соотношений между системами координат:

$$
\begin{tikzcd}
 & Oy^x \arrow[dd, "\delta\gamma^d"'] \arrow[dr, "\gamma^0"] & & Oz^x \arrow[ll, "\beta_x"'] \arrow[dl, "\alpha^0"'] \arrow[dd, "\delta\gamma^d"] & \\
Oy \arrow[ur, "D_{yy^x}"] \arrow[dr, "D_{yy^d}"'] & & Ox^0 & & Oz \arrow[ul, "D_{yy^x}"'] \arrow[dl, "D_{yy^d}"] \\
 & Oy^d \arrow[ur, "\gamma^d"'] & & Oz^d \arrow[ll, "\beta_x"] \arrow[ul, "\alpha_{z^d}"] &
\end{tikzcd}
$$

Здесь к углам малых поворотов, описанных в пункте (3.3.2) для слабосвязанного варианта, добавляется вектор малого поворота $\alpha_{z^d} = \beta_x + \gamma^d$, характеризующий матрицу ориентации квазиприборного одометрического трехгранника Oz^d относительно опорного Ox^0:

$$A_{z^d x^0} = E + \widehat{\alpha}_{z^d}, \qquad Ox^0 \quad \xrightarrow{\alpha_{z^d}} \quad Oz^d.$$

3.4.3 Уравнения ошибок одометрического счисления

В этом пункте приводится вывод уравнений ошибок одометрического счисления для рассматриваемой схемы 1б) пункта 2.3.

Уравнения движения точек M'' и M в осях одометрического трехгранника Oy^d:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}'' &= \widehat{\Omega}'' y'' + V''_{y^d}, \\
\dot{y}^d &= \widehat{\Omega}'' y^d + V_{y^d}.
\end{aligned}
$$

Здесь

- y'' – радиус-вектор точки M'' в осях одометрического квазимодельного трехгранника Oy^d;
- y^d – радиус-вектор истинной точки M в осях Oy^d;
- V_{y^d} – вектор относительной линейной скорости точки M в осях Oy^d;
- V''_{y^d} – вектор относительной линейной скорости точки M'', полученный проекцией "скоростного" измерения одометра (34) на оси Oy^d с помощью матрицы D_{yy^d};
- $\Omega'' = \Omega''(V''_{y^d})$ – вектор относительной угловой скорости Oy^d.

Уравнения в вариациях:

$$\Delta\dot{y}^d = \widehat{\Omega}'' \Delta y^d + \Delta V^d_{y^d}, \tag{51}$$

где Δy^d – полная позиционная ошибка одометрического счисления, $\Delta V^d_{y^d}$ – полная одометрическая скоростная ошибка для модифицированного слабосвязанного варианта:

$$\begin{aligned}\Delta y^d &= y'' - y^d,\\ \Delta V^d_{y^d} &= V''_{y^d} - V_{y^d}.\end{aligned}$$

В рассматриваемом варианте интеграции вектор скорости V''_{y^d} в проекции на одометрические квазимодельные оси представляется в следующем виде:

$$V''_{y^d} = D^\top_{yy^d} V''_s = D_{y^d x^0} D_{x^0 z} D_{zy} V''_s = \left(E + \widehat{\gamma}^d\right) D_{x^0 z}(E + \widehat{\beta}_y) V''_s.$$

Аналогичными предположениями в линейном приближении получим соотношение:

$$V''_{y^d} = V_{x^0} + \widehat{\alpha}_{z^d} V''_{y^d} - D_{y^d y} \widehat{\varkappa}_z V''_s + \kappa V''_{y^d} + \Delta V^{d^s}_{y^d}. \tag{52}$$

где

$$\Delta V^{d^s}_{z^d} = D_{y^d y} \Delta V^{d^s}_z.$$

Выражение для вектора истинной линейной скорости V_{y^d} остается прежним (41).

Для вариации $\Delta V^d_{y^d} = V''_{y^d} - V_{y^d}$ будет справедливо:

$$\Delta V^d_{y^d} = \widehat{\beta}_x V''_{y^d} - D_{y^d y} \widehat{\varkappa}_z V''_s + \kappa V''_{y^d} + \Delta V^{d^s}_{y^d}.$$

Тогда уравнение ошибок (51) одометрического счисления в случае модифицированного слабосвязанного варианта представляется в следующем виде:

$$\Delta \dot{y}^d = \widehat{\Omega}'' \Delta y^d + \widehat{\beta}_x V''_{y^d} - D_{y^d y} \widehat{\varkappa}_z V''_s + \kappa V''_{y^d} + \Delta V^{d^s}_{y^d}. \tag{53}$$

Уравнение (53) также дополняется формирующими для ошибок масштаба κ и ошибок углов установки БИНС на корпусе $\varkappa_{z1}, \varkappa_{z3}$:

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= 0,\\ \dot{\varkappa}_{z1} &= 0,\\ \dot{\varkappa}_{z3} &= 0.\end{aligned}$$

Замечание. Отметим тот факт, что в полученных уравнениях, как в слабосвязанном варианте, так и в модифицированном слабосвязанном варианте, отсутствуют компоненты с угловой ошибкой α_3, что согласуется с замечанием, представленным в [9].

3.4.4 Вектор состояния уравнений ошибок

Полный набор переменных вектора состояния уравнений ошибок для схемы интеграции «БИНС+одометр»:

$$\xi = (\xi^{(i)^\top}, \xi^{(d)^\top})^\top,$$

где

1. $\xi^{(i)}$ — вектор ошибок БИНС, по компонентам аналогичный (44):

$$\xi^{(i)} = \left(\Delta y^\top, \delta V_{y^x}^\top, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \nu_z^{0\top}, \Delta f_z^{0\top}\right)^\top;$$

2. $\xi^{(d)}$ — вектор ошибок в одометрическом счислении, аналогичный (45):

$$\xi^{(d)} = \left(\Delta {y^d}^\top, \kappa, \varkappa_{z_1}, \varkappa_{z_3}\right)^\top.$$

Вектор X'' и истинный вектор состояния X в модифицированном слабосвязанном варианте интеграции:

$$\begin{aligned} X &= (\varphi, \lambda, h, \psi, \gamma, \vartheta)^\top, \\ X'' &= (\varphi'', \lambda'', h'', \psi'', \gamma'', \vartheta'')^\top. \end{aligned}$$

Вектор ошибок $x^{(d)}$:

$$\begin{aligned} x^{(d)} &= (\Delta\varphi^d, \Delta\lambda^d, \Delta h^d, \Delta\psi^d, \Delta\gamma^d, \Delta\vartheta^d)^\top, \\ x^{(d)} &= X'' - X = C''\xi, \end{aligned} \tag{54}$$

где матрица C'' формируется на основе выражений для позиционных географических ошибок одометрического счисления (46) и поправок к углам ориентации одометрического счисления $\Delta\varphi^d, \Delta\gamma^d, \Delta\psi^d$:

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta^d &= \Delta\varphi^d \cos\psi'' + \Delta\lambda^d \cos\varphi'' \sin\psi'', \\ \Delta\gamma^d &= \frac{1}{\cos\vartheta''}(\Delta\varphi^d \sin\psi'' - \Delta\lambda^d \cos\varphi'' \cos\psi''), \\ \Delta\psi^d &= \Delta\lambda^d \sin\varphi'' + \Delta\gamma^d \sin\vartheta'', \end{aligned} \tag{55}$$

Соответствующий вектору состояния уравнений ошибок (43) модельный X^* вектор состояния совокупной системы из БИНС и одометра:

$$X^* = (X'^\top, X''^\top)^\top.$$

Вектор ошибок совокупной системы:

$$x = (x^{(i)\top}, x^{(d)\top})^\top.$$

Взаимосвязь между векторами x и ξ:

$$x = X^* - X = C^*\xi,$$

где матрица C^* - комбинация матриц C' (27) и C'' (46).

3.5 Модели корректирующих измерений

Ниже приводится описание вариантов корректирующих измерений, соответствующих типу дополнительной информации (позиционной, скоростной, СНС), используемой для коррекции БИНС.

Коррекция при помощи позиционной информации, предоставленной одометрическим счислением

Измерения, сформированные по разностям географических координат БИНС (φ', λ', h') и одометрических координат $(\varphi'', \lambda'', h'')$, в линейном приближении имеют вид:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (\lambda' - \lambda'')R_E\cos\varphi' = (\lambda' - \lambda)R_E\cos\varphi' - (\lambda'' - \lambda)R_E\cos\varphi' &&= \Delta y_1 - \Delta y_1^d + r_1^p,\\
z_2 &= (\varphi' - \varphi'')R_N = (\varphi' - \varphi)R_N - (\varphi'' - \varphi)R_N &&= \Delta y_2 - \Delta y_2^d + r_2^p,\\
z_3 &= (h' - h'') = (h' - h) - (h'' - h) &&= \Delta y_3 - \Delta y_3^d + r_3^p,
\end{aligned}
\tag{56}
$$

где вектор шума измерений $r^p = (r_1^p, r_2^p, r_3^p)^\top$, обусловленный возможным отсутствием синхронизации информационных потоков БИНС и одометрического счисления.

В качестве характерных значений среднеквадратичных отклонений шумов r_j^p, $j = 1, 2, 3$, может использоваться минимальное возможное приращение пройденного пути по одометру. (При этом вопросы коррелированности компонент r_j^p, $q^{(d)}$ здесь не обсуждаются.)

Коррекция при использовании "скоростной" интерпретации показаний одометра

Возможно формирование скоростных корректирующих измерений по показаниям одометра. Для слабосвязанного варианта интеграции «одометр+БИНС» векторная форма выводится из разности вычисленной БИНС скорости V'_{y^x} и модели (40) вычисленной по одометру вектору скорости V''_{y^x}:

$$z = V'_{y^x} - V''_{y^x} = \delta V_{z^x} + \widehat{\varkappa}_{z^x} V''_{y^x} - \kappa V''_{y^x} - \Delta V^{d_s}_{y^x} + r. \tag{57}$$

В модифицированном слабосвязанном варианте интеграции используется модель (52) скорости V''_{y^d}:

$$z = V'_{y^x} - V''_{y^d} = \delta V_{z^x} + \widehat{\delta\gamma^d} V''_{y^d} + \widehat{\varkappa}_{z^x} V''_{y^d} - \kappa V''_{y^d} - \Delta V^{d_s}_{y^x} + r. \tag{58}$$

Для обоих вариантов корректирующих измерений вектор шума r представляется в следующем виде:

$$r = D_{y^x y}\Delta V^{d_s}_s,$$

где $\Delta V^{d_s}_s$ вектор случайной составляющей скоростного показания одометра (35).

Коррекция при помощи внешней позиционной информации

В качестве внешней позиционной информации могут служить, например, спутниковые данные $(\varphi^{\text{GPS}}, \lambda^{\text{GPS}}, h^{\text{GPS}})$ или координаты контрольных точек $(\varphi^{\text{cp}}, \lambda^{\text{cp}}, h^{\text{cp}})$. Вне зависимости от источника позиционной информации, обозначим такую внешнюю дополнительную информацию как $\varphi^{\text{ext}}, \lambda^{\text{ext}}, h^{\text{ext}}$. Тогда коррекционная модель измерений принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} z_1^{(i)} &= (\lambda' - \lambda^{\text{ext}})R_E\cos\varphi' &&= \Delta y_1 + r_1^{(i)} \\ z_2^{(i)} &= (\varphi' - \varphi^{\text{ext}})R_N &&= \Delta y_2 + r_2^{(i)} \\ z_3^{(i)} &= (h' - h^{\text{ext}}) &&= \Delta y_3 + r_3^{(i)}, \\ z_4^{(d)} &= (\lambda'' - \lambda^{\text{ext}})R_E\cos\varphi'' &&= \Delta y_1^d + r_4^{(d)} \\ z_5^{(d)} &= (\varphi'' - \varphi^{\text{ext}})R_N &&= \Delta y_2^d + r_5^{(d)} \\ z_6^{(d)} &= (h'' - h^{\text{ext}}) &&= \Delta y_3^d + r_6^{(d)}, \end{aligned} \tag{59}$$

где вектор $r = (r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, r_3^{(i)}, r_4^{(d)}, r_5^{(d)}, r_6^{(d)})^\top$ представляет случайную составляющую ошибки внешней корректирующей информации.

Таким образом, если имеется внешняя по отношению к комплексу БИНС+одометр дополнительная позиционная информация, возможна (и необходима) коррекция обоих позиционных решений: решения БИНС и одометрического счисления.

3.6 Учет относительного смещения приведенного центра БИНС и точки контакта колеса с поверхностью дороги

Напомним, что точка M есть точка приведенного центра БИНС - положение чувствительной массы пространственного ньютонометра. Обозначим через M^d точку контакта колеса с поверхностью дороги. Именно эта точка соответствует одометрическому счислению, ее перемещение (либо ее скорость) измеряет одометр.

Точки M и M^d не совпадают. Введем вектор $\overline{MM^d}$, характеризующий смещение точки M^d относительно точки M в приборных осях Mz:

$$\Delta R_z = (\Delta R_{z1}, \Delta R_{z2}, \Delta R_{z3})^T. \tag{60}$$

Здесь ΔR_{z1} – смещение точки M^d по правому борту объекта, ΔR_{z2} – смещение точки M^d по продольной оси, ΔR_{z3} – смещение точки M^d вверх. Соответственно, при формировании позиционных измерений (56) необходимо учитывать это смещение.

Для этого определим поправки к географическим координатам модельной точки M'', используя матрицу ориентации $D_{y^x y}$ модельного трехгранника Oy относительно модельного географического трехгранника Oy^x (в рамках линейных приближений можно использовать модельные объекты БИНС либо одометрического счисления). Соответственно введем

$$\Delta R_{y^x}^d = D_{y^x y}\Delta R_z = (\Delta R_E^d, \Delta R_N^d, \Delta R_{UP}^d)^T. \tag{61}$$

Здесь компоненты $\Delta R_E^d, \Delta R_N^d, \Delta R_{UP}^d$ – характеризуют смещения точки M^d относительно точки M в восточном, северном, вертикальном направлениях.

Тогда при формировании позиционных измерений (56) в качестве одометрических координат λ'', φ'', h'' следует использовать поправленные на указанные смещения координаты:

$$\lambda'' \to \lambda'' - \frac{\Delta R_E^d}{(R_E'' + h'')) \cos\varphi''}, \quad \varphi'' \to \varphi'' - \frac{\Delta R_N^d}{R_N'' + h_M''}, \quad h'' \to h'' - \Delta R_{UP}^d. \tag{62}$$

3.7 Выводы к главе

В главе описаны все необходимые коррекционные модели для схемы интеграции БИНС+одометр. А именно:

1. обоснованы схемы комплексирования БИНС и одометра с точки зрения механики корректируемых систем;

2. приведено подробное описание математических моделей кинематического счисления в рамках схемы **одометр+БИНС**;

3. приведен подробный вывод уравнений ошибок одометрического счисления схемы **одометр+БИНС** в вариантах **слабосвязанных систем** и **модифицированных слабосвязанных систем**;

4. приведены сводные модели уравнений ошибок системы **БИНС+одометр**;

5. описаны сводные модели уравнений корректирующих измерений при помощи как позиционной информацией, доставляемой одометрическим счислением, так и внешней позиционной информации;

На основе описанных моделей в следующей главе будет представлено подробное описание алгоритма решения задачи интеграции в варианте оценки и в варианте с введением обратных связей.

Глава 4

4 Схемы решения задачи коррекции, численная реализация алгоритма сглаживания для задачи постобработки

Задачу коррекции БИНС при помощи показаний одометра можно решать как в варианте оценивания вектора ошибок навигационного счисления БИНС, так и путем введения обратных корректирующих связей в навигационный алгоритм счисления БИНС. В рамках линейной теории данные подходы являются информационно эквивалентными [7].

В предыдущей главе представлен необходимый материал для задачи оценивания вектора состояния ошибок системы ξ (по схеме **«БИНС+одометр» + тесно связанные системы**): сводные модели уравнений ошибок системы **БИНС+одометр**, сводные модели уравнений корректирующих измерений.

В данной главе:

- Применительно к задаче интеграции «**БИНС+одометр**» детально описываются алгоритмы информационно эквивалентных схем решения задачи коррекции [7], [18] – варианты оценивания (схема **«БИНС+одометр» + тесно связанные системы**) и введения обратных связей (схема **«БИНС+одометр» + глубоко связанные системы**) в модельные уравнения БИНС и одометрического счисления;

- Приводится единая блок-схема соответствующих алгоритмов решения задачи интеграции БИНС и одометра для задач в реальном времени и в постобработке. При этом учитывается специфика применяемых обратных связей;

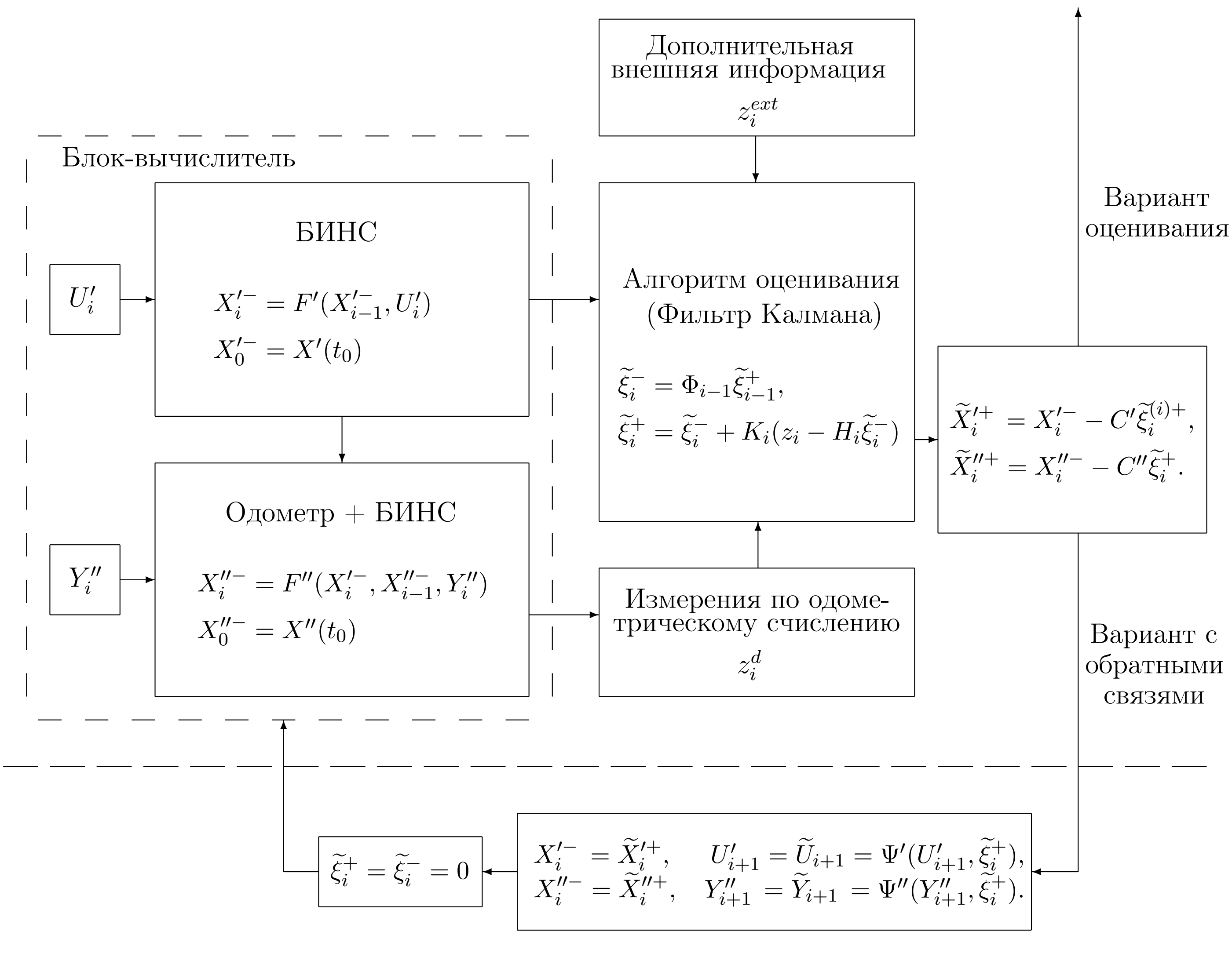
- Приводится описание алгоритмов решения задачи сглаживания, возникающей в том случае, когда допускается постобработка совокупной измерительной информации.

4.1 Блок-схема алгоритмов решения задачи коррекции БИНС при помощи одометрической инрформации

Алгоритмы решения задачи интеграции БИНС+одометр как в варианте оценивания, так и в варианте с введением обратных связей, в общем виде могут быть описаны в рамках одной блок-схемы. Вариант с введением в уравнения обратных связей определяет наличие блоков, соответствующих списыванию текущих оценок ошибок вектора состояния системы реинициализации компонент вектора состояния уравнений ошибок.

Особенность приведенного в данной работе алгоритма глубоко-связанных систем состоит во введении обратных связей по всем компонентам вектора ξ (43): по ошибкам БИНС (44), по ошибкам одометрического счисления (45).

Далее приводится схема и описание алгоритма по шагам.



Здесь:

- U'_i – основная информация инерциальной природы;
- Y''_i – информация о пройденном объектом пути, поставляемая одометром и используемая для построения одометрического решения;

- F', F'' – известные вектор-функции интегрирования параметров векторов состояния систем X', X'' по поступающей информации с инерциальных датчиков U'_i и одометра Y''_i;

- z_i^d – корректирующие измерения, формируемые по внутренней, относительно совокупной системы БИНС и одометра, информации — кинематическом одометрическом счислении географических координат;

- z^{ext} – возможная внешняя дополнительная корректирующая информация, например, решения GPS или координаты контрольных (маркерных) точек;

- C', C'' – матрицы пересчета оценки вектора состояния уравнений ошибок $\widetilde{\xi}$ к вектору ошибок состояния системы $\widetilde{x}$, включающего в себя как ошибки автономного БИНС, так и ошибки одометрического счисления;

- Ψ', Ψ'' – функции вычисления поправок к входной инерциальной и одометрической информации, списывающих оцененные составляющие модели ошибок датчиков в варианте с введением обратных связей.

4.2 Описание алгоритмов оценивания по шагам

Описание одного такта алгоритма комплексирования БИНС и одометра по шагам:

1. Обозначим данные, поступающие с датчиков БИНС U'_i и одометра Y''_i, в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} U'_i &= U'_i(\omega'_z, f'_z), \\ Y''_i &= Y''_i(s''); \end{aligned}$$

2. Блок-вычислитель производит интегрирование уравнений движений как для автономной БИНС, так и для интегрированной системы БИНС+одометр с соответствующими начальными условиями. Численное интегрирование выходных векторов состояния систем $X_i'^-, X_i''^-$ производится по формулам:

$$\begin{aligned} X_i'^- &= F'(X_{i-1}'^-, U'_i), \\ X_i''^- &= F''(X_i'^-, X_{i-1}''^-, Y''_i), \end{aligned}$$

   где F', F'' отражают используемый метод интегрирования.

3. По данным одометра формируются либо позиционные либо скоростные корректирующие измерения z_i^d согласно (56), (57);

4. В качестве внешней корректирующей информации z_i^{ext} могут выступать показания GPS-приемников, либо информация о координатах реперных точек (59);

5. Блок оценивания совокупного вектора состояния уравнений ошибок ξ;

6. Блок вычисления оценок ошибок векторов состояния системы $X_i'^-, X_i''^-$. Формирование матриц пересчета C', C'' описаны в (26) (46).

7. Далее, полученные оценки векторов состояния системы $\widetilde{X}_i'^{+}, \widetilde{X}_i''^{+}$ представляют собой итоговое решение коррекционной задачи в варианте оценивания (БИНС+одометр, тесно-связанные системы).

---

8. Далее приводится описания второго схемного решения задачи коррекции – варианта с введением обратных связей в алгоритмы навигационного счисления БИНС.

   В случае введения обратных связей в алгоритм включается блок учета поправок к компонентам вектора состояния X^*. На следующем шаге алгоритма используются оценки векторов состояния совокупной системы $\widetilde{X}_i'^{+}, \widetilde{X}_i''^{+}$:

$$\begin{aligned} X_i'^{-} &= \widetilde{X}_i'^{+}, \\ X_i''^{-} &= \widetilde{X}_i''^{+}, \end{aligned}$$

   При обновлении показаний инерциальных датчиков БИНС и одометра учитываются оценки ошибок нулей акселерометров Δf_z^0, дрейфов ДУС ν_z^0, а также ошибок, связанных с одометром, – ошибки масштаба κ и ошибок углов установки БИНС на корпусе объекта $\varkappa_{z1}, \varkappa_{z3}$:

$$\begin{aligned} U_{i+1}' &= \widetilde{U}_{i+1} = \Psi'(U_{i+1}', \widetilde{\xi}_i^{+}), \\ Y_{i+1}'' &= \widetilde{Y}_{i+1} = \Psi''(Y_{i+1}'', \widetilde{\xi}_i^{+}), \end{aligned}$$

   Вводятся интегральные счетчики $\Delta f_z^{\text{sum}}, \nu_z^{\text{sum}}$ оценок инструментальных ошибок $\widetilde{\Delta f_z^0}^{+}, \widetilde{\nu_z^0}^{+}$ датчиков БИНС, моделей погрешностей которых описаны уравнениями (22), (23). Величины этих поправок вычисляются суммированием оценок соответствующих компонент вектора ошибок $\widetilde{\xi}_i^{+}$ после каждого шага коррекции и задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta f_z}^{\text{sum}} &= \widetilde{\Delta f_z}^{\text{sum}} + \widetilde{\Delta f_{z\,i}^0}^{+}, \\ \widetilde{\nu_z}^{\text{sum}} &= \widetilde{\nu_z}^{\text{sum}} + \widetilde{\nu_{z\,i}^0}^{+}. \end{aligned}$$

   Поправки к показаниям датчиков:

$$\begin{aligned} f_{z\,i+1}' &= f_{z\,i+1}' - \widetilde{\Delta f_z}^{\text{sum}}, \\ \omega_{z\,i+1}' &= \omega_{z\,i+1}' + \widetilde{\nu_z}^{\text{sum}}. \end{aligned}$$

   Для одометра вводятся аналогичные суммируемые величины $\widetilde{\kappa}^{\text{sum}}, \widetilde{\varkappa_{z1}}^{\text{sum}}, \widetilde{\varkappa_{z3}}^{\text{sum}}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa}^{\text{sum}} &= \widetilde{\kappa}^{\text{sum}} + \widetilde{\kappa}_i, \\ \widetilde{\varkappa_{z1}}^{\text{sum}} &= \widetilde{\varkappa_{z1}}^{\text{sum}} + \widetilde{\varkappa_{z1i}}, \\ \widetilde{\varkappa_{z3}}^{\text{sum}} &= \widetilde{\varkappa_{z3}}^{\text{sum}} + \widetilde{\varkappa_{z3i}}. \end{aligned}$$

   Поправка к приращению пройденного пути по одометру вычисляется по формуле:

$$\Delta s_{i+1}'' = \frac{1}{(1 + \widetilde{\kappa}^{\text{sum}})}(E + \widehat{\widetilde{\varkappa}^{\text{sum}}})\Delta s_{i+1}'',$$

   где $\widetilde{\varkappa}^{\text{sum}} = (\widetilde{\varkappa_{z1}}^{\text{sum}}, 0, \widetilde{\varkappa_{z3}}^{\text{sum}})$ вектор, составленный из введенных интегральных счетчиков $\widetilde{\varkappa_{z1}}^{\text{sum}}, \widetilde{\varkappa_{z3}}^{\text{sum}}$;

9. Последним шагом производится реинициализация вектора состояния уравнений ошибок:
$$\widetilde{\xi}_i^+ = \widetilde{\xi}_i^- = 0.$$

Шаги 1-6 представленного алгоритма определяют получение навигационного решение в варианте оценивания. Следующие шаги 8-9 замыкают алгоритм введением обратных связей в модельные уравнения.

4.3 Оценки параметров состояния системы

В этом пункте приводятся формулы расчета оценок вектора состояния системы $\widetilde{X}$ для варианта оценивания и варианта с введением обратных связей. На их основе формируется вид соответствующих матриц пересчета C', C'' от оценок компонент вектора состояния уравнения ошибок $\widetilde{\xi}$ к оценкам компонент вектора ошибок вектора состояния системы $\widetilde{x}$.

В задаче интеграции БИНС и одометра фильтр Калмана в момент времени t_{k+1} поставляет оценку вектора ошибок $\widetilde{\xi}_{k+1}^+$:

$$\widetilde{\xi}_{k+1}^+ = \left(\widetilde{\Delta y}_{k+1}^{+\top}, \widetilde{\delta V_{y^x}}_{k+1}^{+\top}, \widetilde{\alpha_{z_1^x}}_{k+1}^{+}, \widetilde{\alpha_{z_2^x}}_{k+1}^{+}, \widetilde{\beta_{z_3^x}}_{k+1}^{+}, \widetilde{\nu}_{z\,k+1}^{0\,+\top}, \widetilde{\Delta f_z^0}_{k+1}^{+\top}, \widetilde{\Delta y^d}_{k+1}^{+\top}, \widetilde{\kappa}_{k+1}^+, \widetilde{\varkappa_{z_1}}_{k+1}^{+}, \widetilde{\varkappa_{z_3}}_{k+1}^{+}\right)^\top.$$

Формулы расчета оценок ошибок вектора состояния системы $\widetilde{x}$ в схеме «БИНС+одометр» в тесно связанном варианте.

Ошибки БИНС

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta\varphi^+}_{k+1} &= \frac{\widetilde{\Delta y_2^+}_{k+1}}{R_N},\\
\widetilde{\Delta\lambda^+}_{k+1} &= \frac{\widetilde{\Delta y_1^+}_{k+1}}{R_E\cos\varphi'_{k+1}},\\
\widetilde{\Delta h^+}_{k+1} &= \widetilde{\Delta y_3^+}_{k+1},\\
\widetilde{\Delta V_{y^x}^+}_{k+1} &= \widetilde{\delta V_{x^0}^+}_{k+1} + \underbrace{\widehat{\widetilde{\beta}^+_{z^x}}_{k+1} V_{y^x}{}'_{k+1}},\\
\widetilde{\Delta\gamma^+}_{k+1} &= \frac{1}{\cos\vartheta'_{k+1}}(\widetilde{\alpha_1^+}_{k+1}\sin\psi'_{k+1} - \widetilde{\alpha_2^+}_{k+1}\cos\psi'_{k+1}),\\
\widetilde{\Delta\vartheta^+}_{k+1} &= -\widetilde{\alpha_1^+}_{k+1}\cos\psi'_{k+1} - \widetilde{\alpha_2^+}_{k+1}\sin\psi'_{k+1},\\
\widetilde{\Delta\psi^+}_{k+1} &= -\widetilde{\beta_3^+}_{k+1} - \underbrace{\widetilde{\Delta\lambda^+}_{k+1}\sin\varphi'_{k+1}} - \widetilde{\Delta\gamma^+}_{k+1}\sin\vartheta'_{k+1},
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Ошибки одометрического счисления

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta\varphi^d}^+_{k+1} &= \frac{\widetilde{\Delta y^d_2}_{k+1}}{R_N},\\
\widetilde{\Delta\lambda^d}^+_{k+1} &= \frac{\widetilde{\Delta y^d_1}^+_{k+1}}{R_E\cos\varphi''_{k+1}},\\
\widetilde{\Delta h^d}^+_{k+1} &= \widetilde{\Delta y^d_3}^+_{k+1},\\
\widetilde{\Delta\gamma^d}^+_{k+1} &= \frac{1}{\cos\vartheta''_{k+1}}(\widetilde{\alpha_1^+}_{k+1}\sin\psi''_{k+1} - \widetilde{\alpha_2^+}_{k+1}\cos\psi''_{k+1}),\\
\widetilde{\Delta\vartheta^d}^+_{k+1} &= -\widetilde{\alpha_1^+}_{k+1}\cos\psi''_{k+1} - \widetilde{\alpha_2^+}_{k+1}\sin\psi''_{k+1},\\
\widetilde{\Delta\psi^d}^+_{k+1} &= -\widetilde{\beta_3^+}_{k+1} - \underbrace{\widetilde{\Delta\lambda^d}^+_{k+1}\sin\varphi''_{k+1}} - \widetilde{\Delta\gamma^d}^+_{k+1}\sin\vartheta''_{k+1},
\end{aligned}
$$

где три последние вычисляемые величины – ошибки ориентации модельного одометрического географического трехгранника Oy^d – соответствуют модифицированному слабосвязанному варианту интеграции БИНС и одометра.

Формулы расчета оценок ошибок вектора состояния системы $\widetilde{x}$ в схеме «БИНС+одометр» в глубоко связанном варианте.

В случае, когда задача интеграции решается в режиме с введением обратных связей, формулы расчета ошибок $\widetilde{x}$ отличаются от приведенных выше отсутствием выделенных $\underbrace{\quad}$ слагаемых уравнений ошибок $\widetilde{\Delta V^+_{y^x}}_{k+1}, \widetilde{\Delta\psi^d}^+_{k+1}, \widetilde{\Delta\psi^d}^+_{k+1}$, чтобы не списывать повторно оценки угловых ошибок ориентации.

Вычисление оценок параметров состояния системы.

Оценки параметров состояния системы «БИНС+одометр» в каждом из вариантов решения задачи интеграции вычисляются по следующим формулам (индекс $_{k+1}$, соответствующий моменту времени t_{k+1} далее опущен):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi^+} &= \varphi'^- - \widetilde{\Delta\varphi^+},\\
\widetilde{\lambda^+} &= \lambda'^- - \widetilde{\Delta\lambda^+},\\
\widetilde{h^+} &= h'^- - \widetilde{\Delta h^+},\\
\widetilde{V^+_{y^x}} &= V'^-_{y^x} - \widetilde{\Delta V^+_{y^x}},\\
\widetilde{\gamma^+} &= \gamma'^- - \widetilde{\Delta\gamma^+},\\
\widetilde{\vartheta^+} &= \vartheta'^- - \widetilde{\Delta\vartheta^+},\\
\widetilde{\psi^+} &= \psi'^- - \widetilde{\Delta\psi^+},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi^d}^+ &= \varphi''^- - \widetilde{\Delta\varphi^d}^+,\\
\widetilde{\lambda^d}^+ &= \lambda''^- - \widetilde{\Delta\lambda^d}^+,\\
\widetilde{h^d}^+ &= h''^- - \widetilde{\Delta h^d}^+,\\
\widetilde{\gamma^d}^+ &= \gamma''^- - \widetilde{\Delta\gamma^d}^+,\\
\widetilde{\vartheta^d}^+ &= \vartheta''^- - \widetilde{\Delta\vartheta^d}^+,\\
\widetilde{\psi^d}^+ &= \psi''^- - \widetilde{\Delta\psi^d}^+.
\end{aligned}
$$

4.4 Задачи сглаживания

Фильтр Калмана может применяться для решения задач оценивания как в реальном времени, так и в постобработке. В первом случае определение оценок вектора состояния линейной системы происходит по мере поступления измерительной информации и определяемая оценка учитывает измерения, полученные лишь к текущему моменту времени t_i.

В случае, если возможно решение задачи в постобработке измерительной информации, задача оценивания может быть сформулирована иначе - для определения оценки вектора состояния в каждый момент времени учитывается весь массив измерительной информации: как "прошлый и текущий", так и "будущий". Подобные задачи носят название задачи сглаживания.

Численная реализация задачи сглаживания.

Далее описывается используемая численная реализация алгоритма сглаживания, общетеоретические основы которой представлены в разделе приложения, посвященному алгоритмам калмановского оценивания и сглаживания. Используемый вариант численной реализация оперирует с данными прямого фильтра Калмана, фильтра Калмана в обратном времени.

Сводной вектор состояния коррекционной модели задачи интеграции БИНС+одометр состоит из двух подвекторов:

- фазового вектора x_I, компоненты которого характеризуют позиционные, скоростные, угловые ошибки БИНС, параметры инструментальных погрешностей инерциальных датчиков;

- фазового вектора x_{II}, компоненты которого характеризуют позиционные ошибки одометрического счисления, параметры инструментальных, геометрических погрешностей одометра.

При построении сглаженных оценок будем использовать оценки (и соответствующие ковариационные характеристики) только фазового вектора x_I, полученные фильтрами Калмана реального $\tilde{x}_I^{f+}(t_j)$ (индекс вверху ^{f}, $f \to$ forward) и обратного времени $\tilde{x}_I^{b-}(t_j)$ (индекс вверху ^{b}, $b \to$ backward). Сглаженные величины будут обозначаться индексом сверху ^{sm}, $sm \to$ smoothed.

Соответствующие наборы оценок параметров движения системы:

$$X^f = (\widetilde{\varphi}^{f+}, \widetilde{\lambda}^{f+}, \widetilde{h}^{f+}, \widetilde{V}_E^{f+}, \widetilde{V}_N^{f+}, \widetilde{V}_{UP}^{f+}, \widetilde{\psi}^{f+}, \widetilde{\gamma}^{f+}, \widetilde{\vartheta}^{f+})$$

$$X^b = (\widetilde{\varphi}^{b-}, \widetilde{\lambda}^{b-}, \widetilde{h}^{b-}, \widetilde{V}_E^{b-}, \widetilde{V}_N^{b-}, \widetilde{V}_{UP}^{b-}, \widetilde{\psi}^{b-}, \widetilde{\gamma}^{b-}, \widetilde{\vartheta}^{b-})$$

Одной из особенностей алгоритма сглаживания является то, что он оперирует с ковариационной матрицей ошибок оценивания P, в то время как алгоритм фильтра Калмана оперирует с квадратным корнем - верхнетреугольной матрицей S. Поэтому для численной процедуры склейки оценок должны предварительно вычисляться матрицы $P^{f+}(t_j)$, $P^{b-}(t_j)$.

Реализация сглаживания.

Алгоритм сглаживания будет применяться не для всего вектора оценок в параметров движения системы, а по частям:

- Сглаживание оценок горизонтальных координат $y_{\lambda\varphi}^{sm} = (\widetilde{\varphi}^{sm}, \widetilde{\lambda}^{sm})$;

- Сглаживание оценок высоты $y_h^{sm} = (\widetilde{h}^{sm})$;

- Сглаживание оценок северной и восточной составляющих линейной относительной скорости $y_{EN}^{sm} = (\widetilde{V}_E^{sm}, \widetilde{V}_N^{sm})$;

- Сглаживание вертикальной составляющие линейной относительной скорости $y_{UP}^{sm} = (\widetilde{V}_{UP}^{sm})$;

- Сглаживание оценок углов ориентации $y_{\psi\gamma\vartheta}^{sm} = (\widetilde{\psi}^{sm}, \widetilde{\gamma}^{sm}, \widetilde{\vartheta}^{sm})$

Далее описывается реализация общей схемы сглаживания прямого и обратного фильтра Калмана без привязки к конкретным сглаживаемым параметрам системы. Обозначим обобщенные вектора как y^{f+}, y^{b-}.

На прямом проходе в момент t_j (далее индекс j будет опускаться для более наглядной записи):

1. Фиксируются оценки соответствующих параметров движения y^{f+};

2. Поскольку решается задача сглаживания для не полного вектора ошибок, следует выделить блок, отвечающий только за ковариации соответствующих ошибок. Компоненты матрицы ковариации P_y^{f+} для них получаются сверткой матрицы ковариации P^{f+} исходного фазового вектора x фильтра Калмана:
$$P_y^{f+} \;=\; C_y P^{f+} C_y^\top,$$
где C_y – известная прямоугольная матрица размерности $\dim(y) \times \dim(x)$

На обратном проходе фильтра Калмана в момент времени t_j:

1. Фиксируется прогноз вектора y^{b-} соответствующих параметров движения;
2. Компоненты матрицы ковариации P_y^{b-} для них получаются сверткой матрицы ковариации P^{b-}:
$$P^{b-} \;=\; C_y P^{b-} C_y^\top,$$
где матрица C_y такая же, как для прямого фильтра;
3. получается сглаженная оценка y^{sm} путем склейки векторов y^{f+}, y^{b-} и матриц ковариаций P_y^{f+}, P_y^{b-} по следующим формулам:
$$y^{sm} = P^{sm}\big[(P^{f+})^{-1}y^{f+} + (P^{b-})^{-1}y^{b-}\big],$$
где
$$P^{sm} = \big[(P_y^{f+})^{-1} + (P_y^{b-})^{-1}\big]^{-1}.$$

Каждому вектору сглаженных оценок $y^{sm}_{\lambda\varphi}, y^{sm}_h, y^{sm}_{EN}, y^{sm}_{UP}, y^{sm}_{\psi\gamma\vartheta}$ соответствует свертка матриц ковариации прямого и обратного прогонов $P^{f+}_{\lambda\varphi}, P^{f+}_h, P^{f+}_{EN}, P^{f+}_{UP}, P^{f+}_{\psi\gamma\vartheta}$, $P^{b-}_{\lambda\varphi}, P^{b-}_h, P^{b-}_{EN}, P^{b-}_{UP}, P^{b-}_{\psi\gamma\vartheta}$. Последние вычисляются при помощи соответствующих прямоугольных матриц $C_{\lambda\varphi}, C_h, C_{EN}, C_{UP}, C_{\psi\gamma\vartheta}$:

$$C_{\lambda\varphi} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_E\cos\widetilde{\varphi}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$C_h \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{65}$$

$$C_{EN} \;=\; \begin{pmatrix} \underline{\frac{1}{R_N}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \underline{-\widetilde{V}_{UP}} & \underline{\widetilde{V}_N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{\frac{1}{R_E}} & 0 & 0 & 1 & 0 & \underline{\widetilde{V}_{UP}} & 0 & \underline{-\widetilde{V}_E} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$C_{UP} \;=\; \begin{pmatrix} \underline{-\frac{1}{R_N}} & \underline{-\frac{1}{R_E}} & 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{-\widetilde{V}_N} & \underline{\widetilde{V}_E} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

$$C_{\psi\gamma\vartheta} \;=\; \begin{pmatrix} \underline{-\frac{1}{R_E}\operatorname{tg}\widetilde{\varphi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\widetilde{\psi}\operatorname{tg}\widetilde{\vartheta} & \cos\widetilde{\psi}\operatorname{tg}\widetilde{\vartheta} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin\widetilde{\psi}}{\cos\widetilde{\vartheta}} & -\frac{\cos\widetilde{\psi}}{\cos\widetilde{\vartheta}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\widetilde{\psi} & -\sin\widetilde{\psi} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

где элементы матриц $\widetilde{\varphi}, \widetilde{V}_E, \widetilde{V}_N, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\vartheta}$ соответствуют оценкам параметров состояния системы, полученным на прямом и обратном прогонах.

Подчеркнутые члены имеют место быть, если задача интеграции "прямого" и "обратного" прохода решается в варианте оценивания. В случае введения обратной связи соответствующие компоненты нулевые.

4.5 Выводы к главе

1. Детально описаны информационно эквивалентные схемы решения задачи коррекции БИНС+одометр, приведена соответствующая блок-схема.

2. Детально описаны алгоритмы коррекции, включая алгоритмы введения обратных связей не только для параметров навигационного счисления, но и для параметров принятых моделей инструментальных погрешностей датчиков первичной информации: акселерометров, ДУС, одометра.

3. Для задачи сглаживания, возникающей в том случае, когда допускается постобработка совокупной измерительной информации, описаны алгоритмические решения, отражающие специфику применяемых обратных связей в навигационном счислении БИНС.

Глава 5

5 Обработка имитационных и экспериментальных данных

В главе представлены результаты применения разработанных алгоритмов интеграции БИНС и одометра для решения задачи навигации подвижного объекта к двум типам наборов данных:

- к данным, полученным при помощи специально разработанного имитатора движения;
- к экспериментальным данным для решения задачи навигации внутритрубного диагностического (инспекционного) снаряда;
- к экспериментальным данным городских заездов дорожно-транспортного средства.

5.1 Имитатор и тестирование алгоритмических решений

Модели, описываемые в работе отрабатывались на данных, полученных при помощи аналитического имитатора траектории движения: траекторные параметры объекта задаются как известные функции времени. Так продольная скорость объекта $V(t)$ в связанных осях Ms и углы ориентации корпуса объекта относительно опорного географического трехгранника Mx^0, считаются известными функциями:

$$V_s = (0, V(t), 0)^\top.$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= A_\gamma \sin \omega_\gamma t,\\ \vartheta(t) &= A_\vartheta \sin \omega_\vartheta t,\\ \psi(t) &= \psi_0 + A_\psi \sin \omega_\psi t,\end{aligned}$$

где A_γ, A_ϑ, A_ψ – амплитуды, ω_γ, ω_ϑ, ω_ψ – частоты колебаний корпуса объекта, ψ_0 – начальное значение угла истинного курса.

С помощью данных параметров далее определяются все необходимые траекторные параметры движения объекта, на которые в последствии можно наложить имитируемые значения инструментальных погрешностей датчиков БИНС и одометра. Подробное описание алгоритма имитации приведено в приложении к работе (7.2).

Параметры имитирования траекторий.

Имитированная траектория, на которой отрабатывались алгоритмы интеграции БИНС и одометра, представляет из себя движение по прямой с несколькими поворотами с переменной скоростью ($V(t) \in [10\text{км/час}, 40\text{км/час}]$) на протяжении 2 часов. Углы крена γ и тангажа ϑ моделировались при помощи приведенных выше формул.

Далее график траектории в метрах относительно стартовой точки:

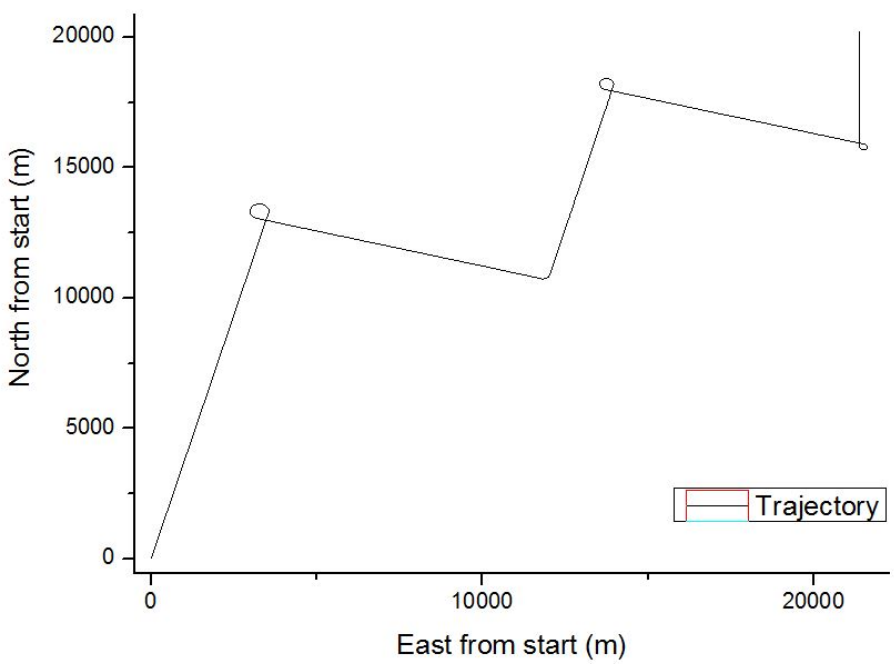


Рис. 2: Траектория движения, сформированная имитатором

Полные характеристики имитации:

- длительность имитации – 2 часа;
- пройденный путь – 46 км;
- частота регистрации данных с инерциальных датчиков – 50Гц;
- частота регистрации показаний одометра – 10Гц.
- наборы нулевых составляющих погрешностей инерциальных датчиков рассматривались в двух вариантах:
  - Класс системы высокой точности: $\nu^0 = 0.02\,°$/час, $\Delta f^0 = 1\text{E}^{-5}$G,
  - Класс системы средней точности: $\nu^0 = \ \ 0.2\,°$/час, $\Delta f^0 = 1\text{E}^{-4}$G,
- минимальное приращение одометра (цена одного парциального угла) – 20см;
- ошибка масштаба одометра – $\kappa = 0.01$, или 1% от пройденного пути;
- угловые ошибки установки БИНС – $\varkappa_1 = -0.5°, \varkappa_3 = -1°$;
- ошибка дополнительных позиционных измерений – случайная величина в метрах на отрезке $[-1, 1]$.

График имитируемуй скоростной интерпретации одометрических показаний в проекции на продольную ось объекта: На графике виден шумовой эффект дифференци-

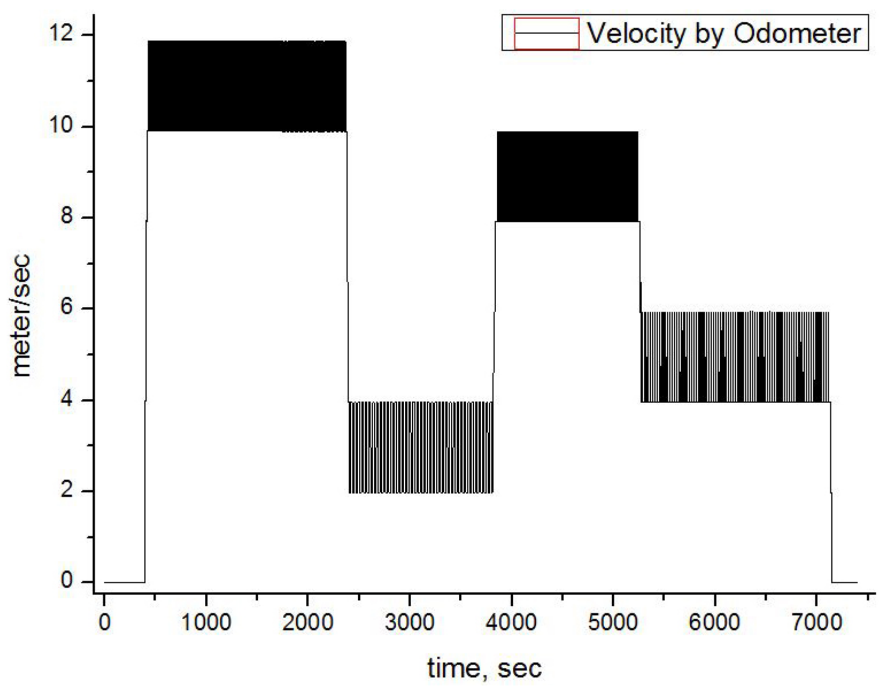
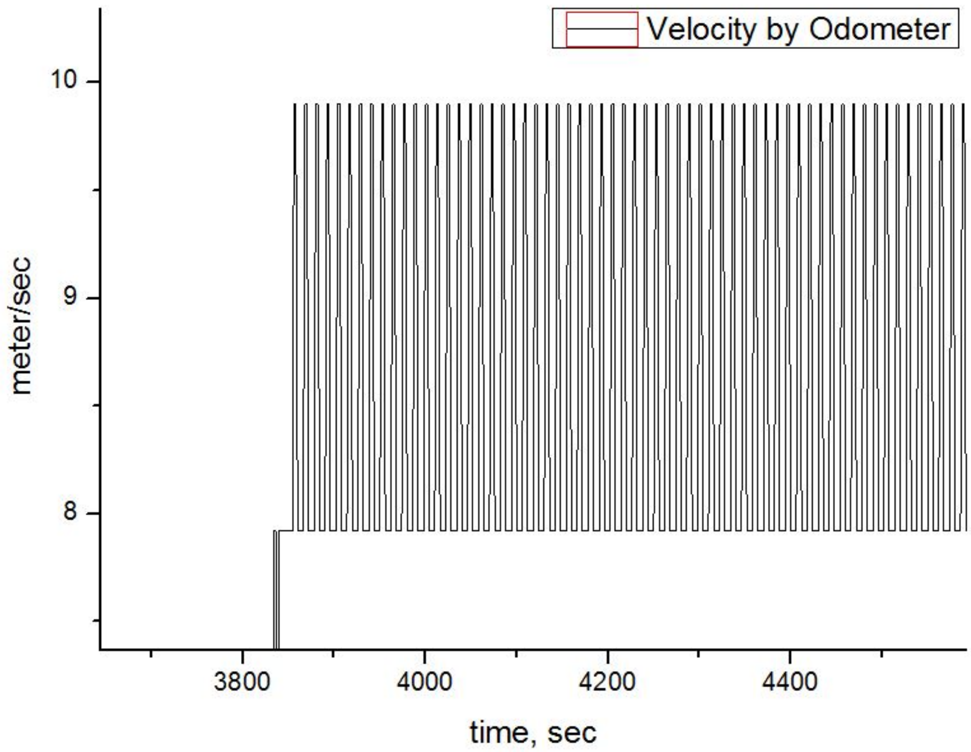


Рис. 3: Горизонтальные составляющие скорости в проекции на Mx^0

рования дискретных показаний одометра в движении. Размах колебаний скорости обусловлен величиной масштабного коэффициента одометра и частотой регистрации данных. Фрагмент графика скорости в увеличенном виде:



В качестве шумовых составляющих для имитации использовались реализации шумов инерциальных датчиков, записанных в состоянии покоя БИНС.

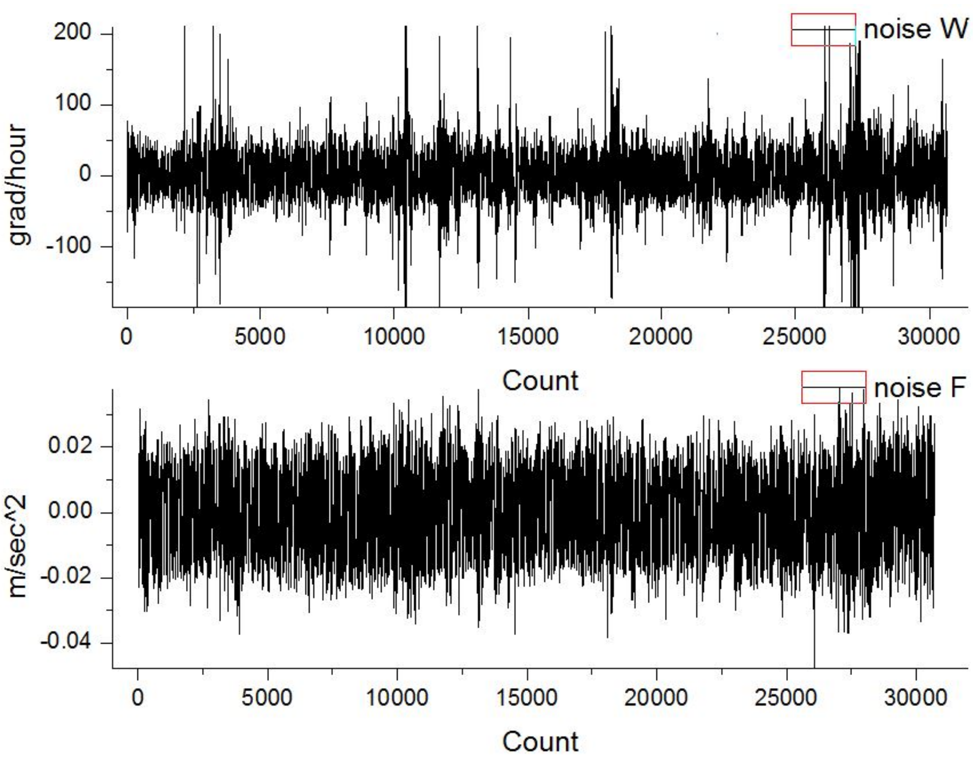


Рис. 4: Реализация шумов датчиков БИНС на основе экспериментальных данных

Результаты.

В качестве результатов обработки далее будут приведены комбинации графиков позиционных ошибок (как плановых координат, так и высоты) и оценок ошибки масштаба одометри κ и ошибок углов установки БИНС на корпусе объекта $\varkappa_{z1}, \varkappa_{z3}$ в вариантах с периодической коррекцией по дополнительной позиционной информации (для определенности – маркерные точки) и без.

Описанный набор графиков будет приведен для каждого моделируемого класса точности датчиков БИНС.

Случай инерциальных датчиков высокой точности: $\nu^0 = 0.02\,^\circ/$час

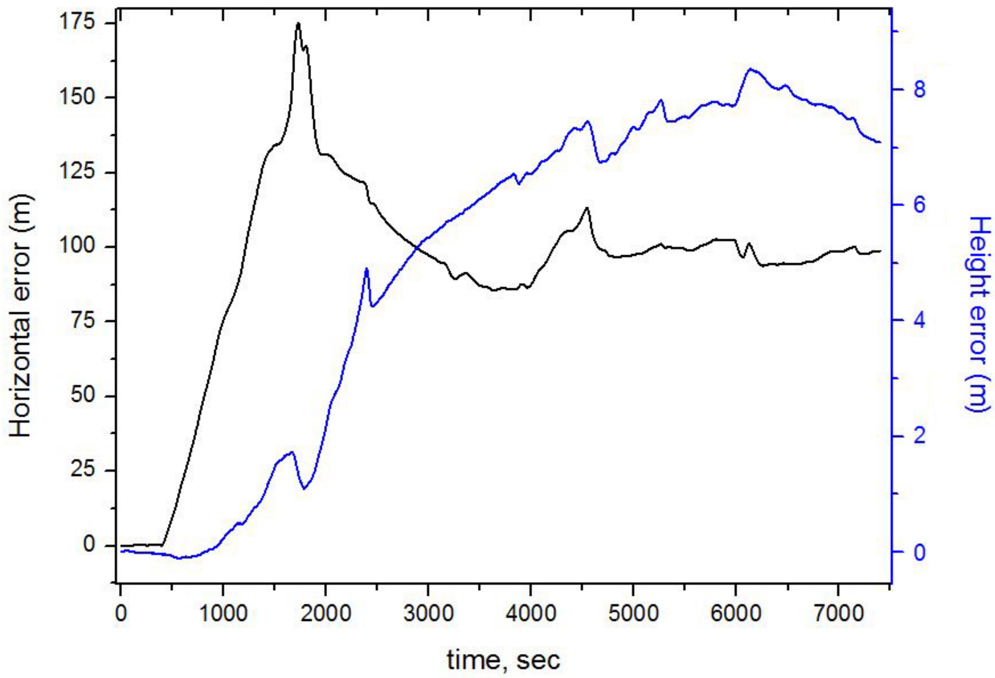


Рис. 5: Горизонтальная и вертикальная позиционные ошибки

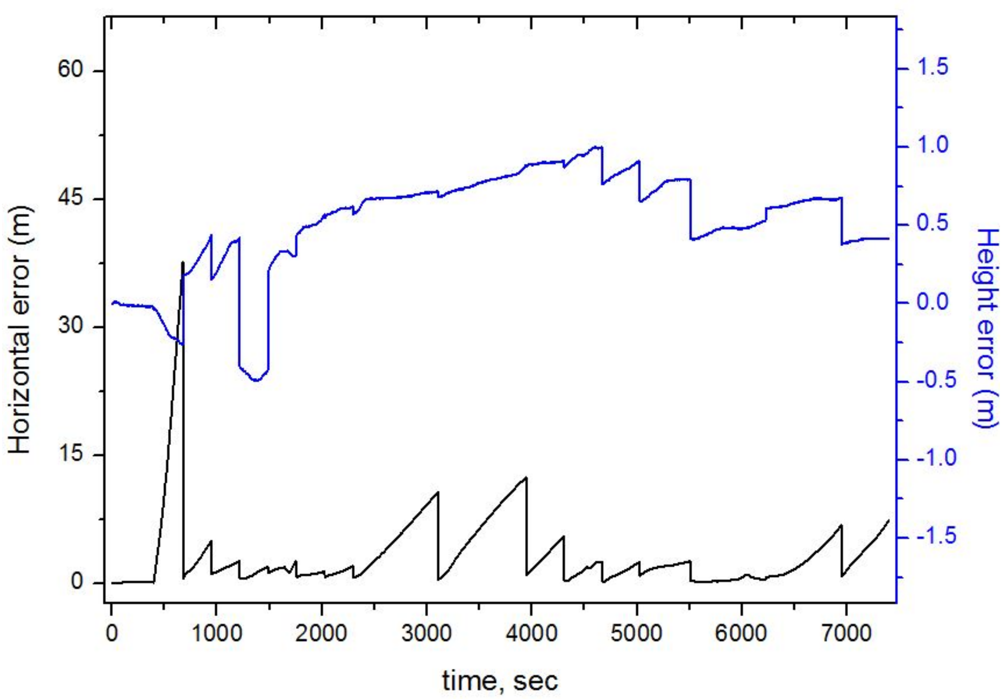


Рис. 6: Горизонтальная и вертикальная позиционные ошибки с доп. позиц. коррекцией

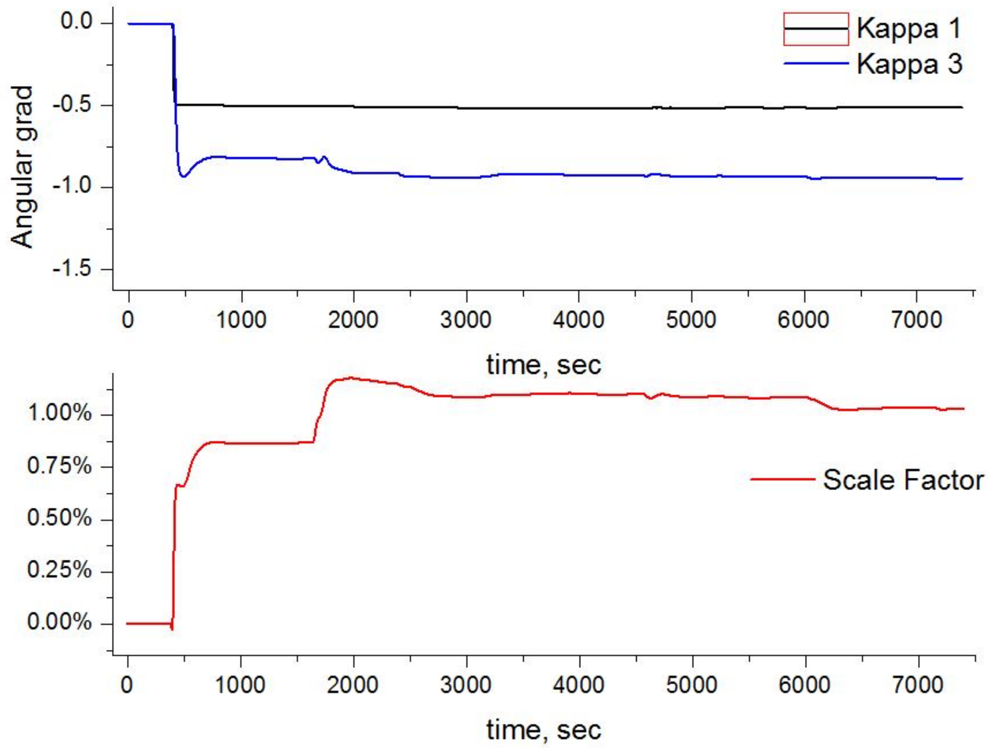


Рис. 7: Оценки ошибок масштаба κ и ошибок углов установки БИНС $\varkappa_1, \varkappa_3$

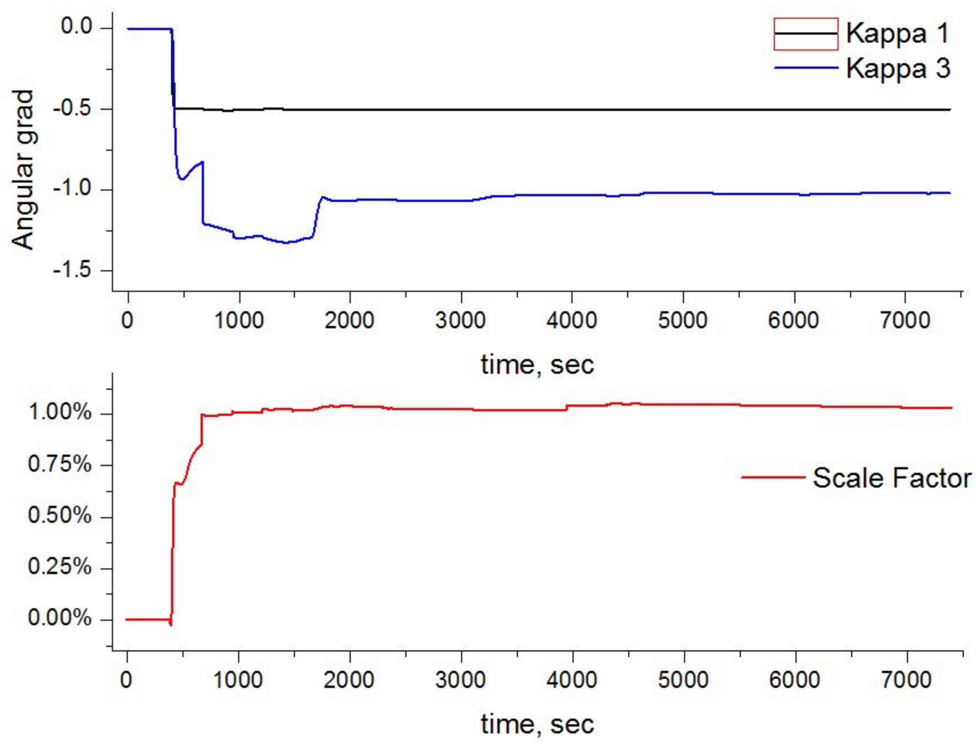


Рис. 8: Оценки ошибок масштаба κ и ошибок углов установки БИНС $\varkappa_1, \varkappa_3$ с дополнительной позиционной коррекцией

Случай инерциальных датчиков средней точности: $\nu^0 = 0.2\,^\circ/$час

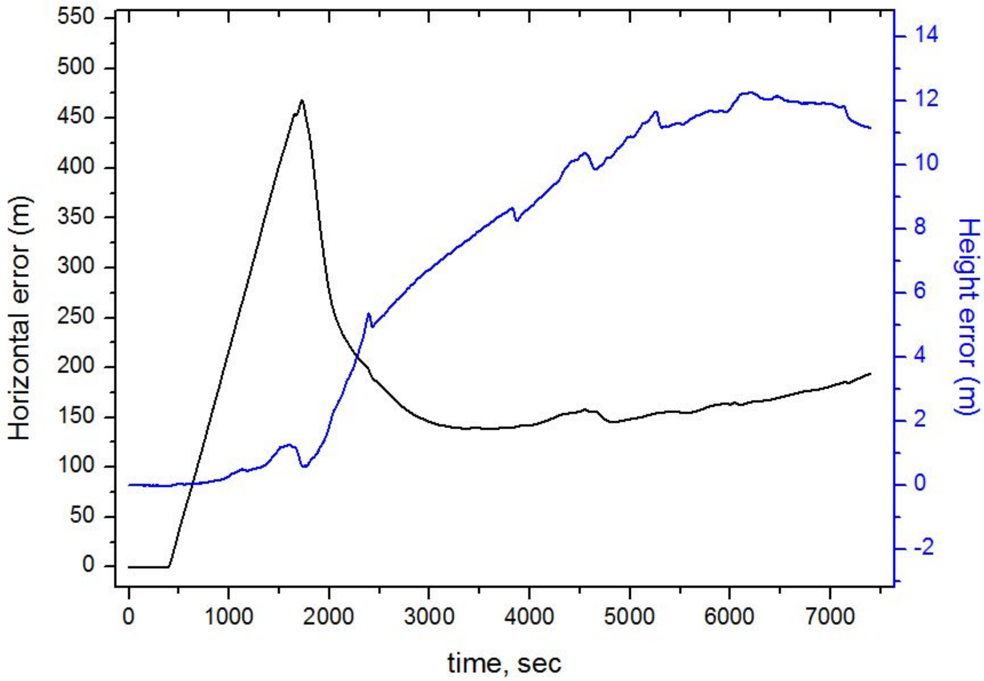


Рис. 9: Горизонтальная и вертикальная позиционные ошибки

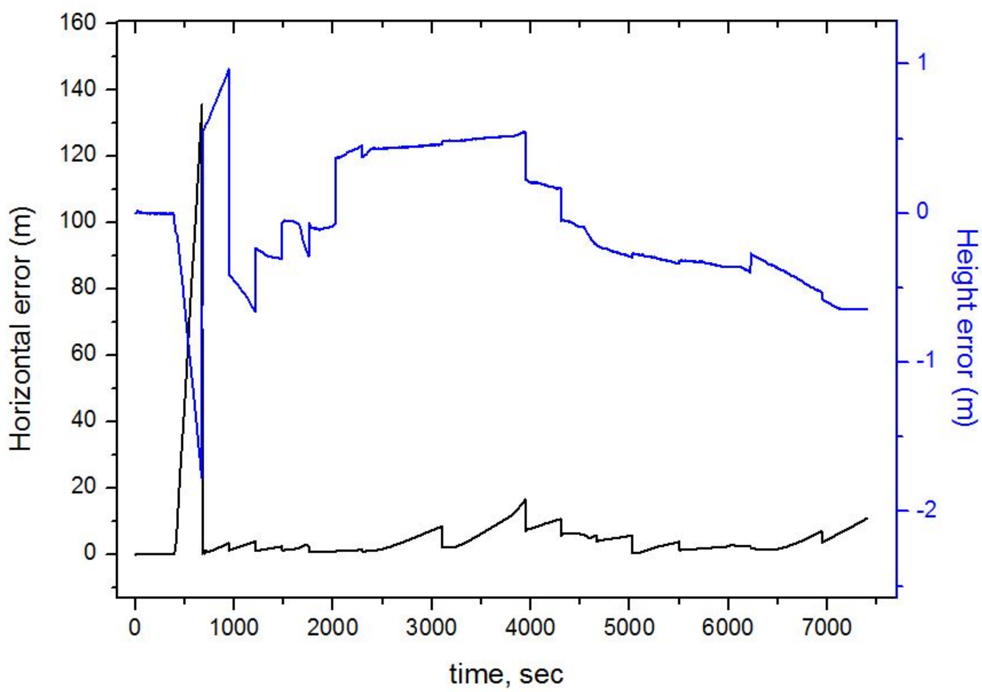


Рис. 10: Горизонтальная и вертикальная позиционные ошибки с доп. позиц. коррекцией

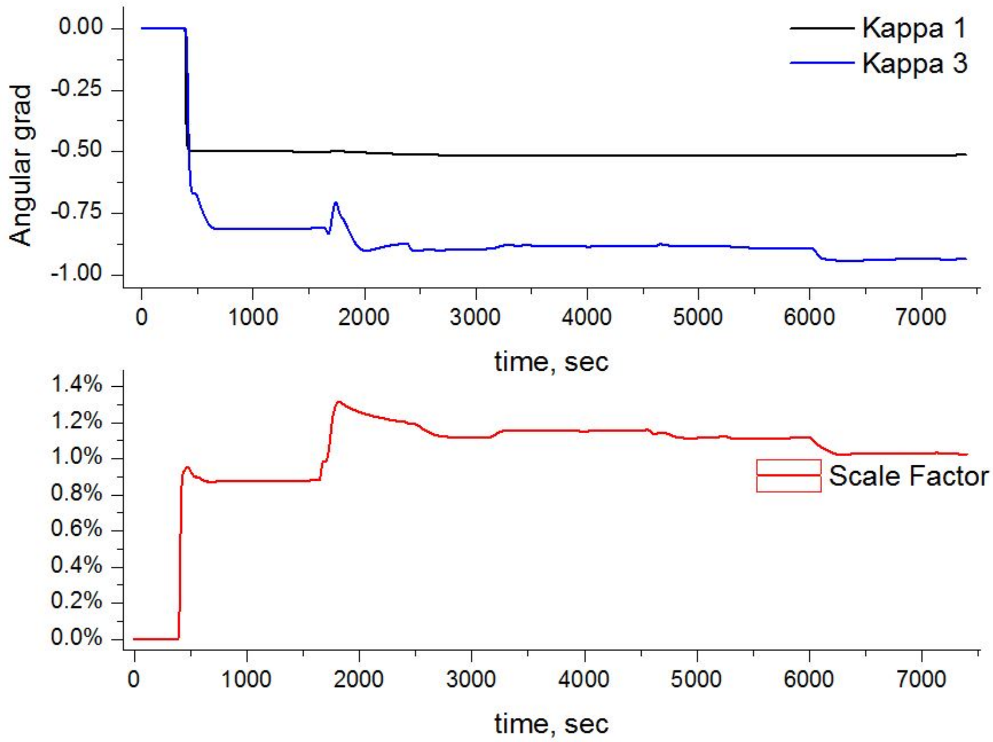


Рис. 11: Оценки ошибок масштаба κ и ошибок углов установки БИНС $\varkappa_1, \varkappa_3$

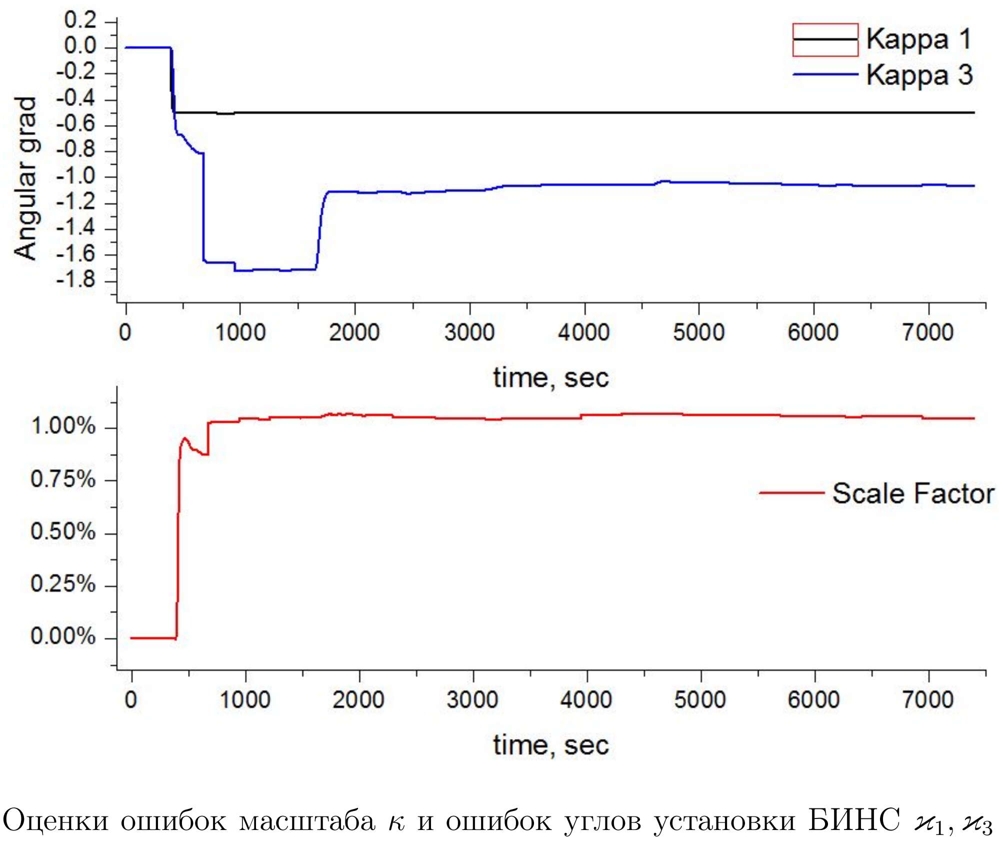


Рис. 12: Оценки ошибок масштаба κ и ошибок углов установки БИНС $\varkappa_1, \varkappa_3$ с дополнительной позиционной коррекцией

Вывод. С помощью разработанного имитатора было осуществлено тестирование разработанного программного обеспечения задачи интеграции БИНС-одометр. Это позволило существенно сократить время последующей обработки экспериментальных данных.

5.2 Навигация внутритрубного диагностического снаряда

Использовался макетный образец дефектоскопа "Оргэнергогаз "Саратоворгдиагностика".

Навигационный эксперимент был проведен в июне 2014 г. на магистральном трубопроводе "СОЮЗ". Длина инспектируемого участка была примерно 114 км. Диаметр газовой трубы 1420 мм. Средняя скорость дефектоскопа составляла около 2.5 м/с:

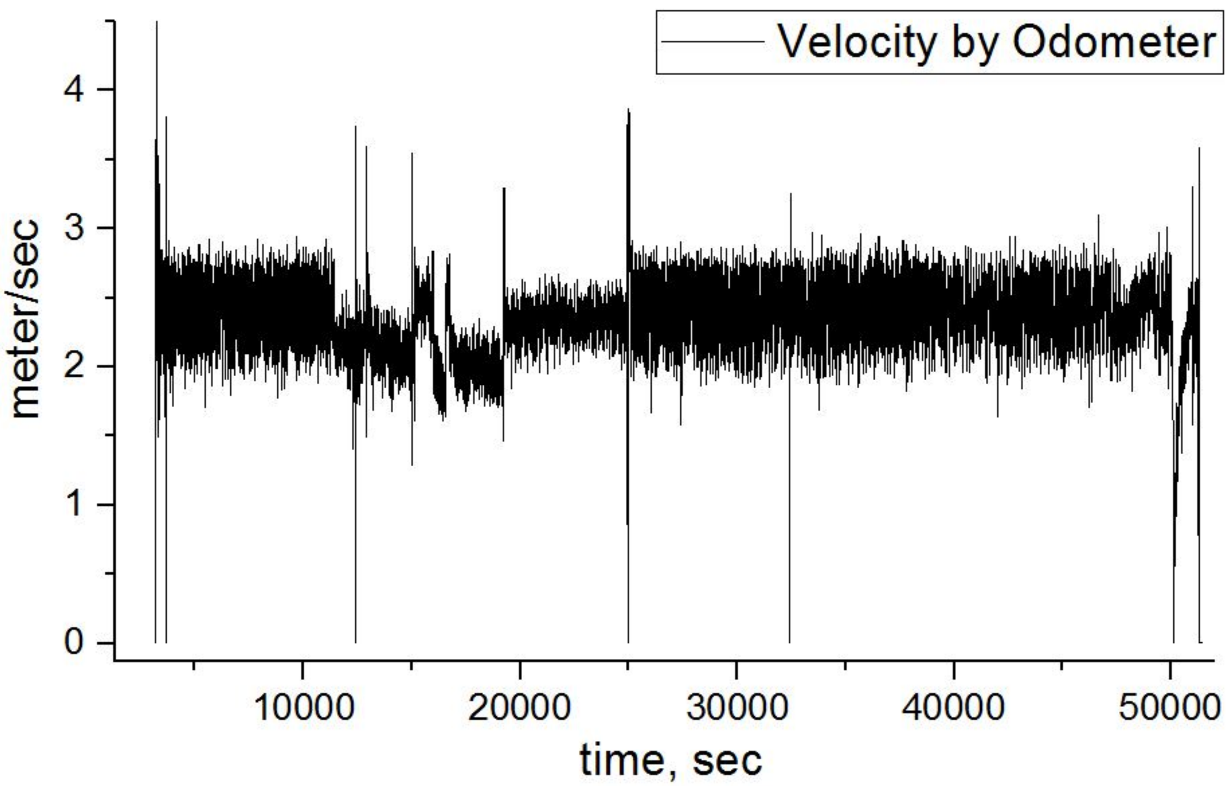


Рис. 13: Скорость снаряда по одометру

На газопроводе с помощью GPS приёмников было снято 60 реперных точек + 1 для определения начального азимута (заданного курса). Расстояние между маркерами варьировалось от 2 км (наиболее распространенное расстояние) до 7 км. Перед пропуском дефектоскоп стоял включенным в камере запуска около 40 минут, что было использовано для решения задачи начальной выставки БИНС.

Задача решалась в постобработке с применением алгоритма сглаживания.

В результате применения описанных в данной работе моделей к экспериментальным данным была получена следующая точность навигации в зависимости от расстояния между корректирующими маркерами:

Расстояние между маркерами (м):	Точность по горизонтальным координатам (м)	Точность по высоте (м)
500	0.5	0.5
1000	1.0	1.0
1500	2.0	2.0

Оценка точности интегрированных навигационных решений определялась следующими способами:

- путём сравнения с координатами проверочных маркеров;
- путём исключения координат маркеров из обработки и последующей проверки точности определения этих же координат навигационным алгоритмом;
- сравнение с картой «Google Earth», на которой можно видеть рельефный профиль трубопровода и отображенный профиль трассы дефектоскопа.

На участках, где расстояние между маркерами составляет ~ 2 км, точность топографического привязки траектории движения дефектоскопа составляет 1-2 м. На участках, где расстояние между маркерами составляет величину порядка 6 км, точность ухудшается до 15 м.

Рис. 14: Полная траектория движения снаряда

Рис. 15: Фрагмент траектории 1. Черным цветом обозначено решение в прямом времени, красным - в обратном, синим - сглаженное решение

Рис. 16: Фрагмент траектории 2

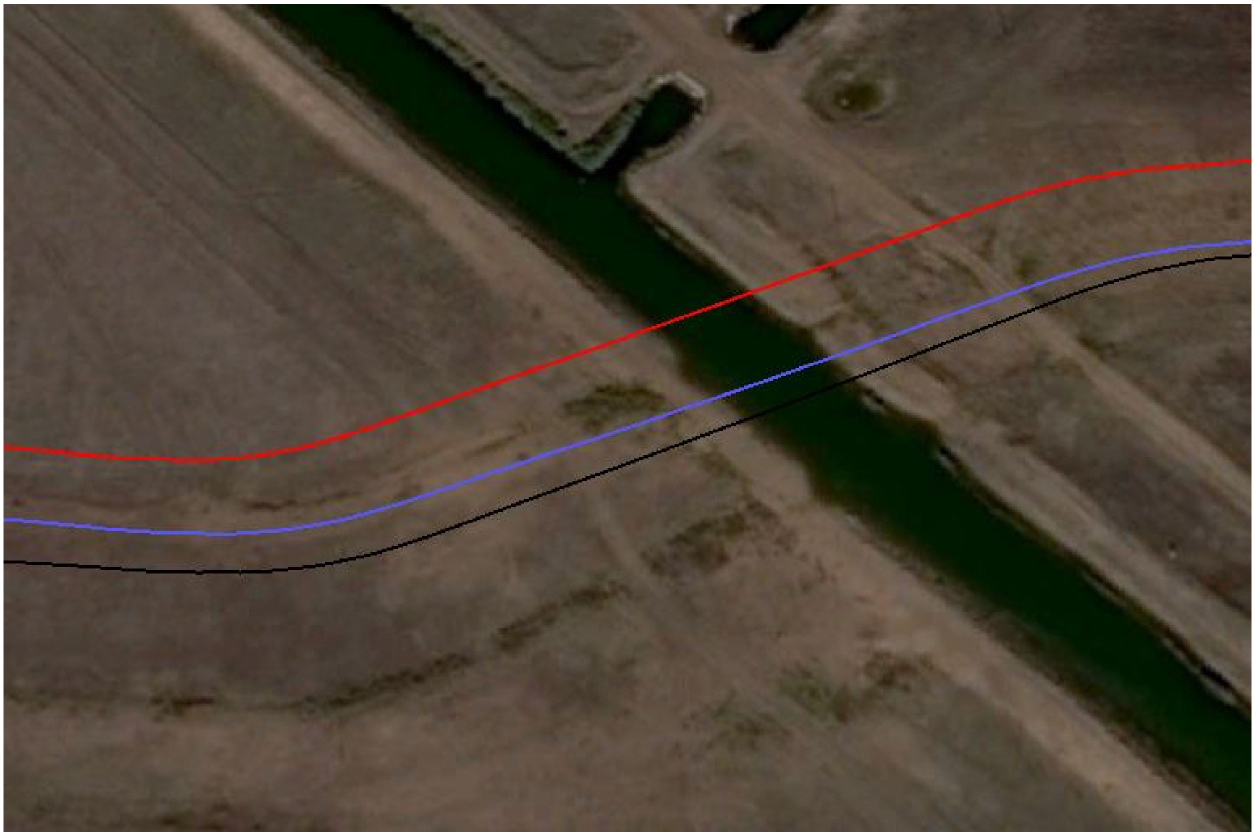


Рис. 17: Фрагмент траектории 3.

5.3 Навигация дорожно-транспортного средства

Разработанные в диссертации алгоритмы решения задачи навигации по данным БИНС и одометра были применены к экспериментальным данным, полученным в заездах дорожно-транспортного средства в городских условиях. Пройденный путь по одометру составил 40км за 1 час. Приборный навигационный комплекс включал в свой состав БИНС и одометр. Внешней позиционной информации не имелось.

Опорная траектория для проведения анализа точности решения отсутствовала, поэтому для этих целей использовались карты Google Earth. Далее приводятся некоторые фрагменты траекторий, наглядно характеризующие точности привязки навигационного решения к местности (поворот, дорожная развязка):

Рис. 18: Фрагмент дорожной траектории. Развязка, 26км от стартовой точки

Рис. 19: Фрагмент дорожной траектории. Поворот, 33км от стартовой точки

Приведенные графики соответствуют 26км и 33км траектории. Соответствующие точности: 20м и 30м. Точность определения местоположения в конечной точке траектории составила 50м.

5.4 Важные для приложений выводы, полученные на основе моделирования и обработки экспериментальных данных

Наличие имитатора, экспериментальных данных позволило осуществить различные вычислительные эксперименты с целью анализа чувствительности алгоритма комплексирования БИНС-одометр к тем или иным его составляющим. На основе полученных результатов сформулированы важные для приложений выводы.

1. Ослабление требований к начальной выставки БИНС

Начальная выставка БИНС является стартовым режимом функционирования БИНС, предшествующий основному режиму навигации. Важным ее параметром является продолжительность начальной выставки.

Выставка достаточно точной БИНС осуществляется следующим образом. Задается короткий интервал времени (десятки секунд) для так называемой алгебраической выставки. На этом коротком интервале осуществляется осреднение показаний инерциальных датчиков - акселерометров и ДУС. Затем по этим значениям определяются (достаточно грубо) значения углов курса, крена, тангажа. Далее следует этап точной выставки длительностью 5-10 минут, на котором используются уже динамические алгоритмы оценивания остаточных ошибок определения указанных углов.

Обработка экспериментальных данных показала, что возможно ограничиться небольшим по времени этапом алгебраической выставки, не прибегая к алгоритмам точной выставки.

С практической точки зрения это означает возможность достаточно быстрого перехода в режим навигации, что важно для ряда специфических приложений.

Объяснение этого результата состоит в том, что предложенный алгоритм комплексирования БИНС-одометр осуществляет коррекцию БИНС по одометрическому счислению с непрерывным оцениванием и компенсацией ошибок углов курса, крена и тангажа, что можно условно назвать довыставкой БИНС в движении.

2. Ослабление требований к наличию калибровочной трассы, калибровке масштабного коэффициента одометра κ и угловых ошибок $\varkappa_1$, $\varkappa_3$

В существующих прикладных задачах навигационный комплекс, состоящий из БИНС и одометра, предполагает предварительную, и возможно периодически повторяемую, калибровку погрешности масштабного коэффициента одометра κ и соответствующих угловых ошибок $\varkappa_1$, $\varkappa_3$. Для этого организуется специальная калибровочная трасса: прямолинейная, горизонтальная с привязанными к карте маркерными точками.

Результаты моделирования и обработки экспериментальных данных показали, что если недалеко от стартовой точки можно организовать маркерную точку, без предъявления каких либо требований к дороге, приводящей к этой точке, то предлагаемый алгоритм комплексирования БИНС-одометр автоматически осуществляет докалибровку масштабного коэффициента одометра и соответствующих угловых ошибок. Специальная калибровочная трасса оказывается не нужной.

Это представляется важным прикладным свойством алгоритма комплексирования.

3. Эффективность включения в вектор состояния погрешности масштаб-

ного коэффициента одометра и соответствующих угловых ошибок

Были проведены различные численные эксперименты по включению либо исключению из фазового вектора задачи комплексирования БИНС-одометр погрешности масштабного коэффициента одометра κ , соответствующих угловых ошибок $\varkappa_1$, $\varkappa_3$. Результаты обработки показали необходимость учета этих параметров как в модели задачи коррекции так и при использовании соответствующих обратных связей по оценкам этих параметров.

4. Эффективность интеграции вертикального канала БИНС и одометра

Алгоритм комплексирования БИНС-одометр решает трехмерную навигационную задачу, включая интеграцию неустойчивого вертикального канала БИНС с данными одометрического счисления. Моделирование, обработка экспериментальных данных показала отсутствие экспоненциальной расходимости решений интегрированного вертикального канала БИНС, если в навигационном счислении применять соответствующие обратные связи.

5.5 Заключение к главе

1. Разработанный имитатор задачи навигации БИНС-одометр оказался весьма эффективным средством тестирования алгоритмов интеграции, позволивший существенно сэкономить время разработки алгоритмов.

2. Обработка экспериментальных данных подтвердила унификацию разработанных алгоритмов интеграции БИНС-одометр, поскольку было получены хорошие точностные результаты в двух разных приложениях, в первом из которых (дефектоскоп) использовалась БИНС среднего класса точности (дрейф ∼1град/час), во втором, автомобильном приложении – достаточно точная БИНС.

   При этом вариативной частью примененных алгоритмов интеграции были только настройки интенсивностей шумов и начальных ковариаций.

3. На основе моделирования и обработки экспериментальных данных были сделаны важные для приложений выводы, касающиеся:

   - ослабления требований к продолжительности начальной выставки БИНС;
   - необходимости включения в состав оцениваемых параметров и варианте обратных связей погрешности κ масштабного коэффициента и перекосов $\varkappa_1$, $\varkappa_3$;
   - возможности коррекции неустойчивого автономного вертикального канала БИНС при помощи результатов одометрического счисления.

6 Заключение

Основные результаты, полученными в диссертационной работе:

1. обоснованы и проанализированы новые схемы решения задачи интеграции данных БИНС и одометра;
2. получены и обоснованы новые коррекционные модели для задачи интеграции **«БИНС+одометр»**;
3. разработаны и проверены на практике унифицированные алгоритмы интеграции БИНС-одометр;
4. разработаны алгоритмы введения обратных связей в модельные уравнения навигационного счисления для рассмотренных функциональных схем интеграции;
5. разработан имитатор задачи как инструмент численного исследования и отладки алгоритмов интеграции;
6. практическое применения алгоритмов показало их эффективность.

Список литературы

[1] Андропов А.В. Повышение точности определения местоположения внутритрубных инспекционных снарядов за счет использования спутниковых радионавигационных систем: дис. канд. техн. наук. Красноярск, 2006.

[2] Андропов А.В. Повышение точности позиционирования внутритрубных инспекционных снарядов с использованием данных ГЛОНАСС/GPS. Вестник СибГАУ - спец.вып. - стр. 28-35, 2006.

[3] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. Москва, Изд-во Наука, 1966, 580с.

[4] Боронахин А.М. Инерциальные методы и средства измерений геометрических параметров рельсового пути: дис. канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2002.

[5] Боронахин А.М., Гупалов В.И., Казанцев А.В. Способ коррекции датчика пройденной дистанции: патент РФ №2243505. 2004.

[6] Боронахин А.М. Интегрированные инерциальные технологии динамического мониторинга рельсового пути: дис. докт. техн. наук. Санкт-Петербург, 2013.

[7] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. К вопросу об информационно эквивалентных схемах в корректируемых инерциальных навигационных системах. Механика твердого тела. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, (3): 90–101, 2008.

[8] Голован А.А., Горицкий А.Ю., Парусников Н.А., Тихомиров В.В. Алгоритмы корректируемых инерциальных навигационных систем, решающих задачу топопривязки. Препринт N 2. М.: Изд-во МГУ, 1994.

[9] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп.. М.: Изд-во МГУ, 2011.

[10] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. 2-е изд. испр. и доп.. М.: МАКС Пресс, 2012.

[11] Горбачев А.Ю. Применение одометров для коррекции интегрированных навигационных систем. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. "Приборостроение"№4. Стр. 37-53, 2009.

[12] Дмитриев С.П. Инерциальные методы в инженерной геодезии. СПб: ГНЦ РФ - ЦНИИ “Электроприбор”, 1997 г. — 208 с.

[13] Казанцев А.В. Разработка инерциальных методов измерения параметров рельсового пути: дис. канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2005.

[14] Каршаков Е.В. Задача комплексирования инерциальных и спутниковых навигационных систем по первичным данным: дис. канд. ф.-м. наук. Москва, 2001.

[15] Кузнецов И.М., Пронькин А.Н., Веремеенко К.К. Навигационный комплекс аэропортового транспортного средства. Электронный журнал "Труды МАИ выпуск №47. 2011.

[16] Мальгин Н.В., Нестеров И.И., Кутман А.Б., Яудинов А.Ю., Маликов Н.Ш. Бесплатформенная инерциальная навигационная система М500. Современные системы ориентирования, навигации и топопривязки. "Оборонная техника №5-6, 2014, с.87-92.

[17] Мочалов А.В. Инерциальные методы и средства динамических измерений параметров движения и деформаций объектов: дис. докт. техн. наук. Санкт-Петербург, 2001.

[18] Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982.

[19] Панев А.А. Задача навигации мобильных диагностических комплексов в режиме постобработки: дис. канд. ф.-м. наук. Москва, 2011.

[20] Панев А.А. Задача навигации внутритрубного диагностического снаряда. «Вестник московского университета. Серия 1. Математика. Механика.» Стр. 53-56, Москва, МГУ, 2011.

[21] Dragan Obradovic, Henning Lenz, Markus Schupfner, and Kai Heesche. Multimodal Fusion for Car Navigation Systems. "Signal Processing Techniques for Knowledge Extraction and Information Fusion"part II, pp 141-158. Springer US, 2008.

[22] Elder M. Hemerly, Valter R. Schad. Implementation of a GPS/INS/Odometer navigation system. ABCM Symposium Series in Mechatronics - Vol. 3 - pp.519-524. 2008.

[23] Jacques Georgy, Tashfeen Karamat, Umar Iqbal, Aboelmagd Noureldin. Enhanced MEMS-IMU/odometer/GPS integration using mixture particle filter. GPS Solutions, Volume 15, Issue 3 , pp 239-252. 2011.

[24] Jaewon Seo, Hyung Keun Lee, Jang Gyu Lee, Chan Gook Park. Lever Arm Compensation for GPS/INS/Odometer Integrated System. International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 4, no. 2, pp. 247-254. 2006

[25] Jianchen Gao. GPS/INS/G Sensors/Yaw Rate Sensor/Wheel Speed Sensors Integrated Vehicular Positioning System. ION 2006, Fort Worth TX 26-29 Sep, Session E3. 2006.

[26] Libin Zhu, Wei Wang. CDGPS-Based Calibration of Odometer's Scale Factor with Temperature for Vehicle Navigation System.

[27] Maybeck P.S. Stochastic Models, Estimation and Control. New York: Academic Press. 1979.

[28] R.E. Phillips, G.T. Schmidt (1996) GPS/INS Integration. In: System Implications and Innovative Applications of Satellite Navigation. AGARD Lecture Series 207, 9, 1-18 Canada Communication Group, Quebec.

[29] M. Wankerl and G. F. Trommer. Evaluation of a Segmented Navigation Filter Approach for Vehicle Self-Localization in Urban Environment. Gyroscopy and Navigation, Vol. 5, No. 2, pp. 98–107. 2014.

[30] Wang Qingzhe, Fu Mengyin, Xiao Xuan, Deng Zhihong. Automatic calibration and in-motion alignment of an odometer-aided INS.Control Conference (CCC), 2012 31st Chinese, pp 2024-2028.

[31] Wei Jia, Xuan Xiao, Zhihong Deng. Self-calibration of INS/Odometer Integrated System via Kalman Filter. 2012 IEEE fifth International Conference onAdvanced Computational Intelligence(ICACI), pp. 224-228.

7 Приложение

В приложении кратко приводятся справочные материалы, используемые при построении моделей интеграции БИНС-одометр и моделей имитатора задачи.

7.1 Базовые понятия

Системы координат

Все используемые далее системы координат – правые, ортогональные.

Инерциальная система координат $O\xi$. В качестве инерциальной системы координат, задающей инерциальное пространство, принимается система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, начало O которой совпадает с геометрическим центром Земли. Ось $O\xi_3$ – ось вращения Земли, направленная на Север, ось $O\xi_1$ направлена на точку весеннего равноденствия, плоскость $O\xi_1\xi_2$ составляет плоскость земного экватора.

Гринвичская система координат $O\eta$

Точка O – геометрический центр Земли. Ось $O\eta_3$ совпадает с осью $O\xi_3$ – осью вращения Земли, плоскость $O\eta_1\eta_3$ – плоскость гринвичского (нулевого) меридиана, плоскость $O\eta_1\eta_2$ – экваториальная плоскость.

Переход от системы $O\xi$ к системе $O\eta$ определяется поворотом:

$$O\xi \quad \underset{3}{\overset{u(t-t_0)}{\longrightarrow}} \quad O\eta. \tag{69}$$

Здесь $u = 7.2921157 \cdot 10^{-5}$ – модуль угловой скорости вращения Земли, t – время, .

Матрица взаимной ориентации $A_{\eta\xi}$ систем $O\eta$, $O\xi$ имеет вид:

$$A_{\eta\xi} = \begin{pmatrix} \cos(u(t-t_0)) & \sin(u(t-t_0)) & 0 \\ -\sin(u(t-t_0)) & \cos(u(t-t_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{\xi\eta} = A_{\eta\xi}^T. \tag{70}$$

Предполагается, что в начальный момент времени t_0 гринвичская система координат $O\eta$ совпадает с инерциальной $O\xi$.

Приборная система координат Mz.

С осями чувствительности ньютонометров БИНС связана приборная система координат Mz, где точка M – точка, расположения приведенной чувствительной массы блока ньютонометров БИНС.

Географическая система координат Mx^0 (Ox^0)

Географическая вертикаль в точке M определяется как единичный вектор, проходящий через точку M по внешней нормали к поверхности модельного эллипсоида Земли.

Другое, эквивалентное, определение географической вертикали – единичный вектор, имеющий обратное направление вектора нормальной силы **тяжести** в точке M.

Ось Mx_3^0 системы координат Mx^0 совпадает с географической вертикалью места. Положение орта $\vec{x^0}_3$ в осях $O\eta$ определяется углами λ, φ – долготой и географической широтой. Долгота λ определяется как угол между осью $O\eta_1$ и проекцией орта $\vec{x^0}_3$ на экваториальную плоскость $O\eta_1\eta_2$. Географическая широта φ – угол между Mx_3^0 и экваториальной плоскостью $O\eta_1\eta_2$, отсчитываемый в положительном направлении от этой плоскости.

Оси Mx_1^0, Mx_2^0 географического трехгранника Mx^0 лежат в плоскости местного горизонта, ось Mx_1^0 направлена на Восток, ось Mx_2^0 направлена на Север.

Вместе с системой координат Mx^0 введем аналогично ориентированную систему координат Ox^0 (оси $Ox_i^0 \| Mx_i^0$) с началом в центре Земли O.

Система координат Ox^0 задается по отношению к системе $O\eta$ последовательностью поворотов:

$$O\eta \quad \underset{3}{\xrightarrow{\frac{\pi}{2}+\lambda}} \quad \underset{1}{\xrightarrow{\frac{\pi}{2}-\varphi}} \quad Ox^0.$$

Матрица взаимной ориентации $B_{x^0\eta}$ систем Ox^0, $O\eta$ имеет вид :

$$B_{x^0\eta} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\lambda\sin\varphi & -\sin\lambda\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\lambda\cos\varphi & \sin\lambda\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad B_{\eta x^0} = B^T_{x^0\eta}. \tag{71}$$

Углы курса, крена, тангажа

Ориентация трехгранника Mz относительного географического Mx^0 определяется углами истинного курса ψ, крена γ, тангажа ϑ в соответствии со следующей последовательностью поворотов:

$$Mx^0 \quad \underset{3}{\xrightarrow{-\psi}} \underset{1}{\xrightarrow{\vartheta}} \underset{2}{\xrightarrow{\gamma}} \quad Mz. \tag{72}$$

Углом истинного курса ψ называется угол между осью Mx_2^0 (направлением на Север) и проекцией оси Mz_2 БИНС на горизонтальную плоскость $Mx_1^0x_2^0$, отсчитываемый **по часовой** стрелке. Тангаж ϑ – угол между осью Mz_2 и горизонтальной плоскостью $Mx_1^0x_2^0$. Крен γ – угол поворота БИНС вокруг оси Mz_2.

Матрица взаимной ориентации B_{zx^0} систем Mz, Mx^0 имеет вид:

$$\begin{aligned} B_{zx^0} &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma & -\sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma \\ \sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma & -\sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma \end{pmatrix}, \\ B_{x^0z} &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma & \sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma \\ -\sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma & \cos\psi\cos\vartheta & -\sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma \\ -\cos\vartheta\sin\gamma & \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{73}$$

Навигационная модель формы Земли.

В качестве навигационной модели формы Земли используется эллипсоид вращения, ось которого совпадает с осью вращения Земли. Параметры этого эллипсоида: a – большая полуось; b – малая полуось; $\varepsilon = \frac{a-b}{a}$ – сжатие; $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ – квадрат первого эксцентриситета.

Географические координаты точки M.

Расстояние между точкой M и ее проекцией (вдоль географической вертикали Mx_3^0) на поверхность модельного эллипсоида называется высотой h. Угол между ортом Mx_3^0

и плоскостью экватора земного эллипсоида, отсчитываемый в положительном направлении от этой плоскости, называется географической широтой точки M φ. Долгота λ определяется как угол между первой экваториальной осью $O\eta_1$ и проекцией орта Mx_3^0 на экваториальную плоскость.

Радиусы кривизны меридианального сечения, первого вертикала

Меридианальное сечение проходит через ось вращения Земли и радиус-вектор $\vec{r}$ точки M. Сечение первого вертикала проходит через радиус-вектор $\vec{r}$ и составляет угол φ с плоскостью экватора.

Обозначим через R_N – радиус кривизны меридианального сечения, R_E – радиус кривизны первого вертикала. Имеем

$$R_E = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} + h, \quad R_N = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} + h. \tag{74}$$

Связь географических и гринвичских координат точки M.

Имеем

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (R_E^0 + h)\cos\varphi\cos\lambda, \\ \eta_2 &= (R_E^0 + h)\cos\varphi\sin\lambda, \\ \eta_3 &= [(1-e^2)R_E^0 + h]\sin\varphi. \end{aligned} \tag{75}$$

Кинематика вращательных движений

Кинематические уравнения Пуассона

Пусть A_{yx} матрица взаимной ориентации некоторых систем координат Oy и Ox, $\Omega_y = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ – вектор угловой скорости трехгранника Oy относительно Ox. Тогда для матрицы ориентации A_{yx} справедливо дифференциальное уравнение - кинематическое уравнение Пуассона:

$$\dot{A}_{yx} = \widehat{\Omega}_y A_{yx}, \qquad \hat{\Omega}_y = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Связь векторов абсолютной и относительной скоростей движения объекта.

Для вектора абсолютной скорости движения используется обозначение v. Для вектора относительной скорости – обозначение V.

Имеем

$$\bar{v} = \bar{V} + \bar{u} \times \bar{r},$$

где $\bar{u}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M.

Для географического трехгранника Mx^0 имеем

$$\begin{aligned} v_1 &= v_E = V_1 + uR_E\cos\varphi = V_E + uR_E\cos\varphi, \\ v_2 &= v_N = V_2 = V_N, \\ v_3 &= v_{UP} = V_{UP} = V_3, \end{aligned} \tag{77}$$

где компоненты с индексом E относятся к восточной составляющей соответствующей проекции скорости, с индексом N – к северной, с индексом UP – к вертикальной.

Выражения для абсолютных и относительных угловых скоростей географического трехгранника Mx^0.

Будем использовать символ ω для абсолютной угловой скорости трехгранника, Ω – относительной угловой скорости, зависящей от текущих координат и линейной скорости точки M. Выражения для абсолютной и относительной угловых скоростей географического трехгранника Mx^0 таковы:

$$u_{x^0} = \begin{pmatrix} 0 \\ u\cos\varphi \\ u\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \Omega_{x^0} = \begin{pmatrix} -\frac{V_N}{R_N} \\ \frac{V_E}{R_E} \\ \frac{V_E}{R_E}\operatorname{tg}\varphi \end{pmatrix}, \quad \omega_{x^0} = \begin{pmatrix} -\frac{V_N}{R_N} \\ u\cos\varphi + \frac{V_E}{R_E} \\ u\sin\varphi + \frac{V_E}{R_E}\operatorname{tg}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_N}{R_N} \\ \frac{v_E}{R_E} \\ \frac{v_E}{R_E}\operatorname{tg}\varphi \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Кинематические уравнения для географических координат φ, λ, h.

Кинематические уравнения для географических координат таковы:

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \frac{V_N}{R_N}, \\ \dot\lambda &= \frac{V_E}{R_E\cos\varphi}, \\ \dot h &= V_{UP}, \end{aligned} \tag{79}$$

что равносильно уравнению Пуассона для систем координат Ox^0 и $O\eta$:

$$\dot B_{x^0\eta} = \widehat\Omega_{x^0} B_{x^0\eta}.$$

Выражения угловых скоростей приборной системы координат Mz.

$$\begin{aligned} \bar\omega_z &= \bar\Omega_z + \bar u_z, \\ \Omega_z &= \dot{\bar\psi} + \dot{\bar\gamma} + \dot{\bar\vartheta} + B_{zx^0}\Omega_{x^0}, \qquad u_z = B_{zx^0}u_{x^0}, \end{aligned} \tag{80}$$

Здесь B_{zx^0} – соответствующая матрица взаимной ориентации.

Имеем

$$\Omega_z = \begin{pmatrix} \dot\gamma - \dot\psi\sin\vartheta \\ \dot\vartheta\sin\gamma - \dot\psi\cos\vartheta\cos\gamma \\ \dot\vartheta\cos\gamma + \dot\psi\cos\vartheta\sin\gamma \end{pmatrix} + B_{zx^0}\Omega_{x^0}. \tag{81}$$

Обозначим через $\omega_{x^0/s}$ – результат перепроектировки вектора ω_{x^0} на оси Mz: $\omega_{x^0/z} = B_{zx^0}\omega_{x^0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot\vartheta &= (\omega_{z_3} - \omega_{x^0/z_3})\cos\gamma + (\omega_{z_2} - \omega_{x^0/z_2})\sin\gamma, \\ \dot\psi &= \frac{(\omega_{z_3} - \omega_{x^0/z_3})\sin\gamma - (\omega_{z_2} - \omega_{x^0/z_2})\cos\gamma}{\cos\vartheta}, \\ \dot\gamma &= \omega_{z_1} - \omega_{x^0/z_1} + \dot\psi\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{82}$$

Модели нормальных удельных сил тяготения и тяжести в осях географического трехгранника

Удельная сила тяжести $\bar{g}$ в каждой точке есть равнодействующая удельной силы ньютонова притяжения $\bar{g}^0$ всей массы Земли и центробежной силы $\bar{f}_c$, вызванной вращением Земли вокруг своей оси

$$\bar{g} = \bar{g}^0 + \bar{f}_c, \qquad \bar{f}_c = -\bar{u} \times \bar{u} \times \bar{r}, \tag{83}$$

где $\bar{u}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки.

В осях географического трехгранника Ox^0 вектор ускорения удельной силы тяжести $\bar{g}_x = (g_1, g_2, g_3)^T$ имеет следующий вид:

$$g_1 \;=\; g_2 = 0, \; g_3 = -g,$$

где g – обозначает также абсолютное значение (модуль) ускорения силы тяжести.

На практике используется формула Гельмерта для нормального распределения силы тяжести:

$$g \;=\; 9.78079(1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi) - 0.00014 - 2\omega_0^2 h. \tag{84}$$

Здесь $\omega_0 \simeq 1.2383 \cdot 10^{-3}\text{c}^{-1}$ – частота Шулера.

Ускорения силы тяжести $\bar{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ и тяготения $\bar{g}^0 = (g_1^0, g_2^0, g_3^0)^T$ связаны соотношением (83):

$$g = g^0 - \widehat{u}^2 r. \tag{85}$$

В явном виде в осях географического трехгранника Ox^0 вектор тяготения g^0 имеет вид:

$$g^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 R_E \sin\varphi \cos\varphi \\ -g - u^2 R_E \cos^2 \varphi. \end{pmatrix}$$

Общая структура динамических уравнений движения в подвижной системе координат

Пусть $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ координаты точки M в некоторой подвижной системе координат Oy. Обозначим через ω_y, Ω_y, u_y соответственно векторы абсолютной и относительной угловой скорости трехгранника Oy, вектор угловой скорости вращения Земли. Пусть $A_{y\xi}$ – матрица взаимной ориентации систем координат Oy и $O\xi$, $B_{y\eta}$ – матрица взаимной ориентации трехгранника Oy и гринвичской системы координат $O\eta$. Кинематические уравнения Пуассона для матриц ориентации $A_{y\xi}$, $B_{y\eta}$ имеют вид:

$$\dot{A}_{y\xi} = \widehat{\omega}_y A_{y\xi}, \qquad \dot{B}_{y\eta} = \widehat{\Omega}_y B_{y\eta}.$$

Обозначим через $v_y = (v_1, v_2, v_3)^T$, $V_y = (V_1, V_2, V_3)^T$ – векторы абсолютной и относительной скорости точки M в осях Oy, причем

$$v_y = V_y - \widehat{u}_y y.$$

Тогда уравнения движения точки M в осях Oy в так называемых абсолютных переменных v_y, ω_y примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{y} \;&=\; \widehat{\omega}_y y + v_y, \\ \dot{v}_y \;&=\; \widehat{\omega}_y v_y + f_y + g_y^0. \end{aligned} \tag{86}$$

Где $f_y = A_{y\xi} f_\xi$ – вектор внешней удельной силы в осях Oy, $g_y^0 = A_{y\xi} g_\xi^0$ – вектор удельной силы тяготения в осях Oy.

Уравнения движения точки M в осях Oy в так называемых относительных переменных V_y, Ω_y примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \widehat{\Omega}_y y + V_y, \\ \dot{V}_y &= \left(\widehat{\Omega}_y + 2\widehat{u}_y\right) V_y + f_y + g_y - \widehat{u}_y^2 y = \left(\widehat{\Omega}_y + 2\widehat{u}_y\right) V_y + f_y + g_y, \end{aligned} \tag{87}$$

Где $g_y = g_y^0 - \hat{u}_y^2 y$, по определению, удельная сила тяжести.

Динамические уравнения движения в географической системе координат Ox^0

Абсолютные переменные.

Уравнения, описывающие поведение во времени абсолютных $v_x = (v_{x^01}, v_{x^02}, v_{x^03})^T$ скоростей движения точки M в осях Ox^0:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{x^01} &= \omega_{x^03} v_{x^02} - \omega_{x^02} v_{x^03} + f_{x^01} + g_{x_1}^0, \\ \dot{v}_{x^02} &= -\omega_{x^03} v_{x^01} + \omega_{x^01} v_{x^03} + f_{x^02} + g_{x_2}^0, \\ \dot{v}_{x^03} &= \omega_{x^02} v_{x^01} - \omega_{x^01} v_{x^02} + f_{x^03} + g_{x_3}^0. \end{aligned} \tag{88}$$

Здесь $f_x = (f_{x^01}, f_{x^02}, f_{x^03})^T$ – вектор удельной внешней силы, действующей на объект; $g_x^0 = (g_{x_1}^0, g_{x_2}^0, g_{x_3}^0)^T$ – вектор удельной силы тяготения.

Относительные переменные. Уравнения, описывающие поведение во времени относительных $V_{x^0} = (V_{x^01}, V_{x^02}, V_{x^03})^T$ скоростей движения точки M в осях Ox^0:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{x^01} &= \left(\Omega_{x^03} + 2u_{x^03}\right) V_{x^02} - \left(\Omega_{x^02} + 2u_{x^02}\right) V_{x^02} + f_{x^02} + g_1, \\ \dot{V}_{x^02} &= -\left(\Omega_{x^03} + 2u_{x^03}\right) V_{x^01} + \left(\Omega_{x^01} + 2u_{x^01}\right) V_{x^03} + f_{x^02} + g_2, \\ \dot{V}_{x^03} &= \left(\Omega_{x^02} + 2u_{x^02}\right) V_{x^01} - \left(\Omega_{x^01} + 2u_{x^01}\right) V_{x^02} + f_{x^03} + g_3. \end{aligned} \tag{89}$$

Здесь $f_{x^0} = (f_{x^01}, f_{x^02}, f_{x^03})^T$ – вектор удельной внешней силы, действующей на объект; $g_x = (g_1, g_2, g_3)^T$ – вектор удельной силы тяжести.

7.2 Имитатор

Описываемые в работе алгоритмы решения задачи навигации и оценивания вектора ошибок x^* рассматриваемой системы отрабатывались на данных, полученных аналитическим имитатором траектории движения. Под аналитичностью в данном случае понимается то, что в явном виде задаются функции от времени продольная скорость объекта $V(t)$ в связанных осях Ms, причем производная скорости $\dot{V}$ считается также известной, и углов ориентации относительно опорного географического трехгранника Mx^0:

$$V_s = (0, V(t), 0)^\top.$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= A_\gamma \sin \omega_\gamma t, \\ \vartheta(t) &= A_\vartheta \sin \omega_\vartheta t, \\ \psi(t) &= \psi_0 + A_\psi \sin \omega_\psi t, \end{aligned} \tag{90}$$

где A_γ, A_ϑ, A_ψ – амплитуды, ω_γ, ω_ϑ, ω_ψ – частоты колебаний корпуса объекта, ψ_0 – начальное значение угла истинного курса.

С помощью введенных выше параметров определяются все необходимые траекторные параметры движения объекта.

Ниже дается последовательное описание математических моделей для определения согласованных реализаций траекторных параметров движения центра масс объекта:

- географических координат: λ, φ, h;
- линейных относительных скоростей: V_E, V_N, V_{UP};
- компонент мгновенной внешней удельной силы: f_E, f_N, f_{UP}.

Под согласованностью здесь понимается то, что на основе одношагового (простейшего) метода Эйлера численного интегрирования кинематических и динамических уравнений движения центра масс объекта, входом для которых служат:

- значения f_E, f_N, f_{UP} идеальных "платформенных" акселерометров;
- согласованные позиционные $\lambda(t_0)$, $\varphi(t_0)$, $h(t_0)$ и скоростные $V_E(t_0)$, $V_N(t_0)$, $V_{UP}(t_0)$ начальные условия;

счисляемая траектория совпадает с траекторией имитатора.

Определение восточной V_E, северной V_N, вертикальной V_{UP} составляющих скорости движения

Компоненты V_E, V_N, V_{UP} вектора относительной скорости движения путем перепроектировки:

$$\begin{pmatrix} V_E \\ V_N \\ V_{UP} \end{pmatrix} = A_{x^0 s} \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \sin\psi\cos\vartheta \\ \cos\psi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Здесь $V = V(t_i)$, t_i – текущее время моделирования.

Определение восточной f_E, северной f_N, вертикальной f_{UP} составляющих мгновенной удельной внешней силы

Сначала определяются производные $\dot V_E$, $\dot V_N$, $\dot V_{UP}$ компонент вектора относительной скорости. Здесь возможны два варианта:

1. Использование явных формул

$$\begin{aligned}
\dot V_E &= V\left(\ \ \dot\psi\cos\psi\cos\vartheta - \dot\vartheta\sin\psi\sin\vartheta\right) + \dot V\sin\psi\cos\vartheta,\\
\dot V_N &= V\left(-\dot\psi\sin\psi\cos\vartheta - \dot\vartheta\cos\psi\sin\vartheta\right) + \dot V\cos\psi\cos\vartheta,\\
\dot V_{UP} &= V\dot\vartheta\cos\vartheta + \dot V\sin\vartheta,
\end{aligned}\tag{92}$$

   где производные $\dot\psi$, $\dot\theta$, $\dot\gamma$ задаются аналитически в соответствии с (90).

2. Использование соотношений, основанных на методе Эйлера численного интегрирования.

$$\begin{aligned}
\dot V_E(t_{i+1}) &= \frac{V_E(t_{i+1}) - V_E(t_i)}{\Delta t},\\
\dot V_N(t_{i+1}) &= \frac{V_N(t_{i+1}) - V_N(t_i)}{\Delta t},\\
\dot V_{UP}(t_{i+1}) &= \frac{V_{UP}(t_{i+1}) - V_{UP}(t_i)}{\Delta t}.
\end{aligned}\tag{93}$$

Далее с помощью значений производных $\dot V_E$, $\dot V_N$, $\dot V_{UP}$ определяются компоненты f_E, f_N, f_{UP} вектора мгновенной внешней удельной силы

$$\begin{aligned}
f_E(t_{i+1}) &= \dot V_E(t_{i+1})\ - (\Omega_3(t_i) + 2u_3(t_i))\,V_N(t_i) + (\Omega_2(t_i) + 2u_2(t_i))\,V_{UP}(t_i),\\
f_N(t_{i+1}) &= \dot V_N(t_{i+1})\ + (\Omega_3(t_i) + 2u_3(t_i))\,V_E(t_i) - (\Omega_1(t_i) + 2u_1(t_i))\,V_{UP}(t_i),\\
f_{UP}(t_{i+1}) &= \dot V_{UP}(t_{i+1}) - (\Omega_2(t_i) + 2u_2(t_i))\,V_E(t_i) + (\Omega_1(t_i) + 2u_1(t_i))\,V_N(t_i) +\\
&+\ \ g(t_i).
\end{aligned}\tag{94}$$

Второй способ (93) вычисления производных $\dot V_E$, $\dot V_N$, $\dot V_{UP}$ скоростей позволяет сформировать идеальные показания акселерометров и в точности обеспечить формулу численного интегрирования динамических уравнений:

$$\begin{aligned}
V_E(t_{i+1}) &= V_E(t_i) + [(\Omega_3(t_i) + 2u_3(t_i))\,V_N(t_i) - (\Omega_2(t_i) + 2u_2(t_i))\,V_{UP}(t_i) + f_E(t_{i+1})]\,\Delta t,\\
V_N(t_{i+1}) &= V_N(t_i) + [-(\Omega_3(t_i) + 2u_3(t_i))\,V_E(t_i) + (\Omega_1(t_i) + 2u_1(t_i))\,V_{UP}(t_i) + f_N(t_{i+1})]\,\Delta t,\\
V_{UP}(t_{i+1}) &= V_{UP}(t_i) + [(\Omega_2(t_i) + 2u_2(t_i))\,V_E(t_i) - (\Omega_1(t_i) + 2u_1(t_i)]\,V_N(t_i) - g(t_i) + f_{UP}(t_{i+1}))\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Определение географических координат λ, φ, h

С помощью значений скоростей V_E, V_N, V_{UP} в текущий момент времени t_i формируются правые части кинематических уравнений движения

$$\begin{aligned}
\dot\varphi &= \frac{V_N}{R_N + h},\\
\dot\lambda &= \frac{V_E}{(R_E + h)\cos\varphi},\\
\dot h &= V_{UP},
\end{aligned}\tag{95}$$

интегрируя которые (с заданными начальными условиями), далее определяются географические координаты объекта.

Определение вектора ω_s мгновенной абсолютной угловой скорости связанной системы координат

Для вычисления мгновенной абсолютной угловой скорости ω_s используем значения производных $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\vartheta}$ углов курса, крена, тангажа, полученные либо аналитически, либо прямым численным дифференцированием этих углов.

Тогда

$$\begin{aligned}
\omega_s &= \Omega_s + u_s, \quad u_s = B_{sx^0} u_{x^0}, \quad u_{x^0} = \begin{pmatrix} 0 \\ u\cos\varphi \\ u\sin\varphi \end{pmatrix}, \\
\Omega_s &= \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos\gamma + \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma \\ \dot{\gamma} - \dot{\psi}\sin\vartheta \\ \dot{\vartheta}\sin\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma \end{pmatrix} + B_{sx^0} \begin{pmatrix} -\frac{V_N}{R_N+h} \\ \frac{V_E}{R_E+h} \\ \frac{V_E}{R_E+h}\operatorname{tg}\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$