

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ЛЫСАК Михаил Дмитриевич

**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛЯПУНОВСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич

Москва — 2016

Оглавление

Введение	4
Актуальность темы исследования	4
Формулировки основных результатов	9
Используемые обозначения	14
1 Системы второго порядка	15
1.1 Диагональный, треугольный и полный случай	15
1.2 Случай линейного уравнения второго порядка	19
1.3 Элементарные циклы и повороты	28
1.4 Обобщенные элементарные циклы и повороты	32
1.5 Вспомогательные леммы	33
1.6 Основная лемма	38
2 Уравнения второго и третьего порядка	43
2.1 Случай линейного уравнения второго порядка	43
2.2 Случай линейного уравнения третьего порядка	44
2.3 Два типа траекторий на сфере	47
2.4 Свойства векторного поля	49
2.5 Свойства окрестности нуля	54
2.6 Лемма о первой четверти	60
2.7 Доказательство леммы о представлении	65
2.8 Оценки длины элементарного отрезка траектории	67
2.9 Заключительные рассуждения	72
3 Семейство систем специального вида	74
3.1 Спектр скорости блуждания	74
3.2 Спектр показателя блуждания	77
3.3 Спектр показателя блуждаемости	79
3.4 Пример несовпадения верхних границ спектров	87

4 Системы произвольного порядка	89
4.1 Диагональные системы	89
4.2 Общий случай	91
Заключение	94
Список литературы	95

Введение

Представленная работа относится к качественной теории дифференциальных уравнений.

Важное место в качественной теории дифференциальных уравнений в целом и в теории устойчивости, в частности, занимают линейные однородные уравнения и системы, лежащие в основе исследования решений нелинейных систем по линейному приближению. В свою очередь, изучение линейных нестационарных систем порождает большое число задач теоретического характера, исследование которых основывается на асимптотических свойствах решений этих систем.

Актуальность темы исследования

Значительную роль в исследовании устойчивости по первому приближению играет теория характеристических показателей, которая была создана Ляпуновым [38] и получила дальнейшее развитие в работах многих авторов. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес существенный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград [15, 16], Б.Ф. Былов [7, 8], В.М. Миллионщиков [43, 44, 45], Н.А. Изобов [23, 24, 25], М.И. Рахимбердиев [52, 53], И.Н. Сергеев [54, 55], Е.А. Барабанов [5, 6], С.Н. Попова [50, 51], Е.К. Макаров [46, 47], О.И. Морозов [48, 49], А.С. Фурсов [72, 73], А.Н. Ветохин [13, 14], В.В. Быков [9, 10] Ю.И. Дементьев [20, 21] и другие. Здесь указаны лишь по 2–3 работы каждого автора, а исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах [26, 27] и монографиях [11, 28].

Характеристические показатели Ляпунова [38], а также введенные позже нижние характеристические показатели Перрона [76], степенные показатели Демидовича [22], экспоненциальные и σ -показатели Изобо-

ва [29, 25], центральные показатели Винограда [16], генеральные (особые) показатели Боля [28, 79], вспомогательные показатели Миллионщикова [41, 42] служат для исследования различных асимптотических свойств нормы решения и используются при исследовании различных типов устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных систем.

Последнее время в результате бурного развития теории колебаний возник вопрос об определении аналогов показателей Ляпунова для описания колебательных свойств решений дифференциальных уравнений и систем.

Вопросы колеблемости решений как линейных, так и нелинейных дифференциальных систем изучались в работах многих математиков, начиная с фундаментальных исследований Ж. Штурма [77] и А. Кнезера [78]. Среди математиков, успешно продвигавших исследования по тематике колеблемости, необходимо особо отметить В.А. Кондратьева [32, 33], И.Т. Кигурадзе [34, 35, 36], Т.А. Чантурия [74, 75], Н.А. Изобова [30, 31], А.Н. Левина [39, 40], И.В. Асташову [1, 2, 3], С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова [17, 18] и других (обширные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре [40] и монографиях [4, 37]).

В то же время, в этих работах не затрагивались вопросы определения характеристик колеблемости ляпуновского типа. Первый шаг в этом направлении сделал в 2004 году И.Н. Сергеев, введя определение характеристической частоты скалярной функции, которая имеет смысл среднего числа нулей этой функции на полупрямой [56]. Регуляризовав характеристические частоты по Миллионщикову [45], И.Н. Сергеев далее выделил главные характеристические частоты дифференциального уравнения n -ого порядка, спектр которых для автономного уравнения подобен спектру показателей Ляпунова и состоит из множества модулей мнимых частей корней соответствующего характеристического уравнения. Подробное исследование свойств этих частот содержится в работах [56]–[65].

Естественное обобщение понятия характеристической частоты для решений однородных дифференциальных систем было дано в работах [66, 67], где введены полные и векторные частоты, а также установлены их важнейшие свойства и, в частности, доказана их ограниченность на

решениях систем с ограниченными коэффициентами.

Введенные в 2010 году И.Н. Сергеевым [69] понятия скорости и показателя блуждания, а также показателя блуждаемости представляют собой дальнейшее развитие понятий полной и векторной частот. Скорость блуждания имеет смысл средней угловой скорости вращения вектора решения вокруг начала координат, а показатели блуждания и блуждаемости учитывают только ту информацию об угловой скорости, которая не гасится линейными невырожденными преобразованиями.

Тесная связь между характеристиками колеблемости и блуждаемости проявилась особенно наглядно после того, как в работе [68] было установлено, что показатели блуждания решений ограничивают сверху их векторные частоты и совпадают с векторными гиперчастотами [12, 70]. В последних работах также получено интегральное равенство, связывающее частоту гиперкратных корней вектор-функции на отрезке с длиной пути ее следа на единичной сфере.

Особое место в исследовании характеристик ляпуновского типа занимает изучение их спектров (множеств значений) как на множестве решений заданной системы, так и на множестве решений сразу всех систем определенного вида.

Известно [11], что спектр показателей Ляпунова ограниченной линейной системы представляет собой набор из n чисел (с учетом кратности), а в случае ее автономности совпадает со множеством действительных частей корней характеристического многочлена. Однако уже для нижних показателей Перона это не верно, более того [28, 6], их спектр может совпадать с любым (ограниченным и замкнутым сверху) суслинским множеством на числовой прямой.

Как показано в работе [67], спектр практически всех характеристик колеблемости и блуждаемости для уравнения второго порядка состоит ровно из одного числа. Однако уже для уравнения третьего порядка спектр, например, характеристической частоты решения может содержать сколь угодно много (и даже целый отрезок) значений [19, 71]. Возникает закономерный вопрос, каким может быть спектр скорости блуждания для различных типов систем.

В работе [68] установлено, что векторные частоты, а также характеристики блуждаемости ограничены нормой матрицы, задающей линейную систему, откуда непосредственно следует их стремление к нулю при

уменьшении нормы этой матрицы. Однако в случае линейного уравнения данное соотношение не гарантирует факта малости таких характеристик при малости коэффициентов. Тем не менее, этот факт был дополнительно установлен сначала в работе [68] для частот решений линейного уравнения, а затем, с учетом соотношений между различными характеристиками колеблемости и блуждаемости, также и для многих других характеристик, кроме скорости блуждания и показателя блуждаемости.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование свойств спектров скорости и показателя блуждания линейных однородных систем дифференциальных уравнений *произвольного порядка*, систем специального вида, а также дифференциальных уравнений *второго и третьего порядка*.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- получены спектры верхней и нижней скорости блуждания на классах полных, диагональных, треугольных систем второго порядка с ограниченными коэффициентами, а также систем, отвечающих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с ограниченными коэффициентами; приведены примеры систем, на решениях которых достигаются полученные спектры;
- получены оценки сверху спектра верхней скорости блуждания для класса неавтономных линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка при условии малости их коэффициентов;
- исследованы спектры скорости блуждания и показателей блуждания и блуждаемости на решениях систем специального вида, а также установлены достаточные условия совпадения спектра показателей блуждания и блуждаемости с граничными значениями спектра скорости блуждания;
- получены спектры верхней и нижней скоростей блуждания на классах диагональных систем произвольной размерности с ограниченными

ми коэффициентами, а также полных систем четной размерности с ограниченными коэффициентами; приведена оценка сверху спектров скоростей блуждания на классе полных систем нечетной размерности с ограниченными коэффициентами, а также указан отрезок, принадлежащий этому спектру; приведены примеры систем, на решениях которых достигаются каждый из полученных спектров.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2010–2015);

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ по итогам года (г. Москва, декабрь 2014 г.).
- Всероссийская конференция с международным участием "Теория управления и математическое моделирование посвященной памяти

профессора Азбелева Н.В. и профессора Тонкова Е.Л. (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 10 работ [80]-[89]. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 102 страниц. Библиография включает 89 наименований.

Автор глубоко признателен профессору Игорю Николаевичу Сергееву за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе. Автор благодарен также доценту Быкову Владимиру Владиславовичу за полезные замечания.

Формулировки основных результатов

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и заданной константы $M > 0$ во множестве $\mathcal{M}^n$ систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; \infty), \quad (1)$$

с кусочно непрерывными по t коэффициентами (каждую систему будем отождествлять с задающей ее матричной функцией A) определим следующие подмножества:

1) $\mathcal{M}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными коэффициентами

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}(t)| \leq M. \quad (2)$$

2) $\mathcal{T}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}_M$, состоящее из *верхне-треугольных* систем, т. е. систем (1), вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

3) $\mathcal{D}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}_M$, состоящее из *диагональных* систем

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n(t) \end{pmatrix}$$

4) $\mathcal{E}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}^n$ систем, отвечающих линейным уравнениям n -ого порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad (3)$$

отождествляемым каждое со своим набором $(a_1, \dots, a_n) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ кусочно непрерывных ограниченных коэффициентов

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \max_{i=1, \dots, n} |a_i(t)| \leq M. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ и положим

$$\mathcal{S}_* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}_*(\mathcal{K}) \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{K}} \mathcal{S}_*(A),$$

где

$$\mathcal{K} = \mathcal{M}_M, \mathcal{T}_M, \mathcal{D}_M, \mathcal{E}_M. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [68]. Для каждого решения $x \in \mathcal{S}_*(\mathcal{M}^n)$ определим его *верхнюю и нижнюю скорости блуждания*, *верхний и нижний показатели блуждаемости*, а также *верхний и нижний показатели блуждания* соответственно формулами

$$\hat{\mu}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t), \quad \check{\mu}(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \gamma(x, t), \quad (6)$$

$$\hat{\rho}(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx), \quad \check{\rho}(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx). \quad (7)$$

$$\hat{\eta}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t), \quad \check{\eta}(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t), \quad (8)$$

где

$$\gamma(x, t) = \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right| d\tau, \quad |x(\tau)| \equiv \sqrt{x_1(\tau)^2 + \dots + x_n(\tau)^2}.$$

В случае совпадения *верхнего* и *нижнего* значений какого-либо из перечисленных *показателей* $\hat{\varkappa}(x) = \check{\varkappa}(x)$ будем говорить, что *показатель* $\varkappa(x)$ является *точным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [68]. *Спектром* показателя $\varkappa$ (*верхнего* или *нижнего*) для системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем область его значений

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) = \varkappa(S_*(A)) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in S_*(A)\},$$

а также определим *спектр* показателя $\varkappa$ на целом классе (5) систем

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(\mathcal{K}) = \bigcup_{A \in \mathcal{K}} \mathrm{Sp}_{\varkappa}(A).$$

Из формул (6) следует, что *скорость блуждания* не может быть отрицательной. Как показывает следующая теорема 1, максимально возможное значение $d(\mathcal{K})$ скорости блуждания на ненулевых решениях двумерных систем из класса $\mathcal{K}$ (5) (зависящее от значения M , осуществляющего оценки (2) или (3.11)) достигается и оказывается одинаковым как для верхней скорости блуждания, так и для нижней. Более того, обе они принимают на указанных решениях и все промежуточные значения между 0 и $d(\mathcal{K})$ включительно.

ТЕОРЕМА 1. *При $n = 2$ для каждого класса $\mathcal{K}$ (5) спектр каждой из функций $\hat{\mu}$ и $\check{\mu}$ (6) на множестве $S_*(\mathcal{K})$ представляет собой отрезок $[0; d(\mathcal{K})]$, правый конец которого есть соответственно*

$$d(\mathcal{M}_M) = 2M, \quad d(\mathcal{T}_M) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}M, \quad d(\mathcal{D}_M) = M,$$

$$d(\mathcal{E}_M) = \begin{cases} c_1(M), & M \geq 4, \\ \max\{c_1(M), c_2(M)\}, & 0 < M < 4, \end{cases}$$

где

$$c_1(M) = \max_{k \geq 0} \frac{(Mk + M)^2 - k^4}{M(k + 1)(k^2 + 1)},$$

$$c_2(M) = \pi \left(\frac{4}{\sqrt{4M - M^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{M}{\sqrt{4M - M^2}} \right) \right)^{-1}.$$

Далее, следующие теоремы 2 и 3 представляют оценки сверху спектра *верхней скорости блуждания* для класса $\mathcal{E}_M$ систем, отвечающих линейным уравнениям второго и третьего порядка соответственно, при достаточно малых $M > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *При $n = 2$ и $M \leq 2$ верхняя скорость блуждания $\hat{\mu}(x)$ любого решения $x \in S_*(\mathcal{E}_M)$ ограничена сверху величиной $2\sqrt{M}$, стремящейся к нулю при $M \rightarrow 0$.*

ТЕОРЕМА 3. При $n = 3$ и $M < 0,03$ верхняя скорость блуждания $\hat{\mu}(x)$ любого решения $x \in S_*(\mathcal{E}_M)$ ограничена сверху величиной $36\pi\sqrt[4]{M}$, стремящейся к нулю при $M \rightarrow 0$.

Для заданной пары непрерывных функций $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим систему $A \in \mathcal{M}^3$ с матричной функцией

$$A = A_{fg} \equiv \text{diag} \left[\begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}, g \right]. \quad (9)$$

Фиксируем первообразную G функции g , удовлетворяющую условию $G(0) = 0$, и обозначим $E(t) \equiv \exp G(t)$ и $H(t) \equiv |f(t)|/E(t)$. Предел любой функции при $t \rightarrow \infty$ будем обозначать ее значением в точке ∞ . Потребуем, чтобы для матричной функции (9) существовали пределы $f(\infty)$, $g(\infty)$, а если $g(\infty) = 0$ или $f(\infty) = \infty$, то еще и пределы $G(\infty)$ или $H(\infty)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В перечисленных предположениях назовем систему вида (9):

I) системой *первого типа* (обозначение $A \in \mathcal{M}_{fg}^I$), если дополнительно выполняется хотя бы одно из условий

- 1) $f(\infty) = 0$,
- 2) $0 < |f(\infty)| < \infty$ и $G(\infty) = \infty$,
- 3) $f(\infty) = \infty$ и $H(\infty) \in \{0, \infty\}$;

II) системой *второго типа* (обозначение $A \in \mathcal{M}_{fg}^{II}$), если выполнено хотя бы одно из условий

- 4) $0 < |f(\infty)| < \infty$, $g(\infty) = 0$ и $G(\infty) < \infty$;
- 5) $f(\infty) = \infty$ и $H(\infty) \in (0, \infty)$.

Следующая теорема 4 устанавливает условия на матричную функцию (9), достаточные для совпадения экстремальных значений спектров ее скоростей и показателей блуждания и блуждаемости.

ТЕОРЕМА 4. Для любой системы $A \in \mathcal{M}_{fg}^I \cup \mathcal{M}_{fg}^{II}$ скорости блуждания и показатели блуждания и блуждаемости всех ненулевых решений являются точными, причем выполнены равенства

$$\begin{aligned} \text{Sp}_\eta(A) &= \text{Sp}_\rho(A) = \{0, |f(\infty)|\}, \\ \text{Sp}_\mu(A) &= \begin{cases} \{0, |f(\infty)|\}, & \text{если } A \in \mathcal{M}_{fg}^I, \\ [0, |f(\infty)|], & \text{если } A \in \mathcal{M}_{fg}^{II}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для любого ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{M}^n$ выполнены неравенства $\hat{\eta}(x) \leq \hat{\mu}(x)$, $\check{\eta}(x) \leq \check{\mu}(x)$, причем известен пример [68] системы

$A \in \mathcal{M}^2$, удовлетворяющий строгому неравенству

$$\sup \text{Sp}_\eta(A) < \sup \text{Sp}_\mu(A). \quad (10)$$

Строгое неравенство возможно и для систем вида (9), как показывает

ТЕОРЕМА 5. *Существует система $A \in \mathcal{M}^3$ вида (9), у которой скорость блуждания и показатель блуждания любого ненулевого решения являются точными, причем для некоторого $I > 1$ выполнены равенства*

$$\text{Sp}_\eta(A) = \{0, 1\}, \quad \text{Sp}_\mu(A) = [0, I],$$

а значит, и строгое неравенство (10).

Пусть теперь $n > 1$ — произвольное натуральное число. Следующие теоремы 6–8 описывают спектры скоростей блуждания для классов диагональных и полных систем из пространства $\mathcal{M}^n$.

ТЕОРЕМА 6. *При любом $n > 1$ справедливы равенства*

$$\text{Sp}_{\check{\mu}}(\mathcal{D}_M) = \text{Sp}_{\hat{\mu}}(\mathcal{D}_M) = [0; M],$$

а для некоторой системы $A \in \mathcal{D}_M$ — равенство $\text{Sp}_\mu(A) = [0; M]$.

ТЕОРЕМА 7. *При любом четном $n > 1$ справедливы равенства*

$$\text{Sp}_{\check{\mu}}(\mathcal{M}_M) = \text{Sp}_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_M) = [0; nM],$$

а для некоторой системы $A \in \mathcal{M}_M$ — равенство $\text{Sp}_\mu(A) = [0; nM]$.

ТЕОРЕМА 8. *При любом нечетном $n > 1$ справедливы включения*

$$\text{Sp}_{\check{\mu}}(\mathcal{M}_M), \text{Sp}_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_M) \subset [0; nM],$$

а для некоторой системы $A \in \mathcal{M}_M$ — равенство

$$\text{Sp}_\mu(A) = [0; \sqrt{n^2 - 1} \cdot M].$$

Используемые обозначения

В главах диссертации принята двойная нумерация формул (первое число обозначает номер главы, второе число — номер формулы), сквозная нумерация определений, свойств, лемм, теорем и их следствий.

Приведем список наиболее часто используемых в работе обозначений:

- $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел соответственно;
- m, n — натуральные числа;
- $\mathbb{R}^+ = [0; \infty)$ — временная полуось;
- $\mathcal{M}^n$ — множество линейных однородных n -мерных систем с кусочно непрерывными на полупрямой $\mathbb{R}^+$ коэффициентами;
- $\mathcal{M}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными коэффициентами;
- $\mathcal{T}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}_M$, состоящее из *верхне-треугольных* систем;
- $\mathcal{D}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}_M$, состоящее из *диагональных* систем;
- $\mathcal{E}_M$ — подмножество множества $\mathcal{M}^n$ систем, отвечающих линейным уравнениям n -ого порядка с ограниченными коэффициентами;
- $S_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$;
- $S_* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} S_*(A)$;
- $\text{Aut } \mathbb{R}^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$;
- $\varkappa : S_* \rightarrow \mathbb{R}$ — показатель, определенный на S_* ;
- $\text{Sp}_\varkappa(A) = \varkappa(S_*(A)) \equiv \{\varkappa(x) | x \in S_*(A)\}$ — спектр показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{M}^n$;
- $\text{Sp}_\varkappa(\mathcal{K}) = \bigcup_{A \in \mathcal{K}} \text{Sp}_\varkappa(A)$ — спектр показателя $\varkappa$ на целом классе систем $\mathcal{K} = \mathcal{M}_M, \mathcal{T}_M, \mathcal{D}_M, \mathcal{E}_M$.

Глава 1

Системы второго порядка

Основным результатом настоящей главы являются точные оценки *скорости блуждания* ненулевых решений линейных систем второго порядка. Приводятся *спектры скорости блуждания* на каждом из классов $\mathcal{K}$ (5) двумерных систем и доказывается теорема 1.

В параграфе 1.1 приводится доказательство теоремы 1 для класса $\mathcal{K}$ полных ($\mathcal{K} = \mathcal{M}_M$), треугольных ($\mathcal{K} = \mathcal{T}_M$) и диагональных ($\mathcal{K} = \mathcal{D}_M$) систем, а в параграфах 1.2–1.6 — для линейных уравнений второго порядка ($\mathcal{K} = \mathcal{E}_M$).

1.1 Диагональный, треугольный и полный случай

Рассмотрим системы второго порядка ($n = 2$) из классов $\mathcal{M}_M$ полных, $\mathcal{T}_M$ треугольных, $\mathcal{D}_M$ диагональных систем. Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения

$$a(t) = a_{11}(t), \quad b(t) = a_{22}(t), \quad c(t) = a_{12}(t), \quad d(t) = a_{21}(t).$$

Для систем из класса $\mathcal{D}_M$ имеем $c(t) \equiv d(t) \equiv 0$, а для систем из класса $\mathcal{T}_M$ имеем $d(t) \equiv 0$.

Для произвольной функции $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и любого отрезка $[0; t]$, такого что $x_1(\tau) \neq 0$ при любом $\tau \in [0; t]$, справедливо

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \gamma(x, t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f(k, \tau) d\tau, \quad k(\tau) = \frac{x_2(\tau)}{x_1(\tau)}, \\ f(k, \tau) &= \left| \frac{-c(\tau)k^2 + (b(\tau) - a(\tau))k + d(\tau)}{k^2 + 1} \right|. \end{aligned} \quad (1.1)$$

На любом интервале полуоси $\mathbb{R}^+$, для которого справедливо $x_1(\tau) \neq 0$, функция $k(\tau)$ является решением уравнения

$$\dot{k} = -c(\tau)k^2 + (b(\tau) - a(\tau))k + d(\tau). \quad (1.2)$$

Действительно, воспользовавшись выражениями для производных x_1, x_2 из системы (1)

$$\dot{x}_1 = a(\tau)x_1 + c(\tau)x_2, \quad \dot{x}_2 = d(\tau)x_1 + b(\tau)x_2,$$

преобразуем

$$\dot{k} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2}{x_1^2} = -c(\tau)k^2 + (b(\tau) - a(\tau))k + d(\tau).$$

Рассмотрим вектор решения системы (1)

$$\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} = \left(\frac{x_1(\tau)}{\sqrt{x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)}}, \frac{x_2(\tau)}{\sqrt{x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)}} \right).$$

Продифференцировав его покомпонентно по τ , получаем

$$\left| \frac{d}{d\tau} \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right| = \frac{|\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1|}{x_1^2 + x_2^2} = f(k(\tau), \tau),$$

а затем и равенства (1.1).

Обозначим через $\gamma_i(\cdot, t)$ сужение функции $\gamma(\cdot, t)$ на множество $\mathcal{K}$ (5), соответственно, где $i = 0$ при $\mathcal{K} = \mathcal{M}_M$, $i = 1$ при $\mathcal{K} = \mathcal{T}_M$, $i = 2$ при $\mathcal{K} = \mathcal{D}_M$, $i = 3$ при $\mathcal{K} = \mathcal{E}_M$.

Для заданного числа $k_0 > 0$ рассмотрим функцию x , удовлетворяющую начальному условию $k(0) = k_0$ и являющуюся решением системы $A_2 \in \mathcal{D}_M$ (размерности $n = 2$) с кусочно постоянными коэффициентами, задаваемыми последовательно при $j = 1, 2 \dots$ равенствами

$$a(t) = \begin{cases} -M, & T_{j-1} \leq t \leq T_{j-1} + \Delta t_j^1, \\ M, & T_{j-1} + \Delta t_j^1 \leq t \leq T_{j-1} + \Delta t_j^1 + \Delta t_j^2 \equiv T_j, \end{cases} \quad b = -a, \quad (1.3)$$

где

$$T_j = \sum_{m=1}^j (\Delta t_m^1 + \Delta t_m^2) \quad (T_0 = 0), \quad \Delta t_j^1 = \frac{1}{j}, \quad k(T_j) = k_0 \quad (1.4)$$

(последнее равенство, определяющее слагаемые Δt_j^2 , достигается благодаря тому, что при $k > 0$ правая часть уравнения (1.2) на участках

первого типа в кусочном задании (1.3) функции a — положительна, а на участках второго типа — отрицательна; более того, при этом все значения функции k положительны).

Далее, рассмотрим также систему $A_1 \in \mathcal{T}_M$ (размерности $n = 2$) с кусочно постоянными коэффициентами a, b (1.3) и $c = a$.

Наконец, рассмотрим еще и систему $A_0 \in \mathcal{M}_M$ (размерности $n = 2$) с кусочно-постоянными коэффициентами a, b (1.3), $c = a$ и $d = -a$. Заметим дополнительно, что построение последней системы возможно также и в случае $-1 < k_0 \leq 0$.

ЛЕММА 1. *Для решения x системы A_i , $i = 0, 1, 2$, с начальным условием, удовлетворяющим равенству $k_0 = 1$ при $i = 0, 2$ или $k_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ при $i = 1$, имеют место равенства*

$$\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma_i(x, t) = \begin{cases} 2M, & i = 0, \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}M, & i = 1, \\ M, & i = 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Докажем, что утверждение леммы в случае $i = 2$ верно, а именно, что для решения x системы A_2 указанный в формулировке предел существует и равен M .

Действительно, во-первых, справедлива оценка

$$\frac{1}{t} \gamma_2(x, t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{(|a(\tau)| + |b(\tau)|)k(\tau)}{k^2(\tau) + 1} d\tau \leq M \cdot \max_{k \in \mathbb{R}^+} \frac{2k}{k^2 + 1} = M, \quad (1.5)$$

в которой максимум достигается при $k = 1$.

Во-вторых, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $t(\varepsilon)$, чтобы для любого $t > t(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$\frac{2k(t)}{k^2(t) + 1} > 1 - \varepsilon', \quad \varepsilon' \equiv \frac{\varepsilon}{2M},$$

обеспечиваемое условиями (1.4), в которых $k_0 = 1$, причем длины Δt_j^1 уменьшаются с ростом номера j . Тогда для любого $t > \frac{t(\varepsilon)}{\varepsilon'}$ будет выполнена оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \gamma_2(x, t) &\geq \frac{M}{t} \int_0^t \frac{2k(\tau)}{k^2(\tau) + 1} d\tau \geq \frac{M}{t} \int_{t(\varepsilon)}^t \frac{2k(\tau)}{k^2(\tau) + 1} d\tau > \\ &> M(1 - \varepsilon') \cdot \frac{t - t(\varepsilon)}{t} > M(1 - \varepsilon')(1 - \varepsilon') > M \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{2M}\right) > M - \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, с учетом оценки (1.5), следует существование упомянутого предела и его равенство числу M .

2. Доказательство утверждения леммы в случаях $i = 0, 1$ проведем аналогично предыдущему случаю. Во-первых, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\gamma_0(x, t) &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{|c(\tau)|k^2(\tau) + (|a(\tau)| + |b(\tau)|)k(\tau) + |d(\tau)|}{k^2(\tau) + 1} d\tau \leq \\ &\leq M \cdot \left(1 + \max_{k \in \mathbb{R}^+} \frac{2k}{k^2 + 1}\right) = 2M \end{aligned} \quad (1.6)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\gamma_1(x, t) &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{|c(\tau)|k^2(\tau) + (|a(\tau)| + |b(\tau)|)|k(\tau)|}{k^2(\tau) + 1} d\tau \leq \\ &\leq M \cdot \max_{k \in \mathbb{R}^+} \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}M, \end{aligned} \quad (1.7)$$

причем последний максимум достигается при $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Во-вторых, для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $t(\varepsilon)$, чтобы для любого $t > t(\varepsilon)$ были выполнены оценки

$$\begin{aligned} \frac{k^2(t) + 2k(t) + 1}{k^2(t) + 1} &> 2 - \varepsilon', \quad i = 0, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3M}, \\ \frac{k^2(t) + 2k(t)}{k^2(t) + 1} &> \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \varepsilon', \quad i = 1, \quad \varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{3 + \sqrt{5}M}, \end{aligned}$$

из которых для любого $t > \frac{t(\varepsilon)}{\varepsilon'}$ будут вытекать оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\gamma_0(x, t) &\geq \frac{M}{t} \int_{t(\varepsilon)}^t \frac{k^2(\tau) + 2k(\tau) + 1}{k^2(\tau) + 1} d\tau > 2M - \varepsilon, \\ \frac{1}{t}\gamma_1(x, t) &\geq \frac{M}{t} \int_{t(\varepsilon)}^t \frac{k^2(\tau) + 2k(\tau)}{k^2(\tau) + 1} d\tau > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}M - \varepsilon, \end{aligned}$$

дающие, с учетом оценок (1.6) и (1.7), требуемое при $i = 0$ и $i = 1$ соответственно.

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для каждого $i = 0, 1, 2$ и каждого $r \in (0, d(\mathcal{K})]$ ($i = 0$ при $\mathcal{K} = \mathcal{M}_M$, $i = 1$ при $\mathcal{K} = \mathcal{T}_M$, $i = 2$ при $\mathcal{K} = \mathcal{D}_M$) существует решение $x \in \mathcal{S}_*(\mathcal{K})$, удовлетворяющее равенству

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma_i(x, t) = r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1. Отличие в том, что начальное значения k_0 решения x теперь выбирается из условия

$$r = \begin{cases} M \frac{k_0^2 + 2k_0 + 1}{k_0^2 + 1}, & i = 0, \quad -1 < k_0 < 1, \\ M \frac{k_0^2 + 2k_0}{k_0^2 + 1}, & i = 1, \quad 0 < k_0 < 1, \\ M \frac{2k_0}{k_0^2 + 1}, & i = 2, \quad 0 < k_0 < 1, \end{cases}$$

что можно сделать для любого $r \in (0, d(\mathcal{K})]$, $\mathcal{K} = \mathcal{M}_M, \mathcal{T}_M, \mathcal{D}_M$.

Лемма 2 доказана.

Система A с коэффициентами $a = b = c = d = 0$ принадлежит каждому из классов $\mathcal{M}_M, \mathcal{T}_M, \mathcal{D}_M$, а любое ее ненулевое решение $x = \text{const}$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma_i(x, t) = 0.$$

Отсюда и из лемм 1 и 2 следует утверждение теоремы 1 для классов $\mathcal{M}_M, \mathcal{T}_M, \mathcal{D}_M$.

1.2 Случай линейного уравнения второго порядка

Доказательство теоремы 1 для класса $\mathcal{E}_M$ систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, проведем в несколько этапов. Сначала (§1.2) построим систему, на решении которой выполнено

$$\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = c_1(M). \quad (1.8)$$

Затем (§1.3) построим систему, на решении которой выполнено

$$\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = c_2(M).$$

Далее определим понятие *элементарного цикла* и *элементарного поворота*, а также *обобщенных элементарного цикла и поворота*, как возможных составных частей решения, и покажем, что средняя скорость блуждания по данным частям не превышает $c_1(M)$ для *обобщенного элементарного цикла* и $c_2(M)$ для *обобщенного элементарного поворота* (§§1.3, 1.4). В §1.5 докажем, что мера множества значений t , для которых подынтегральное выражение в $\gamma(x, t)$ превышает $\max\{c_1(M), c_2(M)\}$, равна нулю. В параграфе §1.6 завершим доказательство теоремы 1 для $\mathcal{K} = \mathcal{E}_M$.

Итак, построим систему, на решении которой выполнено (1.8).

Для двумерных систем из $\mathcal{E}_M$ введем обозначения

$$b(t) = -a_1(t), \quad d(t) = -a_2(t).$$

В этом случае уравнение (1.2) запишется в виде

$$\dot{k} = -k^2 - a_1(t)k - a_2(t). \quad (1.9)$$

Зафиксируем $M > 0$. Для произвольного значения $k_0 > 0$, такого что $g(k_0) > 0$, где

$$g(k) = -k^2 + Mk + M, \quad (1.10)$$

рассмотрим систему $A_3 \in \mathcal{E}_M$ (размерности $n = 2$), которая задается кусочно постоянными коэффициентами

$$a_1(t) = a_2(t) = \alpha(t).$$

Функция $\alpha(t)$ определяется соотношениями (1.3), (1.4) с тем отличием, что $\Delta t_j^1 = \Delta T/j$. Значение ΔT выбирается из условия

$$g(k(\Delta T)) > 0.$$

Введем обозначения

$$f_1(k) = \frac{-k^2 + Mk + M}{k^2 + 1}, \quad f_2(k) = \frac{k^2 + Mk + M}{k^2 + 1}. \quad (1.11)$$

ЛЕММА 3. На решении x системы A_3 , удовлетворяющем начальному условию $k(0) = k_0$, такому что $k_0 > 0$ и $g(k_0) > 0$,

$$\ddot{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma_3(x, t) = \frac{2f_1(k_0)f_2(k_0)}{f_1(k_0) + f_2(k_0)}.$$

Прежде чем доказывать данную лемму, сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть уравнение (1.9) с кусочно непрерывными коэффициентами $a_1(t) = a_2(t) = \alpha_0(t)$, такими что

$$\alpha_0(t) = \begin{cases} -A, & T_1 \leq t \leq T_2^*, \\ B, & T_3^* \leq t \leq T_4 \end{cases},$$

где $A, B > 0$ — некоторые числа, $0 \leq T_1 \leq T_2^* \leq T_3^* \leq T_4$, имеет решение $k(t)$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$k(T_1) = k(T_4) = k_0, \quad k(T_2^*) = k(T_3^*) = k_1^*,$$

$$g_0(k_0) > 0, \quad g_0(k_1^*) > 0, \quad g_0(k) = -k^2 + Ak + A$$

для некоторых $k_1^* > k_0 > 0$. Тогда для значений T_2 и T_3 , определяемых условиями $T_2 \in [T_1, T_2^*]$ и $T_3 \in [T_3^*, T_4]$, $k(T_2) = k(T_3)$, справедливо

$$\lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} = \frac{-k_0^2 + Ak_0 + A}{k_0^2 + Bk_0 + B}. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что функция $k(t)$, удовлетворяющая условиям леммы, возрастает на отрезке $[T_1, T_2^*]$ от k_0 до k_1^* , а на отрезке $[T_3^*, T_4]$ убывает от k_1^* до k_0 . Поэтому, в силу непрерывности $k(t)$, для любого $k_1 \in [k_0, k_1^*]$ существуют значения T_2 и $T_3 > T_2$, такие что

$$k(T_2) = k(T_3) = k_1,$$

причем $k_1 \rightarrow k_0$ и $T_3 \rightarrow T_4$ при $T_2 \rightarrow T_1$.

Интегрируя уравнение (1.9) на отрезках $[T_1, T_2]$ и $[T_3, T_4]$, получаем

$$T_2 - T_1 = \Delta T_1(A, k_1, k_0), \quad T_4 - T_3 = \Delta T_2(B, k_1, k_0),$$

где

$$\Delta T_1(A, k_1, k_0) = \frac{1}{\sqrt{4A + A^2}} \ln \left| \frac{k_1 - r_1}{k_1 - r_2} \frac{k_0 - r_2}{k_0 - r_1} \right|, \quad (1.13)$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(A - \sqrt{4A + A^2}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(A + \sqrt{4A + A^2}),$$

$$\begin{aligned} & \Delta T_2(B, k_1, k_0) = \\ & = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4B}} \ln \left| \frac{k_0 - p_1}{k_0 - p_2} \frac{k_1 - p_2}{k_1 - p_1} \right|, & B > 4, \\ \frac{k_1 - k_0}{(k_1 + 2)(k_0 + 2)}, & B = 4, \\ \frac{2}{\sqrt{4B - B^2}} \left(\arctg \frac{2k_1 + B}{\sqrt{4B - B^2}} - \arctg \frac{2k_0 + B}{\sqrt{4B - B^2}} \right), & 0 < B < 4, \end{cases} \quad (1.14) \\ & p_1 = \frac{1}{2}(-B - \sqrt{B^2 - 4B}), \quad p_2 = \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 - 4B}). \end{aligned}$$

Далее осуществим предельный переход. При $T_2 \rightarrow T_1$ справедливо $k_1 \rightarrow k_0$, а следовательно, $\Delta T_1(A, k_1, k_0) \rightarrow 0$ и $\Delta T_2(B, k_1, k_0) \rightarrow 0$. Воспользуемся разложениями этих величин в ряд при $k_1 \rightarrow k_0$

$$\Delta T_1(A, k_1, k_0) = \frac{1}{\sqrt{4A + A^2}} \left(\frac{(k_1 - k_0)(r_1 - r_2)}{(k_1 - r_2)(k_0 - r_1)} + o(k_1 - k_0) \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta T_2(B, k_1, k_0) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4B}} \left(-\frac{(k_1 - k_0)(p_1 - p_2)}{(k_1 - p_1)(k_0 - p_2)} + o(k_1 - k_0) \right), & B > 4, \\ \frac{2}{\sqrt{4B - B^2}} \left(\frac{(k_1 - k_0)\sqrt{4B - B^2}}{B(k_1 + k_0 + 2) + 2k_1k_0} + o(k_1 - k_0) \right), & 0 < B < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Разложение в ряд выражения для $\Delta T_2(B, k_1, k_0)$ при $0 < B < 4$ получено с помощью тождества

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(x_1) - \operatorname{arctg}(x_2) &= \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x_1) - \operatorname{arctg}(x_2)) = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x_1 - x_2}{1 + x_1x_2} \right), \end{aligned}$$

справедливого для значений x_1, x_2 , удовлетворяющих неравенству

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(x_1) - \operatorname{arctg}(x_2) < \frac{\pi}{2}.$$

Осуществляя предельный переход, получаем требуемое утверждение. Лемма 4 доказана.

Воспользуемся доказательством леммы 4 для доказательства леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (леммы 3). Представим t в виде суммы

$$t = t^{**} + \sum_{j=N_0+1}^N (\Delta t_j^1 + \Delta t_j^2) + \Delta t, \quad 0 < \Delta t < \Delta t_{N+1}^1 + \Delta t_{N+1}^2$$

где обозначено $t^{**} = T_{N_0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t f(k(\tau))d\tau &= \int_0^{t^{**}} f(k(\tau))d\tau + \\ &+ \sum_{i=N_0+1}^N \left(\int_{T_{i-1}}^{T_{i-1}+\Delta t_i^1} f_1(k(\tau))d\tau + \int_{T_{i-1}+\Delta t_{i-1}^1}^{T_{i+1}} f_2(k(\tau))d\tau \right) + F_t, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$F_t = \int_{T_N}^t f(k(\tau))d\tau.$$

Для дальнейшего доказательства заметим, что Δt_j^1 и Δt_j^2 уменьшаются с ростом j . Найдем предел отношения $\Delta t_j^2/\Delta t_j^1$ при $j \rightarrow 0$. Для этого заметим, что

$$\Delta t_j^1 = \Delta T_1(M, k_1^j, k_0), \quad \Delta t_j^2 = \Delta T_2(M, k_1^j, k_0),$$

где функции $\Delta T_1(\cdot)$ и $\Delta T_2(\cdot)$ определяются равенствами (1.13) и (1.14), $k_1^j = k(T_j + \Delta t_j^1)$, функция $k(t)$ задается на рассматриваемом решении системы A_3 . Из определения k_1^j следует, что $k_1^j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow 0$. Откуда, аналогично доказательству леммы 4, следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\Delta t_j^2}{\Delta t_j^1} = \frac{-k_0^2 + Mk_0 + M}{k_0^2 + Mk_0 + M} = \frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)}. \quad (1.16)$$

Для оценки интегралов в правой части (1.15) воспользуемся теоремой о среднем и непрерывностью функций $f_1(k)$ и $f_2(k)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функций $f_1(k(t))$ и $f_2(k(t))$ существует N_0 , такое что для любого $t > T_{N_0}$ на решении задачи A_3 выполнены оценки

$$|f_1(k(t)) - f_1(k_0)| < \varepsilon, \quad |f_2(k(t)) - f_2(k_0)| < \varepsilon \quad (1.17)$$

и, кроме того, для любого $j > N_0$ справедливо

$$\left| \frac{\Delta t_j^1}{\Delta t_j^2} - \frac{f_2(k_0)}{f_1(k_0)} \right| < \varepsilon. \quad (1.18)$$

Последнее неравенство справедливо в силу (1.16). Воспользуемся теоремой о среднем для интегралов под знаком суммы в правой части (1.15). С учетом неравенств (1.17), (1.18), справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \int_0^t f(k(\tau)) d\tau \leq \int_0^{t^{**}} f(k(\tau)) d\tau + \\ & + \sum_{j=N_0+1}^N [(f_1(k_0) + \varepsilon) \Delta t_j^1 + (f_2(k_0) + \varepsilon) \Delta t_j^2] + F_t \leq \int_0^{t^{**}} f(k(\tau)) d\tau + \\ & + \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1 \left[(f_1(k_0) + \varepsilon) + (f_2(k_0) + \varepsilon) \frac{\Delta t_j^2}{\Delta t_j^1} \right] + F_t \leq \\ & \leq \left[\frac{\int_0^{t^{**}} f(k(\tau)) d\tau + F_t}{\sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1} + f_1(k_0) + \varepsilon + \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + \varepsilon \right) (f_2(k_0) + \varepsilon) \right] \cdot \\ & \cdot \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t f(k(\tau))d\tau \geq \int_0^{t^{**}} f(k(\tau))d\tau + \\
& + \sum_{j=N_0+1}^N [(f_1(k_0) - \varepsilon)\Delta t_j^1 + (f_2(k_0) - \varepsilon)\Delta t_j^2] + F_t \geq \\
& \geq \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1 \left[(f_1(k_0) - \varepsilon) + (f_2(k_0) - \varepsilon) \frac{\Delta t_j^2}{\Delta t_j^1} \right] \geq \\
& \geq \left[f_1(k_0) - \varepsilon + \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} - \varepsilon \right) (f_2(k_0) - \varepsilon) \right] \cdot \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \left[(f_1(k_0) - \varepsilon) + \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} - \varepsilon \right) (f_2(k_0) - \varepsilon) \right] \cdot \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1 \leq \\
& \leq \int_0^t f(k(\tau))d\tau \leq \\
& \leq \left[\frac{\int_0^{t^{**}} f(k(\tau))d\tau + F_t}{\sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1} + \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + \varepsilon \right) (f_2(k_0) + \varepsilon) + f_1(k_0) + \varepsilon \right] \cdot \\
& \cdot \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1,
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} - \varepsilon + 1 \right) \cdot \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1 \leq t \leq \\
& \leq \left[\frac{t^{**} + \Delta t}{\sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1} + \frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + \varepsilon + 1 \right] \cdot \sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1.
\end{aligned}$$

Кроме того, при достаточно больших $t > t^{**}$, что соответствует достаточно большим $N > N_0$, справедливы также неравенства

$$\frac{T_{N_0+1}}{\sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1} < \varepsilon, \quad \frac{\int_0^{t^{**}} f(k(\tau)) d\tau + F}{\sum_{j=N_0+1}^N \Delta t_j^1} < \varepsilon,$$

где

$$F = \int_{T_N}^{T_{N+1}} f(k(\tau)) d\tau.$$

С учетом очевидных неравенств

$$F_t < F, \quad t^{**} + \Delta t < T_{N_0+1},$$

из полученных оценок следует

$$\begin{aligned} \frac{2f_1(k_0)f_2(k_0)}{f_1(k_0) + f_2(k_0)} - \varepsilon \tilde{A}(\varepsilon) &\leq \frac{1}{t} \gamma_3(x, y, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(k(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \frac{2f_1(k_0)f_2(k_0)}{f_1(k_0) + f_2(k_0)} + \varepsilon \tilde{B}(\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\varepsilon) &= \frac{4f_1(k_0)}{\left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + 1\right) \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + 1 + 2\varepsilon\right)} + \frac{\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + f_2(k_0) + 1}{\left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + 1 + 2\varepsilon\right)}, \\ \tilde{B}(\varepsilon) &= \frac{2f_1(k_0)}{\left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + 1\right) \left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + 1 - \varepsilon\right)} + \frac{\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + f_2(k_0) + 2 + \varepsilon}{\left(\frac{f_1(k_0)}{f_2(k_0)} + 1 - \varepsilon\right)}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{2f_1(k_0)f_2(k_0)}{f_1(k_0) + f_2(k_0)} - O(\varepsilon) &\leq \frac{1}{t} \gamma_3(x, y, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(k(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \frac{2f_1(k_0)f_2(k_0)}{f_1(k_0) + f_2(k_0)} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

откуда следует существование упомянутого предела.

Лемма 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1 (из леммы 3). *Для любого r , принадлежащего полуинтервалу $(0, c_1(M)]$, существует решение $x(t) \in S_*(A_3)$, такое что скорость блуждания $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На отрезке $[0, k^*]$ (где k^* — наибольший из корней уравнения $f_1(k) = 0$) функция

$$\Psi(k) = \frac{2f_1(k)f_2(k)}{f_1(k) + f_2(k)} = \frac{(Mk + M)^2 - k^4}{M(k + 1)(k^2 + 1)} \quad (1.19)$$

неотрицательна и принимает все значения из отрезка

$$\left[0, \max_{k: 0 \leq k \leq k^*} \Psi(k)\right]$$

(вследствие непрерывности функций $f_1(k)$, $f_2(k)$ и неравенства $0 \leq f_1(k) \leq f_2(k)$). Справедливо также (в силу отрицательности выражения $\Psi(k)$ при $k > k^*$) равенство

$$\max_{k: 0 \leq k \leq k^*} \Psi(k) = \max_{k \geq 0} \Psi(k) = c_1(M). \quad (1.20)$$

Таким образом, для любого $r \in (0, c_1(M)]$ существует $k_0 \in [0, k^*]$, такое что $r = \Psi(k_0)$. Данное k_0 задает начальное условие для решения $x(t)$ системы A_3 , на котором $\dot{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = r$.

Следствие 1 доказано.

Далее для доказательства теоремы 1 нам понадобится обобщение леммы 4 на случай кусочно непрерывных коэффициентов.

ЛЕММА 5. Пусть кусочно непрерывная функция $\alpha_1(t)$ непрерывна на отрезках $[T_1, T_2^*]$ и $[T_3^*, T_4]$ ($T_2^* \leq T_3^*$), причем справедливо

$$\alpha_1(T_1) = -A < 0, \quad \alpha_1(T_4) = B > 0, \quad (1.21)$$

где A, B — некоторые положительные числа. Пусть уравнение (1.9) с коэффициентами $a_1(t) = a_2(t) = \alpha_1(t)$ имеет решение $k(t)$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$k(T_1) = k(T_4) = k_0, \quad g_1(k_0, T_1) > 0, \quad g_1(k, t) = -k^2 - \alpha_1(t)k - \alpha_1(t)$$

для некоторого произвольного положительного $k_0 > 0$. Тогда существуют правая полукрестность $(T_1, T_1 + \Delta_1)$ значения T_1 и левая полукрестность $(T_4 - \Delta_2, T_4)$ значения T_4 , такие что для значений T_1 и T_2 , определяемых условиями $T_2 \in (T_1, T_1 + \Delta_1)$ и $T_3 \in (T_4 - \Delta_2, T_4]$, $k(T_2) = k(T_3)$, справедливо равенство (1.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сделанных предположений рассматриваемое решение $k(t)$ возрастает от значения k_0 в некоторой правой полукрестности $(T_1, T_1 + \Delta_1)$ точки T_1 и убывает до значения k_0 в некоторой

левой полукрестности $(T_4 - \Delta_2, T_4)$ точки T_4 . Отсюда следует, что для любого k_1 , достаточно близкого к k_0 и такого что $k_1 > k_0$, можно выбрать $T_2 \in (T_1, T_1 + \Delta_1)$ и $T_3 \in (T_4 - \Delta_2, T_4)$ так, чтобы было выполнено

$$k(T_2) = k(T_3) = k_1,$$

$$g_1(k(t), t) > 0, \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad g_1(k(t), t) < 0, \quad T_3 \leq t \leq T_4.$$

Заметим, что при $k_1 \rightarrow k_0$ справедливо $T_2 \rightarrow T_1$ и $T_3 \rightarrow T_4$.

Для доказательства леммы фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности $\alpha(t)$ на отрезке $[T_1, T_2^*]$, существует $\delta > 0$, такое что для любого $T_2 > T_1$, удовлетворяющего неравенству

$$|T_2 - T_1| < \delta,$$

и любых $t \in [T_1, T_2]$ выполнено

$$0 < -k^2 + A^*k + A^* \leq \dot{k} \leq -k^2 + A^{**}k + A^{**},$$

где

$$A^* = A - \varepsilon, \quad A^{**} = A + \varepsilon.$$

Интегрированием последних неравенств получаем оценку

$$\Delta T_1(A^{**}, k_1, k_0) \leq T_2 - T_1 \leq \Delta T_1(A^*, k_1, k_0), \quad (1.22)$$

где $\Delta T_1(A, k_1, k_0)$ определяется равенством (1.13).

Аналогично, для любого $T_3 < T_4$, удовлетворяющего неравенству

$$|T_4 - T_3| < \delta,$$

и любых $t \in [T_3, T_4]$ выполнено

$$-k^2 - B^*k - B^* \leq \dot{k} \leq -k^2 - B^{**}k - B^{**} < 0,$$

где

$$B^* = B + \varepsilon, \quad B^{**} = B - \varepsilon.$$

Интегрированием последних неравенств получаем оценку

$$\Delta T_2(B^*, k_1, k_0) \leq T_4 - T_3 \leq \Delta T_2(B^{**}, k_1, k_0) \quad (1.23)$$

где $\Delta T_2(B, k_1, k_0)$ определяется равенством (1.14).

Из оценок (1.22) и (1.23) получаем

$$\frac{\Delta T_2(B^*, k_1, k_0)}{\Delta T_1(A^*, k_1, k_0)} \leq \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} \leq \frac{\Delta T_2(B^{**}, k_1, k_0)}{\Delta T_1(A^{**}, k_1, k_0)}. \quad (1.24)$$

Переходя в последних неравенствах к пределу, с учетом леммы 4, получаем

$$\frac{-k_0^2 + A^*k_0 + A^*}{k_0^2 + B^*k_0 + B^*} \leq \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} \leq \frac{-k_0^2 + A^{**}k_0 + A^{**}}{k_0^2 + B^{**}k_0 + B^{**}}. \quad (1.25)$$

В силу произвольности ε отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 5 доказана.

1.3 Элементарные циклы и повороты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что решение $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ содержит *элементарный цикл* в области положительных значений k на отрезке $[T_0, T]$, если:

- 1) функции $a_1(t)$, $a_2(t)$ непрерывны на $[T_0, \tilde{T})$ и $(\tilde{T}, T]$,
- 2) функция $k(t)$, определенная на решении $x(t)$, удовлетворяет следующим условиям:

$k(t)$ — возрастает на $[T_0, \tilde{T})$, убывает на $(\tilde{T}, T]$,

$k(T_0) = k(T) = k_0$,

$k(\tilde{T}) = k_1 > k_0 > 0$.

ЛЕММА 6. Если решение $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ содержит элементарный цикл в области положительных значений k на отрезке $[T_0, T]$, то

$$\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T f(k(\tau), \tau) d\tau \leq c_1(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$F_1(k, t) = \frac{-k^2 - a_1(t)k - a_2(t)}{k^2 + 1}, \quad F_2(k, t) = -F_1(k, t).$$

Заметим, что

$$F_1(k(t), t) \leq f_1(k(t)), \quad F_2(k(t), t) \leq f_2(k(t)) \quad (1.26)$$

при $k(t) > 0$, в силу ограничений, наложенных на функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, где функции $f_1(k)$ и $f_2(k)$ определены в (1.11). Кроме того, $F_1(k(t), t) > 0$ при $t \in [T_0, \tilde{T})$ (в силу возрастания $k(t)$ на этом интервале и равенства (1.9)) и $F_2(k(t), t) > 0$ при $t \in (\tilde{T}, T]$ (в силу убывания $k(t)$ на этом интервале и равенства (1.9)). Подынтегральное выражение $f(k(t), t)$ совпадает с $F_1(k(t), t)$ при $t \in [T_0, \tilde{T})$ и с $F_2(k(t), t)$ при $t \in (\tilde{T}, T]$.

В силу леммы 5 и непрерывности $F_1(k(t), t)$ и $F_2(k(t), t)$ на полуинтервалах $[T_0, \tilde{T})$ и $(\tilde{T}, T]$ соответственно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения $\{t^j\}$ и $\{t^{n+j}\}$, $j = \overline{0, n}$, отрезков $[T_0, \tilde{T}]$ и $[\tilde{T}, T]$ соответственно, такие что $k(t^j) = k(t^{2n-j}) = \bar{k}^j$, где $k_0 = \bar{k}^0 < \bar{k}^1 < \dots < \bar{k}^n = k_1$, и

$$\left| \frac{\Delta t_j^2}{\Delta t_j^1} - \frac{F_1(\bar{k}^j, t^j)}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} \right| < \varepsilon,$$

$$|F_1(k(t), t) - F_1(\bar{k}^j, t^j)| < \varepsilon, \quad t \in \Delta t_j^1,$$

$$|F_2(k(t), t) - F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})| < \varepsilon, \quad t \in \Delta t_j^2,$$

где

$$\Delta t_j^1 = t^{j+1} - t^j, \quad \Delta t_j^2 = t^{2n-j} - t^{2n-j-1}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Для данного разбиения с учетом неравенств (1.26) справедливо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T f(k(\tau), \tau) d\tau = \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_1(k(\tau), \tau) d\tau + \sum_{j=n}^{2n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_2(k(\tau), \tau) d\tau}{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^2} \leq \\ & \leq \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 \left[F_1(\bar{k}^j, t^j) + \varepsilon + (F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j}) + \varepsilon) \frac{\Delta t_j^2}{\Delta t_j^1} \right]}{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 \left(1 + \frac{\Delta t_j^2}{\Delta t_j^1} \right)} \leq \\ & \leq \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 \left[F_1(\bar{k}^j, t^j) + \varepsilon + (F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j}) + \varepsilon) \left(\frac{F_1(\bar{k}^j, t^j)}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} + \varepsilon \right) \right]}{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 \left(1 + \frac{F_1(\bar{k}^j, t^j)}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} - \varepsilon \right)} \leq \\ & \leq \frac{2 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 F_1(\bar{k}^j, t^j)}{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 F_1(\bar{k}^j, t^j) \left(\frac{1 - \varepsilon}{F_1(\bar{k}^j, t^j)} + \frac{1}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} \right)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 \left[1 + F_1(\bar{k}^j, t^j) + \frac{F_1(\bar{k}^j, t^j)}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} + \varepsilon \right]}{\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j^1 \left(1 + \frac{F_1(\bar{k}^j, t^j)}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} - \varepsilon \right)} \leq \\
& \leq \frac{2}{\min_{j=0, n} \left(\frac{1}{F_1(\bar{k}^j, t^j)} + \frac{1}{F_2(\bar{k}^j, t^{2n-j})} \right)} + O(\varepsilon) \leq \\
& \leq \frac{2}{\min_{k \in [k_0, k_1]} \left(\frac{1}{f_1(k)} + \frac{1}{f_2(k)} \right)} + O(\varepsilon) = \\
& = \max_{k \in [k_0, k_1]} \frac{2f_1(k)f_2(k)}{f_1(k) + f_2(k)} + O(\varepsilon) \leq c_1(M) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство получено с учетом (1.19), (1.20). В силу произвольности ε отсюда получаем утверждение леммы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогично можно определить элементарный цикл при отрицательных значениях $k(t)$, потребовав выполнения неравенства $k_0 < k_1 < 0$. В этом случае утверждение леммы 6 остается справедливым. Доказательство леммы 6 для случая элементарного цикла в области отрицательных значений $k(t)$ основывается на леммах 4* и 5*, аналогичных леммам 4 и 5.

ЛЕММА 4*. Пусть уравнение (1.9) с кусочно непрерывными коэффициентами $a_1(t) = -a_2(t) = -\alpha_0(t)$, где функция $\alpha_0(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4, имеет решение $k(t)$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$k(T_1) = k(T_4) = k_0, \quad k(T_2^*) = k(T_3^*) = k_1^*,$$

$$g_0^*(k_0) > 0, \quad g_0^*(k_1^*) > 0, \quad g_0^*(k) = -k^2 - Ak + A$$

для некоторых $k_0 < k_1^* < 0$. Тогда для значений T_2 и T_3 , определяемых условиями $T_2 \in [T_1, T_2^*]$ и $T_3 \in [T_3^*, T_4]$, $k(T_2) = k(T_3)$, справедливо

$$\lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} = \frac{-k_0^2 - Ak_0 + A}{k_0^2 - Bk_0 + B}. \quad (1.27)$$

ЛЕММА 5*. Пусть для некоторой функции $\alpha_1(t)$, удовлетворяющей условиям леммы 5, уравнение (1.9) с коэффициентами

$a_1(t) = -a_2(t) = -\alpha_1(t)$ имеет решение $k(t)$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$k(T_1) = k(T_4) = k_0, \quad g_1^*(k_0, T_1) > 0, \quad g_1^*(k, t) = -k^2 + \alpha_1(t)k - \alpha_1(t),$$

для некоторого (произвольного) отрицательного $k_0 < 0$. Тогда существует правая полуокрестность $(T_1, T_1 + \Delta_1)$ значения T_1 и левая полуокрестность $(T_4 - \Delta_2, T_4)$ значения T_4 , такие что для значений T_1 и T_2 , определяемых условиями $T_2 \in (T_1, T_1 + \Delta_1)$ и $T_3 \in (T_4 - \Delta_2, T_4]$, $k(T_2) = k(T_3)$, справедливо равенство (1.27).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что решение $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ содержит элементарный поворот на интервале (T_0, T) , если функция $k(t)$, определенная на этом решении, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) убывает на (T_0, T) ,
- 2) $\lim_{t \rightarrow T_0} k(t) = \infty$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow T} k(t) = -\infty$.

ЛЕММА 7. Пусть решение $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ содержит элементарный поворот на интервале (T_0, T) , тогда

$$\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T f(k(\tau)) d\tau \leq c_2(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим величину T снизу. Для этого заметим, что на решении $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ справедлива оценка:

$$\dot{k} \geq -k^2 - M|k| - M. \quad (1.28)$$

Оценим время $\tilde{T} - T_0$ убывания $k(t)$ от $+\infty$ до 0, пользуясь оценкой (1.28):

$$\tilde{T} - T_0 \geq \hat{T},$$

где

$$\begin{aligned} \hat{T} &= - \int_{k(T_0)=+\infty}^{k(\tilde{T})=0} \frac{dk}{k^2 + Mk + M} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 4M}} \ln \left| \frac{M + \sqrt{M^2 - 4M}}{M - \sqrt{M^2 - 4M}} \right|, & M > 4, \\ \frac{2}{\sqrt{4M - M^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{M}{\sqrt{4M - M^2}} \right], & 0 < M < 4, \\ \frac{1}{2}, & M = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично (заменой k на $-k$) получается такая же оценка для времени $T - \tilde{T}$ убывания $k(t)$ от 0 до $-\infty$: $T - \tilde{T} \geq \hat{T}$. Из последних двух неравенств вытекает неравенство $T - T_0 \geq 2\hat{T}$. С учетом (1.9) и убывания $k(t)$ на (T_0, T) , справедливо

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T f(k(\tau), \tau) d\tau &= \int_{T_0}^T \frac{|-k^2(\tau) - a_1(\tau)k(\tau) - a_2(\tau)|}{k^2(\tau) + 1} d\tau = \\ &= \int_{T_0}^T \frac{|\dot{k}|}{k^2 + 1} d\tau = \int_{T_0}^T \frac{-\dot{k}}{k^2 + 1} d\tau = \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{k^2 + 1} = \pi, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T f(k(\tau)) d\tau \leq \frac{\pi}{2\hat{T}} = c_2(M).$$

Лемма 7 доказана.

Определим систему $A_3^w \in \mathcal{E}_M$ с начальным условием, удовлетворяющим равенству $k(0) = 0$, задаваемую кусочно постоянными коэффициентами, периодическими с периодом $2\hat{T}$,

$$a_1(t) = \begin{cases} -M, & t \in [0, \hat{T}), \\ M, & t \in [\hat{T}, 2\hat{T}) \end{cases}, \quad a_2(t) = M.$$

Из доказательства леммы 7 выводится

СЛЕДСТВИЕ 2. На решении $x(t)$ системы A_3^w скорости блуждания $\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = c_2(M)$.

Заметим, что функция $c_2(M) \rightarrow 0$, $M \rightarrow 0$, является непрерывной, откуда и из следствия 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любого $r \in [0, c_2(M)]$ существует решение $x(t) \in S_*(\mathcal{E}_M)$ со скоростями блуждания $\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = r$.

1.4 Обобщенные элементарные циклы и повороты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что решение $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ содержит *обобщенный элементарный поворот* на конечном или счетном объединении непересекающихся интервалов $\bigsqcup_i (T_i^1, T_i^2)$, ($T_{i+1}^1 > T_i^2$, $i \geq 0$), принадлежащем некоторому конечному отрезку, если функция $k(t)$, определенная на решении $x(t)$, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) убывает на $\bigsqcup_i (T_i^1, T_i^2)$,
- 2) $k(T_i^2) = k(T_{i+1}^1)$ для всех i ,
- 3) $\lim_{t \rightarrow T_0^1} k(t) = \infty$,
- 4) $\inf_i \lim_{t \rightarrow T_i^2} k(t) = -\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что решение $x(t)$ системы из $\mathcal{E}_M$ содержит *обобщенный элементарный цикл* на объединении непересекающихся или имеющих одну общую точку отрезков $[T_1, T_2]$ и $[T_3, T_4]$, если:

- 1) функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ непрерывны на этих отрезках,
- 2) функция $k(t)$, определенная на решении $x(t)$, удовлетворяет следующим условиям:

ограничена на $[T_1, T_2] \cup [T_3, T_4]$,
убывает на $[T_1, T_2]$ и возрастает на $[T_3, T_4]$,
 $k(T_1) = k(T_4)$ и $k(T_2) = k(T_3)$.

Назовем $[T_1, T_2]$ отрезком убывания, а $[T_3, T_4]$ отрезком возрастания цикла. При этом если $0 < k(T_2) < k(T_1)$, то будем говорить об *обобщенном элементарном цикле* в области положительных значений, а если $k(T_2) < k(T_1) < 0$, то будем говорить об *обобщенном элементарном цикле* в области отрицательных значений.

ЛЕММА 8. *Утверждение леммы 6 справедливо для обобщенного элементарного цикла в области положительных или отрицательных значений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 6 с точностью до замены $[T_0, T]$ на $[T_1, T_2] \cup [T_3, T_4]$.

ЛЕММА 9. *Справедливо утверждение леммы 7 для обобщенного элементарного поворота.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 7 с точностью до замены (T_0, T) на $\bigsqcup_i (T_i^1, T_i^2)$.

1.5 Вспомогательные леммы

Определим

$$c_3(M) = \max\{c_1(M), c_2(M)\}. \quad (1.29)$$

Фиксируем $x(t) \in S_*(\mathcal{E}_M)$ и определим для него множества

$$\mathfrak{T}_1^t = \{\tau \leq t : f(k(\tau), \tau) \leq c_3(M)\}, \quad \mathfrak{T}_1 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathfrak{T}_1^t, \quad (1.30)$$

$$\mathfrak{T}_2^t = \{\tau \leq t : f(k(\tau), \tau) > c_3(M)\}, \quad \mathfrak{T}_2 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathfrak{T}_2^t. \quad (1.31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Значения τ , такие что $k(\tau) = 0$, не принадлежат множеству $\mathfrak{T}_2$ вместе с некоторой окрестностью.

Это замечание следует из неравенства

$$f(k(\tau), \tau) \leq M < c_1(M) \leq c_3(M),$$

справедливого при τ , таких что $k(\tau) = 0$, где

$$f(k, t) = \frac{|-k^2 - a_1(t)k - a_2(t)|}{k^2 + 1} \leq \frac{k^2 + M|k| + M}{k^2 + 1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любого $t \in \mathfrak{T}_2$ имеем $\dot{k}(t) < 0$.

Действительно, предположив, что $\dot{k}(t) > 0$ для некоторого $t \in \mathfrak{T}_2$, получим

$$0 < \dot{k}(t) = -k^2(t) - a_1(t)k(t) - a_2(t) \leq -k^2(t) + M|k(t)| + M.$$

Откуда следует, что для этого $t \in \mathfrak{T}_2$ справедливо неравенство

$$f(k(t), t) = \frac{|-k^2 - a_1(t)k - a_2(t)|}{k^2 + 1} \leq \frac{-k^2 + M|k| + M}{k^2 + 1} \leq c(M),$$

где

$$c(M) = \max_{k \geq 0} \frac{-k^2 + Mk + M}{k^2 + 1}.$$

Последнее неравенство противоречит определению (1.31) множества $\mathfrak{T}_2$, так как $c(M) \leq c_1(M)$. Действительно, в силу определения (1.11) функций $f_1(k)$ и $f_2(k)$ справедливы неравенства $f_1(k) \leq f_2(k)$ и $f_2(k) > 0$ при $k \geq 0$. С учетом соотношений (1.19) и (1.20) для $c_1(M)$ отсюда следует

$$c(M) = \max_{k \geq 0} f_1(k) = \max_{k \geq 0} \frac{1}{\frac{1}{f_1(k)}} \leq \max_{k \geq 0} \left\{ \frac{2}{\frac{1}{f_1(k)} + \frac{1}{f_2(k)}} \right\} = c_1(M).$$

Замечание 3 доказано.

В силу непрерывности $x(t)$, функция $k(t)$ или непрерывна в каждой точке полуинтервала $t \geq 0$, или принимает бесконечное значение в конечном или счетном числе точек, а в остальных точках полуинтервала $t \geq 0$ непрерывна. Предположим, что функция $k(t)$, определенная на решении $x(t)$, непрерывна при $t > 0$, то есть не обращается в бесконечность ни в одной внутренней точке этого интервала. Пусть $k(t)$ не является убывающей на множестве $\mathfrak{T}_2$. В этом случае можно выделить непустое подмножество $\mathfrak{U}_2$ множества $\mathfrak{T}_2$, образованное объединением конечного или счетного числа отрезков и удовлетворяющее условиям:

- 1) на $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$ функция $k(t)$ убывает;
- 2) для каждого отрезка из $\mathfrak{U}_2$ существует парный отрезок, принадлежащий множеству $\mathfrak{T}_1$ и образующий вместе с исходным отрезком *обобщенный элементарный цикл* в области положительных или отрицательных значений.

Действительно, заметим, что множество $\mathfrak{T}_2$ является открытым. Представим его в виде объединения непересекающихся интервалов (τ_{2i}, τ_{2i+1}) ($(\tau_{2(i+1)} > \tau_{2i+1})$):

$$\mathfrak{T}_2 = \bigcup_i (\tau_{2i}, \tau_{2i+1}).$$

На каждом из них, в силу замечания 3, функция $k(t)$, определяемая решением $x(t)$, убывает.

Проведем построение множеств $\mathfrak{U}_2$ и $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$, последовательно перебирая интервалы, составляющие множество $\mathfrak{T}_2$. Положим $(\tau_0, \tau_1) \subset \mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$. Рассмотрим интервал $(\tau_2, \tau_3) \subset \mathfrak{T}_2$. Пусть выполнено $k(\tau_1) \geq k(\tau_2)$, что означает, что функция $k(t)$ убывает на объединении отрезков $[\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_2, \tau_3]$. Тогда положим $(\tau_2, \tau_3) \subset \mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$.

Пусть теперь выполнено $k(\tau_1) < k(\tau_2)$. Возможны два случая:

- 1) $k(\tau_0) \leq k(\tau_3)$. В этом случае положим $[\tau_2, \tau_3] \subset \mathfrak{U}_2$. В силу непрерывности $k(t)$, на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ можно выделить конечное или счетное число непересекающихся подотрезков $[\hat{\tau}_1^{2j}, \hat{\tau}_1^{2j+1}]$, $\hat{\tau}_1^{2j+1} < \hat{\tau}_1^{2j+2}$, $j \in \mathfrak{J} = \{0, 1, \dots\}$, таких что $k(t)$ непрерывна и возрастает от значения $k(\tau_3)$ до значения $k(\tau_2)$ на множестве

$$\bigcup_{j \in \mathfrak{J}} [\hat{\tau}_1^{2j}, \hat{\tau}_1^{2j+1}],$$

причем выполнено

$$k(\hat{\tau}_1^0) = k(\tau_3), \quad k(\hat{\tau}_1^{2J+1}) = k(\tau_2), \quad \text{где } J = \sup_{j \in \mathfrak{J}} j$$

(множество $\mathfrak{J}$ определяется как множество значений, пробегаемых индексом j). Обозначим τ_1^{2j} и τ_1^{2j+1} — значения t на отрезке $[\tau_2, \tau_3]$, задаваемые равенствами

$$k(\tau_1^{2j}) = k(\hat{\tau}_1^{2j+1}), \quad k(\tau_1^{2j+1}) = k(\hat{\tau}_1^{2j}).$$

При необходимости осуществим дополнительное разбиение пар построенных отрезков для удовлетворения условию непрерывности $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Из построения и из замечания 2 следует, что рассматриваемое решение содержит *обобщенный элементарный цикл* в области положительных или отрицательных значений на каждой паре отрезков $[\hat{\tau}_1^{2j}, \hat{\tau}_1^{2j+1}]$ и $[\tau_1^{2j}, \tau_1^{2j+1}]$, причем $[\hat{\tau}_1^{2j}, \hat{\tau}_1^{2j+1}] \subset \mathfrak{T}_1$;

2) $k(\tau_0) > k(\tau_3)$. В этом случае обозначим τ_2^* значение переменной t , принадлежащее отрезку $[\tau_2, \tau_3]$ и определяемое равенством $k(\tau_2^*) = k(\tau_1)$. Положим $[\tau_2, \tau_2^*] \subset \mathfrak{U}_2$. Дальнейшее построение обобщенных циклов на отрезке $[\tau_2, \tau_2^*]$ проводится аналогично предыдущему случаю.

Далее рассмотрим следующий интервал $(\tau_4, \tau_5) \subset \mathfrak{T}_2$ и будем проводить его сравнение с самым правым из уже построенных интервалов множества $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$ по аналогии с предыдущим рассмотрением.

Из построения следует, что подмножество $\mathfrak{U}_2$ может быть пустым только в том случае, когда $k(t)$ убывает на всем множестве $\mathfrak{T}_2$. Кроме того, все парные отрезки к отрезкам из $\mathfrak{U}_2$ принадлежат множеству $\mathfrak{T}_1$ (так как являются отрезками возрастания $k(t)$, а следовательно, в силу замечания 3, не могут принадлежать $\mathfrak{T}_2$). Обозначим их объединение $\mathfrak{U}_1$.

Оценим меру множества $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$.

ЛЕММА 10. Пусть функция $k(t)$, определенная на решении $x(t) \in S_*(\mathcal{E}_M)$, непрерывна при $t > 0$. Тогда мера множества $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$ конечна

$$\text{mes}(\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны два случая.

1. Функция $k(t)$ ограничена на $\mathfrak{T}_2$. Тогда существует отрезок $[k_1^*, k_2^*]$, которому принадлежит множество значений $k(t)$ на $\mathfrak{T}_2$. Кроме того, из определения множества $\mathfrak{T}_2$ и замечания 3 следует неравенство

$$\dot{k} = -k^2 - a_1(t)k - a_2(t) < -c_3(M)(k^2 + 1) < -c_3(M)$$

для любого $t \in \mathfrak{T}_2$. Проинтегрируем это выражение по каждому интервалу $(\tau_{2i}, \tau_{2i+1}) \subset \mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$

$$k(\tau_{2i+1}) - k(\tau_{2i}) \leq -c_3(M)(\tau_{2i+1} - \tau_{2i}).$$

Тогда в силу ограниченности области значений $k(t)$ при $t \in \mathfrak{T}_2$ и монотонности $k(t)$ на $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$

$$\text{mes}(\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2) = \sum_i (\tau_{2i+1} - \tau_{2i}) \leq \frac{\sum_i k(\tau_{2i}) - \sum_i k(\tau_{2i+1})}{c_3(M)} \leq \frac{k_2^* - k_1^*}{c_3(M)} < \infty.$$

2. Функция $k(t)$ не ограничена на $\mathfrak{T}_2$. В этом случае также введем в рассмотрение отрезок $[k_1^*, k_2^*]$, такой что $k_2^* = 2r_2(M)$, $k_1^* = -2r_2(M)$, где $r_2(M) = \frac{1}{2}(M + \sqrt{4M + M^2})$ — положительный корень многочлена $-k^2 + M|k| + M$. Заметим, что вне отрезка $[k_1^*, k_2^*]$ данный многочлен принимает отрицательные значения. Определим подмножество $\mathfrak{T}_2^{\text{in}}$ множества $\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2$:

$$\mathfrak{T}_2^{\text{in}} = \{\tau \in \mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2 : k(\tau) \in [k_1^*, k_2^*]\}$$

Аналогично предыдущему случаю можно показать, что мера этого подмножества конечна

$$\text{mes}(\mathfrak{T}_2^{\text{in}}) \leq \frac{k_2^* - k_1^*}{c_3(M)} = \frac{4r_2(M)}{c_3(M)} = C_1(M). \quad (1.32)$$

Покажем, что мера множества $\mathfrak{T}_2^{\text{out}} = \mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2 \setminus \mathfrak{T}_2^{\text{in}}$ также конечна. Для этого воспользуемся оценкой

$$\dot{k} = -k^2 - a_1(t)k - a_2(t) \leq -k^2 + M|k| + M < 0$$

справедливой для любого $t \in \mathfrak{T}_2^{\text{out}}$. Проинтегрировав последнее неравенство на каждом из интервалов $(\tau_{2i}, \tau_{2i+1}) \subset \mathfrak{T}_2^{\text{out}}$ получим

$$\tau_{2i+1} - \tau_{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{4M + M^2}} \left(\ln \left| \frac{k(\tau_{2i+1}) - r_1^*(M)}{k(\tau_{2i+1}) - r_2^*(M)} \right| - \ln \left| \frac{k(\tau_{2i}) - r_1^*(M)}{k(\tau_{2i}) - r_2^*(M)} \right| \right),$$

где $r_1^*(M)$ и $r_2^*(M)$, соответственно, меньший и больший корень многочлена $-k^2 + Mk + M$ или $-k^2 - Mk + M$, в зависимости от знака $k(t)$ на рассматриваемом интервале. В силу убывания $k(t)$ на $\mathfrak{T}_2^{\text{out}}$

$$\text{mes}(\mathfrak{T}_2^{\text{out}}) = \sum_{i: (\tau_{2i}, \tau_{2i+1}) \subset T_{\text{out}}^{**}} (\tau_{2i+1} - \tau_{2i}) \leq \frac{1}{\sqrt{4M + M^2}}.$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i: (\tau_{2i}, \tau_{2i+1}) \subset \mathfrak{T}_2^{\text{out}}} \left(\ln \left| \frac{k(\tau_{2i+1}) - r_1^*(M)}{k(\tau_{2i+1}) - r_2^*(M)} \right| - \ln \left| \frac{k(\tau_{2i}) - r_1^*(M)}{k(\tau_{2i}) - r_2^*(M)} \right| \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{4M + M^2}} \left(\ln \left| \frac{k_2^* - r_1(M)}{k_2^* - r_2(M)} \right| + \ln \left| \frac{k_1^* + r_1(M)}{k_1^* + r_2(M)} \right| \right) = \\
& = \frac{2}{\sqrt{4M + M^2}} \ln \left| 2 - \frac{r_1(M)}{r_2(M)} \right| = C_2(M) < \infty, \tag{1.33}
\end{aligned}$$

где $r_1(M) = \frac{1}{2}(M - \sqrt{4M + M^2})$. Из оценок (1.32) и (1.33) следует оценка

$$\text{mes}(\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2) = \text{mes}(\mathfrak{T}_2^{\text{in}}) + \text{mes}(\mathfrak{T}_2^{\text{out}}) \leq C_1(M) + C_2(M) < \infty. \tag{1.34}$$

Лемма 10 доказана.

Введем обозначение

$$c_4(M) = \frac{1 + M + \sqrt{M^2 + (M - 1)^2}}{2}.$$

ЛЕММА 11. Для любого решения $x(t) \in S_*(\mathcal{E}_M)$

$$0 \leq \hat{\mu}(x) \leq \check{\mu}(x) \leq c_4(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть неравенства следует из положительности подинтегральной функции. Вторая - в силу оценки:

$$\begin{aligned}
f(k(t), t) & \leq \frac{k^2 + M|k| + M}{k^2 + 1} \leq \max_k \left\{ \frac{k^2 + M|k| + M}{k^2 + 1} \right\} = \\
& = \frac{1 + M + \sqrt{M^2 + (M - 1)^2}}{2} = c_4(M).
\end{aligned}$$

Лемма 11 доказана.

Заметим, что из доказательства леммы 11 следует неравенство

$$c_3(M) \leq c_4(M).$$

1.6 Основная лемма

ЛЕММА 12. Для любого решения $x(t) \in S_*(\mathcal{E}_M)$

$$\hat{\mu}(x) \leq \check{\mu}(x) \leq c_3(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathfrak{T}_1^t, \mathfrak{T}_2^t$, определенные как в (1.30). Тогда в силу леммы 11

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \gamma_3(x, t) &= \frac{\int_0^t f(k(\tau)) d\tau}{t} = \frac{\int_{\mathfrak{T}_1^t} f(k(\tau)) d\tau + \int_{\mathfrak{T}_2^t} f(k(\tau)) d\tau}{t} \\ &\leq \frac{c_3(M) \text{mes}(\mathfrak{T}_1^t)}{t} + \frac{c_4(M) \text{mes}(\mathfrak{T}_2^t)}{t}. \end{aligned}$$

Непосредственно из проведенной оценки утверждение леммы следует в случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(\mathfrak{T}_2^t)}{t} = 0.$$

Предположим теперь, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(\mathfrak{T}_2^t)}{t} > 0.$$

Рассмотрим два случая:

а) $k(t)$ — непрерывна при $t > 0$. Обозначим за $\mathfrak{U}_2^t$ объединение всех отрезков из $\mathfrak{T}_2^t$, входящих в состав *обобщенных элементарных циклов*, а за $\mathfrak{U}_1^t \in \mathfrak{T}_1^t$ — объединение парных отрезков к отрезкам из $\mathfrak{U}_2^t$, то есть тех, которые являются отрезками возрастания. Тогда

$$\mathfrak{T}_2^t \setminus \mathfrak{U}_2^t \subseteq \mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2 \Rightarrow \text{mes}(\mathfrak{T}_2^t \setminus \mathfrak{U}_2^t) \leq \text{mes}(\mathfrak{T}_2 \setminus \mathfrak{U}_2)$$

и, в силу лемм 8, 10 и 11, справедливо

$$\begin{aligned} &\frac{\int_{\mathfrak{T}_1^t} f(k(\tau)) d\tau + \int_{\mathfrak{T}_2^t} f(k(\tau)) d\tau}{t} = \\ &= \frac{\int_{\mathfrak{T}_1^t \setminus \mathfrak{U}_1^t} f(k(\tau)) d\tau + \int_{\mathfrak{T}_2^t \setminus \mathfrak{U}_2^t} f(k(\tau)) d\tau + \int_{\mathfrak{U}_1^t \cup \mathfrak{U}_2^t} f(k(\tau)) d\tau}{t} \leq \\ &\leq \frac{c_3(M) \text{mes}(\mathfrak{T}_1^t \setminus \mathfrak{U}_1^t) + c_4(M) \text{mes}(\mathfrak{T}_2^t \setminus \mathfrak{U}_2^t) + c_1(M) \text{mes}(\mathfrak{U}_2^t \cup \mathfrak{U}_1^t)}{t} \leq \\ &\leq c_3(M) \left(\frac{\text{mes}(\mathfrak{T}_1^t \setminus \mathfrak{U}_1^t) + \text{mes}(\mathfrak{U}_2^t \cup \mathfrak{U}_1^t)}{t} \right) + \end{aligned}$$

$$+c_4(M) \left(\frac{\text{mes}(\mathfrak{T}_2^t \setminus \mathfrak{U}_2^t)}{t} \right) \rightarrow c_3(M), \quad t \rightarrow \infty.$$

б) $k(t)$ не является непрерывной при $t > 0$, то есть (в силу непрерывности решения $x(t)$) принимает бесконечное значение в конечном или счетном числе точек.

Пусть число таких точек конечно, или все они принадлежат некоторому отрезку $[0, T^\infty]$. Тогда на интервале $[T^\infty, \infty)$ функция $k(t)$ удовлетворяет условиям леммы 10. Из ограниченности первого слагаемого в правой части равенства

$$\int_0^t f(k(\tau))d\tau = \int_0^{T^\infty} f(k(\tau))d\tau + \int_{T^\infty}^t f(k(\tau))d\tau$$

и из пункта а) в этом случае также следует утверждение леммы.

Предположим теперь, что последовательность значений t , для которых $k(t)$ принимает бесконечное значение, не ограничена. Рассмотрим (α_i, α_{i+1}) — i -й интервал с границами, в которых $k(t)$ не ограничена. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \alpha_i + 0} k(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \alpha_{i+1} - 0} k(t) = -\infty,$$

в силу (1.9). Обозначим через $\mathfrak{T}_1^i$ и $\mathfrak{T}_2^i$ пересечения (α_i, α_{i+1}) с множествами $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$. Обозначим также через $\mathfrak{U}_2^i$ подмножество множества $\mathfrak{T}_2^i$, такое что

- 1) на $\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i$ функция $k(t)$ убывает;
- 2) для каждого отрезка из $\mathfrak{U}_2^i$ существует парный отрезок, принадлежащий множеству $\mathfrak{T}_1^i$ и образующий вместе с исходным отрезком *обобщенный элементарный цикл*.

Совокупность всех таких парных отрезков обозначим $\mathfrak{U}_1^i$. Отметим, что существование множеств $\mathfrak{U}_2^i$ и $\mathfrak{U}_1^i$ на отрезке (α_i, α_{i+1}) доказывается аналогично тому, как это было ранее сделано для $t > 0$.

Затем выбираем из $\mathfrak{T}_1^i \setminus \mathfrak{U}_1^i$ те интервалы, которые дополняют $\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i$ таким образом, чтобы получился *обобщенный элементарный поворот* (это можно сделать в силу непрерывности $k(t)$ на (α_i, α_{i+1}) и ее убывания на $\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i$). Обозначим совокупность таких интервалов за $\mathfrak{U}_3^i$. Таким образом, $(\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i) \cup \mathfrak{U}_3^i$ задает область *обобщенного элементарного поворота*.

В силу лемм 8 и 9,

$$\begin{aligned}
\int_{(\alpha_i, \alpha_{i+1})} f(k(\tau)) d\tau &= \int_{\mathfrak{T}_1^i \setminus \mathfrak{U}_1^i \setminus \mathfrak{U}_3^i} f(k(\tau)) d\tau + \int_{(\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i) \cup \mathfrak{U}_3^i} f(k(\tau)) d\tau + \\
&+ \int_{\mathfrak{U}_1^i \cup \mathfrak{U}_2^i} f(k(\tau)) d\tau \leq c_3(M) \text{mes}(\mathfrak{T}_1^i \setminus \mathfrak{U}_1^i \setminus \mathfrak{U}_3^i) + \\
&+ c_2(M) \text{mes}((\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i) \cup \mathfrak{U}_3^i) + c_1(M) \text{mes}(\mathfrak{U}_1^i \cup \mathfrak{U}_2^i) \leq \\
&\leq c_3(M) (\text{mes}(\mathfrak{T}_1^i \setminus \mathfrak{U}_1^i \setminus \mathfrak{U}_3^i) + \text{mes}((\mathfrak{T}_2^i \setminus \mathfrak{U}_2^i) \cup \mathfrak{U}_3^i) + \\
&+ \text{mes}(\mathfrak{U}_1^i \cup \mathfrak{U}_2^i)) = c_3(M)(\alpha_{i+1} - \alpha_i),
\end{aligned}$$

откуда получаем оценку

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(k(\tau)) d\tau &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(k(\tau)) d\tau + \int_{\alpha_N}^t f(k(\tau)) d\tau \leq \\
&\leq c_3(M) \left(\sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + t - \alpha_N - \text{mes}(\mathfrak{T}_2^{t,N} \setminus \mathfrak{U}_2^{t,N}) \right) + \\
&+ c_4(M) \text{mes}(\mathfrak{T}_2^{t,N} \setminus \mathfrak{U}_2^{t,N}),
\end{aligned}$$

где N таково, что $t \in (\alpha_N, \alpha_{N+1})$. Множество $\mathfrak{T}_2^{t,N}$ — пересечение множества $\mathfrak{T}_2^t$ с отрезком (α_N, α_{N+1}) , $\mathfrak{U}_2^{t,N}$ — соответствующая часть множества $\mathfrak{U}_2^t$. Используя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 10, можно показать, что для $\text{mes}(\mathfrak{T}_2^{t,N} \setminus \mathfrak{U}_2^{t,N})$ имеет место оценка (1.34). Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \gamma_3(x, t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f(k(\tau)) d\tau \leq \\
&\leq c_3(M) \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}) + t - \alpha_N - \text{mes}(\mathfrak{T}_2^{t,N}) \right)}{t} \right] + \\
&+ c_4(M) \frac{\text{mes}(\mathfrak{T}_2^{t,N})}{t} \rightarrow c_3(M), \quad t \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 12 доказана.

Утверждение теоремы 1 для $\mathcal{K} = \mathcal{E}_M$ теперь следует из леммы 12, следствия 1 (из леммы 3) и следствия 3 (из леммы 7).

Глава 2

Уравнения второго и третьего порядка

В настоящей главе приводятся оценки сверху спектра верхней скорости блуждания для класса $\mathcal{E}_M$ систем, отвечающих линейным уравнениям второго и третьего порядка, при достаточно малых $M > 0$. В параграфе 2.1 приводится доказательство теоремы 2, а в параграфах 2.2–2.9 — доказательство теоремы 3.

2.1 Случай линейного уравнения второго порядка

Теорема 2 является следствием теоремы 1, доказанной в главе 1. Действительно, при $0 < M < 4$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\hat{\mu} < c_2(M) &= \pi \left(\frac{4}{\sqrt{4M - M^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{M}{\sqrt{4M - M^2}} \right) \right)^{-1} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\pi}{4} \sqrt{4M - M^2} \frac{4}{\pi} \leqslant 2\sqrt{M},\end{aligned}$$

с учетом

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{M}{\sqrt{4M - M^2}} \right) \leqslant \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow M \leqslant 2.$$

Кроме того, при всех $0 < M < 2$ справедлива оценка

$$\hat{\mu} < c_1(M) \leqslant \frac{2f_{10}f_{20}}{f_{10} + f_{20}} \leqslant 2\sqrt{M}, \quad (2.1)$$

где

$$f_{10} = \frac{M - 1 + \sqrt{(M + 1)^2 + M^2}}{2} < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}M,$$

$$f_{20} = \frac{M + 1 + \sqrt{(M - 1)^2 + M^2}}{2} < 1 + M.$$

Неравенство (2.1) далее следует из неравенства

$$\frac{2(1 + \sqrt{2})M(1 + M)}{(3 + \sqrt{2})M + 2} < 2\sqrt{M},$$

справедливого для всех $0 < M < 2$.

Теорема 2 доказана.

2.2 Случай линейного уравнения третьего порядка

Уравнение (3) при $n = 3$ можно записать в виде системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; \infty), \quad (2.2)$$

где матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3(t) & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

с кусочно непрерывными по t коэффициентами, удовлетворяющими *ограничениям* (как в (3.11))

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \max\{|a_1(t)|, |a_2(t)|, |a_3(t)|\} \leq M. \quad (2.4)$$

Перейдем в стандартные сферические координаты

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ x_2 = r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ x_3 = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Обозначим

$$v(x(\tau)) = \left| \frac{d}{d\tau} \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right|. \quad (2.5)$$

Величина (2.5) в сферических координатах принимает вид

$$v(x(\tau)) = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos^2(\theta)\dot{\phi}^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{K}_\theta}{1 + K_\theta^2}\right)^2 + \frac{1}{1 + K_\theta^2} \left(\frac{\dot{K}_\phi}{1 + K_\phi^2}\right)^2}, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{cases} K_\phi \equiv tg(\phi) = \frac{x_2}{x_1} \\ K_\theta \equiv tg(\theta) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \end{cases} \quad (2.7)$$

причем функции $\phi(t), \theta(t), K_\phi(t), K_\theta(t)$ определяются, соответственно, системами

$$\begin{cases} \dot{\phi} = tg(\theta) \cos(\phi) - \sin^2(\phi) \\ \dot{\theta} = -a_1(t) \sin(\theta) \cos(\theta) - (a_3(t) \cos(\phi) + a_2(t) \sin(\phi)) \cos^2(\theta) - \\ - \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - \sin^2(\theta) \sin(\phi), \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \dot{K}_\phi = K_\theta \sqrt{1 + K_\phi^2} \operatorname{sgn}(x_1) - K_\phi^2 \\ \dot{K}_\theta = -a_1(t) K_\theta - \frac{a_3(t) + a_2(t) K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \operatorname{sgn}(x_1) - \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \operatorname{sgn}(x_1). \end{cases} \quad (2.9)$$

Система (2.9) может быть получена дифференцированием обеих частей равенств (2.7), с учетом (1):

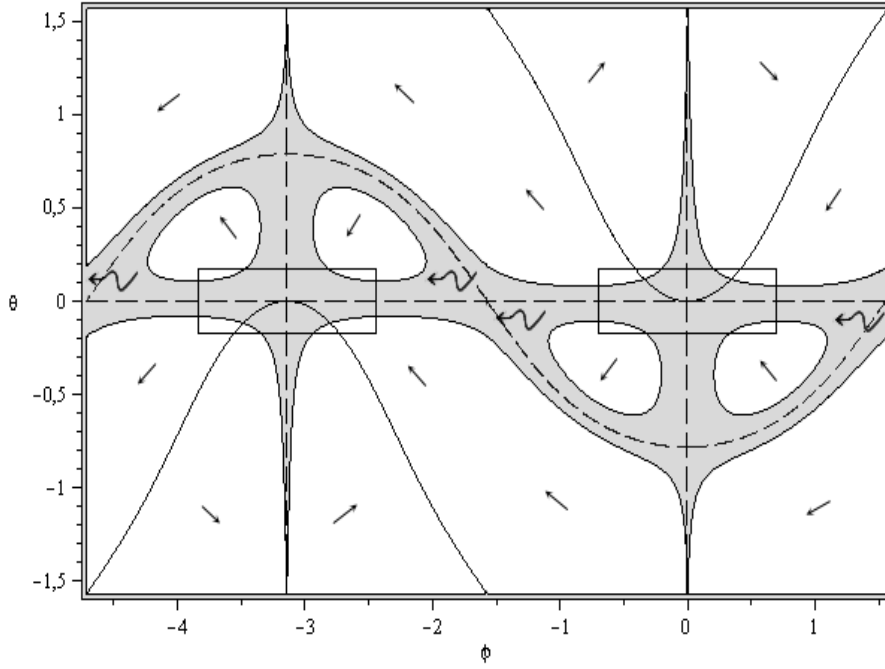
$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= \frac{x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{2} x_3 \frac{2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{x_1^2 + x_2^2} = \\ &= \frac{(-a_3(t)x_1 - a_2(t)x_2 - a_1(t)x_3)(x_1^2 + x_2^2) - x_3(x_1 x_2 + x_2 x_3)}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} = \\ &= -a_1(t) K_\theta - \frac{a_3(t) + a_2(t) K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \operatorname{sgn}(x_1) - \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \operatorname{sgn}(x_1), \\ \dot{K}_\phi &= \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_1 \dot{x}_2}{x_1^2} = \frac{x_3 x_1 - x_2^2}{x_1^2} = \frac{x_3}{x_1} - K_\phi^2 = K_\theta \sqrt{1 + K_\phi^2} \operatorname{sgn}(x_1) - K_\phi^2. \end{aligned}$$

Система (2.8) может быть получена из системы (2.9) переходом к переменным (θ, ϕ) .

Заметим, что отображения $K_\phi = tg(\phi)$ и $K_\theta = tg(\theta)$ осуществляют взаимно однозначное отображение каждой из двух полусфер, определяемых знаком $\operatorname{sgn}(x_1)$, на плоскость (K_ϕ, K_θ) . Таким образом, для оценки скоростей блуждания (2.6), будем рассматривать наряду с решением системы (2.8) на сфере, решения системы (2.9) на паре плоскостей (K_ϕ, K_θ) для $\operatorname{sgn}(x_1) > 0$ и $\operatorname{sgn}(x_1) < 0$.

В соответствии с геометрическим смыслом скорости блуждания, вектор решений системы (1) за все время движения оставляет некоторый

Рис. 2.1:



след на единичной сфере. Покажем, что этот след можно разбить на конечное либо счетное число отрезков траекторий, средняя скорость движения по которым не превосходит $36\pi\sqrt[4]{M}$. Тем самым, и средняя скорость движения по всему следу, то есть *скорость блуждания*, не превосходит $36\pi\sqrt[4]{M}$.

Заметим, что каждый след, оставленный решением системы (1) на единичной сфере, соответствует некоторому решению системы (2.8), который, в свою очередь, соответствует некоторому решению системы (2.9) и некоторой траектории на паре плоскостей (K_ϕ, K_θ) .

В дальнейшем будем иметь дело только с траекториями на сфере (на паре плоскостей (K_θ, K_ϕ)), задаваемыми системой (2.8) (системой (2.9)).

Определим на сфере окрестность нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовем *окрестностью нуля* пару областей (U^-, U^+) , задаваемую условиями

$$U^+ \equiv \{(\phi, \theta) : |\phi| < \arctg 2\sqrt[4]{M}, |\theta| < \theta_M\},$$

$$U^- \equiv \{(\phi, \theta) : |\phi + \pi| < \arctg 2\sqrt[4]{M}, |\theta| < \theta_M\},$$

где

$$\theta_M = \arctg \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}.$$

Обозначим также

$$K_M = \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}.$$

2.3 Два типа траекторий на сфере

Все возможные траектории на сфере делятся на два типа. *Траектории первого типа*, начиная с некоторого момента времени, полностью принадлежат *окрестности нуля*. Все остальные траектории относятся к *траекториям второго типа*.

Рассмотрим *траектории первого типа* и оценим среднюю скорость движения по таким траекториям. Для этого оценим скорость движения в окрестности нуля.

ЛЕММА 13. Определенная в (2.5) функция $v(x(\tau))$ в *окрестности нуля* ограничена величиной $7\sqrt{M}$ при $M < 0.03$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $M < 0.03$ оценим скорость по каждой из компонент, воспользовавшись (2.9), определением 8 и оценкой $K_M < \frac{10}{9}\sqrt{M}$:

$$|\dot{K}_\phi| < K_M \sqrt{1 + 4\sqrt{M}} + 4\sqrt{M} < \frac{10}{9}\sqrt{M} \sqrt{1 + 4\sqrt{M}} + 4\sqrt{M} < 6\sqrt{M}, \quad (2.10)$$

$$|\dot{K}_\theta| < M \left(K_M + \frac{1 + 2\sqrt[4]{M}}{\sqrt{1 + 4\sqrt{M}}} \right) + \frac{K_M 2\sqrt[4]{M}}{1 + 4\sqrt{M}} + \frac{K_M^2 2\sqrt[4]{M}}{\sqrt{1 + 4\sqrt{M}}} < 6\sqrt[4]{M^3}. \quad (2.11)$$

С учетом (2.6) получаем далее

$$v(x(\tau)) \leq \sqrt{\dot{K}_\theta^2 + \dot{K}_\phi^2} \leq 6\sqrt{M} \sqrt{1 + \sqrt{M}} < 7\sqrt{M}.$$

Лемма 13 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из леммы 13 следует, что скорость блуждания для *траекторий первого типа* не превосходит $7\sqrt{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что траектория *проходит через окрестность нуля*, если существует непрерывная часть траектории принадлежащая *окрестности нуля*, такая что расстояния, пройденные в *окрестности нуля* по координатам K_ϕ , K_θ не меньше величин $\sqrt[4]{M}$ и $\sqrt{M}$, соответственно — другими словами, существуют моменты времени $t_1 < t_2 < \infty$ такие, что в момент времени t_1 траектория входит в

окрестность нуля, в момент времени t_2 траектория выходит из окрестности нуля, а для всех моментов времени из интервала (t_1, t_2) траектория принадлежит окрестности нуля, причем $V_{t_1}^{t_2} \text{tg}(\theta(t)) \geq \sqrt{M}$ и (или) $V_{t_1}^{t_2} \text{tg}(\phi(t)) \geq \sqrt[4]{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если траектория в окрестности нуля по координате K_ϕ проходит путь $\sqrt[4]{M}$, то соответствующий путь на сфере по координате ϕ не превысит $\sqrt[4]{M}$ в силу цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{M} &= V_{t_1}^{t_2} \text{tg}(\phi(t)) = \sup_P \sum_i |\text{tg}(\phi(t_{i+1})) - \text{tg}(\phi(t_i))| > \\ &> \sup_P \sum_i |\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)| = V_{t_1}^{t_2} \phi(t), \end{aligned}$$

справедливой для всех $|\phi(t)| < \frac{\pi}{2}$, где точная верхняя грань берется по P — все возможным разбиениям отрезка $[t_1, t_2]$.

Аналогичное утверждение справедливо для вариации функции $\theta(t)$: если траектория в окрестности нуля по координате K_θ проходит путь $\sqrt{M}$, то соответствующий путь на сфере по координате θ не превысит $\sqrt{M}$.

ЛЕММА 14. Если траектория проходит через окрестность нуля, время T_0 , в течение которого она находится в окрестности нуля, не меньше $\frac{1}{6\sqrt[4]{M}}$ при $M < 0.03$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись оценками (2.10), (2.11), получаем оценку времени прохождения соответствующего пути вдоль каждой из компонент

$$T_{0K_\phi} > \frac{\sqrt[4]{M}}{6\sqrt{M}} > \frac{1}{6\sqrt[4]{M}}, \quad T_{0K_\theta} > \frac{\sqrt{M}}{6\sqrt[4]{M^3}} = \frac{1}{6\sqrt[4]{M}}.$$

Таким образом,

$$T_0 = \max\{T_{0K_\phi}, T_{0K_\theta}\} > \frac{1}{6\sqrt[4]{M}}.$$

Лемма 14 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Назовем элементарным отрезком траектории непрерывную часть траектории, обладающую следующими свойствами:

- а) начало элементарного отрезка траектории лежит вне окрестности нуля или на ее границе;
- б) элементарный отрезок траектории ровно один раз проходит через окрестность нуля;

в) конец отрезка элементарной траектории принадлежит границе окрестности нуля (и совпадает с выходом траектории из окрестности нуля).

Заметим, что элементарный отрезок траектории содержит точки, лежащие как внутри, так и вне окрестности нуля.

ЛЕММА 15 (о представлении). *Любая траектория второго типа представима в виде объединения начального отрезка траектории и счетного объединения элементарных отрезков траектории, так что начало каждого следующего отрезка траектории принадлежит границе окрестности нуля и совпадает с концом предыдущего.*

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА данной леммы исследуем векторное поле, задаваемое системами (2.8), (2.9), и докажем ряд вспомогательных лемм.

2.4 Свойства векторного поля

Изоклина $\dot{\phi} = 0$ есть пара кривых, задаваемых уравнением

$$\operatorname{tg}(\theta) \cos(\phi) - \sin^2(\phi) = 0$$

на сфере или уравнением

$$K_\theta \sqrt{1 + K_\phi^2} \operatorname{sgn}(x_1) - K_\phi^2 = 0$$

на двух плоскостях в координатах (K_ϕ, K_θ) .

Отметим, что последнее уравнение более удобно для анализа. Правая часть первого уравнения изоклины инвариантна относительно замены (ϕ, θ) на $(\phi + \pi, -\theta)$. На полусфере $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ (что соответствует $\operatorname{sgn}(x_1) > 0$) данное уравнение задает кривую, расположенную целиком в верхней части полусферы, симметричную относительно замены ϕ на $-\phi$, убывающую от $\phi = -\pi/2, \theta = \pi/2$ до $\phi = 0, \theta = 0$ при $-\pi/2 < \phi < 0$ и возрастающую от $\phi = 0, \theta = 0$ до $\phi = -\pi/2, \theta = \pi/2$ при $-\pi/2 < \phi < 0$. Соответствующая кривая на полусфере $-3\pi/2 < \phi < -\pi/2$ (что соответствует $\operatorname{sgn}(x_1) < 0$) получается из кривой на полусфере $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ заменой (ϕ, θ) на $(\phi + \pi, -\theta)$. Указанная пара кривых разбивает сферу на области, в каждой из которых производная $\dot{\phi}$ сохраняет знак. Причем на полусфере $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ область возрастания ϕ со временем ($\dot{\phi} > 0$) лежит над изоклиной $\dot{\phi} = 0$, на полусфере $-3\pi/2 < \phi < -\pi/2$ — под изоклиной. Важно отметить, что изоклина $\dot{\phi} = 0$ не зависит от величины M .

Изоклина $\dot{\theta} = 0$ на сфере для случая $M = 0$ (отмечена пунктиром на рисунке 2.1) является объединением кривых $\theta = 0, \phi = 0, \phi = -\pi$ и кривой $\operatorname{tg} \theta = \cos \phi$, центрально-симметричной относительно точки $(-\pi/2, 0)$. Производная $\dot{\theta}$ меняет знак при переходе через изоклину.

В случае, когда $M \neq 0$ и координаты $a_i(t)$ зависят от времени, изоклина $\dot{\theta} = 0$ также зависит от времени. Однако для каждого фиксированного значения M на фазовой плоскости можно выделить область, которой принадлежат изоклины $\dot{\theta} = 0$, а также выделить области знакопостоянности $\dot{\theta}$. Область положительности $\dot{\theta}$ задается неравенством $\tilde{f}(-M, \phi, \theta) > 0$, область отрицательности $\dot{\theta}$ задается неравенством $\tilde{f}(M, \phi, \theta) < 0$, где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{f}(M, \phi, \theta) \equiv & M|\sin(\theta) \cos(\theta)| + M(|\cos(\phi)| + |\sin(\phi)|) \cos^2(\theta) - \\ & - \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - \sin^2(\theta) \sin(\phi). \end{aligned}$$

При этом, соответствующая функция в координатах (K_ϕ, K_θ) имеет вид

$$f(M, K_\phi, K_\theta) \equiv M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) - \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \operatorname{sgn}(x_1),$$

причем с учетом (2.7) справедливо равенство

$$\tilde{f}(M, \phi, \theta) = f(M, K_\phi, K_\theta) \frac{1}{1 + K_\theta^2}. \quad (2.12)$$

Подчеркнем, что области знакопостоянности $\dot{\theta}$ зависят от величины M , однако не зависят от конкретного вида коэффициентов $a_i(t)$ исходного уравнения. Это следует из неравенства

$$\tilde{f}(-M, \phi, \theta) \leq \dot{\theta}(t) \leq \tilde{f}(M, \phi, \theta)$$

для значений производной $\dot{\theta}$ задаваемых системами (2.8).

Область W на плоскостях (ϕ, θ) , в которой $\dot{\theta}$ зависит от конкретного вида коэффициентов $a_i(t)$, задается системой неравенств:

$$\begin{cases} \tilde{f}(M, \phi, \theta) > 0 \\ \tilde{f}(-M, \phi, \theta) < 0 \end{cases}$$

и представляют собой M -окрестность кривых $\tilde{f}(0, \phi, \theta) = 0$, служащих

границей областей знакопостоянности производной $\dot{\theta}$ при $M = 0$. Действительно, в области W справедливо неравенство

$$|\tilde{f}(0, \phi, \theta)| \leq M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right). \quad (2.13)$$

Для каждого фиксированных K_θ, K_ϕ правая часть неравенства стремится к нулю при $M \rightarrow 0$.

На рисунке 2.1 область W неопределенности знака производной $\dot{\theta}$ выделена серым цветом.

Таким образом, направление векторного поля для задачи с $M \neq 0$ совпадает с направлением векторного поля для задачи с $M = 0$ всюду на сфере, кроме области W .

Отметим некоторые свойства границ областей знакопостоянности $\dot{\theta}$ при $M \neq 0$ для плоскости (K_ϕ, K_θ) при $\text{sgn}(x_1) > 0$:

1) функция $f(M, K_\phi, K_\theta)$ является квадратичной функцией по K_θ . С учетом очевидного неравенства $f(M, K_\phi, 0) > 0$, в области положительных значений K_ϕ функция $f(M, K_\phi, K_\theta)$ имеет два корня: один положительный, а другой отрицательный;

2) функция $f(-M, K_\phi, K_\theta)$ может быть получена из функции $-f(M, K_\phi, M_\theta)$ с помощью замены (K_ϕ, K_θ) на $(-K_\phi, K_\theta)$: $f(-M, K_\phi, K_\theta) = -f(M, -K_\phi, K_\theta)$.

С учетом (2.7), (2.12) аналогичные свойства справедливы и для функции $\tilde{f}(M, \phi, \theta)$.

Таким образом, границы областей знакопостоянности функции $\theta(t)$ на каждой из полуплоскостей симметричны относительно прямой $K_\phi = 0$. Границы областей знакопостоянности функции $\theta(t)$ на плоскости $\text{sgn}(x_1) < 0$ получаются из границ соответствующих областей на плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ заменой (K_ϕ, K_θ) на $(K_\phi, -K_\theta)$. Аналогично, границы областей знакопостоянности функции $\theta(t)$ на каждой из полусфер симметричны относительно прямых $\phi = 0$, $\phi = -\pi$, соответственно. Границы областей знакопостоянности функции $\theta(t)$ на полусфере $-3\pi/2 < \phi < -\pi/2$ получаются из границ соответствующих областей на полусфере $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ заменой (ϕ, θ) на $(\phi + \pi, -\theta)$.

Оценим границы области W неопределенности знака $\dot{\theta}(t)$.

ЛЕММА 16. При $M < 0,03$ верна оценка $\dot{\theta} < 0$ в областях

$$\{(\phi, \theta) : \arctg(\sqrt[4]{M}) < \phi < \frac{\pi}{2}, \theta_M < \theta < \frac{\pi}{2}\},$$

$$\{(\phi, \theta) : \arctg(2\sqrt[4]{M}) < \phi < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (2.9), (2.12) доказательство проведем в координатах (K_ϕ, K_θ) . Отметим, что граница областей знакопостоянности $\dot{\theta}$ задается уравнением $f(M, K_\phi, K_\theta) = 0$, которое является квадратичной функцией относительно K_θ при каждом фиксированном K_ϕ , то есть имеет не более двух корней по K_θ . При этом, в области $K_\phi > 0$ луч $K_\theta = 0$ лежит между упомянутых корней, а значит, принадлежит области W , отмеченной серым цветом на рисунке 2.1.

Покажем, что прямая $K_\theta = K_M$ лежит в области, задаваемой неравенством $f(M, K_\phi, K_\theta) < 0$, при $K_\phi > \frac{2\sqrt{M}}{1-M}$. Действительно,

$$f(M, K_\phi, K_M) = M \left(K_M + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_M^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}.$$

В силу того что K_M удовлетворяет уравнению $K_M^2 = MK_M + M$, и учитывая оценки $\sqrt{M} < K_M < 1$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} f(M, K_\phi, K_M) &= MK_M + \frac{M}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{MK_M K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} = \\ &= MK_M \frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2} (\sqrt{1 + K_\phi^2} + K_\phi)} + \frac{M}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} \leq \\ &\leq M \frac{\sqrt{1 + K_\phi^2} + K_M}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} \leq \\ &\leq \sqrt{M} \left(\frac{\sqrt{M} (\sqrt{1 + K_\phi^2} + 1) - K_\phi}{1 + K_\phi^2} \right) < 0, \end{aligned}$$

Последнее неравенство в цепочке выполнено при $K_\phi > \frac{2\sqrt{M}}{1-M}$, а следовательно, при $K_\phi > \sqrt[4]{M}$ в силу $\frac{2\sqrt{M}}{1-M} < \sqrt[4]{M}$ (так как $M < 0.03$).

Таким образом, показано, что граница области W неопределенности знака $\dot{\theta}$ (отмеченной серым цветом на рисунке 2.1) в первой четверти принадлежит полуполосе $0 < K_\theta < K_M$ при $K_\phi > \sqrt[4]{M}$.

Покажем теперь, что прямая $K_\theta = -1$ лежит в области, задаваемой неравенством $f(M, K_\phi, K_\theta) < 0$ при $K_\phi > 2\sqrt[4]{M}$. Действительно,

$$\begin{aligned} f(M, K_\phi, -1) &= M\left(1 + \frac{1 + K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}\right) + \frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \leq \\ &\leq M(1 + \sqrt{2}) + \frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} < 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо при $K_\phi > 2\sqrt[4]{M}$ ($M < 0.03$) в силу следующих рассуждений. Преобразуем последнее неравенство к виду

$$\frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2}(\sqrt{1 + K_\phi^2} - 1) > M(1 + \sqrt{2}).$$

Для левой части неравенства при $K_\phi > 2\sqrt[4]{M}$ и $M < 0.03$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2}(\sqrt{1 + K_\phi^2} - 1) &= \frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} \frac{K_\phi^2}{1 + \sqrt{1 + K_\phi^2}} > \\ &> \frac{1}{2} \left(\frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right)^3 > 3M, \end{aligned}$$

откуда и получаем требуемое.

Лемма 16 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. В силу свойств симметрии границ областей знакопостоянства $\dot{\theta}$, области W^+ неопределенности знака $\dot{\theta}$ на полуплоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ принадлежат объединению областей

$$\{(\phi, \theta) : -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} < \theta < \theta_M\},$$

$$\{(\phi, \theta) : |\phi| < \arctg(2\sqrt[4]{M}), -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\},$$

причем соответствующие области W^- на полуплоскости $\text{sgn}(x_1) < 0$ получаются заменой (ϕ, θ) на $(\phi + \pi, -\theta)$.

2.5 Свойства окрестности нуля

Как уже было отмечено выше, изоклины $\dot{\theta} = 0$ при $M \neq 0$ лежат вне области знакопостоянности θ . Оценим область, которой могут принадлежать возможные точки пересечения изоклин $\dot{\phi} = 0$ и $\dot{\theta} = 0$ для фиксированного $M \neq 0$.

ЛЕММА 17. *Все возможные точки пересечения изоклин (особые точки) принадлежат областям*

$$\begin{aligned} &\{(\theta, \phi) : |\phi| < \arctg(\sqrt[4]{M}), 0 < \theta < \sqrt{M}\}, \\ &\{(\theta, \phi) : |\phi + \pi| < \arctg(\sqrt[4]{M}), -\sqrt{M} < \theta < 0\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку (ϕ_0, θ_0) пересечения изоклины $\dot{\phi} = 0$ и кривой, задаваемой выражением $\tilde{f}(M, \phi, \theta) = 0$ в области $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ (на полуалоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$).

Координаты $K_\phi^0 = \text{tg}(\phi_0)$, $K_\theta^0 = \text{tg}(\theta_0)$ являются решением системы

$$\begin{cases} M \left(|K_\theta| + \frac{1+|K_\phi|}{\sqrt{1+K_\phi^2}} \right) - \frac{K_\theta K_\phi}{1+K_\phi^2} - \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1+K_\phi^2}} = 0 \\ K_\theta \sqrt{1+K_\phi^2} - K_\phi^2 = 0, \end{cases}$$

которая может быть преобразована к виду

$$\begin{cases} M \left(\frac{K_\phi^2}{\sqrt{1+K_\phi^2}} + \frac{1+|K_\phi|}{\sqrt{1+K_\phi^2}} \right) - \frac{K_\phi^2}{\sqrt{1+K_\phi^2}} \frac{K_\phi}{1+K_\phi^2} - \frac{K_\phi^4}{1+K_\phi^2} \frac{K_\phi}{\sqrt{1+K_\phi^2}} = 0 \\ K_\theta = \frac{K_\phi^2}{\sqrt{1+K_\phi^2}}. \end{cases}$$

С учетом неравенства $K_\phi > 0$, преобразуем первое уравнение системы к виду

$$M(K_\phi^2 + 1 + K_\phi) - K_\phi^3 = 0.$$

Многочлен в левой части при $K_\phi = 0$ положителен вместе со своей производной $2MK_\phi + M - 3K_\phi^2$, откуда следует, что исходный многочлен имеет единственный корень в области $K_\phi > 0$.

Покажем, что $K_\phi^0 < \sqrt[4]{M}$ при достаточно малых M . Для этого достаточно показать, что правая часть последнего равенства отрицательна при $K_\phi^0 = \sqrt[4]{M}$. Действительно,

$$\sqrt[4]{M}\sqrt{M} + \sqrt[4]{M} + \sqrt{M} - 1 < 0$$

при $M < \frac{1}{16}$ в силу $\sqrt[4]{M} < \frac{1}{2}$ и $\sqrt[4]{M}\sqrt{M} + \sqrt{M} < \frac{1}{2}$.

Теперь, с учетом полученной оценки для K_ϕ^0 , оценим координату K_θ^0

$$K_\theta^0 = \frac{(K_\phi^0)^2}{\sqrt{1 + (K_\phi^0)^2}} < \sqrt{M}.$$

Таким образом, получено, что на изоклине $\dot{\phi} = 0$ в области $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ производная $\dot{\theta}$ отрицательна при $\phi_0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, где $\phi_0 = \arctg(K_\phi^0)$, а все возможные особые точки системы (2.8) принадлежат множеству $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} = 0, 0 < \phi < \phi_0\}$. В силу симметрии изоклины $\dot{\phi} = 0$ и границ областей знакопостоянности $\dot{\theta}$ на полуплоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ относительно замены (ϕ, θ) на $(-\phi, \theta)$, а также того факта, что изоклина $\dot{\phi} = 0$ и границы областей знакопостоянности функции $\dot{\theta}(t)$ на полуплоскости $\text{sgn}(x_1) < 0$ могут быть получены из соответствующих кривых на полуплоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ заменой (ϕ, θ) на $(\phi + \pi, -\theta)$ получаем утверждение леммы.

Лемма 17 доказана.

Таким образом, *окрестность нуля* (определение 8) содержит все возможные особые точки систем (2.8), (2.9).

Отметим некоторые свойства границы *окрестности нуля*.

ЛЕММА 18. При $M < 0.03$ справедливы утверждения.

1. Граница области W^+ неопределенности знака производной $\dot{\theta}$ (отмеченной серым цветом на рисунке 2.1) в первой четверти полуплоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$, то есть в области

$$\{(\phi, \theta) : 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\},$$

пересекает границу окрестности нуля $\theta = \theta_M$ в точке (ϕ', θ_M) , такой что $0 < \phi' < \arctg(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}})$.

2. Отрезок с концами $(\arctg(\sqrt[4]{M}), -\theta_M)$, $(\arctg(1.1), -\theta_M)$ принадлежит области положительности производной $\dot{\theta} > 0$.

3. Вершины прямоугольников, служащих границами окрестностей нуля, принадлежат областям определенности знака производной $\dot{\theta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого свойства рассмотрим верхнюю границу *окрестности нуля* $\theta = \theta_M$ (что соответствует $K_\theta = K_M$). Граница области $\dot{\theta} < 0$ в первой четверти полуплоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ задается уравнением $\tilde{f}(M, \phi, \theta) = 0$, при этом

$\tilde{f}(M, 0, \theta_M) > 0$. Покажем, что $\tilde{f}(M, \phi, \theta_M)$ убывающая функция от $\phi \in [0; \frac{\pi}{4}]$. Функция

$$f(M, K_\phi, K_M) = M \left(K_M + \frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} - (K_M^2 - M) \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}$$

убывает по $K_\phi \in (0; 1)$, так как $K_M^2 - M > 0$, а функции $-\frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}$, $-\frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}$ убывают. Отсюда в силу равенств

$$\tilde{f}(M, \phi, \theta_M) = f(M, K_\phi, K_M) \frac{1}{1 + K_M^2}, \quad K_\phi = \operatorname{tg}(\phi)$$

следует, что $\tilde{f}(M, \phi, \theta_M)$ — также убывающая функция переменной ϕ на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$. Таким образом, $\tilde{f}(M, \phi, \theta_M)$ пересекает прямую $\theta = \theta_M$ на отрезке $\phi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ ровно один раз.

Из доказательства леммы 17 следует, что $\tilde{f}(M, \phi_0, \theta_M) < 0$ и $\phi_0 < \arctg(\sqrt[4]{M})$, откуда $\phi' < \phi_0 < \arctg(\sqrt[4]{M})$. Покажем, что выполнена более сильная оценка $\phi' < \arctg(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}})$. Для этого достаточно показать, что функция $f(M, K_\phi, K_M)$ отрицательна при $K_\phi = \frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} f(M, K_\phi, K_M) &= M \left(K_M + \frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \\ &- (K_M^2 - M) \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} < M \left(K_M + \frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) - \frac{K_M K_\phi}{1 + K_\phi^2} < 0. \end{aligned}$$

Для справедливости последнего неравенства достаточно показать, что

$$\frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} > M + \frac{M}{K_M} \frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}.$$

С учетом $\sqrt{M} < K_M < \frac{3}{2}\sqrt{M}$ при $M < \frac{1}{2}$, оценим выражение, стоящее в правой части последнего неравенства

$$M + \frac{M}{K_M} \frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} < M + \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} < M + \sqrt{M}.$$

Отсюда и из справедливости неравенства

$$\frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} > M + \sqrt{M}$$

при $K_\phi = \frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}}$ и $M < 0.03$ следует требуемая оценка $\phi' < \arctg(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}})$.

Для доказательства второго свойства покажем, что справедливо неравенство $\tilde{f}(-M, \phi, -\theta_M) > 0$ при $\phi \in [\arctg(\sqrt[4]{M}), \arctg(1.1)]$, что в силу (2.12) эквивалентно положительности функция

$$f(-M, K_\phi, -K_M) = -M(K_M + \frac{1 + K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}) + K_M \frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} - K_M^2 \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}$$

при $K_\phi \in [\sqrt[4]{M}, 1.1]$. Для этого достаточно показать справедливость неравенства

$$\frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} > M + \frac{M(1 + K_\phi)}{K_M \sqrt{1 + K_\phi^2}} + K_M \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}}.$$

С учетом $\sqrt{M} < K_M < \frac{10}{9}\sqrt{M}$ при $M < 0.03$, оценим выражение, стоящее в правой части последнего неравенства

$$\begin{aligned} M + \frac{M(1 + K_\phi)}{K_M \sqrt{1 + K_\phi^2}} + K_M \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} &< M + \sqrt{M} \frac{(1 + K_\phi)}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} + \\ &+ \frac{10}{9}\sqrt{M} \frac{K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} = M + \sqrt{M} \frac{1 + \frac{19}{10}K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} < M + 2.3\sqrt{M}. \end{aligned}$$

Отсюда и из справедливости неравенства

$$\frac{K_\phi}{1 + K_\phi^2} > M + 2.3\sqrt{M}$$

при всех $K_\phi \in [\sqrt[4]{M}, 1.1]$ и $M < 0.03$ следует $\tilde{f}(-M, \phi, -\theta_M) > 0$ для всех $\phi \in (\arctg \sqrt[4]{M}, \arctg(1.1))$.

Из доказательств свойств 1 и 2 вытекает свойство 3.

Лемма 18 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что в вершинах прямоугольников, служащих границами окрестностей нуля, выполнено $\phi < 0$.

Разобьем границу окрестности нуля U^+ на следующие отрезки

$$\begin{aligned} I_1^+ &\equiv \{(\phi, \theta) : \phi' < \phi < \arctg(2\sqrt[4]{M}), \theta = \theta_M\}, \\ I_1^- &\equiv \{(\phi, \theta) : -\arctg(2\sqrt[4]{M}) < \phi < -\phi', \theta = \theta_M\}, \\ I_1^0 &\equiv \{(\phi, \theta) : |\phi| < \phi', \theta = \theta_M\}, \\ I_2 &\equiv \{(\phi, \theta) : \phi = \arctg(2\sqrt[4]{M}), |\theta| < \theta_M\}, \\ I_4 &\equiv \{(\phi, \theta) : \phi = -\arctg(2\sqrt[4]{M}), |\theta| < \theta_M\}. \end{aligned}$$

Из доказательства леммы 18 и свойств симметрии изоклины $\dot{\phi} = 0$ и границ области W^+ следует, что для всех точек отрезка I_1^+ , а также всех точек нижней границы области U^+ , удовлетворяющих неравенству $\phi < -\arctg(\sqrt[4]{M})$, справедливо неравенство $\dot{\theta} < 0$; для всех точек отрезка I_1^- , а также всех точек нижней границы области U^+ , удовлетворяющих неравенству $\phi > \arctg(\sqrt[4]{M})$, справедливо неравенство $\dot{\theta} > 0$; для всех точек отрезка I_1^0 справедливо неравенство $\dot{\phi} > 0$; а для всех точек отрезков I_2, I_4 , а также нижней границы области U^+ - неравенство $\dot{\phi} < 0$. Поэтому, в соответствии с направлением векторного поля, через отрезки I_1^+, I_2 , а также часть нижней границы области области U^+ , удовлетворяющей неравенству $\phi > \arctg(\sqrt[4]{M})$, фазовая траектория может войти в окрестность нуля U^+ , но не может выйти из нее, через отрезки I_1^-, I_4 , а также часть нижней границы области области U^+ , удовлетворяющей неравенству $\phi < -\arctg(\sqrt[4]{M})$, фазовая траектория может выйти из окрестности нуля U^+ , но не может в нее войти, а через отрезок I_1^0 траектория может как войти в *окрестность нуля*, так и выйти из нее. Таким образом, участки границы, через которые траектория может войти в область U^+ , удовлетворяют неравенству $\phi > -\arctg(\sqrt[4]{M})$, а участки границы, через которые траектория может выйти из области U^+ , удовлетворяют неравенству $\phi < \arctg(\sqrt[4]{M})$.

ЛЕММА 19 (об окрестности нуля). *Если фазовая траектория попадает в окрестность нуля U^+ через отрезки I_1^+, I_2 , после чего выходит из этой окрестности, либо если она выходит из окрестности нуля U^+ через отрезки I_1^-, I_4 , то она проходит через окрестность нуля в смысле определения 9.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фазовая траектория входит в U^+ через I_2 . Участки границы, через которые она может выйти, удовлетворяют условию $K_\phi < \sqrt[4]{M}$, а значит расстояние, пройденное вдоль K_ϕ , составит не менее $\sqrt[4]{M}$.

Аналогично получаем, если фазовая траектория выходит из U^+ через I_4 , то участки границы, через которые она может войти в окрестность нуля U^+ , удовлетворяют условию $K_\phi > -\sqrt[4]{M}$, а, следовательно, путь вдоль K_ϕ будет не меньше $\sqrt[4]{M}$.

Пусть фазовая траектория входит в окрестность нуля U^+ через I_1^+ . Тогда если траектория выходит через нижнюю границу области U^+ , то путь, пройденный вдоль координаты K_θ составит не менее $2K_M$. Случай, когда фазовая траектория выходит из U^+ через I_4 , рассмотрен выше. Пусть теперь фазовая траектория выходит через I_1^- . Из направления векторного поля следует, что в этом случае фазовая траектория должна пересечь прямую $\theta = 0$, откуда следует, что путь вдоль K_θ составит не менее чем $2K_M$. Рассмотрим последний возможный случай, когда траектория выходит через отрезок I_0 . В этом случае траектория должна перейти в область $\phi < \phi'$, либо пересекая изоклину $\dot{\phi} = 0$ при $0 < \phi < \phi'$ (т.к. отрезок I_0 целиком лежит в области положительности производной $\dot{\phi}$), либо пересекая прямую $\theta = 0$. В первом случае значение K'_θ , соответствующее точке пересечения изоклины $\dot{\phi} = 0$, определяется неравенством

$$K'_\theta < \frac{K_\phi'^2}{\sqrt{1 + K_\phi'^2}} < \frac{\sqrt{M}}{2}$$

в силу оценки $K'_\phi < \frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}}$ (лемма 18). Таким образом, в этом случае траектория проходит путь вдоль координаты K_θ не менее $\sqrt{M}$. В случае пересечения траекторией прямой $\theta = 0$ путь, проходимый по координате K_θ , не меньше $2K_M > 2\sqrt{M}$.

Рассмотрим последний случай, когда траектория выходит из окрестности нуля через отрезок I_1^- . Случай, когда при этом траектория заходит в U^+ через I_1^+ и I_2 , рассмотрен выше. Случай, когда траектория заходит в U^+ через отрезки нижней границы U^+ , приводит к тому, что путь вдоль K_θ составит не менее чем $2K_M > 2\sqrt{M}$. Оставшийся случай, когда траектория входит в U^+ через I_1^0 , аналогичен рассмотренному выше случаю вхождения через отрезок I_1^+ и выхода через отрезок I_1^0 . В этом случае траектория должна либо пересечь изоклину $\dot{\phi} = 0$ при $-\phi' < \phi < 0$, либо пересечь прямую $\theta = 0$. В обоих случаях путь, пройденный вдоль координаты K_θ , не меньше $\sqrt{M}$.

Лемма 19 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из доказательства леммы 19 следует, что если траектория входит в окрестность нуля U^+ через отрезок I_1^0 , а выходит через отрезки границы, отличные от I_1^0 , то она проходит через окрестность нуля U^+ в смысле определения 9. Если же траектория входит в окрестности нуля и выходит из нее через отрезок I_1^0 , причем значение ϕ в момент выхода не превосходит значение ϕ в момент входа, тогда траектория также проходит через окрестность нуля U^+ в смысле определения 9.

Аналогичные рассуждения верны и для окрестности нуля U^- .

2.6 Лемма о первой четверти

Покажем, что из первой четверти плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ траектория попадает в окрестность нуля и проходит через нее в смысле определения 9.

ЛЕММА 20 (о первой четверти). Каждое решение из первой четверти плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ за конечное время попадет в окрестность нуля U^+ и либо останется в этой окрестности, либо пройдет через нее в смысле определения 9.

Доказательство леммы 20 опирается на несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 21 (о пересечении). Фазовая траектория может пересечь изоклину $\dot{\phi} = 0$ при $\phi_0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ только при переходе из области $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} > 0\}$ в область $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} < 0\}$, а изоклину $\dot{\phi} = 0$ при $-\frac{\pi}{2} < \phi < -\phi_0$ только при переходе из области $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} < 0\}$ в область $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} > 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что момент времени, задаваемый условиями

$$\dot{\phi} = 0, \quad \phi_0 < \phi < \frac{\pi}{2},$$

является точкой локального максимума функции $\phi(t)$. Действительно, продифференцировав обе части уравнения $\dot{\phi} = \text{tg}(\theta) \cos(\phi) - \sin^2(\phi)$ в системе (2.8), с учетом условия $\dot{\phi} = 0$ получаем условие локального максимума

$$\ddot{\phi} = (-\text{tg}(\theta) \sin(\phi) - 2 \sin(\phi) \cos(\phi))\dot{\phi} + \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)^2}\dot{\theta} = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)^2}\dot{\theta} \leq 0,$$

в силу неравенства $\dot{\theta} < 0$, выполненного для всех точек изоклины $\dot{\phi} = 0$, таких что $\phi \in [\phi_0, \frac{\pi}{2}]$ (это следует из доказательства леммы 17), а также неравенства $\frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)^2} > 0$, справедливого при $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Аналогично получаем выполнение условия локального минимума $\ddot{\phi} \geq 0$, в силу неравенств $\cos(\phi) > 0$ и $\dot{\theta} > 0$, справедливых для всех точек изоклины $\dot{\phi} = 0$ при $-\frac{\pi}{2} < \phi < -\phi_0$.

Лемма 21 доказана.

ЛЕММА 22 (об асимптоте 1). Пусть $(\phi(t), \theta(t))$ — решение системы (2.8), для которого существует t_0 , такое что $\theta(t_0) = 0$, $\phi(t_0) \in (\arctg(2\sqrt[4]{M}), \frac{\pi}{2})$. Тогда существует $t_1 > t_0$, такое что $\phi(t_1) = \arctg(2\sqrt[4]{M})$ и $\phi(t) \in [\arctg(2\sqrt[4]{M}), \frac{\pi}{2})$, $\theta(t) > -\arctg(\sqrt{M})$ при $t \in [t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий леммы справедливо неравенство $\dot{\phi}(t_0) < 0$. Из леммы 21 и доказательства леммы 17 следует, что существует t_1 , такое что $\phi(t_1) = \arctg 2\sqrt[4]{M}$ и $\phi(t)$ убывает на отрезке $[t_0, t_1]$. Покажем, что $\theta(t) > -\arctg(\sqrt{M})$ на $[t_0, t_1]$.

Обозначим через $\phi^* > \arctg(1.1)$ координату точки пересечения прямой $\theta = -\arctg(\sqrt{M})$ и границы области $\dot{\theta}(t) > 0$, принадлежащей четвертой четверти плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$. Проводя доказательство, аналогичное доказательству второго свойства в лемме 18, можно получить, что при $M < 0.03$ для всех точек отрезка

$$\{(\phi, \theta) : \arctg(\sqrt[4]{M}) \leq \phi \leq \arctg(1.1), \theta = -\arctg(\sqrt{M})\}$$

выполняется неравенство $\tilde{f}(-M, \phi, \theta) > 0$. Отсюда и из квадратичной зависимости функции $f(-M, K_\phi, K_\theta)$ по K_θ при каждом фиксированном K_ϕ следует, что указанное значение ϕ^* существует при $M < 0.03$. Возможны два случая:

1) $\phi(t_0) \leq \phi^*$, тогда для любого $t \in [t_0, t_1]$ справедливо неравенство $\theta(t) > -\arctg(\sqrt{M})$, в силу установленного выше неравенства $\dot{\theta} > 0$ на отрезке

$$\{(\phi, \theta) : \arctg(2\sqrt[4]{M}) \leq \phi \leq \phi^*, \theta = -\arctg(\sqrt{M})\};$$

2) $\phi(t_0) > \phi^* > \arctg(1.1)$. Предположим, что $\theta(t) < 0$ для любого $t \in (t_0, t_3)$, где $t_0 < t_3 < t_1$ и $\phi(t_3) = \phi^*$ (такой момент времени существует в силу убывания функции $\phi(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$). Тогда для любого $t \in [t_0, t_3]$ справедлива оценка

$$\dot{\phi} \leq \text{tg } \theta \cos(\phi) - \sin^2(\phi) \leq -\sin^2(\phi), \quad (2.14)$$

откуда следует

$$t_3 - t_0 = \int_{t_0}^{t_3} dt \leq - \int_{\phi(t_0)}^{\phi^*} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \leq - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctg(1.1)} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} = \frac{1}{1.1}.$$

Предположим далее, что существует t_2 , такое что $t_0 < t_2 < t_3$, $K_\theta(t_2) = -\sqrt{M}$ и $K_\theta(t) > -\sqrt{M}$ при всех $t \in [t_0, t_2)$. Тогда для всех $t \in [t_0, t_2]$ справедливо неравенство $|\dot{K}_\theta| \leq \sqrt{M}$. Действительно, оценим $|\dot{K}_\theta|$, пользуясь (2.9), а также неравенствами $|K_\theta| \leq \sqrt{M}$ и $K_\phi \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\dot{K}_\theta| &\leq M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) + \frac{|K_\theta|K_\phi}{1 + K_\phi^2} + \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \leq \\ &\leq M(|K_\theta| + \sqrt{2}) + \frac{|K_\theta|}{2} + |K_\theta|^2 \leq M\sqrt{M} + \sqrt{2}M + \frac{\sqrt{M}}{2} + M = \\ &= (\sqrt{M} + \sqrt{2} + 1)M + \frac{\sqrt{M}}{2} \leq \sqrt{M}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Последняя оценка справедлива при $M < 0,05$.

Следовательно, получаем

$$-K_\theta(t_2) = K_\theta(t_0) - K_\theta(t_2) = \left| \int_{t_0}^{t_2} \dot{K}_\theta dt \right| \leq \sqrt{M}(t_2 - t_0) \leq \frac{\sqrt{M}}{1.1},$$

таким образом, $\theta(t_2) \geq -\arctg(\frac{\sqrt{M}}{1.1}) > -\arctg(\sqrt{M})$, что противоречит предположению $\theta(t_2) = -\arctg(\sqrt{M})$. Из полученного противоречия следует справедливость оценки $\theta(t) > -\arctg(\sqrt{M})$ для любого $t \in [t_0, t_3]$.

Пусть теперь $\theta(t)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения на отрезке $[t_0, t_3]$. Для каждого из интервалов отрицательности функции $\theta(t)$, справедливы оценки (2.14), (2.15), а следовательно и неравенство $\theta(t) > -\arctg(\sqrt{M})$.

Из справедливости неравенства $\theta(t) > -\arctg(\sqrt{M})$ для всех $t \in [t_0, t_3]$ следует его справедливость и для всех $t \in [t_0, t_1]$ в силу установленного выше неравенства $\dot{\theta} > 0$ на отрезке

$$\{(\phi, \theta) : \arctg(2\sqrt[4]{M}) \leq \phi \leq \phi^*, \theta = -\arctg(\sqrt{M})\}.$$

Лемма 22 доказана.

В силу свойств симметрии функции $\tilde{f}(M, \phi, \theta)$, задающей границу знакопостоянности $\dot{\theta}(t)$, справедлива лемма об асимптоте третьей четверти плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$, аналогичная лемме 22.

ЛЕММА 23 (об асимптоте 2). Пусть $(\phi(t), \theta(t))$ — решение системы (2.8), для которого существует t_0 , такое что $\theta(t_0) = -\arctg(\sqrt{M})$, $\phi(t_0) \in [-\arctg(2\sqrt[4]{M}), -\frac{\pi}{2}]$. Тогда существует $t_1 > t_0$, такое что $\phi(t_1) = -\frac{\pi}{2}$ и $\theta(t) < 0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ϕ^* координату точки пересечения прямой $\theta = -\arctg(\sqrt{M})$ и границы области $\dot{\theta}(t) < 0$, принадлежащей третьей четверти плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ (такую, что $\phi^* < -\arctg(1.1)$). Из свойств симметрии границ областей знакопостоянности $\dot{\theta}(t)$ следует, что такая точка существует. Доказательство этого факта аналогично доказательству, проделанному в лемме 22.

Рассмотрим два случая:

1) $\phi(t_0) < \phi^*$. Проведем доказательство от противного. Пусть существует t_3 , такое что $\theta(t_3) = 0$, $\theta(t) < 0$ при $t \in [t_0, t_3]$, $-\frac{\pi}{2} < \phi(t_3) < 0$. При этом, в силу отрицательности $\theta(t)$, функция $\phi(t)$ убывает на отрезке $[t_0, t_3]$. С учетом оценки (2.15) и равенства $K_\theta(t_3) - K_\theta(t_0) = \sqrt{M}$ выполнено

$$t_3 - t_0 > \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}} = 1.$$

Оценим $\phi(t_3)$. С учетом отрицательности $\theta(t)$ на отрезке $[t_0, t_3]$, справедливо неравенство (2.14), откуда следует

$$\begin{aligned} 1 \leq t_3 - t_0 &= \int_{t_0}^{t_3} dt \leq - \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t_3)} \frac{d\phi}{\sin^2(\phi)} \leq - \int_{-\arctg(1.1)}^{\phi(t_3)} \frac{d\phi}{\sin^2(\phi)} = \\ &= \int_{-\arctg(1.1)}^{\phi(t_3)} d \text{ctg}(\phi) = \text{ctg}(\phi(t_3)) + \frac{1}{1.1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\text{ctg}(\phi(t_3)) > 0$, что противоречит предположению $-\frac{\pi}{2} < \phi(t_3) < 0$;

2) Пусть теперь $\phi^* < \phi(t_0) < -\arctg(2\sqrt[4]{M})$. Тогда существует t_2 , такое что $\phi(t_2) = \phi^*$, $\theta(t) < -\arctg(\sqrt{M})$ для любого $t \in [t_0, t_2]$, в силу неравенства $\dot{\theta}(t) < 0$, справедливого для всех точек отрезка

$$\{(\phi, \theta) : \theta = -\arctg(\sqrt[4]{M}), \phi^* \leq \phi \leq -\arctg(2\sqrt[4]{M})\}.$$

Возможны два случая: либо существует t_3 , такое что $\phi(t_3) = -\frac{\pi}{2}$ и $\theta(t) < \arctg(-\sqrt{M})$, следовательно, утверждение леммы выполнено, либо существует t_4 , такое что $-\frac{\pi}{2} < \phi(t_4) < \phi^*$, $\theta(t_4) = \arctg(-\sqrt{M})$, и дальнейшее рассмотрение аналогично предыдущему пункту.

Лемма 23 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Заметим, что в силу свойств симметрии границ областей из утверждений лемм 22 и 23 следует, что траектория может попасть из верхней части сферы, задаваемой неравенством $\theta > \theta_M$, в нижнюю часть полусферы, задаваемой неравенством $\theta < -\theta_M$, или наоборот, только пройдя через одну из окрестностей нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 20. Пусть в некоторый момент времени решение проходит через точку, принадлежащую области

$$\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} < 0, \theta > 0\} \setminus U^+.$$

В силу леммы 21, фазовая кривая не может пересечь изоклину $\dot{\phi} = 0$ вне окрестности нуля, а следовательно, значение ϕ будет уменьшаться до $\arctg(2\sqrt[4]{M})$, при этом значение θ будет оставаться больше $-\arctg(\sqrt{M}) > -\theta_M$ в силу леммы 22. Поэтому фазовая кривая неизбежно попадет в окрестность нуля U^+ через отрезок I_1^+ или I_2 , а следовательно, по лемме 19 пройдет через окрестность нуля U^+ в смысле определения 9 или же останется в этой окрестности.

Если в некоторый момент времени фазовая кривая проходит через точку области $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} > 0, \theta > 0\} \setminus U^+$, то возможны следующие случаи:

а) либо в силу леммы 21 фазовая траектория за конечное время (т.к. все особые точки принадлежат окрестности нуля) пересечет изоклину $\dot{\phi} = 0$ и окажется в области $\{(\phi, \theta) : \dot{\phi} < 0, \theta > 0\} \setminus U^+$, из которой, как было показано выше, попадет в окрестность нуля и пройдет нее в смысле определения 9 или же останется в этой окрестности;

б) либо фазовая траектория попадет в окрестность нуля через отрезок I_1^+ , а следовательно, по лемме 19 пройдет через окрестность нуля в смысле определения 9 или же останется в этой области;

в) либо попадет в окрестность U^+ через отрезок I_1^0 , если в начальный момент времени t_0 выполнено $\phi(t_0) < \phi'$ (значение ϕ' определено в лемме 18) и далее траектория в соответствии с замечанием 7:

либо пройдет через окрестность нуля в смысле определения 9 или же останется в ней;

либо выйдет из окрестности нуля через отрезок I_1^0 , не пройдя необходимого пути ни по одной из координат, причем в этом случае значение ϕ в момент выхода будет больше, чем значение ϕ в момент входа.

Последний случай может повторяться конечное или счетное число раз, пока либо на некотором этапе траектория, войдя в окрестность нуля, останется в ней или пройдет через нее в смысле определения 9, либо за конечное время функция $\phi(t)$ достигнет значения ϕ' и при этом траектория окажется вне окрестности нуля, после чего поведение траектории будет описываться пунктом а) или б).

Лемма 20 доказана.

В силу симметрии областей знакопостоянности производных $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\theta}(t)$, справедлива следующая лемма, аналогичная лемме 20.

ЛЕММА 24 (о четвертой четверти). *Каждое решение из четвертой четверти плоскости $\text{sgn}(x_1) < 0$ за конечное время попадет в окрестность нуля U^- и и либо останется в этой окрестности, либо пройдет через нее в смысле определения 9.*

2.7 Доказательство леммы о представлении

ЛЕММА 25. *Для любого $t_0 > 0$, такого что $(\phi(t_0), \theta(t_0))$ лежит вне окрестности нуля, существуют t^*, t_2 ($t^* < \infty$, $t_2 \leq \infty$), такие что $t_0 < t^* < t_2$, а также:*

1) *для любого $t \in [t_0, t^*)$ точка $(\phi(t), \theta(t))$ лежит вне окрестности нуля, причем $V_{t_0}^{t^*} \phi(t) \leq 2\pi$;*

2) *для всех $t \in [t^*; t_2)$ справедливо $(\phi(t), \theta(t)) \in U^+$, причем если $t_2 < \infty$, то $V_{t^*}^{t_2} \text{tg}(\phi(t)) \geq \sqrt[4]{M}$ и (или) $V_{t^*}^{t_2} \text{tg}(\theta(t)) \geq \sqrt{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что момент времени t^* соответствует прохождению фазовой траектории в окрестность нуля, причем, в дальнейшем траектория либо останется в окрестности нуля, либо пройдет через нее в смысле определения 9, что и утверждается в доказываемой лемме.

Рассмотрим следующие области на плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$:

$$\Omega_1^+ \equiv \{(\phi, \theta) : |\phi| \leq \frac{\pi}{2}, \theta \leq -\theta_M\},$$

$$\Omega_2^+ \equiv \{(\phi, \theta) : |\phi| \leq \frac{\pi}{2}, |\theta| < \theta_M\},$$

$$\Omega_3^+ \equiv \{(\phi, \theta) : |\phi| \leq \frac{\pi}{2}, \theta \geq \theta_M\},$$

$$\Omega_0^+ \equiv \{(\phi, \theta) : |\phi| \leq \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg}(\theta) \cos(\phi) - \sin^2(\phi) > 0\}.$$

Аналогично определим $\Omega_1^-, \Omega_2^-, \Omega_3^-, \Omega_0^-$ на плоскости $\operatorname{sgn}(x_1) < 0$, заменив условия $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ условием $|\phi + \pi| \leq \frac{\pi}{2}$, а θ на $-\theta$.

Из замечания 8 следует, что вне окрестности нуля траектория может перейти из области Ω_1^+ только в область Ω_3^- и наоборот. Аналогично, вне окрестности нуля траектория может перейти из области Ω_3^+ только в область Ω_1^- и наоборот.

1. Пусть $(\phi(t_0), \theta(t_0)) \in \Omega_1^+ \setminus U^+$. Тогда, по леммам 20, 19 и 23, фазовая траектория либо попадет в окрестность нуля U^+ и останется в ней либо пройдет через нее в смысле определения 9, либо через конечное время перейдет в четвертую четверть плоскости $\operatorname{sgn}(x_1) < 0$. Далее по лемме 24 фазовая траектория попадет в окрестность нуля U^- и останется в ней либо пройдет через нее в смысле определения 9. В силу убывания $\phi(t)$ в рассматриваемых областях $V_{t_0}^{t*} \phi(t) \leq \frac{3\pi}{2}$.

2. Пусть $(\phi(t_0), \theta(t_0)) \in \Omega_3^+ \setminus U^+$. Тогда либо фазовая траектория в начальный момент времени находится в первой четверти плоскости $\operatorname{sgn}(x_1) > 0$, либо попадет в нее через область Ω_0^+ , либо перейдет в область Ω_1^- , либо попадет в окрестность нуля U^+ через отрезок границы I_1^0 . В первых двух случаях, по лемме 20, фазовая траектория попадет в окрестность нуля U^+ и пройдет через нее в смысле определения 9 (либо останется в U^+). В третьем случае в силу симметрии областей Ω_1^- и Ω_1^+ далее фазовая траектория попадет либо в область U^- , либо в область U^+ , пройдя через первую четверть плоскости $\operatorname{sgn}(x_1) > 0$. В четвертом случае траектория либо пройдет через окрестность нуля в смысле определения 9 (или останется в ней), или же через конечное время окажется в первой четверти плоскости $\operatorname{sgn}(x_1) > 0$. В каждом из случаев траектория пройдет через окрестность нуля в смысле определения 9 (или же останется в этой окрестности) и $V_{t_0}^{t*} \phi(t) \leq 2\pi$.

3. Пусть $(\phi(t_0), \theta(t_0)) \in \Omega_2^+ \setminus U^+$:

а) пусть также $\phi_0 > \arctg 2\sqrt[4]{M}$. Тогда фазовая траектория попадет в окрестность нуля U^+ и пройдет через нее в смысле определения 9 (или

останется в ней), либо попадет в Ω_1^+ . Этот случай рассмотрен выше в пункте 1;

б) пусть $\phi_0 < -\arctg 2\sqrt[4]{M}$. Тогда фазовая траектория попадет либо в Ω_1^+ , либо в Ω_3^+ , либо в Ω_2^- при $\phi > \arctg 2\sqrt[4]{M} - \pi$. Первые два случая рассмотрены в пунктах 1 и 2, последний эквивалентен 3.а) и гарантирует либо попадание и прохождение через окрестность U^- в смысле определения 9, либо попадание в область Ω_1^- . Последний случай аналогичен пункту 1.

Случаи, когда $(\phi(t_0), \theta(t_0))$ принадлежит областям $\Omega_1^- \setminus U^-$, $\Omega_2^- \setminus U^-$ или $\Omega_3^- \setminus U^-$ на плоскости $\text{sgn}(x_1) < 0$ рассматриваются аналогично.

Во всех рассмотренных случаях $V_{t_0}^{t^*} \phi(t) \leq 2\pi$, а также справедливо, что для всех $t \in [t^*, t_2)$ выполнено $(\phi(t), \theta(t)) \in U^+ \cup U^-$, причем если $t_2 < +\infty$, то $V_{t^*}^{t_2} \text{tg}(\phi(t)) \geq \sqrt[4]{M}$ и (или) $V_{t^*}^{t_2} \text{tg}(\theta(t)) \geq \sqrt{M}$. Моменты времени t^* и $t_2 < +\infty$ соответствуют вхождению траектории в *окрестность нуля* и выходу траектории из *окрестности нуля*. В случае $t_2 = +\infty$ траектория является траекторией первого типа.

Лемма 25 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 15. Пусть начало траектории находится вне окрестности нуля. По лемме 25 траектория попадет в окрестность нуля и пройдет через нее в смысле определения 9 или же останется в ней. Последний случай соответствует *траектории первого типа*. В первом случае траектория выходит из окрестности нуля, а значит существует такая полуокрестность точки, соответствующей моменту выхода, что любая точка из этой полуокрестности удовлетворяет условиям леммы 25, следовательно, через конечное время траектория вновь войдет в окрестность нуля и либо останется в окрестности нуля, либо пройдет через нее в смысле определения 9. Получаем траекторию первого типа, если после конечного числа шагов траектория останется в окрестности нуля, и траекторию второго типа, иначе.

Лемма 15 доказана.

2.8 Оценки длины элементарного отрезка траектории

Следующая лемма устанавливает оценки длины части *элементарного отрезка траектории*, лежащей вне окрестности нуля.

ЛЕММА 26 (о длине элементарного отрезка траектории). *Вариации*

функций $\phi(t)$ и $\theta(t)$ вдоль части элементарного отрезка траектории, лежащей вне окрестности нуля (U^+, U^-), не превосходит 2π и $4\pi - \sqrt{M} - \sqrt[4]{M}$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка вариации функции $\phi(t)$ приведена в доказательстве леммы 25. Оценим максимально возможную вариацию функции $\theta(t)$ вдоль отрезка траектории, проходящего через область W^+ неопределенности знака $\dot{\theta}$ вне окрестности нуля. Для этого разобьем область неопределенности знака производной $\theta(t)$ вне окрестности нуля на плоскости $\text{sgn}(x_1) > 0$ на четыре подобласти

$$W^+ = W_0^+ \cup W_1^+ \cup W_2^+ \cup W_3^+, \quad W_i^+ \cap W_j^+ = \emptyset, \quad i \neq j = 0, 1, 2, 3,$$

где

$$W_0^+ = W^+ \cap \Omega_0^+ \setminus U^+$$

(множество Ω_0^+ определяется в доказательстве леммы 25),

$$W_1^+ \equiv \{(\phi, \theta) \in W^+ : |\phi| < \arctg 2\sqrt[4]{M}, \theta < -\theta_M\},$$

$$W_2^+ \equiv \{(\phi, \theta) \in W^+ : \arctg 2\sqrt[4]{M} < \phi < \frac{\pi}{2}\},$$

$$W_3^+ \equiv \{(\phi, \theta) \in W^+ : -\frac{\pi}{2} < \phi < -\arctg 2\sqrt[4]{M}\}.$$

В каждой из подобластей оценим вариацию функции $\theta(t)$. Дальнейшее доказательство опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 27. *Вариация функции $\theta(t)$ в каждой из областей W_2^+, W_3^+ не превосходит $\pi/2$ при $M < 0.03$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим область W_2^+ . В силу оценки

$$\left| \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} + \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right| < M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right),$$

справедливой в области W неопределенности знака $\dot{\theta}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &\leq M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) + \left| \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} + \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) \right| \leq 2M(1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Последняя оценка в (2.16) получена с учетом неравенства $-1 < K_\theta < K_M$, справедливого в области W_2^+ (лемма 16). Кроме того, в рассматриваемой области

$$|\dot{\theta}| = \frac{|\dot{K}_\theta|}{1 + K_\theta^2} < |\dot{K}_\theta|, \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{K}_\phi}{1 + K_\phi^2} = \frac{K_\theta}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} - \frac{K_\phi^2}{1 + K_\phi^2} < 0, \quad (2.17)$$

откуда с учетом (2.16) и неравенства $K_M < \frac{10}{9}\sqrt{M}$, справедливого при $M < 0.03$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} &= \frac{|\dot{\theta}|}{|\dot{\phi}|} \leq 2M \frac{|K_\theta| + \frac{1+|K_\phi|}{\sqrt{1+K_\phi^2}}}{\left| \frac{K_\theta}{\sqrt{1+K_\phi^2}} - \frac{K_\phi^2}{1+K_\phi^2} \right|} \leq 2M \frac{1 + \sqrt{2}}{\frac{K_\phi^2}{1+K_\phi^2} - \frac{K_\theta}{\sqrt{1+K_\phi^2}}} \leq \\ &\leq \frac{2M(1 + \sqrt{2})}{\min_{K_\phi \in (2\sqrt[4]{M}, \infty)} \left\{ \frac{K_\phi^2}{1+K_\phi^2} - \frac{10}{9}\sqrt{M} \right\}} \leq \frac{2M(1 + \sqrt{2})}{\frac{4\sqrt{M}}{1+4\sqrt{M}} - \frac{10}{9}\sqrt{M}} \leq \\ &= \frac{18\sqrt{M}(1 + \sqrt{2})(1 + 4\sqrt{M})}{26 - 40\sqrt{M}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Оценим вариацию $\theta(t)$ при уменьшении $\phi(t)$ от $\phi(0) \leq \frac{\pi}{2}$ до $\phi(T) \geq \arctg 2\sqrt[4]{M}$ при $M < 0.03$

$$\begin{aligned} V_0^T \theta(t) &= \int_0^T |\dot{\theta}| dt = \int_0^T |(d\theta)| = \int_{\phi(T)}^{\phi(0)} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} d\phi \leq \\ &\leq \int_{\arctg(2\sqrt[4]{M})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} d\phi \leq \int_{\arctg(2\sqrt[4]{M})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{18\sqrt{M}(1 + \sqrt{2})(1 + 4\sqrt{M})}{26 - 40\sqrt{M}} d\phi = \\ &= \frac{18\sqrt{M}(1 + \sqrt{2})(1 + 4\sqrt{M})}{26 - 40\sqrt{M}} \phi \Big|_{\arctg(2\sqrt[4]{M})}^{\frac{\pi}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(2\sqrt[4]{M}) \right) \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Доказательство для области W_3^+ проводится аналогично.

Лемма 27 доказана.

ЛЕММА 28. При $M < 0.03$ вариация функции $\theta(t)$ в области W_1^+ неопределенности знака $\dot{\theta}(t)$, лежащей в области

$$\{(\phi, \theta) : |\phi| < \arctg(2\sqrt[4]{M}), \theta < -\theta_M\},$$

не превосходит $\pi - \sqrt{M} - \sqrt[4]{M}$, а вариация функции $\theta(t)$ в области W_0^+ неопределенности знака $\dot{\theta}(t)$, лежащей в области

$$\{(\phi, \theta) : |\phi| < \arctg(\sqrt[4]{M}), \theta > \theta_M\},$$

не превосходит $2\pi - \sqrt{M} - \sqrt[4]{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки

$$\left| \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} + \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right| < M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right),$$

справедливой в области неопределенности знака $\dot{\theta}(t)$, получаем

$$\frac{|\dot{\theta}|}{|\dot{\phi}|} \leq \frac{\left| M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right) - \frac{K_\theta K_\phi}{1 + K_\phi^2} - \frac{K_\theta^2 K_\phi}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right|}{\left| \frac{K_\theta}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} - \frac{K_\phi^2}{1 + K_\phi^2} \right| |1 + K_\theta^2|} \leq \frac{2M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right)}{\left| \frac{K_\theta}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} - \frac{K_\phi^2}{1 + K_\phi^2} \right|}. \quad (2.19)$$

Далее, рассмотрим каждую область в отдельности.

Для области W_1^+ , где $K_\theta < -K_M$ и $|K_\phi| < 2\sqrt[4]{M}$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{\theta}|}{|\dot{\phi}|} &\leq \frac{2M \left(|K_\theta| + \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right)}{\frac{|K_\theta|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} + \frac{K_\phi^2}{1 + K_\phi^2}} \leq \frac{2M \left(1 + \frac{1}{|K_\theta|} \frac{1 + |K_\phi|}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{1 + K_\phi^2}} + \frac{1}{|K_\theta|} \frac{K_\phi^2}{1 + K_\phi^2}} \leq \\ &\leq \frac{2M(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M}})}{\frac{1}{\sqrt{1 + 4\sqrt{M}}}} = 2\sqrt{M}(\sqrt{M} + \sqrt{2})\sqrt{1 + 4\sqrt{M}} \leq 8\sqrt{M} \end{aligned} \quad (2.20)$$

при $M < \frac{1}{4}$.

Далее, оценим вариацию $\theta(t)$ при уменьшении $\phi(t)$ от $\phi(0) \leq \arctg(2\sqrt[4]{M})$ до $\phi(T) \geq -\arctg 2\sqrt[4]{M}$ при $M < 0.03$

$$\begin{aligned} V_0^T \theta(t) &= \int_0^T |\dot{\theta}| dt = \int_0^T |(d\theta)| = \int_{\phi(T)}^{\phi(0)} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} d\phi \leq \int_{-\arctg(2\sqrt[4]{M})}^{\arctg(2\sqrt[4]{M})} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} d\phi \leq \\ &\leq 16\sqrt{M} \arctg 2\sqrt[4]{M} < 32\sqrt[4]{M^3} < \pi - \sqrt{M} - \sqrt[4]{M}. \end{aligned}$$

Для области W_0^+ , где $K_\theta > K_M > \sqrt{M}$ и $|K_\phi| < \frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}}$ (в силу лемм 16, 18), получаем оценку при $M < 0.03$

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{\theta}|}{|\dot{\phi}|} &\leq \frac{2M \left(|K_\theta| + \frac{1+|K_\phi|}{\sqrt{1+K_\phi^2}} \right)}{\frac{|K_\theta|}{\sqrt{1+K_\phi^2}} - \frac{K_\phi^2}{1+K_\phi^2}} \leq \frac{2M \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{|K_\theta|} \right)}{\frac{1}{\sqrt{1+K_\phi^2}} - \frac{1}{|K_\theta|} \frac{K_\phi^2}{1+K_\phi^2}} \leq \\ &\leq \frac{2M(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M}})}{\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{M}}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\sqrt{M}}{1+\sqrt{M}}} = 2(\sqrt{M} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{M})(1 + \sqrt{1 + \sqrt{M}}) < 8. \end{aligned}$$

Оценим вариацию $\theta(t)$ при уменьшении $\phi(t)$ от $\phi(0) \leq \arctg(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}})$ до $\phi(T) \geq -\arctg \frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}}$ при $M < 0.03$

$$\begin{aligned} V_0^T \theta(t) &= \int_0^T |\dot{\theta}| dt = \int_0^T |(d\theta)| = \int_{\phi(T)}^{\phi(0)} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} d\phi \leq \int_{-\arctg(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}})}^{\arctg(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}})} \frac{|d\theta|}{|d\phi|} d\phi \leq \\ &\leq 16 \arctg \left(\frac{\sqrt[4]{M}}{\sqrt{2}} \right) < \frac{16}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{M} < 2\pi - \sqrt{M} - \sqrt[4]{M}. \end{aligned}$$

Лемма 28 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Аналогичные оценки справедливы для областей $W_0^-, W_1^-, W_2^-, W_3^-$, которые получаются из соответствующих областей $W_j^+, j = 0, 1, 2, 3$ заменой (ϕ, θ) на $(\phi + \pi, -\theta)$.

Продолжим

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 26. Пусть t_0 и t^* — моменты времени, соответствующие началу элементарного отрезка траектории и моменту вхождения траектории в окрестность нуля с последующим прохождением через нее. Отметим, что часть элементарного отрезка траектории, соответствующая отрезку $[t_0, t^*]$ может также содержать отрезки, принадлежащие окрестности нуля, однако длина каждого такого отрезка вдоль обеих координат K_ϕ, K_θ меньше $\sqrt[4]{M}$ и $\sqrt{M}$, соответственно. Отметим, что вариация $\theta(t)$ при прохождении тех областей в каждой из четвертей, где знак производной $\dot{\theta}$ определен, не превышает $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим окрестность нуля U^+ . Пусть элементарный отрезок траектории начинается на нижней границе U^+ . Тогда из доказательства леммы 25 следует, что либо через конечное время фазовая траектория вновь

войдет в U^+ через нижнюю границу и пройдет через U^+ в смысле определения 9, либо перейдет в четвертую четверть плоскости $\operatorname{sgn}(x_1) < 0$, откуда попадет в U^- и пройдет через нее в смысле определения 9. Траектория в худшем случае пройдет через каждую из областей W_1^+, W_3^+, W_2^- . При этом из лемм 27 и 28 получаем оценку $V_{t_0}^{t*}\theta(t) \leq 3\pi - \sqrt[4]{M} - \sqrt{M}$.

Пусть теперь элементарный отрезок траектории начинается на верхней границе U^+ , то есть принадлежит отрезкам I_1^- либо I_1^0 . Тогда из доказательства леммы 25 следует, что фазовая траектория либо попадет в первую четверть полуплоскости $\operatorname{sgn}(x_1) > 0$, откуда попадет в окрестность U^+ и пройдет через нее в смысле определения 9, либо попадет в область Ω_1^- , либо пройдет через окрестность нуля в смысле определения 9, попав в нее через отрезок I_1^0 . В последнем случае траектория проходит только через область W_0^+ , поэтому $V_{t_0}^{t*}\theta(t) \leq 2\pi - \sqrt[4]{M} - \sqrt{M}$ в силу леммы 28. В первом случае траектория пройдет через область W_0^+ и в худшем случае через область W_2^+ , следовательно $V_{t_0}^{t*}\theta(t) \leq \frac{7}{2}\pi - \sqrt[4]{M} - \sqrt{M}$. Во втором случае $V_{t_0}^{t*}\theta(t) \leq \frac{5}{2}\pi - \sqrt[4]{M} - \sqrt{M}$, если фазовая траектория попадает в U^- , и $V_{t_0}^{t*}\theta(t) \leq \frac{7}{2}\pi - \sqrt[4]{M} - \sqrt{M}$, если фазовая траектория попадает в U^+ . В худшем из случаев, соответствующему максимальной длине фазовой траектории, фазовая траектория пройдет через области $W_2^-, W_1^-, W_3^-, W_2^+$.

Пусть теперь элементарный отрезок траектории начинается на боковой границе U^+ , то есть принадлежит отрезку I_4 . В соответствии с доказательством леммы 25, этот случай сводится к ранее рассмотренным, причем в худшем случае траектория пройдет еще и через область W_3^+ , а следовательно, в любом случае справедлива оценка $V_{t_0}^{t*}\theta(t) \leq 4\pi - \sqrt[4]{M} - \sqrt{M}$.

Случай, когда траектория начинается на границе окрестности нуля U^- , рассматривается аналогично.

Лемма 26 доказана.

2.9 Заключительные рассуждения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Утверждение теоремы для траектории первого типа вытекает из замечания 4. Рассмотрим траекторию второго типа и оценим среднюю скорость движения по элементарному отрезку этой траектории. В соответствии с леммой 25 *элементарный отрезок*

траектории состоит из отрезков, расположенных вне окрестности нуля, и отрезков, принадлежащих окрестности нуля, причем вариация $\text{tg}(\theta(t))$ и $\text{tg}(\phi(t))$ вдоль отрезков, принадлежащих окрестности нуля, не меньше $\sqrt{M}$ и $\sqrt[4]{M}$, соответственно.

Объединим все части элементарного отрезка траектории, лежащие вне окрестности нуля, и отрезок внутри окрестности нуля, вариация $K_\theta(t)$ и (или) $K_\phi(t)$ по которому в точности равна $\sqrt{M}$ и (или) $\sqrt[4]{M}$, соответственно. Тогда в соответствии с замечанием 5 суммарная длина таких отрезков оценивается, как

$$l = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos(\phi)^2 \dot{\phi}^2} dt \leq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\theta}| dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\phi}| dt < 2\pi + 4\pi = 6\pi.$$

Время, за которое проходимся данный путь, не меньше $\frac{1}{6\sqrt[4]{M}}$. Следовательно, средняя скорость движения по указанному объединению отрезков

$$v(x) < 6\pi \left(\frac{1}{6\sqrt[4]{M}} \right)^{-1} < 36\pi\sqrt[4]{M}.$$

В соответствии с леммой 13, скорость движения по оставшимся частям элементарного отрезка траектории (заметим, что все они принадлежат окрестности нуля) не превышает $7\sqrt{M}$, причем $7\sqrt{M} < 36\pi\sqrt[4]{M}$ при $M < 1$.

Таким образом, средняя скорость движения по элементарному отрезку траектории также не превышает $36\pi\sqrt[4]{M}$. В силу леммы 15 средняя скорость движения по всей траектории второго типа также не превосходит данной величины.

Теорема 3 доказана.

Глава 3

Семейство систем специального вида

В настоящей главе установлены возможные значения спектров *скорости и показателей блуждания и блуждаемости* систем специального вида. Установлена их взаимосвязь. В §§ 3.1–3.3 приводится доказательство теоремы 4, а в § 3.4 — доказательство теоремы 5.

3.1 Спектр скорости блуждания

Без ограничения общности запишем решение системы (9) в виде

$$x(t) = (r_0 \cos F(t), r_0 \sin F(t), z_0 E(t))^T, \quad r_0 \geq 0, \quad z_0 \in \mathbb{R},$$

где $E(t) \equiv \exp G(t)$, а $F(t)$ и $G(t)$ — первообразные $f(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям $F(0) = \phi_0, G(0) = 0$, что соответствует вектору $(r_0 \cos \psi_0, r_0 \sin \psi_0, z_0)^T$ начальных условий рассматриваемого решения.

Вычислим подынтегральное выражение в определении функции $\gamma(x, t)$, задающей скорости блуждания и показатели блуждания и блуждаемости (определение 1). Длина вектора решения равна

$$|x(t)| = \sqrt{(r_0 \cos(F(t)))^2 + (r_0 \sin(F(t)))^2 + (z_0 E(t))^2} = \sqrt{r_0^2 + z_0^2 E(t)^2}.$$

Найдем компоненты вектора производной по времени от $\frac{x(t)}{|x(t)|}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{x_1(t)}{|x(t)|} &= \frac{d}{dt} \frac{r_0 \cos(F(t))}{\sqrt{r_0^2 + z_0^2 E(t)^2}} = \\ &= \left(\frac{-r_0 f(t) \sin(F(t)) (r_0^2 + z_0^2 E(t)^2) - r_0 \cos(F(t)) z_0^2 E(t)^2 g(t)}{(r_0^2 + z_0^2 E(t)^2)^{3/2}} \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{x_2(t)}{|x(t)|} &= \frac{d}{dt} \frac{r_0 \sin(F(t))}{\sqrt{r_0^2 + z_0^2 E(t)^2}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{r_0 f(t) \cos(F(t))(r_0^2 + z_0^2 E(t)^2) - r_0 \sin(F(t)) z_0^2 E(t)^2 g(t)}{(r_0^2 + z_0^2 E(t)^2)^{3/2}} \right),$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{x_3(t)}{|x(t)|} = \frac{d}{dt} \frac{z_0 E(t)}{\sqrt{r_0^2 + z_0^2 E(t)^2}} = \frac{z_0 g(t) E(t) r_0^2}{(r_0^2 + z_0^2 E(t)^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в определении функции $\gamma(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{[-r_0 f(t)(r_0^2 + z_0^2 E(t)^2)]^2 + [r_0 z_0^2 E(t)^2 g(t)]^2 + [z_0 g(t) E(t) r_0^2]^2}}{(r_0^2 + z_0^2 E(t)^2)^{3/2}}$$

Заметим, что в силу равенства $\varkappa(cx) = \varkappa(x)$, справедливого для всех показателей, введенных в определении 1, и любых ненулевых решений x и числа c , доказательство теорем 4 и 5 достаточно провести только для $r_0 \in \{0; 1\}$. Поэтому далее, без ограничения общности, будем считать $r_0 \in \{0; 1\}$. На решениях системы (9) подынтегральное выражение в определении функции $\gamma(x, t)$ (определение 1) при $r_0 = 0$ обращается в ноль, а при $r_0 = 1$ принимает вид

$$\sqrt{a(t, z_0)^2 + b(t, z_0)^2}, \quad (3.1)$$

где обозначено

$$a(t, z_0) = \frac{|f(t)|}{\sqrt{1 + z_0^2 E(t)^2}}, \quad b(t, z_0) = \frac{z_0 E(t) g(t)}{1 + z_0^2 E(t)^2}.$$

Заметим, что если $r_0 = 0$, то $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = 0$. Для $r_0 \neq 0$ справедлива

ЛЕММА 29. *Если существуют пределы $g(\infty)$ и $a(\infty, z_0)$, то скорость блуждания решения x является точной и равна $\mu(x) = a(\infty, z_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждение леммы следует из неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^t a(\tau, z_0) d\tau &\leq \int_0^t \sqrt{a^2(\tau, z_0) + b^2(\tau, z_0)} d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t a(\tau, z_0) d\tau + \int_0^t |b(\tau, z_0)| d\tau \end{aligned}$$

и равенств

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(\tau, z_0) d\tau = a(\infty, z_0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |b(\tau, z_0)| d\tau = 0. \quad (3.2)$$

Докажем первое равенство (3.2). В соответствии с определением предела для любого $\epsilon > 0$ существует $t_N > 0$ такое, что для любого $\tau > t_N$ выполнено

$$|a(\tau, z_0) - a(\infty, z_0)| < \frac{\epsilon}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t} \int_0^t a(\tau, z_0) d\tau - a(\infty, z_0) \right| &\leq \frac{1}{t} \int_0^t |a(\tau, z_0) - a(\infty, z_0)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{t_N} |a(\tau, z_0) - a(\infty, z_0)| d\tau + \frac{\epsilon}{2} \frac{t - t_N}{t} \leq \epsilon \end{aligned}$$

при любом

$$t > \frac{2}{\epsilon} \int_0^{t_N} |a(\tau, z_0) - a(\infty, z_0)| d\tau = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Докажем второе равенство (3.2): при $r_0 = 1$ имеет место равенство $b(t, z_0) = d \arctg z_0 E(t)/dt$, причем в случае $g(\infty) \neq 0$ функция $G(t)$ становится монотонной, начиная с некоторого t_0 , поэтому справедливо неравенство

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t |b(\tau, z_0)| d\tau = \frac{1}{t} |\arctg z_0 E(t) - \arctg z_0 E(t_0)| \leq \frac{1}{t} \pi \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

а в случае $g(\infty) = 0$ - неравенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t |b(\tau, z_0)| d\tau \leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} |g(\tau)| d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Лемма 29 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В теореме 5 приведен пример системы, для которой второе слагаемое в подкоренном выражении (3.1) играет существенную роль в выражении для скорости блуждания, вследствие несуществования предела функции $g(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4. Заметим, что из условий теоремы 4 и леммы 29 следует существование предела $a(\infty, z_0)$ для любого $z_0 \in \mathbb{R}$, а с ним и точность скорости блуждания.

Для любого решения x системы (9), для которого $r_0 = 0$, подынтегральное выражение в определении функции $\gamma(x, t)$ (определение 1) обращается в ноль, а следовательно, и $\mu(x) = \eta(x) = 0$.

Пусть теперь $r_0 = 1$. Докажем последнее равенство в утверждении теоремы 4, рассматривая по отдельности каждое из пяти условий в определении 3 типов систем специального вида.

1. Из условия $f(\infty) = 0$ следует равенство $\mu(x) = 0$, а значит, $\text{Sp}_\mu(A) = \{0\}$.

2. Пусть $0 < |f(\infty)| < \infty$. Тогда если $G(\infty) = +\infty$, то

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & z_0 \neq 0, \\ |f(\infty)|, & z_0 = 0, \end{cases}$$

а если $G(\infty) = -\infty$, то $\mu(x) = |f(\infty)|$. Следовательно, $\text{Sp}_\mu(A) = \{0, |f(\infty)|\}$.

3. Пусть $f(\infty) = \infty$, $H(\infty) \in \{0; \infty\}$. При условии $z_0 \neq 0$ получаем

$$\mu(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1/f(t)^2 + z_0^2(E(t)/f(t))^2}} = \begin{cases} 0, & H(\infty) = 0, \\ \infty, & H(\infty) = \infty. \end{cases}$$

Если же $z_0 = 0$, то $\mu(x) = |f(\infty)|$, следовательно, $\text{Sp}_\mu(A) = \{0, |f(\infty)|\}$.

4. Пусть $0 < |f(\infty)| < \infty$, $G(\infty) < \infty$. Тогда

$$\mu(x) = \frac{|f(\infty)|}{\sqrt{1 + z_0^2 E(\infty)^2}} \leq |f(\infty)|$$

и, в зависимости от величины z_0 , скорость блуждания $\mu(x)$ принимает все значения из отрезка $[0, |f(\infty)|]$, причем крайние значения отрезка достигаются при $r_0 = 0$ и $z_0 = 0$, соответственно.

5. Пусть $f(\infty) = \infty$, $H(\infty) \in (0; \infty)$. Тогда если $z_0 = 0$, то $\mu(x) = |f(\infty)|$, а если $z_0 \neq 0$, то

$$\mu(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1/f(t)^2 + z_0^2(E(t)/f(t))^2}} = \frac{1}{|z_0|} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{E(t)} = \frac{H(\infty)}{|z_0|}.$$

Следовательно, $\mu(x)$ принимает все значения из интервала $[0, \infty)$, причем значения 0 и ∞ достигаются при $r_0 = 0$ и $z_0 = 0$ соответственно.

Таким образом, последнее равенство в утверждении теоремы 4 доказано.

3.2 Спектр показателя блуждания

Докажем утверждению теоремы 4 о спектре показателя блуждания, а именно, докажем, что

$$\text{Sp}_\eta(A) = \{0, |f(\infty)|\}, \quad A \in \mathcal{M}_{fg}^I \cup \mathcal{M}_{fg}^{II}.$$

Рассмотрим ненулевое решение x системы (9). Как было показано выше, в случае $r_0 = 0$ показатель блуждания $\eta(x)$ является точным и равен нулю. Далее будем считать, что $r_0 = 1$.

Для решения x (ненулевого) системы первого типа при условии 1) в определении 3 имеем $\mu(x) = 0$. Следовательно, показатель блуждания $\eta(x)$ является точным и принимает только нулевое значение, а значит, его спектр состоит только из нулевого значения $\text{Sp}_\eta(A) = \{0\}$.

Заметим, что при $z_0 = 0$ для систем всех типов в определении 3, кроме первого типа при условии 1), след $x(t)/|x(t)|$ решения $x(t)$, начиная с некоторого момента t , движется по единичной окружности в плоскости (x_1, x_2) в одном направлении (по часовой стрелке либо против). В силу того, что линейное невырожденное преобразование L отображает плоскость (x_1, x_2) в плоскость (Lx_1, Lx_2) , а единичная окружность на плоскости (x_1, x_2) переходит в некоторый невырожденный эллипс на плоскости (Lx_1, Lx_2) , след $Lx(t)/|Lx(t)|$ вектора Lx на единичной сфере также движется по единичной окружности в плоскости (Lx_1, Lx_2) в одном направлении, последовательно проходя все точки окружности в соответствии с исходной параметризацией. Поэтому

$$\eta(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^3} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t) \equiv \mu(x).$$

Учитывая результаты, полученные при доказательстве утверждения теоремы 4 о спектре скорости блуждания, из полученного равенства следует, что при $z_0 = 0, r_0 = 1$ показатель блуждания решения является точным, и его значение совпадает с $f(\infty)$, то есть $\eta(x) = |f(\infty)|$.

Пусть теперь $z_0 \neq 0$. Рассмотрим линейное преобразование $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, состоящее в вытягивании пространства вдоль оси x_3 в K раз и тождественное в плоскости (x_1, x_2) , т.е.

$$L \equiv \text{diag} [1, 1, K]. \quad (3.3)$$

Тогда для любого ненулевого решения x справедливо равенство

$$Lx(t) = (r_0 \cos F(t), r_0 \sin F(t), Kz_0 E(t))^T$$

и выполнено неравенство

$$\eta(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^3} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{K > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{|f(\tau)|}{\sqrt{1 + (Kz_0)^2 E(\tau)^2}} d\tau = 0,$$

в силу справедливости цепочки соотношений

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{K > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{|f(\tau)|}{\sqrt{1 + (Kz_0)^2 E(\tau)^2}} d\tau \leq \inf_{K > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{K|z_0|} \frac{\max_{\tau \in [0, t]} |f(\tau)|}{\min_{\tau \in [0, t]} E(\tau)} d\tau = \\ &= \inf_{K > 0} \frac{1}{K|z_0|} \frac{\max_{\tau \in [0, t]} |f(\tau)|}{\min_{\tau \in [0, t]} E(\tau)} = 0. \end{aligned}$$

Объединяя полученные результаты, заключаем, что показатель блуждания систем всех типов в определении 3 является точным, а его спектр состоит из одного нулевого значения в случае выполнения условия 1) в определении 3 систем первого типа и из двух значений $\{0, |f(\infty)|\}$ в остальных случаях.

Утверждение теоремы 4 о спектре показателя блуждания доказано.

3.3 Спектр показателя блуждаемости

Докажем утверждение теоремы 4 о спектре показателя блуждаемости.

Для удобства дальнейшего изложения обозначим через $\mathcal{M}_{fg}^{I,2}$ и $\mathcal{M}_{fg}^{I,3}$ совокупность систем первого типа, удовлетворяющих дополнительным условиям 2) при $G(\infty) = -\infty$ или 3) при $H(\infty) = \infty$ в определении 3, соответственно.

Докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 30. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}_{fg}^I \cup \mathcal{M}_{fg}^{\Pi}$ показатель блуждаемости любого ненулевого решения x является точным и справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} 0 = \eta(x) < \rho(x) = \mu(x) = |f(\infty)|, \quad \text{если} \quad A \in \mathcal{M}_{fg}^{I,2} \cup \mathcal{M}_{fg}^{I,3}, \quad r_0 = 1, z_0 \neq 0, \\ \rho(x) = \eta(x) \quad , \quad \text{иначе.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В предыдущих параграфах было установлено, что скорость и показатель блуждания любого ненулевого решения системы каждого из двух

типов в определении 3 являются точными. Для доказательства равенства во второй части утверждения леммы заметим, что из соотношений [68]

$$0 \leq \check{\eta}(x) \leq \check{\rho}(x) \leq \check{\mu}(x), \quad 0 \leq \hat{\eta}(x) \leq \hat{\rho}(x) \leq \hat{\mu}(x) \quad (3.4)$$

и результатов предыдущих параграфов следует, что показатель блуждаемости $\rho(x)$ является точным для любого ненулевого решения x

1) систем всех типов, если $r_0 = 0$, и систем первого типа $A \in \mathcal{M}_{fg}^I \setminus (\mathcal{M}_{fg}^{I,2} \cup \mathcal{M}_{fg}^{I,3})$, если $r_0 = 1$, причем справедливо

$$\eta(x) = \rho(x) = \mu(x) = 0;$$

2) систем всех типов в определении 3, кроме первого типа при условии 1), если справедливо $z_0 = 0 \neq r_0$, причем выполнено

$$0 < \eta(x) = \rho(x) = \mu(x);$$

3) систем второго типа $A \in \mathcal{M}_{fg}^{\Pi}$, если справедливо $z_0 \neq 0$ и $r_0 = 1$, причем выполнено

$$\eta(x) = \rho(x) = 0 < \mu(x).$$

Последнее утверждение следует из цепочки соотношений

$$\rho(x) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^3} \mu(Lx) \leq \inf_{K > 0} \frac{|f(\infty)|}{\sqrt{1 + (Kz_0)^2 E(\infty)^2}} = 0 < \mu(x)$$

для решений систем второго типа при выполнении условия 4) и

$$\rho(x) = \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^3} \mu(Lx) \leq \inf_{K > 0} \frac{H(\infty)}{K|z_0|} = 0 < \mu(x)$$

для решений систем второго типа при выполнении условия 5).

Таким образом, равенство во второй части утверждения леммы доказано.

Равенство нулю показателя блуждания в первой части утверждения леммы следует из результатов параграфа 3.2. Для доказательства остальных соотношений в первой части утверждения леммы рассмотрим невырожденное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$, задаваемое верхнетреугольной матрицей

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Покажем, что в условиях первой части утверждения леммы для нижней и верхней скорости блуждания вектора Lx справедливы соотношения

$$\hat{\mu}(Lx) \geq \check{\mu}(Lx) \geq |f(\infty)| = \mu(x). \quad (3.6)$$

Справедливость равенства в правой части (3.6) следует из результатов параграфа 3.1. В силу справедливости QR -разложения для произвольной невырожденной матрицы, где Q -ортогональная матрицы, а R - верхнетреугольная матрицы, и сохранения расстояний ортогональными матрицами, из соотношений (3.6) следует

$$\hat{\rho}(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^3} \hat{\mu}(Lx) \geq \check{\rho}(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut} \mathbb{R}^3} \check{\mu}(Lx) \geq |f(\infty)| = \mu(x), \quad (3.7)$$

что в совокупности с соотношениями (3.4) приводит к точности показателя блуждаемости и выполнению равенств

$$\rho(x) = \mu(x) = |f(\infty)|. \quad (3.8)$$

Откуда с учетом результатов параграфа 3.2 следует справедливость неравенства в первой части утверждения леммы.

Для доказательства соотношений (3.6) заметим, что на решениях системы (9) для подынтегрального выражения в определении функции $\gamma(Lx, t)$ (определение 1) с учетом (2.6) и (2.7) справедливы оценки

$$\begin{aligned} v(Lx(\tau)) &= \left| \frac{d}{d\tau} \frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{1 + K_\theta^2}} \frac{|\dot{K}_\phi|}{1 + K_\phi^2} = \\ &= \frac{|(\dot{Lx})_1(Lx)_2 - (Lx)_1(\dot{Lx})_2|}{|Lx| \sqrt{(Lx)_1^2 + (Lx)_2^2}} \geq \frac{|(\dot{Lx})_1(Lx)_2 - (Lx)_1(\dot{Lx})_2|}{|Lx|^2} = \\ &= \frac{|f(\Delta_{33}(x_1^2 + x_2^2) - \Delta_{31}x_1x_3 + \Delta_{32}x_2x_3) + g(\Delta_{32}x_1x_3 + \Delta_{31}x_2x_3)|}{|Lx|^2} \geq \\ &\geq |f(\tau)|c(L, \tau, z_0) - |g(\tau)|b(L, \tau, z_0), \end{aligned}$$

а с ними и неравенство

$$\frac{1}{t} \gamma(Lx, t) \geq I_1(t) - I_2(t), \quad (3.9)$$

где обозначено

$$c(L, \tau, z_0) = \frac{|\Delta_{33} - z_0 E(t) (\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau))|}{|Lx|^2},$$

$$b(L, \tau, z_0) = |z_0| E(\tau) \frac{|\Delta_{32} \cos F(\tau) + \Delta_{31} \sin F(\tau)|}{|Lx|^2},$$

$$I_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |f(\tau)| c(L, t, z_0) d\tau, \quad I_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |g(\tau)| b(L, t, z_0) d\tau,$$

а за $\Delta_{3i}, i = \overline{1, 3}$ обозначены соответствующие дополнительные миноры матрицы L , причем $\Delta_{33} = a_{11}a_{22} \neq 0$ в силу невырожденности матрицы L .

Дальнейшее доказательство состоит из двух этапов.

1. Сначала покажем, что $I_2(\infty) = 0$. Действительно, если $a_{13} = a_{23} = 0$, тогда $b(L, \tau, z_0) = 0$, а следовательно и $I_2(t) = 0$. В противном случае для числителя функции $b(L, \tau, z_0)$ справедлива оценка

$$|\Delta_{32} \cos F(\tau) + \Delta_{31} \sin F(\tau)| \leq |\Delta_{32}| + |\Delta_{31}| \quad (3.10)$$

Далее рассмотрим три случая.

1.1 $g(\infty) > 0$. Тогда $E(\infty) = +\infty$ и, начиная с некоторого $\tau = t_0$, выполнено $g(t) > 0$ и справедлива оценка

$$|Lx|^2 \geq a_{33}^2 z_0^2 E^2(\tau), \quad (3.11)$$

Из невырожденности матрицы L следует $a_{33} \neq 0$. Из оценок (3.10) и (3.11) далее получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t |g(\tau)| b(L, \tau, z_0) d\tau &\leq \frac{|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|}{t} \int_{t_0}^t \frac{g(\tau)}{a_{33}^2 |z_0| E(\tau)} d\tau = \\ &= \frac{|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|}{a_{33}^2 |z_0|} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{E(t_0)} - \frac{1}{E(t)} \right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

а следовательно, и $I_2(\infty) = 0$.

1.2 $g(\infty) < 0$. Тогда $E(\infty) = 0$ и, начиная с некоторого $\tau = t_0$, выполнено $g(t) < 0$ и справедлива оценка

$$|Lx|^2 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2)}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2}{2} \right)^2 + a_{11}^2 a_{12}^2} \right) \equiv m_1 > 0, \quad (3.12)$$

а с ней и оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t |g(\tau)| b(L, \tau, z_0) d\tau &\leq \frac{|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|}{m_1} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t |z_0| (-g(\tau)) E(\tau) d\tau = \\ &= \frac{|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|}{m_1} \frac{|z_0|}{t} (E(t_0) - E(t)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

а следовательно, и $I_2(\infty) = 0$.

1.3 $g(\infty) = 0$. Тогда $|g(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и функция $b(L, \tau, z_0)$ ограничена. Действительно, повторяя рассуждения пунктов 1.1 и 1.2 получаем, что

а) если $E(\infty) = +\infty$, то начиная с некоторого момента $\tau = t_0$, выполнена оценка

$$b(L, \tau, z_0) \leq \frac{(|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|)}{a_{33}^2 |z_0| E(\tau)} \leq \frac{(|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|)}{a_{33}^2 |z_0| E(0)} \equiv m_2;$$

б) если $E(\infty) = 0$, то начиная с некоторого момента $\tau = t_0$, выполнена оценка

$$b(L, \tau, z_0) \leq |z_0| \frac{|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|}{m_1} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} E(\tau) \equiv m_2;$$

в) если $0 < E(\infty) < \infty$, тогда

$$b(L, \tau, z_0) \leq \frac{|\Delta_{32}| + |\Delta_{31}|}{|z_0| a_{33}^2} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \frac{1}{E(\tau)} \equiv m_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t |g(\tau)| b(L, \tau, z_0) d\tau &\leq \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{t_0} |g(\tau)| b(L, \tau, z_0) d\tau + m_2 \frac{1}{t} \int_{t_0}^t |g(\tau)| d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

а следовательно, и $I_2(\infty) = 0$.

2. Докажем теперь, что

$$I_1(\infty) \geq |f(\infty)|. \quad (3.13)$$

Рассмотрим два случая.

2.1 Система первого типа при дополнительных условиях $0 < |f(\infty)| < \infty$ и $G(\infty) = -\infty$. Пусть дополнительно $f(\infty) > 0$. В этом случае справедливо $E(\infty) = 0$, и для любого $\epsilon > 0$ существует

момент времени $\tau = t_0 \equiv \frac{\pi}{2}s$, где s - натуральное число, начиная с которого $f(\tau) > 0$ и выполнено неравенство

$$c(L, \tau, z_0) \geq \frac{|\Delta_{33}|}{(a_{11} \cos F(\tau) + a_{12} \sin F(\tau))^2 + a_{22}^2 \sin^2 F(\tau)} - \epsilon.$$

Кроме того справедливо

$$\begin{aligned} & \frac{|\Delta_{33}|}{t} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(a_{11} \cos F(\tau) + a_{12} \sin F(\tau))^2 + a_{22}^2 \sin^2 F(\tau)} d\tau = \\ & = \frac{1}{t} \int_{t_0}^t d \arctg \left(\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{|a_{11} a_{22}|} \left(\operatorname{tg} F(\tau) + \frac{a_{11} a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \right) \right) \geq \\ & \geq \frac{\pi k}{t} = \frac{F(t_k) - \frac{\pi}{2}s}{t} = \frac{F(t_k) - F(t) - \frac{\pi}{2}s}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где момент времени t_k определяется соотношениями

$$F(t_k) = \frac{\pi}{2}s + \pi k, \quad F(t) - F(t_k) < \pi,$$

а следовательно,

$$I_1(t) \geq \frac{-\pi - \frac{\pi}{2}s(1 - \epsilon)}{t} + (1 - \epsilon) \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow (1 - \epsilon)f(\infty), \quad t \rightarrow \infty.$$

В силу произвольного выбора ϵ , из последней оценки следует неравенство (3.13).

Аналогично рассматривается случай $f(\infty) < 0$.

2.2 Система первого типа при дополнительных условиях $f(\infty) = \infty$ и $H(\infty) = \infty$. Рассмотрим сначала случай $f(\infty) = +\infty$. Возможны три случая.

а) $G(\infty) = -\infty$. Проводя рассуждения аналогичные пункту 2.1, в этом случае получаем справедливость неравенства (3.13).

б) $G(\infty) < \infty$. В этом случае функция $E(t)$ ограничена, а с ней и $|x(t)|$ ограничена, а следовательно, справедлива оценка

$$|Lx|^2 \leq \|L\|^2 \sup_{t \geq 0} |x|^2 \equiv m_3. \quad (3.14)$$

В случае выполнения равенств $\Delta_{31} = \Delta_{32} = 0$ отсюда следует

$$I_1(t) \geq \frac{|\Delta_{33}|}{m_3} \frac{1}{t} \int_0^t |f(\tau)| d\tau \rightarrow \frac{|\Delta_{33}|}{m_3} |f(\infty)| = \infty = |f(\infty)|, \quad t \rightarrow \infty,$$

а следовательно, и неравенство (3.13).

В противном случае для любого $\epsilon > 0$ существует момент времени $\tau = t_0$, начиная с которого $f(\tau) > 0$ и выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & |\Delta_{33} - z_0 E(\tau) (\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau))| \geq \\ & \geq |\Delta_{33} - z_0 E(\infty) (\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau))| - \epsilon. \end{aligned}$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_{t_0}^t f(\tau) |\Delta_{33} - z_0 E(\infty) (\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau))| d\tau \geq \frac{Bk}{t} = \\ & = B \frac{F(t_k) - F(t_0)}{2\pi t} = B \frac{1}{2\pi t} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} f(\tau) d\tau - \int_{t_k}^t f(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

где момент времени t_k и постоянная B определяются соотношениями

$$F(t_k) = F(t_0) + 2\pi k, \quad F(t) - F(t_k) < 2\pi,$$

$$B = \int_0^{2\pi} |\Delta_{33} - z_0 E(\infty) (\Delta_{31} \cos F - \Delta_{32} \sin F)| dF.$$

Выберем $\epsilon = \frac{1}{4\pi} B$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned} I_1(t) & \geq \frac{B}{4\pi m_3} \frac{1}{t} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} f(\tau) d\tau - 4\pi \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{B}{4\pi m_3} f(\infty) = +\infty = |f(\infty)|, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

откуда следует справедливость неравенства (3.13).

в) $G(\infty) = +\infty$. Тогда $E(\infty) = +\infty$ и для любого $\epsilon > 0$ существует момент времени $\tau = t_\epsilon$, начиная с которого $f(\tau) > 0$ и выполнены неравенства

$$c(L, \tau, z_0) \geq \frac{1}{|z_0| E(\tau)} \left(\frac{|\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau)|}{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2} - \epsilon \right).$$

Возможны два случая: либо, начиная с некоторого момента времени, функция $G(t)$ становится монотонной, что означает $g(\infty) > 0$, либо немонотонность функции $G(t)$ сохраняется при любых сколь угодно больших значениях t , но тогда $g(\infty) = 0$.

1) Пусть начиная с некоторого момента времени t_1 , функция $G(t)$ становится монотонно возрастающей. Тогда для $t_0 > \max(t_1, t_\epsilon)$ справедливо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} |(\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau))| d\tau = \\ &= \frac{A}{t} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} |\cos(F(\tau) + \psi)| d\tau \geq \frac{A}{t} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} \cos^2(F(\tau) + \psi) d\tau = \\ &= \frac{A}{2t} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau + \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} \cos 2(F(\tau) + \psi) d\tau \right), \quad A = \sqrt{\Delta_{31}^2 + \Delta_{32}^2}, \end{aligned}$$

и выбирая

$$\epsilon = \frac{A}{4(a_{13}^2 + a_{12}^2 + a_{33}^2)},$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} I_1(t) &\geq \frac{A}{2|z_0|(a_{13}^2 + a_{12}^2 + a_{33}^2)} \frac{1}{t} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau + \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} \cos 2(F(\tau) + \psi) d\tau \right) \\ &- \frac{\epsilon}{|z_0|} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau \rightarrow \frac{A}{4|z_0|(a_{13}^2 + a_{12}^2 + a_{33}^2)} H(\infty) = \infty = |f(\infty)|, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу сходимости по признаку Дирихле второго интеграла в сумме. Таким образом, неравенство (3.13) выполнено.

2) Пусть $g(\infty) = 0$. Тогда существует момент времени $\tilde{t}_0$, начиная с которого $f(\tau) > 0$ и выполнены неравенства

$$E(t) > \frac{1}{2} E(t_m) > 1, \quad t_m = \arg \max_{t \in [t_1, t_2]} G(t) \quad (3.15)$$

для всех $t \in [t_1, t_2]$ и для всех значений $t_2 > t_1 > \tilde{t}_0$, таких что $F(t_2) - F(t_1) = 2\pi$. Неравенство (3.15) является следствием соотношений

$$G(t_m) - G(t) = |g(\zeta)| |t_m - t| \leq |g(\zeta)| |t_2 - t_1| = |g(\zeta)| \frac{2\pi}{f(\xi)} \leq \ln 2,$$

где $\zeta, \xi \in [t_1, t_2]$, справедливых, с учетом $f(\infty) = +\infty, g(\infty) = 0$, при всех $t_2 > t_1 > \tilde{t}_0$ для некоторого $\tilde{t}_0$.

С учетом неравенств (3.15) для $t_0 > \max(\tilde{t}_0, t_\epsilon)$ справедлива следующая цепочка соотношений

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} |(\Delta_{31} \cos F(\tau) - \Delta_{32} \sin F(\tau))| d\tau \geq \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4A}{\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} E(t)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4A}{\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} E(t)} \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau) d\tau \geq \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{A}{\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau = \\
&= \frac{A}{\pi t} \int_{t_0}^{t_k} \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau = \frac{A}{\pi t} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau - \int_{t_k}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau \right) \geq \\
&\geq \frac{A}{\pi t} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau - \int_{t_k}^t f(\tau) d\tau \right) \geq \frac{A}{\pi t} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau - 2\pi \right)
\end{aligned}$$

где моменты времени $t_i, i = \overline{0, k}$, и постоянная A определяются соотношениями

$$F(t_{i+1}) = F(t_i) + 2\pi, \quad F(t) - F(t_k) < 2\pi, \quad A = \sqrt{\Delta_{31}^2 + \Delta_{32}^2}.$$

Выбирая

$$\epsilon = \frac{A}{2\pi(a_{13}^2 + a_{12}^2 + a_{33}^2)},$$

получаем оценку

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\geq \frac{A}{2\pi|z_0|(a_{13}^2 + a_{12}^2 + a_{33}^2)} \frac{1}{t} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{E(\tau)} d\tau - 4\pi \right) \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{A}{2\pi|z_0|(a_{13}^2 + a_{12}^2 + a_{33}^2)} H(\infty) = \infty = |f(\infty)|, \quad t \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

а с ней и оценку (3.13).

Случай $f(\infty) = -\infty$ для системы первого типа при дополнительном условии $H(\infty) = \infty$ рассматривается аналогично.

Таким образом мы показали, что в условиях первой части утверждения леммы справедливы соотношения $I_1(\infty) \geq |f(\infty)|, I_2(\infty) = 0$, из которых с учетом неравенства (3.9) следуют соотношения (3.6), (3.7) и (3.8). Таким образом, соотношения в первой части утверждения леммы полностью доказаны.

Лемма 30, а с ней и теорема 4 полностью доказана.

3.4 Пример несовпадения верхних границ спектров

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 5. Рассмотрим следующий пример: в системе (9) положим

$$f(t) \equiv 1, \quad g(t) \equiv \frac{n \cos nt}{2 + \sin nt},$$

(где n — это параметр, условия на который будут получены ниже). В результате имеем решение

$$x(t) = (r_0 \cos t, r_0 \sin t, z_0 \ln(2 + \sin nt))^T, \quad z_0 \in \mathbb{R}, r_0 \geq 0.$$

Преобразуем подынтегральное выражение в определении функции $\gamma(x, t)$ (определение 1) при условии $r_0 \neq 0$ и $\beta = (z_0/r_0)^2$, получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{f(t)^2}{1 + \beta E(t)} + \left(\frac{\sqrt{\beta} E(t) g(t)}{1 + \beta E(t)} \right)^2} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{1 + \beta(2 + \sin nt)^2} + \frac{\beta n^2 \cos^2 nt}{(1 + \beta(2 + \sin nt)^2)^2}}. \end{aligned}$$

Обозначим среднее интегральное значение этого выражения на отрезке $[0, 2\pi]$ через $I(\beta)$ и заметим, что $I(0) = 1$ и $I(\infty) = 0$. Определим поведение функции $I(\beta)$ в окрестности $\beta = 0$, вычислив производную $I'(0)$:

$$\frac{d}{d\beta} I(\beta)|_{\beta=0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-(2 + \sin n\tau)^2 + n^2 \cos^2(n\tau)) d\tau = \frac{1}{4}(-9 + n^2) > 0,$$

последнее неравенство справедливо, начиная с $n = 4$. Из полученной оценки производной, поскольку функция $I(\beta)$ непрерывна и выполнены равенства $I(\infty) = 0$, $I(0) = 1$, следует, что наибольшее значение функции $I(\beta)$ на полуинтервале $[0, \infty)$ конечно и больше единицы. Тем самым в силу периодичности решения будем иметь, что $\mu(x) = I(\beta)$, а следовательно, $\text{Sp}_\mu(A) = [0, \max I(\beta)]$.

Рассмотрим преобразование пространства (3.3). Подставляя $\beta(K) = (Kz_0/r_0)^2$ в выражение для $I(\beta)$, при $z_0, r_0 \neq 0$ получаем

$$\eta(x) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^3} \mu(Lx) = \inf_{K > 0} I(\beta(K)) = 0,$$

причем инфимум достигается при $K = \infty$, а при $z_0 = 0 \neq r_0$ имеем $\eta(x) = \mu(x) = I(0) = 1$.

Теорема 5 доказана.

Глава 4

Системы произвольного порядка

Данная глава отвечает на вопрос о том, каким в n -мерном случае ($n > 2$) может быть *спектр скорости блуждания* на множестве диагональных систем $\mathcal{D}_M$ (теорема 6) и на множестве *полных систем* $\mathcal{M}_M$ в случае четной размерности пространства (теорема 7). Приводятся также двусторонние оценки спектра на множестве *полных систем* $\mathcal{M}_M$ в случае нечетной размерности пространства (теорема 8).

4.1 Диагональные системы

Обозначим $\xi_1 = \frac{x_1}{|x|}, \dots, \xi_n = \frac{x_n}{|x|}$, тогда подынтегральное выражение (2.5) преобразуется к виду

$$v(x(\tau)) = \sqrt{a_1(\tau)^2 \xi_1^2 + \dots + a_n(\tau)^2 \xi_n^2 - (a_1(\tau) \xi_1^2 + \dots + a_n(\tau) \xi_n^2)^2} \quad (4.1)$$

В каждый момент времени τ полученное выражение (4.1) является квадратичной функцией относительно каждой из $a_1(\tau), \dots, a_n(\tau)$, с положительным коэффициентом при старшем члене. Поэтому для любого фиксированного τ и любого фиксированного набора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, такого что $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$, максимум выражения (4.1) на множестве

$$\{(a_1(\tau), \dots, a_n(\tau)) : |a_i(\tau)| \leq M, i = 1, \dots, n\}$$

может достигаться только для значений $a_1(\tau), \dots, a_n(\tau)$, соответствующих концам отрезка $[-M; M]$, то есть при $a_i = \pm M, i = 1, \dots, n$. Учитывая этот факт, заметим, что для первых n слагаемых в подкоренном выражении справедливо

$$a_1(\tau)^2 \xi_1^2 + \dots + a_n(\tau)^2 \xi_n^2 = M^2(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \equiv M^2,$$

откуда вытекает

$$\begin{aligned} \max_{|a_i(\tau)| \leq M, \xi_1, \dots, \xi_n} v(x(\tau)) &= \sqrt{M^2 - \min_{a_1 = \pm M, \dots, a_n = \pm M, \xi_1, \dots, \xi_n} |a_1 \xi_1^2 + \dots + a_n \xi_n^2|^2} = \\ &= \sqrt{M^2 - \min_{a_1 = \pm M, \dots, a_n = \pm M, \xi_1, \dots, \xi_n} |a_1 + (a_2 - a_1) \xi_2^2 + \dots + (a_n - a_1) \xi_n^2|^2} \leq M. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\hat{\mu}(x) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M d\tau \leq M. \quad (4.2)$$

Рассмотрим систему $A_d \in \mathcal{D}_M$ с кусочно постоянными коэффициентами, задаваемыми последовательно при $j = 1, 2, \dots$ равенствами

$$\begin{aligned} -a_2(t) &= a_3(t) = \dots = a_n(t) = \\ &= a_1(t) = \begin{cases} -M, & T_{j-1} \leq t \leq T_{j-1} + \Delta t_j^1, \\ M, & T_{j-1} + \Delta t_j^1 \leq t \leq T_{j-1} + \Delta t_j^1 + \Delta t_j^2 \equiv T_j, \end{cases} \end{aligned}$$

где, аналогично (1.4),

$$T_j = \sum_{m=1}^j (\Delta t_m^1 + \Delta t_m^2) \quad (T_0 = 0), \quad \Delta t_j^1 = \frac{1}{j}, \quad x(T_j) = x_0. \quad (4.3)$$

Рассмотрим функцию x , являющуюся решением системы A_d и удовлетворяющую начальному условию $x(0) = x_0$.

ЛЕММА 31. На решении системы A_d с начальным значением

$$x_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right),$$

справедливо $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $t(\varepsilon)$, чтобы для любого $t > t(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$v(x(\tau)) > 1 - \varepsilon', \quad \varepsilon' \equiv \frac{\varepsilon}{2M},$$

обеспечиваемое условиями (4.3), причем длины Δt_j^1 уменьшаются с ростом номера j . Тогда для любого $t > \frac{t(\varepsilon)}{\varepsilon'}$ будет выполнена оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t v(x(\tau)) d\tau &\geq \frac{1}{t} \int_{t(\varepsilon)}^t v(x(\tau)) d\tau > M(1 - \varepsilon') \cdot \frac{t - t(\varepsilon)}{t} > \\ &> M(1 - \varepsilon')(1 - \varepsilon') > M \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{2M} \right) > M - \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, с учетом оценки (4.2), получаем

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = M.$$

Лемма 31 доказана.

ЛЕММА 32. *Верны равенства $\text{Sp}_{\hat{\mu}}(A_d) = \text{Sp}_{\check{\mu}}(A_d) = [0; M]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для каждого фиксированного $r \in [0; M]$ существует $w \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ удовлетворяющее равенству:

$$M\sqrt{1 - (1 - 2w^2)^2} = r$$

Прodelывая рассуждения, аналогичные лемме 31, получаем, что для решения $x(t)$ системы A_d , удовлетворяющего начальным условиям $x_0 = (\sqrt{1 - w^2}, w, 0, \dots, 0)$, справедливо

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = r.$$

Лемма 32 доказана.

Утверждение теоремы 6 следует из утверждений лемм 32 и 31.

4.2 Общий случай

Обозначим

$$\xi_i = \frac{x_i}{|x|}, \quad \rho_i = \frac{\dot{x}_1}{|x|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и заметим, что

$$\rho_i = a_{i1}\xi_1 + \dots + a_{in}\xi_n. \quad (4.4)$$

Тогда выражение (2.5) преобразуется к виду

$$v(x(\tau)) = \sqrt{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2 - (\rho_1\xi_1 + \dots + \rho_n\xi_n)^2}. \quad (4.5)$$

В каждый момент времени τ полученное выражение (4.5) является квадратичной функцией относительно каждой из $a_{11}(\tau), \dots, a_{nn}(\tau)$, с положительным коэффициентом при старшем члене. Поэтому для любого фиксированного τ и любого фиксированного набора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, такого что $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$, максимум выражения (4.5) на множестве

$$\{(a_{11}(\tau), \dots, a_{nn}(\tau)) : |a_{ij}(\tau)| \leq M, \ i, j = 1, \dots, n\}$$

может достигаться только для значений $a_1(\tau), \dots, a_m(\tau)$ соответствующих концам отрезка $[-M; M]$, то есть при $a_i = \pm M$, $i = 1, \dots, n$. С

учетом этого факта получаем

$$\max_{\xi_i: \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1} |\rho_i| = M\sqrt{n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и следовательно,

$$v(x(\tau)) \leq \sqrt{M^2 n^2 - (\rho_1 \xi_1 + \dots + \rho_n \xi_n)^2} \leq nM. \quad (4.6)$$

Далее рассмотрим случай четных значений n ($n = 2k$). Аналогично доказательству теоремы 6 рассмотрим систему $A_0 \in \mathcal{M}_M$ с кусочно постоянными коэффициентами, задаваемыми последовательно при $j = 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$ равенствами

$$\begin{aligned} a_{i1}(t) &= \dots = a_{in}(t) = \\ &= \begin{cases} -M, & T_{j-1} \leq t \leq T_{j-1} + \Delta t_j^1, \\ M, & T_{j-1} + \Delta t_j^1 \leq t \leq T_{j-1} + \Delta t_j^1 + \Delta t_j^2 \equiv T_j, \end{cases} \quad i = 2l, \quad (4.7) \\ a_{i1}(t) &= \dots = a_{in}(t) = -a_{(i+1)1}(t), \quad i = 2l - 1, \end{aligned}$$

где, аналогично (4.3),

$$T_j = \sum_{m=1}^j (\Delta t_m^1 + \Delta t_m^2), \quad (T_0 = 0), \quad \Delta t_j^1 = \frac{1}{j}, \quad x(T_j) = x_0.$$

Рассмотрим функцию x , являющуюся решением системы A_0 и удовлетворяющую начальному условию $x(0) = x_0$.

ЛЕММА 33. На решении системы A_0 с начальным значением

$$x_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

справедливо $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = Mn$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $t(\varepsilon)$, чтобы для любого $t > t(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$v(x(\tau)) > 1 - \varepsilon', \quad \varepsilon' \equiv \frac{\varepsilon}{2Mn},$$

обеспечиваемое условиями (4.3), причем длины Δt_j^1 уменьшаются с ростом номера j . Тогда для любого $t > \frac{t(\varepsilon)}{\varepsilon'}$ будет выполнена оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t v(x(\tau)) d\tau &\geq \frac{1}{t} \int_{t(\varepsilon)}^t v(x(\tau)) d\tau > M(1 - \varepsilon') \cdot \frac{t - t(\varepsilon)}{t} > \\ &> Mn(1 - \varepsilon')(1 - \varepsilon') > Mn \left(1 - 2\frac{\varepsilon}{2Mn} \right) > Mn - \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, с учетом оценки (4.6), получаем

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = Mn.$$

Лемма 33 доказана.

ЛЕММА 34. *Верны равенства $\text{Sp}_{\check{\mu}}(A_0) = \text{Sp}_{\hat{\mu}}(A_0) = [0; Mn]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решения системы A_0 , удовлетворяющего начальному условию $x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}})$, аналогично доказательству леммы 33 получаем, что $\mu(x) = 0$. В силу непрерывности функции $v(x(\tau))$, отсюда и из утверждения леммы 33 следует что, для каждого фиксированного $r \in [0; Mn]$ существует $w = (w_1, \dots, w_n)$, такое что $w_1^2 + \dots + w_n^2 = 1$ и

$$\sqrt{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2 - (\rho_1 w_1 + \dots + \rho_n w_n)^2} = r.$$

Продельвая рассуждения, аналогичные лемме 33, получаем, что для решения $x(t)$ системы A_0 , удовлетворяющего начальным условиям $x_0 = (w_1, \dots, w_n)$, справедливо

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = r.$$

Лемма 34 доказана.

Утверждение теоремы 7 следует из утверждений лемм 33, 34.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 8, справедливой для нечетных значений n ($n = 2k+1$), проводится аналогично доказательству теоремы 7. Ограниченность спектра следует из оценки (4.6). Рассмотрим систему A_0 , как в (4.7). Тогда для функции x , являющейся решением системы A_0 , удовлетворяющим начальному условию $x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$, $n = 2k+1$, аналогично доказательству леммы 33 получаем

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = 2M\sqrt{k(k+1)} = M\sqrt{n^2 - 1}.$$

Далее, для решения той же системы (4.7), удовлетворяющего начальному условию $x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}})$, $n = 2k+1$, справедливо

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = 0.$$

Далее аналогично доказательству леммы 34 получаем, что в зависимости от выбора начальных условий x_0 *скорость блуждания* на решении системы A_0 принимает все значения из отрезка $[0; \sqrt{n^2 - 1} \cdot M]$.

Заключение

В работе изучены свойства спектра скорости блуждания для полных, треугольных и диагональных дифференциальных систем, а также для систем, отвечающим линейным однородным дифференциальным уравнениям.

Доказано, что спектр скорости блуждания на множестве решений диагональных систем произвольной размерности, полных систем четной размерности, двумерных треугольных систем, а также систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, представляет собой отрезок, установлены точные значения верхней границы спектра для данных типов систем. Приведена оценка верхней границы спектра скорости блуждания для полных систем нечетной размерности, а также указан отрезок, принадлежащий этому спектру.

Показана малость верхней границы спектра скорости блуждания для решений систем, отвечающих линейным дифференциальным уравнениям второго и третьего порядка с малыми коэффициентами.

Для систем специального вида (которые по своему смыслу являются комбинацией поворотов и растяжений пространства) получены условия, при которых спектр скорости блуждания принимает качественно различные значения. Получены достаточные условия совпадения спектра показателей блуждания и блуждаемости с граничными значениями спектра скорости блуждания.

Интересным остается вопрос о спектре скорости блуждания в случае треугольных систем произвольной размерности, получение точных границ спектра скорости блуждания решений полных систем для нечетной размерности пространства. Представляют интерес определение необходимых условий совпадения спектра показателя блуждания с граничными значениями спектра скорости блуждания для систем специального вида.

Литература

- [1] Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 25. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2005. С. 3–17.
- [2] Асташова И.В. О задаче Н.А. Изобова для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. № 6. С. 898–899.
- [3] Асташова И.В. О поведении на бесконечности решений квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2009. **45**. № 11. С. 1671.
- [4] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа // И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012.
- [5] Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. **22**. №11. С. 1843–1853.
- [6] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №12. С. 1592–1600.
- [7] Былов Б.Ф. Почти приводимые системы. Автореф. дисс... докт. физ.-мат. наук. Мн.: АН БССР, 1966.
- [8] Былов Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1970. **6**. №2. С. 243–252.

- [9] Быков В.В. Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. **51**. Вып. 5. С. 186.
- [10] Быков В.В. Классификация Бэра σ -показателей Изобова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №11. С. 1574.
- [11] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
- [12] Бурлаков Д.С., Сергеев И.Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 899.
- [13] Ветохин А.Н. О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. **31**. №5. С. 909–910.
- [14] Ветохин А.Н. Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова в равномерной топологии // Дифференц. уравнения. 1999. **35**. №11. С. 1578–1579.
- [15] Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. **91**. №5. С. 999–1002.
- [16] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. **42**. №2. С. 207–222.
- [17] Глызин Д.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения. 2005. **41**. №2. С. 268–273.
- [18] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Матем. сб. 205:6 (2014). С. 21–86.
- [19] Горицкий А.Ю. Характеристические частоты линейных комбинаций синусов // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. № 6. С. 860.
- [20] Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научн. вест. МГТУ ГА. Серия Матем. 1999. № 16. С. 5–10.

- [21] Дементьев Ю.И. Частичные пределы показателей Ляпунова и их достижимость на кривых в окрестности данной системы // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1577.
- [22] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [23] Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. 1. №4. С. 469–477.
- [24] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. 1976. 12. №11. С. 1954–1966.
- [25] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. 26. №1. С. 5–8.
- [26] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.
- [27] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. 29. №12. С. 2034–2055.
- [28] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
- [29] Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения. 1969. 5. №7. С. 1186–1192.
- [30] Изобов Н.А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Матем. заметки. 1984. 35. № 2. С. 189–199.
- [31] Изобов Н.А. О кнезеровских решениях // Дифференц. уравнения. 1985. 21. № 4. С. 581–588.
- [32] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} - p(x)y = 0$ // Тр. Моск. матем. об-ва. 1961. 10. С. 419–436.

- [33] Кондратьев В.А. О колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков // Докл. АН СССР. 1968. **118**. № 1. С. 22–24.
- [34] Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1962. **144**. III. С. 33–36.
- [35] Кигурадзе И.Т. Об условиях колеблемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. **10**. № 8. С. 11387–1398. и № 9. С. 1586–1594.
- [36] Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. № 6. С. 207–219.
- [37] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. 1990.
- [38] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий–ПРЕСС, 2000.
- [39] Левин А.Ю. Избранные труды. Ярославль, Рыбинск: Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2010.
- [40] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. **24** № 2. С. 43–96.
- [41] Миллионщиков В.М. Вспомогательные степенные показатели // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. № 6. С. 1085.
- [42] Миллионщиков В.М. Вспомогательные логарифмические показатели // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. № 6. С. 1087.
- [43] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. **10**. №1. С. 99–104.
- [44] Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. № 10. С. 1775–1784.

- [45] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №8. С. 1408–1416.
- [46] Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. **25**. №2. С. 209–212.
- [47] Макаров Е.К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. 1996. **32**. №12. С. 1710–1711.
- [48] Морозов О.И. Критерий полуустойчивости сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной линейной системы // Дифференц. уравнения. 1990. **26**. №12. С. 2181.
- [49] Морозов О.И. Достаточные условия полуустойчивости сверху показателей Ляпунова неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1991. **27**. №11. С. 2012.
- [50] Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №2. С. 226–235.
- [51] Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. **43**. №8. С. 1048–1054.
- [52] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. **31**. №6. С. 925–931.
- [53] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. **19**. №2. С. 253–259.
- [54] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.
- [55] Сергеев И.Н. Формула для вычисления минимального показателя трехмерной системы // Дифференц. уравнения. 2000. **36**. №3. С. 345–354.
- [56] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1573.

- [57] Сергеев И.Н. Подвижность характеристических частот линейного уравнения при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1576.
- [58] Сергеев И.Н. О классах Бэра характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. **41**. №11. С. 852.
- [59] Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2006. **25**. С. 249–294.
- [60] Сергеев И.Н. Неравенства между главными частотами нулей и знаков линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2006. **42**. №6. С. 855.
- [61] Сергеев И.Н. Класс Бэра старшей частоты корней линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2006. **42**. №11. С. 1573.
- [62] Сергеев И.Н. О различной зависимости от параметра главных частот нулей, знаков и корней линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2007. **43**. №6. С. 853.
- [63] Сергеев И.Н. Общие свойства главных частот линейного уравнения / Международная конференция, посвященная памяти И.Г. Петровского: Тезисы докладов - М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 282–283.
- [64] Сергеев И.Н. О несуществовании ляпуновской частоты решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. №11. С. 1579.
- [65] Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2012. **29**. С. 414–442.
- [66] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. **45**. №6. С. 908.
- [67] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.
- [68] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

- [69] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №6. С. 902.
- [70] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сборник. 2013. **204**. №1. С. 120–137.
- [71] Смоленцев М.В. Существование линейного уравнения третьего порядка со счетным спектром частот // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 242–251.
- [72] Фурсов А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №11. С. 2011–2012.
- [73] Фурсов А.С. Размерность пространства решений медленного роста линейной неоднородной системы // Успехи матем. наук. 1994. **49**. Вып. 4. С. 143.
- [74] Чантурия Т.А. Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. № 3. С. 470–482.
- [75] Чантурия Т.А. О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида // Дифференц. уравнения. 1986. **22**. № 11. С. 1905–1915.
- [76] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32, Hft. 5. S. 703–728.
- [77] Sturm J.C.F. Memoire sur les equations differentielles lineaires du second ordre // J. Math. Pures Appl. 1836. **1**, 106–186.
- [78] Kneser A. J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen beigrosser reellen Argumente I. J. Reine und angew. Math. 1898. **116** p. 173–212.
- [79] Bol P. Uber Differentialgleichungen // J. reine and angew. Math. 1913. Bd. 144. S. 284–318.
- [80] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №11. С. 1670–1671.

- [81] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 907.
- [82] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем второго порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 184–212.
- [83] Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания для уравнений второго и третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2015. **51**. №6. С. 821.
- [84] Лысак М.Д. Возможные соотношения между спектрами показателей и скоростей блуждания трехмерных систем // Дифференц. уравнения. 2015. **51**. №6. С. 825–826.
- [85] Lysak M.D. Precise Estimates of the Walk Speed of Solutions of Second-Order Linear Systems // Journal of Mathematical Sciences. 2015. **210**. №3. С. 227–244.
- [86] Лысак М.Д. Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Азбелева Н.В. и профессора Тонкова Е.Л., Ижевск, Россия, 9-11 июня 2015, С. 83–85.
- [87] Лысак М. Д. Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 106–111.
- [88] Лысак М.Д. Спектры скорости и показателя блуждания для линейных дифференциальных систем специального вида // Дифференц. уравнения. 2016. **52**. №4. С. 539–544.
- [89] Lysak M.D. Wandering Velocity and Wandering Exponent Spectra for Linear Differential Systems of a special Form // Differential Equations 2016. **52**. №4. С. 1–5.