МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЛЫСАК Михаил Дмитриевич

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛЯПУНОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: Сергеев Игорь Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: Глызин Сергей Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой компьютерных сетей
ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова»;

Дементьев Юрий Игоревич
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
ФГБОУ ВПО "Московский государственный
технический университет гражданской авиации".

Ведущая организация: Институт математики НАН Беларуси

Защита диссертации состоится 21 октября 2016 г. в 16 ч 40 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/.

Автореферат разослан   июля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Представленная работа относится к качественной теории дифференциальных уравнений.

Важное место в качественной теории дифференциальных уравнений в целом и в теории устойчивости, в частности, занимают линейные однородные уравнения и системы, лежащие в основе исследования решений нелинейных систем по линейному приближению. В свою очередь, изучение линейных нестационарных систем порождает большое число задач теоретического характера, исследование которых основывается на асимптотических свойствах решений этих систем.

Значительную роль в исследовании устойчивости по первому приближению играет теория характеристических показателей, которая была создана Ляпуновым[1] и получила дальнейшее развитие в работах многих авторов. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.А. Барабанов, С.Н. Попова, Е.К. Макаров, О.И. Морозов, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков, Ю.И. Дементьев и другие. Исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[2,3] и монографиях[4,5].

Характеристические показатели Ляпунова, а также введенные позже нижние характеристические показатели Перрона, степенные показатели Демидовича, экспоненциальные и σ-показатели Изобова, центральные показатели Винограда, генеральные (особые) показатели Боля, вспомогательные показатели Миллионщикова служат для исследования различных асимптотических свойств нормы решения и используются при исследовании различных типов устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных систем.

Последнее время в результате бурного развития теории колебаний возник вопрос об определении аналогов показателей Ляпунова для описания колебательных свойств решений дифференциальных уравнений и систем.

Вопросы колеблемости решений как линейных, так и нелинейных дифференциальных систем изучались в работах многих математиков, начиная с фундаментальных исследований Ж. Штурма и А. Кнезера. Среди математиков, успешно продвигавших исследования по тематике колеблемости, необходимо особо отметить В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, Н.А. Изобова, А.Н. Левина, И.В. Асташову, С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова и других (обширные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре[6] и моногра-

[1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.

[2] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[3] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[4] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[5] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[6] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Успехи матем. наук. 1969.

фиях[7,8]).

В то же время, в этих работах не затрагивались вопросы определения характеристик колеблемости ляпуновского типа. Первый шаг в этом направлении сделал в 2004 году И.Н. Сергеев, введя определение характеристической частоты скалярной функции, которая имеет смысл среднего числа нулей этой функции на полупрямой[9]. Регуляризировав характеристические частоты по Миллионщикову[10], И.Н. Сергеев далее выделил главные характеристические частоты дифференциального уравнения n-ого порядка, спектр которых для автономного уравнения подобен спектру показателей Ляпунова и состоит из множества модулей мнимых частей корней соответствующего характеристического уравнения. Подробное исследование свойств этих частот содержится, в частности, в работах[9,11,12,13].

Естественное обобщение понятия характеристической частоты для решений однородных дифференциальных систем получило в работах[14,15], где введены полные и векторные частоты, а также установлены их важнейшие свойства и, в частности, доказана их ограниченность на решениях ограниченных систем.

Введенные в 2010 году И.Н. Сергеевым[16] понятия скорости и показателя, а также показателя блуждаемости представляют собой дальнейшее развитие понятий полной и векторной частот. Скорость блуждания имеет смысл средней угловой скорости вращения вектора решения вокруг начала координат, а показатели блуждания и блуждаемости учитывают только ту информацию об угловой скорости, которая не гасится линейными невырожденными преобразованиями.

Тесная связь между характеристиками колеблемости и блуждаемости проявилась особенно наглядно после того, как в работе[17] было установлено, что показатели блуждания решений ограничивают сверху их векторные частоты и совпадают с

24. № 2. С. 43–96.

[7]Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа // И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012.

[8]Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Ассимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1990.

[9]Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1573.

[10]Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №8. С. 1408–1416.

[11]Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2006. **25**. С. 249–294.

[12]Сергеев И.Н. О различной зависимости от параметра главных частот нулей, знаков и корней линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2007. **43**. №6. С. 853.

[13]Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2012. **29**. С. 414–442.

[14]Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. **45**. №6. С. 908.

[15]Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

[16]Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №6. С. 902.

[17]Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

векторными гиперчастотами[18,19]. В последних работах также получено интегральное равенство, связывающее частоту гиперкратных корней вектор-функции на отрезке с длиной пути ее следа на единичной сфере.

Особое место в исследовании характеристик ляпуновского типа занимает изучение их спектров (множеств значений) как на множестве решений заданной системы, так и на множестве решений сразу всех систем определенного вида.

Известно[4], что спектр показателей Ляпунова ограниченной линейной системы представляет собой набор из n чисел(с учетом кратности), а в случае ее автономности совпадает со множеством действительных частей корней характеристического многочлена. Однако уже для нижних показателей Перрона это не верно, более того[5,20], их спектр может совпадать с любым (ограниченным и замкнутым сверху) суслинским множеством на числовой прямой.

Как показано в работе[15], спектр практически всех характеристик колеблемости и блуждаемости для уравнения второго порядка состоит ровно из одного числа. Однако уже для уравнения третьего порядка спектр, например, характеристической частоты решения может содержать сколь угодно много (и даже целый отрезок) значений[21,22]. Возникает закономерный вопрос, каким может быть спектр скорости блуждания для различных типов систем.

В работе[17] установлено, что векторные частоты, а также характеристики блуждаемости ограничены нормой матрицы, задающей линейную систему, откуда непосредственно следует их стремление к нулю при уменьшении нормы этой матрицы. Однако в случае линейного уравнения данное соотношение не гарантирует факта малости таких характеристик при малости коэффициентов. Тем не менее, этот факт был дополнительно установлен сначала в работе[17] для частот решений линейного уравнения, а затем, с учетом соотношений между различными характеристиками колеблемости и блуждаемости, также и для многих других характеристик, кроме скорости блуждания и показателя блуждаемости.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование свойств спектров скорости и показателя блуждания линейных однородных систем дифференциальных уравнений *произвольного порядка*, систем специального вида, а также дифференциальных уравнений *второго и третьего порядка*.

---

[18] Бурлаков Д.С., Сергеев И.Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 899.

[19] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сборник. 2013. **204**. №1. С. 120–137.

[20] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №12. С. 1592–1600.

[21] Горицкий А.Ю. Характеристические частоты линейных комбинаций синусов // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. № 6. С. 860.

[22] Смоленцев М.В. Существование линейного уравнения третьего порядка со счетным спектром частот // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 242–251.

Научная новизна работы

В диссертации получены следующие основные результаты:

- получены спектры верхней и нижней скорости блуждания на классах полных, диагональных, треугольных систем второго порядка с ограниченными коэффициентами, а также систем, отвечающих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с ограниченными коэффициентами; приведены примеры систем, на решениях которых достигаются полученные спектры;

- получены оценки сверху спектра верхней скорости блуждания для класса неавтономных линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка при условии малости их коэффициентов;

- исследованы спектры скорости блуждания и показателей блуждания и блуждаемости на решениях систем специального вида, а также установлены достаточные условия совпадения спектра показателей блуждания и блуждаемости с граничными значениями спектра скорости блуждания;

- получены спектры верхней и нижней скоростей блуждания на классах диагональных систем произвольной размерности с ограниченными коэффициентами, а также полных систем четной размерности с ограниченными коэффициентами; приведена оценка сверху спектров скоростей блуждания на классе полных систем нечетной размерности с ограниченными коэффициентами, а также указан отрезок, принадлежащий этому спектру; приведены примеры систем, на решениях которых достигаются каждый из полученных спектров.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по Качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2010–2015).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ по итогам года (г. Москва, декабрь 2014 г.);
- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 102 страницы. Библиография включает 89 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение

В кратком введении описывается история вопроса, обосновывается актуальность работы и формулируются цели исследования. Даются основные определения и излагаются основные результаты диссертации.

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и заданной константы $M > 0$ во множестве $\mathcal{M}^n$ систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; \infty), \tag{1}$$

с кусочно непрерывными коэффициентами (каждую систему будем отождествлять с задающей ее матричной функцией A) определим следующие подмножества:

1) $\mathcal{M}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными коэффициентами

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}(t)| \leqslant M;$$

2) $\mathcal{T}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}_M$, состоящее из *верхне-треугольных* систем, т. е. систем (1) вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix};$$

3) $\mathcal{D}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}_M$, состоящее из *диагональных* систем

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_n(t) \end{pmatrix};$$

4) $\mathcal{E}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}^n$ систем, отвечающих линейным *уравнениям* n*-ого порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0,$$

отождествляемым каждое со своим набором $(a_1,\dots,a_n):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ кусочно непрерывных ограниченных коэффициентов

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\max_{i=1,\dots,n}|a_i(t)|\leqslant M.$$

Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A\in\mathcal{M}^n$ и положим

$$\mathcal{S}_*\equiv\bigcup_{A\in\mathcal{M}^n}\mathcal{S}_*(A),\quad \mathcal{S}_*(\mathcal{K})\equiv\bigcup_{A\in\mathcal{K}}\mathcal{S}_*(A),$$

где

$$\mathcal{K}=\mathcal{M}_M,\mathcal{T}_M,\mathcal{D}_M,\mathcal{E}_M. \tag{2}$$

Определение 1[16]. Для каждого решения $x\in\mathcal{S}_*(\mathcal{M}^n)$ определим его *верхнюю и нижнюю скорости блуждания*, *верхний* и *нижний показатели блуждаемости*, а также *верхний* и *нижний показатели блуждания* соответственно формулами

$$\hat{\mu}(x)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\gamma(x,t),\qquad \check{\mu}(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\gamma(x,t), \tag{3}$$

$$\hat{\rho}(x)\equiv\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\hat{\mu}(Lx),\quad \check{\rho}(x)\equiv\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\check{\mu}(Lx).$$

$$\hat{\eta}(x)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}\gamma(Lx,t),\quad \check{\eta}(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}\gamma(Lx,t),$$

где

$$\gamma(x,t)=\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}\right|d\tau,\quad |x(\tau)|\equiv\sqrt{x_1(\tau)^2+...+x_n(\tau)^2}.$$

В случае совпадения *верхнего* и *нижнего* значений какого-либо из перечисленных *показателей* $\hat{\varkappa}(x)=\check{\varkappa}(x)$ будем говорить, что *показатель* $\varkappa(x)$ является *точным.*

Определение 2[17]. *Спектром* показателя $\varkappa$ (*верхнего* или *нижнего*) для системы $A\in\mathcal{M}^n$ назовем область его значений

$$\operatorname{Sp}_\varkappa(A)=\varkappa(S_*(A))\equiv\{\varkappa(x)\mid x\in\mathcal{S}_*(A)\},$$

а также определим *спектр* показателя $\varkappa$ на целом классе (2) систем

$$\operatorname{Sp}_\varkappa(\mathcal{K})=\bigcup_{A\in\mathcal{K}}\operatorname{Sp}_\varkappa(A).$$

Глава 1

Основным результатом главы 1 являются точные оценки скорости блуждания ненулевых решений линейных систем второго порядка. Приводятся спектры скорости блуждания на каждом из классов $\mathcal{K}$ (2) двумерных систем и доказывается

Теорема 1. *При $n=2$ для каждого класса $\mathcal{K}$ (2) спектр каждой из функций $\hat{\mu}$ и $\check{\mu}$ (3) на множестве $\mathcal{S}_*(\mathcal{K})$ представляет собой отрезок $[0;d(\mathcal{K})]$, правый конец которого есть соответственно*

$$d(\mathcal{M}_M)=2M,\quad d(\mathcal{T}_M)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}M,\quad d(\mathcal{D}_M)=M,$$

$$d(\mathcal{E}_M) = \begin{cases} c_1(M), & M \geqslant 4, \\ \max\{c_1(M), c_2(M)\}, & 0 < M < 4, \end{cases}$$

где

$$c_1(M) = \max_{k \geqslant 0} \frac{(Mk+M)^2 - k^4}{M(k+1)(k^2+1)},$$

$$c_2(M) = \pi \left(\frac{4}{\sqrt{4M - M^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{M}{\sqrt{4M-M^2}} \right) \right)^{-1}.$$

В главе 1 также построено линейное дифференциальное уравнение второго порядка из множества $\mathcal{E}_M$, на решениях которого скорость блуждания принимает точные значения, которые, в зависимости от начальных условий, заполняют весь отрезок $[0, c_1(M)]$.

Глава 2

В главе 2 приводятся оценки сверху спектра верхней скорости блуждания для класса $\mathcal{E}_M$ систем, отвечающих линейным уравнениям второго и третьего порядка, при достаточно малых $M > 0$.

Теорема 2. *При $n = 2$ и $M \leqslant 2$ верхняя скорость блуждания $\hat{\mu}(x)$ любого решения $x \in S_*(\mathcal{E}_M)$ ограничена сверху величиной $2\sqrt{M}$, стремящейся к нулю при $M \to 0$.*

Теорема 3. *При $n = 3$ и $M < 0,03$ верхняя скорость блуждания $\hat{\mu}(x)$ любого решения $x \in S_*(\mathcal{E}_M)$ ограничена сверху величиной $36\pi\sqrt[4]{M}$, стремящейся к нулю при $M \to 0$.*

Доказательство теоремы 2 проводится из оценок, полученных при доказательстве теоремы 1.

Для доказательства теоремы 3 осуществляется переход в сферические координаты. Показывается, что все возможные траектории на сфере, задаваемые движением конца единичного вектора, сонаправленного с вектором решения, делятся на два типа. Скорость блуждания траекторий первого типа не превосходит $7\sqrt{M}$, а второго типа — не превосходит $36\pi\sqrt[4]{M}$.

Глава 3

В главе 3 устанавливаются возможные значения спектров скорости блуждания и показателей блуждания и блуждаемости систем $A \in \mathcal{M}^3$ с матричной функцией специального вида

$$A = A_{fg} \equiv \operatorname{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}, g \right], \tag{4}$$

задаваемой парой непрерывных функций $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Фиксируем первообразную G функции g, удовлетворяющую условию $G(0) = 0$, и обозначим $E(t) \equiv \exp G(t)$ и $H(t) \equiv |f(t)|/E(t)$. Предел любой функции при $t \to \infty$ будем обозначать ее значением в точке ∞. Потребуем, чтобы для матричной функции (4) существовали пределы $f(\infty)$, $g(\infty)$, а если $g(\infty) = 0$ или $f(\infty) = \infty$, то еще и пределы $G(\infty)$ или $H(\infty)$ соответственно.

Определение 3. В перечисленных предположениях назовем систему вида (4):

I) системой *первого типа* (обозначение $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{I}}_{fg}$), если дополнительно выполняется хотя бы одно из условий

1) $f(\infty) = 0$,

2) $0 < |f(\infty)| < \infty$ и $G(\infty) = \infty$,

3) $f(\infty) = \infty$ и $H(\infty) \in \{0, \infty\}$;

II) системой *второго типа* (обозначение $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{II}}_{fg}$), если выполнено хотя бы одно из условий

4) $0 < |f(\infty)| < \infty$, $g(\infty) = 0$ и $G(\infty) < \infty$;

5) $f(\infty) = \infty$ и $H(\infty) \in (0, \infty)$.

Устанавливаются условия на матричную функцию (4), достаточные для совпадения экстремальных значений спектров ее скоростей и показателей блуждания и блуждаемости.

Теорема 4. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{I}}_{fg} \cup \mathcal{M}^{\mathrm{II}}_{fg}$ скорости блуждания и показатели блуждания и блуждаемости всех ненулевых решений являются точными, причем выполнены равенства*

$$\mathrm{Sp}_\eta(A) = \mathrm{Sp}_\rho(A) = \{0, |f(\infty)|\},$$

$$\mathrm{Sp}_\mu(A) = \begin{cases} \{0, |f(\infty)|\}, & \text{если } A \in \mathcal{M}^{\mathrm{I}}_{fg}, \\ [0, |f(\infty)|], & \text{если } A \in \mathcal{M}^{\mathrm{II}}_{fg}. \end{cases}$$

Для любого ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{M}^n$ выполнены неравенства $\hat{\eta}(x) \leqslant \hat{\mu}(x)$, $\check{\eta}(x) \leqslant \check{\mu}(x)$, причем известен пример[17] системы $A \in \mathcal{M}^2$ с точными скоростями и показателями блуждания, удовлетворяющими строгому неравенству

$$\sup \mathrm{Sp}_\eta(A) < \sup \mathrm{Sp}_\mu(A). \tag{5}$$

Строгое неравенство возможно и для систем вида (4), как показывает

Теорема 5. *Существует система $A_{fg} \in \mathcal{M}^3$, у которой скорость блуждания и показатель блуждания любого ненулевого решения являются точными, причем выполнены равенства* $\mathrm{Sp}_\eta(A) = \{0, 1\}$, $\mathrm{Sp}_\mu(A) = [0, I]$ $(I > 1)$ *и строгое неравенство (5).*

В главе 3 также устанавливается взаимосвязь спектров скорости блуждания, показателей блуждания и блуждаемости. Устанавливаются условия совпадения показателя блуждаемости со скоростью блуждания и с показателем блуждания.

Глава 4

Глава 4 отвечает на вопрос о том, каким в n-мерном случае $(n > 2)$ может быть спектр скорости блуждания на множестве *диагональных* систем $\mathcal{D}_M$ и на множестве *полных* систем $\mathcal{M}_M$ в случае *четной* размерности пространства. Приводятся также двусторонние оценки спектра на множестве полных систем $\mathcal{M}_M$ в случае *нечетной* размерности пространства.

Теорема 6. *При любом $n > 1$ справедливы равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(\mathcal{D}_M) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(\mathcal{D}_M) = [0; M],$$

а для некоторой системы $A \in \mathcal{D}_M$ — равенство $\mathrm{Sp}_\mu(A) = [0; M]$.

Теорема 7. *При любом четном $n > 1$ справедливы равенства*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(\mathcal{M}_M) = \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_M) = [0; nM],$$

а для некоторой системы $A \in \mathcal{M}_M$ — равенство $\mathrm{Sp}_\mu(A) = [0; nM]$.

Теорема 8. *При любом нечетном $n > 1$ справедливы включения*

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(\mathcal{M}_M), \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_M) \subset [0; nM],$$

а для некоторой системы $A \in \mathcal{M}_M$ — равенство

$$\mathrm{Sp}_\mu(A) = [0; \sqrt{n^2 - 1} \cdot M].$$

Заключение

В работе изучены свойства спектра скорости блуждания для полных, треугольных и диагональных дифференциальных систем, а также для систем, отвечающим линейным однородным дифференциальным уравнениям.

Доказано, что спектр скорости блуждания на множестве решений диагональных систем произвольной размерности, полных систем четной размерности, двумерных треугольных систем, а также систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, представляет собой отрезок, установлены точные значения верхней границы спектра для данных типов систем. Приведена оценка верхней границы спектра скорости блуждания для полных систем нечетной размерности, а также указан отрезок, принадлежащий этому спектру.

Показана малость верхней границы спектра скорости блуждания для решений систем, отвечающих линейным дифференциальным уравнения второго и третьего порядка с малыми коэффициентами.

Для систем специального вида (которые по своему смыслу являются комбинацией поворотов и растяжений пространства) получены условия, при которых спектр скорости блуждания принимает качественно различные значения. Получены достаточные условия совпадения спектра показателей блуждания и блуждаемости с граничными значениями спектра скорости блуждания.

Интересным остается вопрос о спектре скорости блуждания в случае треугольных систем произвольной размерности, получение точных границ спектра скорости блуждания решений полных систем для нечетной размерности пространства. Представляют интерес определение необходимых условий совпадения спектра показателя блуждания с граничными значениями спектра скорости блуждания для систем специального вида.

Благодарность

Автор глубоко признателен научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Игорю Николаевичу Сергееву за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Лысак М.Д. Спектры скорости и показателя блуждания для линейных дифференциальных систем специального вида // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 539–544.

2. Lysak M.D. Precise Estimates of the Walk Speed of Solutions of Second-Order Linear Systems // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 210. № 3. P. 227–244.

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

3. Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1670-–1671.

4. Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 907.

5. Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем второго порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 184–212.

6. Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания для уравнений второго и третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 821.

7. Лысак М.Д. Возможные соотношения между спектрами показателей и скоростей блуждания трехмерных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 825–826.

8. Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Азбелева Н.В. и профессора Тонкова Е.Л., Ижевск, 9–11 июня 2015 г., С. 83–85.

9. Лысак М. Д. Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 106–111.

10. Lysak M.D. Wandering Velocity and Wandering Exponent Spectra for Linear Differential Systems of a special Form // Differential Equations. 2016. V. 52. № 4. P. 1–5.