

ФГБОУ ВО

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 515.162.8

Шастин Владимир Алексеевич

Геометрические свойства модулярных групп

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор И. А. Дынников

Москва — 2016

Оглавление

Введение	4
1. Актуальность темы	4
2. Цели работы	8
3. Научная новизна	8
4. Основные методы исследования	9
5. Теоретическая и практическая ценность работы	9
6. Апробация работы	10
7. Публикации	11
8. Структура и объем работы	11
9. Благодарности	14
Глава 1. Предварительные сведения	15
1.1. Поверхности и их пространства Тейхмюллера	15
1.2. Кривые на поверхностях	20
1.3. Группы классов отображений	23
1.4. Группы кос	26
1.5. Когомологии и ограниченные когомологии групп	31
1.6. Квазихарактеры и псевдохарактеры	34
Глава 2. Метрики на группах классов отображений	38
2.1. Функции сложности на группах	38
2.2. Функции сложности на группах классов отображений	44
2.3. Доказательство основных результатов	49
Глава 3. Псевдохарактеры групп кос	64
3.1. Пространства псевдохарактеров дискретных групп	64
3.2. Операторы на пространствах псевдохарактеров групп кос	69
3.3. Псевдохарактеры в задачах маломерной топологии	75

3.4. Ограниченный класс Эйлера и число переноса Пуанкаре	78
3.5. Закрученность	80
3.6. Сигнатуры, представления Бурау и коцикл Мейера	88
3.7. Вычисление сигнатур	93
3.8. Основные результаты	98
Заключение	105
Литература	107
Список литературы	107
Публикации автора по теме диссертации	110

Введение

1. Актуальность темы

Пусть S — поверхность конечного топологического типа. Рассмотрим группу $\text{Diff}^+(S)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S и ее нормальную подгруппу $\text{Diff}_0(S)$ диффеоморфизмов S изотопных тождественному диффеоморфизму. Фактор-группа $\text{MCG}(S) = \text{Diff}^+(S)/\text{Diff}_0(S)$, называемая *группой классов отображений* или *модулярной группой Тейхмюллера* поверхности S , является главным объектом исследования настоящей работы.

Изучение групп классов отображений было начато в 20-ых годах прошлого века Максом Дэном и Якобом Нильсенем. В их работах [33, 34], [84–87] были получены важные результаты как о глобальной структуре групп классов отображений: найдены конечные системы порождающих этих групп (см. [34]), установлена связь этих групп с группами внешних автоморфизмов фундаментальных групп поверхностей (см. [84]) —, так и о свойствах отдельных элементов в этих группах: доказано, что каждый элемент конечного порядка в группе классов отображений может быть реализован диффеоморфизмом конечного порядка [87]. Впоследствии методы Дэна и Нильсена получили развитие в работах других математиков. Так разработка идей Нильсена привела Вильяма Терстона к его знаменитой теореме о классификации гомеоморфизмов поверхности [97], а исследования Дэна действия групп классов отображений на множестве простых кривых на поверхности получили продолжение в работах Вильяма Харви [61, 62] о комплексе кривых — одном из основных геометрических объектов, используемых при исследовании этих групп. Были развиты и другие методы изучения этих групп, берущие начало из таких разделов математики как комплексный анализ, гиперболическая геометрия, теория слоений. Кроме уже упоминавшихся, свой вклад в изучение групп классов отображений внесли такие известные математики как: Липман Берс, Джоан Бирман, Алан Хэтчер, Стивен

Кергофф, Ховард Мазур.

Интерес к изучению групп классов отображений объясняется глубокими связями этих групп с различными разделами математики: маломерной топологией, геометрической теорией групп, алгебраической геометрией, комплексным анализом, гиперболической геометрией, топологической квантовой теорией поля и др. В настоящее время имеется несколько обзорных статей, посвященных разным аспектам теории групп классов отображений, среди которых стоит выделить обзор Николая Иванова [68]. Кроме того в 2006 году под редакцией Бенсона Фарба вышел сборник статей [46], посвященный открытым проблемам в теории групп классов отображений, а в 2012 был опубликован учебник [44], написанный Фарбом и Дэном Маргалитом, в котором изложены многие важные теоремы и методы из теории этих групп.

Первая часть этой работы посвящена изучению инвариантных метрик и соответствующих функций сложности на группах классов отображений, естественным образом возникающих из действия этих групп на пространствах Тейхмюллера соответствующих поверхностей.

Инвариантные метрики на группах естественным образом возникают в геометрической теории групп — разделе математики, в рамках которого изучаются действия групп на топологических и метрических пространствах и исследуются связи между геометрическими свойствами пространств и алгебраическими свойствами групп, действующих на них. Классическим примером такой метрики служит словарная метрика на группе, возникающая из действия группы на ее графе Келли. Исследование конечно-порожденной группы как метрического пространства со словарной метрикой оказывается наиболее плодотворным в случае, когда группа является гиперболической, т.е. словарная метрика оказывается гиперболической по Громову. Класс гиперболических групп довольно широк; в частности, он включает все группы, которые действуют вполне разрывно и кокомпактно на пространствах отрицательной кривизны.

Всякая гиперболическая группа является конечно-представленной и для

нее разрешимы проблемы равенства и проблемы сопряженности. Более того, как показали Эпштейн и Холт в работе [41], проблема равенства и проблема сопряженности в гиперболической группе могут быть решены за линейное время. Хотя группы классов отображений и не являются гиперболическими в этих группах, как показал Ли Мошер в работе [80], также существуют быстрые алгоритмы решения проблемы равенства. Тем не менее представление элементов $MCG(S)$ в виде произведения образующих, в некотором смысле, не является оптимальным. А именно элементы групп классов отображений можно кодировать таким образом, что слово, задающее n -ую степень скручивания Дэна, в этой кодировке будет состоять всего из $\log(n)$ символов. Такое представление для элементов группы $MCG(S)$ было предложено И.А. Дынниковым в работе [37]. С этим представлением естественным образом связана инвариантная метрика на группе классов отображений, которая называется сжатой словарной метрикой. В работе [37] Дынников показал, что для случая, когда поверхность S имеет хотя бы один прокол, проблема равенства слов в $MCG(S)$ по отношению к этой метрике решается за полиномиальное время.

Группа классов отображений $MCG(S)$ действует изометриями пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$ поверхности S , снабженного метрикой Тейхмюллера. В работе [48] было показано, что метрика $\rho_{\mathcal{T}}$ возникающая на $MCG(S)$ из этого действия, не квази-изометрична словарной метрике на $MCG(S)$.

В диссертации исследована связь метрики $\rho_{\mathcal{T}}$ с сжатой словарной метрикой $MCG(S)$. Доказано, что в случае, когда поверхность S является ориентируемой поверхностью без края и имеет хотя бы один прокол, сжатая словарная метрика квази-изометрична $\rho_{\mathcal{T}}$.

Вторая часть диссертации посвящена исследованию ограниченных когомологий групп кос.

Ограниченные когомологии дискретных групп были определены Ф. Траубером; М.Громов в работе [60] дал определение ограниченных когомологий для топологических пространств. В работе [27] Р.Брукс нашел связь между двумя

эти понятиями доказав, что ограниченные когомологии топологического пространства совпадают с ограниченными когомологиями его фундаментальной группы.

Первые приложения теории ограниченных когомологий к исследованию групп и многообразий появились раньше, чем возникло определение ограниченных когомологий: это неравенство Милнора-Вуда [78, 101] о препятствии к существованию плоской $SL(2, \mathbb{R})$ -связности на компактной двумерной поверхности и теорема Хирша-Терстона [65] о слоеных расслоениях с аменабельной группой голономии. К настоящему времени в рамках теории ограниченных когомологий получены важные результаты о структуре дискретных и локально-компактных групп(см. [79]).

Основным объектом изучения в случае дискретных групп G является пространство $H_b^2(G)$ — пространство вторых ограниченных когомологий группы G . При этом особый интерес представляет подпространство $H_{b,2}^2(G)$ — ядро канонического отображения из $H_b^2(G)$ в $H^2(G, \mathbb{R})$. Элементам из $H_{b,2}^2(G)$ отвечают функции на G , которые называются квазихарактерами. Квазихарактер, ограничение которого на произвольную циклическую подгруппу является гомоморфизмом, называется псевдохарактером. Псевдо- и квазихарактеры находят важное применение в маломерной топологии(см. [7, 26, 30, 54]), динамике(см. [16, 56, 67]), симплектической геометрии(см. [39, 91]).

Пространства псевдохарактеров групп классов отображений имеют бесконечную размерность. Однако к настоящему времени известно очень мало явных примеров псевдохарактеров на этих группах. Так на группах кос B_n описано только две серии псевдохарактеров — так называемые закрученности ω_n и сигнатуры $\overline{\text{sign}}_n$.

В работе [5] А.Малютин предложил строить новые псевдохарактеры на группах кос, используя операции удаления и добавления нитей, и описал соответствующие операторы R и I на пространствах псевдохарактеров групп кос. В этой работе был также поставлен вопрос о взаимосвязи псевдохарактеров,

полученных применением операторов Малютина к закрученностям, и псевдохарактеров, полученных таким же образом из сигнатур. В случае группы кос из 3 нитей из работ [54, 67] было известно, что сигнатура sign_3 выражается через ω_3 и $R\omega_2$.

В диссертации мы исследуем этот вопрос для групп кос B_n при $n \geq 4$ и доказываем, что сигнатуры линейно независимы от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов Малютина R и I . Кроме того, используя операцию уведения нитей косы на бесконечность, описанную в работе [19], мы определяем еще один оператор на пространствах псевдохарактеров групп кос, исследуем соотношения между этим оператором и операторами Малютина и доказываем, что при $n \geq 5$ сигнатуры линейно независимы от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов R , I и J .

2. Цели работы

Доказать, что проекция группы классов отображений поверхности с проколами на свою орбиту при стандартном действии на пространстве Тейхмюллера является квазиизометрией между группой классов отображений со сжатой словарной метрикой и толстой частью пространства Тейхмюллера с метрикой Тейхмюллера.

Доказать независимость псевдохарактеров сигнатур от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов Малютина.

3. Научная новизна

Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Доказано, что проекция группы классов отображений поверхности с про-

колами на свою орбиту при стандартном действии на пространстве Тейхмюллера является квазиизометрией между группой классов отображений со сжатой словарной метрикой и толстой частью пространства Тейхмюллера с метрикой Тейхмюллера.

- Доказано, что при $n \geq 4$ псевдохарактеры сигнатуры на группе кос B_n линейно независимы от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов Малютина R и I .
- Доказано, что при $n \geq 5$ псевдохарактеры сигнатуры на группе кос B_n линейно независимы от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов R , I и J .
- Доказано, что псевдохарактеры сигнатуры на группе кос B_n имеют нетривиальную ядерную составляющую при $n \geq 2$.

4. Основные методы исследования

Для доказательства основного результата о псевдохарактерах используется метод геометрического вычисления Антье Деорнуа, основанный на связи упорядочивания Деорнуа с топологией, замеченной впервые в работе [47], а также метод вычисления сигнатуры степени косы, изложенный для случая кос $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$ в работе [54].

Для доказательства основного результата о метриках на группе классов отображений используется стандартная техника работы с простыми кривыми на двумерных поверхностях, изложенная, например, в работе [25].

5. Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории узлов и для изучения алгорит-

мических проблем (проблема равенства, проблема сопряженности) в группах классов отображений двумерных поверхностей.

6. Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и общеуниверситетских, всероссийских и международных конференциях.

- Семинар «Алгебраическая топология и приложения» под руководством чл.-корр. В.М. Бухштабера, проф. А.В. Чернавского, проф. И.А. Дынникова, проф. Т.Е. Панова, доц. Л.А. Алании, механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова в 2012 году.
- Семинар «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством акад. С.П. Новикова, чл.-корр. В.М. Бухштабера в 2014 году
- Конференция «Ломоносов» (Москва, 11.04 – 15.04, 2011).
- Конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 14.11 – 23.11, 2011)
- Конференция «Зимние косы II» (Кан, 12.12 – 12.15, 2011)
- Конференция «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, 28.08 – 31.08, 2013).
- Конференция «Ломоносов» (Москва, 7.04 – 11.04, 2014).
- Конференция «Квантовая и классическая топология трёхмерных многообразий» (Магнитогорск, 4.07 – 17.07, 2014).
- Конференция «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, 24.09 – 27.09, 2014).
- Конференция «Вероятность, анализ и геометрия» (Москва, 30.09 – 4.10, 2014).

- Конференция «Геометрия, Топология и Интегрируемость» (Москва, 20.10 – 25.10, 2014).

7. Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце библиографии.

8. Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 106 наименований. Общий объем диссертации составляет 111 страниц.

Во введении формулируются основные задачи, исследуемые в работе, дается схема доказательств основных утверждений, вводятся используемые обозначения.

В первой главе приводятся необходимые определения и результаты из теории групп классов отображений, групп кос и ограниченных когомологий групп, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов работы.

В разделе 1.1 определяется класс поверхностей, которые мы будем рассматривать в этой работе; даются определения пространств Тейхмюллера и метрик Тейхмюллера, Терстона и Липшица на этих пространствах.

В разделе 1.2 описываются основные свойства простых кривых и дуг на поверхностях, приводится формулировка теоремы Терстона, которая описывает расстояние между гиперболическими структурами в метрике Терстона в терминах длин кривых.

В разделе 1.3 даются определения групп классов отображений, и приводятся необходимые сведения об этих группах. Описываются действие групп классов отображений на пространствах Тейхмюллера и возникающие из этого

действия метрики на группах.

В разделе 1.4 дается определение групп кос Артина и формулируются основные свойства этих групп.

В разделе 1.5 дается определение кохомологий и ограниченных кохомологий групп, описываются свойства маломерных кохомологий.

В разделе 1.6 даются определения квази- и псевдохарактеров, описываются их основные свойства, определяется операция трансфера псевдохарактеров.

Вторая глава посвящена описанию и доказательствам основных результатов об инвариантных метриках на группах классов отображений.

В разделе 2.1 основные результаты доказываются для группы классов отображений проколотого тора, изоморфной $SL(2, \mathbb{Z})$. А именно дается определение сжатой словарной сложности и для группы $SL(2, \mathbb{Z})$ объясняется эквивалентность функции сжатой словарной сложности и функции матричной сложности, возникающей из матричного представления группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Элементарными методами доказывается, что функция матричной сложности эквивалентна функции сложности, возникающей из действия $SL(2, \mathbb{Z})$ на плоскости Лобачевского.

В разделе 2.2 дается определение матричной сложности для группы классов отображений произвольной поверхности с проколами. Формулируется теорема Дынникова об эквивалентности матричной сложности и сжатой словарной сложности для этих групп. Формулируются основные результаты первой части диссертации:

- Теорема об эквивалентности матричной сложности и сложности возникающей из действия группы классов отображений на пространстве Тейхмюллера
- Теорема о квази-изометричности группы классов отображений, снабженной сжатой словарной метрикой и толстой части пространства Тейхмюллера, снабженной метрикой Липшица и Тейхмюллера.

В разделе 2.3 приводятся доказательства основных результатов первой части диссертации.

Третья глава посвящена описанию и доказательствам основных результатов об ограниченных когомологиях групп кос. Первые два раздела этой главы посвящены описанию глобальных свойств пространств псевдохарактеров.

В разделе 3.1 описываются свойства пространств псевдохарактеров различных дискретных групп. Приводится доказательство бесконечномерности пространств псевдохарактеров групп кос.

В разделе 3.2 описывается конструкция Малютина операторов на пространствах псевдохарактеров групп кос, отвечающих различным гомоморфизмам групп крашенных кос. Выписываются соотношения между этими операторами и доказываются теоремы о структуре пространства псевдохарактеров, возникающей из действия этих операторов.

В разделе 3.3 описываются приложения квази- и псевдохарактеров к задачам из теории групп и маломерной топологии и в этом контексте объясняется важность задачи поиска явных примеров псевдохарактеров.

В разделе 3.4 определяются ограниченный класс Эйлера на группе сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности и соответствующий псевдохарактер на универсальной накрывающей этой группы. Этот псевдохарактер используется в разделе 3.5 для построения псевдохарактеров закрученности на группах кос. В этом разделе описываются также основные свойства закрученности и приводятся алгоритмы вычисления этих псевдохарактеров.

В разделе 3.6 определяются псевдохарактеры, отвечающие сигнатурам зацеплений и описываются их основные свойства. В следующем разделе 3.7 описывается алгоритм вычисления этих псевдохарактеров.

В разделе 3.8 формулируются и доказываются основные результаты этой части диссертации, описывающие соотношения между закрученностями и сигнатурами.

В заключении формулируются возможные обобщения полученных в рабо-

те результатов и направления дальнейших исследований.

9. Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. А. Дынникову за постановку задач и неоценимую помощь в их выполнении. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за тёплую атмосферу. Автор выражает благодарность всем сотрудникам лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Поверхности и их пространства Тейхмюллера

Определение 1.1.1. Пусть S — связная ориентируемая поверхность. Будем говорить, что S является *поверхностью конечного топологического типа*, если S гомеоморфна компактной поверхности \bar{S} , которую мы будем называть *замыканием поверхности S* , без конечного набора точек $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, лежащих во внутренней части \bar{S} . Если поверхность \bar{S} имеет g ручек и k граничных компонент, то мы будем обозначать S как $S_{g,n}^k$. Точки $\{P_1, \dots, P_n\}$ мы будем называть *проколами* на поверхности S .

Очевидно, что *эйлерова характеристика* χ поверхности $S_{g,n}^k$ выражается следующей формулой:

$$\chi(S_{g,n}^k) = 2 - 2g - n - k. \quad (1.1)$$

В данной работе мы будем рассматривать только поверхности отрицательной эйлеровой характеристики.

Известно (см. [69]), что на каждой поверхности такого типа можно ввести гиперболическую структуру — полную риманову метрику постоянной отрицательной кривизны кривизны -1 и конечной площади, относительно которой край поверхности является геодезическим. Поверхность S с заданной гиперболической структурой σ мы будем обозначать (S, σ) .

Далее в этом разделе мы будем считать, если не оговорено противное, что край поверхности S пуст, то есть $S = S_{g,n}^0$ для некоторых g, n .

Определение 1.1.2. Будем говорить, что гиперболические структуры σ_1 и σ_2 на поверхности S *эквивалентны*, если существует изометрия $\varphi: (S, \sigma_1) \rightarrow (S, \sigma_2)$ изотопная тождественному отображению поверхности S .

Пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$ поверхности S — это множество классов эквивалентности гиперболических структур на S .

Замечание 1.1.3. Пространство Тейхмюллера поверхности S можно также определить как множество классов изотопии комплексных структур на S . В силу теоремы униформизации (см. [10]) эти определения совпадают.

Определение 1.1.4. Пусть ϵ — произвольное положительное число. Тогда ϵ -толстой частью $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ пространства Тейхмюллера поверхности S мы будем называть подмножество пространства $\mathcal{T}(S)$, состоящее из таких классов гиперболических структур σ , что длина каждой σ -геодезической больше ϵ . В дальнейшем мы не будем уточнять значение константы в определении ϵ и просто называть это подмножество «толстой частью» пространства Тейхмюллера.

На пространстве $\mathcal{T}(S)$ можно ввести несколько естественных метрических структур: метрику Тейхмюллера, метрику Вейля-Петерсона, асимметричную метрику Терстона, и т.д. (в работе [88] приведен развернутый список естественных метрик на пространстве Тейхмюллера). Все эти метрики задают одну и ту же топологию на пространстве $\mathcal{T}(S)$. В этой топологии пространство Тейхмюллера поверхности $S = S_{g,n}^0$ гомеоморфно открытому шару размерности $6g - 6 + 2n$.

В этой работе нам понадобятся две из перечисленных выше метрик: метрика Тейхмюллера и асимметричная метрика Терстона. Первая из них определяется в терминах комплексных структур на поверхности:

Определение 1.1.5. Пусть J, J' пара комплексных структур на поверхности S , $\phi: S \rightarrow S$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, x — произвольная точка на S . Пусть кроме того z — это комплексная координата структуры J в окрестности точки x , $z' = \phi(z)$ — комплексная координата структуры J' в окрестности $\phi(x)$. Тогда *коэффициент дилатации* $K_\phi(x)$ отображения ϕ в

точке x задается следующей формулой:

$$K_\phi(x) = \frac{|\partial_z \phi| + |\partial_{\bar{z}} \phi|}{|\partial_z \phi| - |\partial_{\bar{z}} \phi|}. \quad (1.2)$$

Отметим, что $K_\phi(x)$ не зависит от выбора локальных координат в окрестности точек x и $\phi(x)$.

Если величина $K[\phi] = \sup_{x \in S} K_\phi(x) < \infty$, то диффеоморфизм f называется *допустимым* относительно пары J, J' .

Расстоянием Тейхмюллера $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ между комплексными структурами J, J' называется следующая величина:

$$d_{\mathcal{T}}(J, J') = \inf_{\phi \sim \text{id}} \log K[\phi], \quad (1.3)$$

где инфимум берется по всем допустимым диффеоморфизмам ϕ поверхности S изотопным тождественному.

Очевидно, что функция $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ зависит только от классов эквивалентности комплексных структур J, J' на S , и тем самым определяет функцию на декартовом квадрате пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$. Тейхмюллер доказал(см. [93]), что величина $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ конечна для любых комплексных структур J, J' на S и определяет метрику на пространстве $\mathcal{T}(S)$.

Асимметричная метрика Терстона и ее симметризация — метрика Липшица — определяются в терминах гиперболических структур на поверхности:

Определение 1.1.6. Пусть σ, τ — гиперболические структуры на S и $\phi: S \rightarrow S$ — диффеоморфизм S . Тогда *константа Липшица* $L(\phi; \sigma, \tau)$ диффеоморфизма ϕ , рассматриваемого как отображение метрических пространств (S, σ) и (S, τ) определяется следующим образом:

$$L(\phi; \sigma, \tau) = \sup_{x \neq y} \left(\frac{d_\tau(\phi(x), \phi(y))}{d_\sigma(x, y)} \right),$$

где $x, y \in S$.

В терминах константы Липшица Терстон в работе [95] определил следующую функцию $L(\sigma, \tau)$ от упорядоченной пары гиперболических структур на S :

$$L(\sigma, \tau) = \inf_{\phi \sim \text{id}} \log(L(\phi; \sigma, \tau)),$$

где инфимум берется по всем допустимым диффеоморфизмам ϕ поверхности S изотопным тождественному.

Очевидно, что функция $d_{\mathcal{T}}(J, J')$ зависит только от классов эквивалентности гиперболических структур σ, τ на S и тем самым определяет функцию на декартовом квадрате пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$. В работе [95] Терстон показал, что функция $L(\sigma, \tau)$ обладает следующими свойствами:

- Функция $L(\sigma, \tau)$ неотрицательна.
- $L(\sigma, \tau) = 0$ в том и только в том случае, если гиперболические метрики σ и τ являются эквивалентными
- Функция $L(\sigma, \tau)$ удовлетворяет неравенству треугольника:

$$L(\sigma_1, \sigma_3) \leq L(\sigma_1, \sigma_2) + L(\sigma_2, \sigma_3),$$

для любых гиперболических структур $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на S .

Отметим, что вообще говоря $L(\sigma, \tau) \neq L(\tau, \sigma)$. Тем самым эта функция задает асимметричную метрику на пространстве Тейхмюллера, которая называется *асимметричной метрикой Терстона*.

Определение 1.1.7. *Метрикой Липшица d_L на пространстве Тейхмюллера поверхности S называется следующая симметризация асимметричной метрики Терстона:*

$$d_L(\sigma, \tau) = \max\{L(\sigma, \tau), L(\tau, \sigma)\},$$

где $\sigma, \tau \in \mathcal{T}(S)$.

Определение метрики Липшица было дано в [32].

Мы также напомним определения псевдометрического пространства и квазиизометрии между псевдометрическими пространствами:

Определение 1.1.8. Псевдометрическое пространство (X, d) — это пара (X, d) , где X — множество, а $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — неотрицательно определенная функция (называемая псевдометрикой), обладающая следующими свойствами:

1. $d(x, x) = 0$ выполнено для всех $x \in X$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ выполнено для всех $x, y \in X$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ выполнено для всех $x, y, z \in X$.

В отличие от метрических пространств расстояние между двумя различными точками псевдометрического пространства может быть равно 0.

Определение 1.1.9. Пусть (X, d_X) , (Y, d_Y) — псевдометрические пространства, а $K \geq 1$, $C \geq 0$ — вещественные числа. Тогда отображение $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ называется (K, C) -квазиизометрией, если f обладает следующими свойствами:

1. Для всех $x_1, x_2 \in X$:

$$\frac{1}{K}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd_X(x_1, x_2) + C.$$

2. Для любой точки $y \in Y$ найдется такая точка $x \in X$, что $d_Y(f(x), y) \leq C$.

Псевдометрики d_1 и d_2 , заданные на одном множестве X , называются (K, C) -квазиизометричными, если тождественное отображение X является (K, C) -квазиизометрией между (X, d_1) и (X, d_2) .

В работе [32] авторы показали, что метрики Тейхмюллера и Липшица квази-изометричны на толстой части пространства Тейхмюллера. Однако на всем пространстве Тейхмюллера эти метрики существенно различаются (см. [32]).

1.2. Кривые на поверхностях

Определение 1.2.1. *Замкнутой кривой* на поверхности S мы будем называть гладкое отображение окружности $\alpha: S^1 \rightarrow S$. Обычно мы не будем проводить различия между кривой и ее образом.

Замкнутая кривая называется *простой*, если соответствующее отображение $\alpha: S^1 \rightarrow S$ является вложением. Замкнутая кривая называется *существенной*, если она не стягивается в точку или прокол.

Мультикривая \mathcal{A} на поверхности S — это непустое множество простых замкнутых попарно непересекающихся кривых на S . Мультикривая называется *существенной*, если все ее связные компоненты являются существенными кривыми.

Определение 1.2.2. *Идеальной дугой* β на поверхности S мы будем называть гладкое отображение $\beta: [0, 1] \rightarrow \bar{S}$ такое, что $\beta^{-1}(\mathcal{P}) = \{0, 1\}$, где \mathcal{P} — множество проколов на S . Соответствующее дуге β отображение интервала $(0, 1)$ в S мы также будем называть идеальной дугой и обозначать β . Как и в случае кривых, мы не будем проводить различия между дугой и ее образом на \bar{S} и S .

Под гомотопией идеальной дуги β мы понимаем гомотопию $\beta: [0, 1] \rightarrow \bar{S}$ в классе идеальных дуг. В частности такая гомотопия должна быть неподвижна на концах дуги. Идеальная дуга β называется *существенной*, если она не стягивается на прокол. Идеальная дуга β называется *простой*, если соответствующее отображение из $(0, 1)$ в S является вложением.

Идеальная мультидуга β на поверхности S — это непустое множество простых попарно непересекающихся идеальных дуг на S . Идеальная мультидуга называется *существенной*, если все ее компоненты являются существенными.

Идеальная триангуляция T на поверхности S без края — это максимальная по включению идеальная мультидуга. Легко видеть, что идеальная триангуляция T задает клеточное разбиение \bar{S} , двумерные клетки которого соответствуют связным компонентам $\bar{S} \setminus T$. Каждая такая компонента является обра-

зом внутренности замкнутого треугольника Δ при гладком отображении φ_Δ , которое взаимно-однозначно на Δ без вершин, и которое отправляет каждую сторону треугольника Δ в некоторую дугу триангуляции T . Нетрудно показать, что все идеальные триангуляции на S имеют одно и то же количество сторон N и треугольников M :

$$N = 6g - 6 + 3n, \quad M = 4g - 4 + 2n. \quad (1.4)$$

Утверждение 1.2.3. Пусть σ — гиперболическая структура на S , α — существенная замкнутая кривая или существенная идеальная дуга на S . Тогда среди замкнутых кривых (соответственно идеальных дуг) гомотопных α найдется единственная σ -геодезическая γ_α . Более того

1. Если α является простой, то γ_α также простая.
2. Если β — другая существенная замкнутая кривая или идеальная дуга, такая что α и β не гомотопны и не пересекаются, тогда соответствующие σ -геодезические γ_α and γ_β также не пересекаются.
3. Если α — замкнутая кривая, то γ_α является кратчайшей среди всех кривых гомотопных α .

Доказательство. Доказательство для случая замкнутых кривых можно найти в книгах [49], [44].

Доказательство для случая идеальных дуг нетрудно получить, используя соображения из леммы 3.2. из [49] и формулу для гиперболической метрики в окрестности прокола (см. [18, утверждение D.3.12.]). \square

Если α — замкнутая кривая на S , и на поверхности задана гиперболическая структура σ , то через $l_\sigma(\alpha)$ мы будем обозначать длину σ -геодезической гомотопной α .

В терминах длин простых кривых можно дать другое определение асимметричной метрики Терстона:

Теорема 1.2.4 (Терстон, [95]). Для любой поверхности S и гиперболических метрик σ, τ на S расстояние $L(\sigma, \tau)$ определяется следующей формулой:

$$L(\sigma, \tau) = \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{l_{\tau}(\alpha)}{l_{\sigma}(\alpha)} \right) \right),$$

где супремум ищется среди всех простых существенных замкнутых кривых α на S .

Именно этой формулой для асимметричной метрики Терстона мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 1.2.5. Пусть α, β — простые кривые на S . Будем говорить, что α и β *трансверсальны*, если они совпадают, не пересекаются или трансверсально пересекаются. Если α и β трансверсальны и ни одна из связных компонент $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ не гомеоморфна диску, то будем говорить, что α и β *существенно пересекаются*.

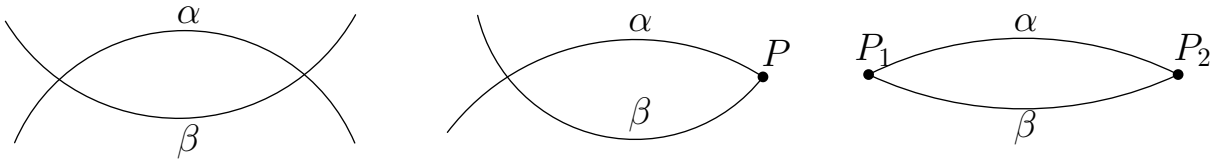


Рис. 1.1. Три типа дисков в $S \setminus (\alpha \cup \beta)$.

Определение 1.2.6. Пусть α, β — простые кривые на S . Тогда *геометрическим числом пересечений* $i(\alpha, \beta)$ кривых α и β мы будем называть следующую величину:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \min_{\alpha', \beta'} \#\{x \mid x \in \alpha' \cap \beta'\},$$

где минимум ищется среди всех простых трансверсальных кривых α', β' isotopных соответственно α, β . Если \mathcal{A}, \mathcal{B} — мультикривые или мультидуги, то их индексом пересечения $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ мы будем называть сумму геометрических чисел пересечений их компонент:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Индекс пересечения $\{\alpha, \beta\}$ кривых α и β — это величина, которая равна -1 , если α и β — изотопные идеальные дуги и равна $\langle \alpha, \beta \rangle$ в противном случае.

Утверждение 1.2.7. Пусть α и β — простые существенные кривые на поверхности S . Тогда для любой гиперболической структуры σ на S σ -геодезические γ_α и γ_β существенно пересекаются. Более того, если α и β существенно пересекаются, то существует изотопия поверхности S , переводящая α и β в γ_α и γ_β соответственно.

Доказательство. Доказательство для случая замкнутой S приведено в работе [25]. Общий случай доказывается аналогично. \square

Следствие 1.2.8. Пусть α и β — простые существенные кривые на S . Тогда верно следующее:

1. Существует изотопная α простая кривая α' , такая что кривые α' и β существенно пересекаются.
2. Пусть α и β трансверсальны. Тогда они пересекаются существенно в том и только том случае, если число пересечений этих кривых совпадает с их геометрическим числом пересечения:

$$\#\{x \mid x \in \alpha \cap \beta\} = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

1.3. Группы классов отображений

Определение 1.3.1. Группа классов отображений $\text{MCG}(S)$ поверхности S — это группа классов изотопии сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S неподвижных на крае:

$$\text{MCG}(S) = \text{Diff}^+(S, \partial S) / \text{Diff}_0(S, \partial S).$$

Здесь $\text{Diff}^+(S, \partial S)$ обозначает группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S неподвижных на крае, а $\text{Diff}_0(S, \partial S)$ — ее нормальную подгруппу,

состоящую из диффеоморфизмов изотопных тождественному, где изотопия рассматривается в классе диффеоморфизмов неподвижных на крае.

Группы классов отображений поверхностей неотрицательной эйлеровой характеристики описываются явно:

Пример 1.3.2. Группы $MCG(S_{0,0}^0)$, $MCG(S_{0,1}^0)$, $MCG(S_{0,0}^1)$, $MCG(S_{0,1}^1)$ тривиальны.

Группа $MCG(S_{0,2}^0)$ изоморфна \mathbb{Z}_2 и порождается классом любого сохраняющего ориентацию отображения, переставляющего проколы.

Группа $MCG(S_{0,2}^0)$ изоморфна \mathbb{Z} и порождена так называемым скручиванием Дэна. А именно, если рассматривать поверхность $S_{0,2}^0$ как кольцо $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ то отображение t_R , задающее твист Дэна, в полярных координатах может быть описано следующей формулой:

$$t_R(re^{i\varphi}) = re^{i(\varphi+f(r))}, \quad (1.5)$$

где $f(r)$ — гладкая монотонная функция на отрезке $[1, 2]$, равная нулю при $r \leq \frac{4}{3}$ и 2π при $r \geq \frac{5}{3}$ (см. рисунок 1.2).

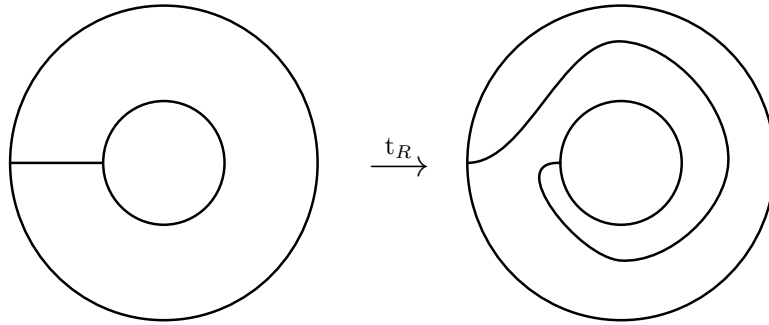


Рис. 1.2. Скручивание Дэна

Кроме того, группа $MCG(S_{3,0}^0)$ изоморфна группе перестановок из трех элементов S_3 , а группа $MCG(S_{1,0}^0)$ изоморфна модулярной группе $SL(2, \mathbb{Z})$. Изоморфизм между последними группами задается отображением, сопоставляющим

классу диффеоморфизма f индуцированное отображение в первых гомологиях поверхности f_* . Доказательства этих фактов можно найти в обзоре Иванова [68].

Любая простая существенная замкнутая кривая α на поверхности S определяет элемент t_α в группе $\text{MCG}(S)$, который называется *скручиванием Дэна* вокруг кривой α и определяется следующим образом. Рассмотрим замкнутую трубчатую окрестность R_α вокруг кривой α и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм ϕ_α отображающий R_α на кольцо $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ и переводящий α в кривую $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,5\}$. Тогда t_α — это класс диффеоморфизма, который неподвижен на $S \setminus R_\alpha$, а на R_α совпадает с $\phi_\alpha^{-1}t\phi_\alpha$, где t — отображение заданное формулой (1.5). Несложно показать, что элемент t_α не зависит от произвола в выборе R_α и ϕ_α .

Из некоторых скручиваний Дэна можно извлекать корни. А именно для любой простой существенной замкнутой кривой α на поверхности S *дробной степенью* скручивания Дэна t_α будем называть любой элемент $h \in \text{MCG}(S)$ такой, что существуют $a, b \in \mathbb{Z}$, для которых $h^a = t_\alpha^b$. Оказывается каждый элемент группы классов отображений может быть представлен в виде композиции конечного числа дробных степеней скручиваний Дэна. Точнее имеет место следующий результат:

Теорема 1.3.3. *Для любых g, n, k у группы $\text{MCG}(S_{g,n}^k)$ имеется конечная система порождающих $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$, такая что каждый g_i является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.*

Доказательство. В случае замкнутых поверхностей этот результат был получен Ликоришем в работе [74]. А именно Ликориш доказал, что в качестве системы порождающих группы $\text{MCG}(S_{g,0}^0)$ при $g > 2$ можно использовать $3g - 1$ скручивание Дэна. В общем случае этот результат нетрудно получить, используя теорему Ликориша и точную последовательность Бирман(см. [44, теорема 4.6]). □

Отметим также, что для любой поверхности S группа классов отображений $\text{MCG}(S)$ является конечно-представленной. Впервые этот результат доказал Маккул в работе [77]. Явное представление для группы классов отображений в терминах образующих и соотношений можно найти в работах [55, 100].

Группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $\text{Diff}^+(S)$ естественным образом действует на множестве всех гиперболических структур на поверхности S . Это (правое) действие определяет действие группы $\text{MCG}(S)$ на $\mathcal{T}(S)$. Из определений метрик Тейхмюллера, Терстона и Липшица следует, что $\text{MCG}(S)$ действует изометриями этих метрик. Если мы зафиксируем теперь точку $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ и рассмотрим орбиту этой точки относительно действия $\text{MCG}(S)$, то ограничение метрик Тейхмюллера и Липшица на эту орбиту задают правоинвариантные псевдометрики $\rho_{\mathcal{T},\sigma}$, $\rho_{L,\sigma}$ на группе $\text{MCG}(S)$:

$$\rho_{\mathcal{T},\sigma}(\varphi, \psi) = d_{\mathcal{T}}(\varphi^*(\sigma), \psi^*(\sigma)), \quad \rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) = d_L(\varphi^*(\sigma), \psi^*(\sigma)) \quad (1.6)$$

для любых $\varphi, \psi \in \text{MCG}(S)$, где $\varphi^*(\sigma)$ обозначает обратный образ гиперболической структуры σ при отображении φ .

Замечание 1.3.4. Функции $\rho_{\mathcal{T},\sigma}$, $\rho_{L,\sigma}$, вообще говоря, не являются метриками, поскольку стабилизаторы некоторых точек $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ в группе $\text{MCG}(S)$ нетривиальны.

Поскольку для любой $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ существует $\epsilon > 0$, такое что $\text{MCG}(S)$ -орбита этой точки содержится в $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ псевдометрики $\rho_{\mathcal{T},\sigma}$, $\rho_{L,\sigma}$ в силу указанного выше результата Чой и Рафи [32] квази-изометричны.

1.4. Группы кос

Дадим определение групп кос, следуя работе [3].

Определение 1.4.1. *Косой* из n нитей называется одномерное подмногообразие $\beta \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1\}$, имеющее n компонент связности (нитей), и обладающее следующими свойствами:

1. Пересечение β с плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ состоит из точек $(k, 0, 0)$ и $(k, 0, 1)$, где $k \in \{1, \dots, n\}$.
2. Ограничение координаты z на каждую нить является строго монотонной функцией.

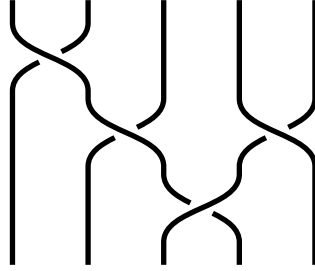


Рис. 1.3. Коса из 5 нитей

Косы β_1, β_2 называются *эквивалентными*, если существует изотопия $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1\}$, неподвижная на плоскостях $z = 0$ и $z = 1$, которая переводит β_1 в β_2 .

Множество классов эквивалентности кос из n нитей обозначается B_n . Для любых кос β_1, β_2 композиция $\beta_1 \circ \beta_2$ определяется следующим образом:

$$\beta_1 \circ \beta_2 = f_1(\beta_1) \cup f_2(\beta_2),$$

где $f_1(x, y, z) = (x, y, z/2)$, $f_2(x, y, z) = (x, y, (z + 1)/2)$. Эта операция задает умножение на B_n , относительно которого это множество является группой.

Группы кос B_n были определены Эмилем Артином в работе [13]. В работе [14] он описал задание этой группы в терминах образующих и соотношений:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle, \quad (1.7)$$

где $1 \leq i, j \leq n - 1$ и $|i - j| > 1$. Элементы σ_i называются *артиновскими образующими*.

Как известно, группа кос B_n изоморфна группе классов отображений диск с n проколами (см. [22]). Изоморфизм между этими группами строится следующим образом. Рассмотрим диск D_n^2 в \mathbb{R}^2 с центром в точке $((n + 1)/2, 0)$ и

радиусом $(n + 1)/2$, из которого удалены точки $P_i = (i, 0)$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. Артиновской образующей σ_i поставим в соответствие гомеоморфизм ht_i диска D_n^2 , который называется *полускручиванием Дэна* и определяется следующей формулой:

$$\text{ht}_i(re^{i\varphi}) = re^{i(\varphi + f(r)\pi)},$$

где (r, φ) — полярные координаты на \mathbb{R}^2 относительно точки $(i + 1/2, 0)$, $f(r)$ — монотонно убывающая гладкая функция равная 1 при $r \leq 1/2$ и равная 0 при $r \geq 1$. Это сопоставление продолжается до гомоморфизма групп B_n в $\text{MCG}(D_n^2)$, который является изоморфизмом. Отметим, что полускручивание Дэна ht_i является квадратным корнем из скручивания Дэна вокруг границы единичного диска с центром в точке $(i + 1/2, 0)$.

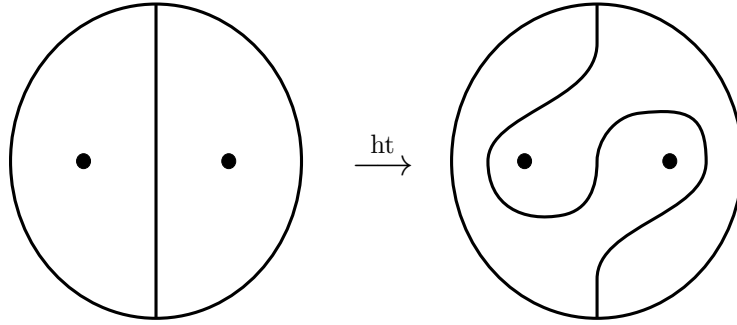


Рис. 1.4. Полускручивание Дэна

На группе кос B_n существуют левоинвариантные упорядочения, первое из которых было открыто П.Деорнуа(см. работу [35]). Оно определяется следующим образом. Коса $\beta \in B_n$ положительна в порядке Деорнуа, если для некоторого $i = 1, \dots, n - 1$ ее можно представить словом в артиновских образующих, в которое хотя бы один раз входит σ_i , но не входят σ_i^{-1} и образующие σ_j с $j < i$. Мы пишем $\beta_1 < \beta_2$, если коса $\beta_1^{-1}\beta_2$ положительна в порядке Деорнуа.

Группа кос из n нитей имеет естественное представление $\pi: B_n \rightarrow S_n$ в группу перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. А именно образующая σ_i при этом отображении переходит в транспозицию $s_i = (i, i + 1)$. Ядро этого отображения называется *группой крашенных кос из n нитей* и обозначается P_n .

Центр группы B_n совпадает с центром группы P_n и является бесконечной циклической группой, порожденной элементом Δ_n^2 , где Δ_n — элемент Гарсайда, заданный следующим словом в артиновских образующих:

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1).$$

У группы кос B_n имеется естественный гомоморфизм в группу \mathbb{R} . Этот гомоморфизм называется *экспоненциальной суммой* exp_n и задается тем, что переводит каждую артиновскую образующую в 1. Нетрудно показать, используя задание (1.7), что всякий гомоморфизм из B_n в \mathbb{R} пропорционален экспоненциальной сумме.

Между группами кос на различном числе нитей имеются естественные отображения, происходящие из геометрических операций добавления и удаления нитей из косы.

Операции добавления нити к косе отвечает вложение $\iota_{n-1} B_{n-1} \rightarrow B_n$, которое переводит артиновские образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ группы B_{n-1} в аналогичные образующие группы B_n .

Пусть $1 \leq i \leq n$. Удалению i -ой нити из косы отвечает отображение $\text{del}_i: B_n \rightarrow B_{n-1}$, которое действует на артиновских образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ по следующей формуле:

$$\text{del}_i(\sigma_j) = \begin{cases} \sigma_{j-1}, & \text{при } i < j; \\ 1, & \text{при } i = j; \\ \sigma_j, & \text{при } i > j + 1, \end{cases}$$

и для произведения кос $\alpha, \beta \in B_n$ определяется следующим образом

$$\text{del}_i(\alpha\beta) = \text{del}_i(\alpha) \text{del}_{\pi\alpha(i)}(\beta), \quad (1.8)$$

где $\pi\alpha(i)$ образ i под действием перестановки, соответствующей косе α .

Рассмотрим теперь группу крашенных кос P_n . Очевидно, что ограничение вложения $i_{n-1}: B_{n-1} \rightarrow B_n$ на подгруппу крашенных кос переводит P_{n-1} в P_n .

Кроме того из формулы (1.8) следует, что ограничение отображения del_i на P_n является гомоморфизмом из P_n в P_{n-1} для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Пересечение ядер гомоморфизмов del_i по всем $i \in \{1, \dots, n-1\}$ обозначается Brunn_n и называется группой *брунновыx кос* из n -нитей.

Каждой косе β сопоставляется ориентированное зацепление $\widehat{\beta}$, которое называется *замыканием косы* β и получается в результате соединения верхних концов нитей β с нижними, как показано на рисунке 1.5.

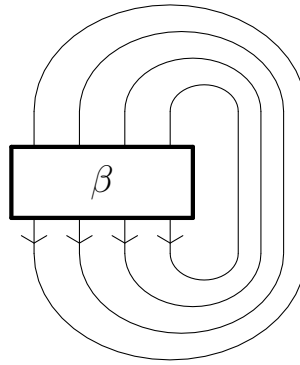


Рис. 1.5. Замыкание косы β

Как доказал Александер в работе [12] любое ориентированное зацепление может быть получено как замыкание некоторой косы β . В работе [75] А.А.Марков(младший) сформулировал следующий критерий изотопности зацеплений, представленных в виде замыкания кос:

Теорема 1.4.2 (Марков). *Замыкания кос β_1 и β_2 представляют изотопные зацепления тогда и только тогда, когда β_2 можно получить из β_1 конечной последовательностью следующих операций над косами:*

1. *Сопряжение: $\beta \rightarrow \gamma^{-1}\beta\gamma$, где $\beta, \gamma \in B_n$.*
2. *Стабилизация: $\beta \rightarrow i_n(\beta)\sigma_n^{\pm 1}$, где $\beta \in B_n$.*
3. *Дестабилизация: операция обратная к стабилизации.*

Подробное доказательство теоремы Маркова можно найти в монографии [22].

Некоторые важные свойства зацеплений можно сформулировать в терминах допустимости специальных преобразований кос. К числу таких свойств относится простота зацепления. Следующее определение взято из работы [7].

Определение 1.4.3. Зацепление $L \subset S^3$ называется *тривиальным*, если найдется сфера S^2 в S^3 такая, что $L \subset S^2$. Зацепление $L \subset S^3$ называется *расщепимым*, если найдется сфера S^2 в $S^3 \setminus L$, не ограничивающая шар в $S^3 \setminus L$. Зацепление $L \subset S^3$ называется *составным*, если найдется сфера S^2 в S^3 , которая пересекается с зацеплением L в двух точках, разбивая его на две части, ни одна из которых не является незаузленной дугой.

Зацепление называют *простым*, если оно не является ни составным, ни расщепимым, ни тривиальным.

В работе [8] Малютин и Нецветаев, используя результаты Бирман и Менаско [23, 24], доказали следующий критерий простоты зацепления:

Теорема 1.4.4 (Малютин, Нецветаев). *Пусть $n > 2$, β — коса из n нитей и зацепление $L = \widehat{\beta}$ не является простым. Тогда существуют косы $\alpha \in B_n$, $\gamma_1, \gamma_2 \in B_{n-1}$ такие, что*

$$\beta = \alpha^{-1} \gamma_1 \sigma_{n-1} \gamma_2 \sigma_{n-1}^{-1} \alpha.$$

1.5. Когомологии и ограниченные когомологии групп

В данном разделе мы определим когомологии и ограниченные когомологии групп и опишем некоторые их свойства. Изложение в основном следует работе [59].

Пусть G — произвольная группа, V — произвольный тривиальный G -модуль.

Определение 1.5.1. Когомологи $H^*(G, V)$ группы G с коэффициентами в V определяются как когомологии коцепного комплекса $C^*(G, V)$:

$$\dots \xleftarrow{\delta^{(n)}} C^n(G, V) \xleftarrow{\delta^{(n-1)}} C^{n-1}(G, V) \xleftarrow{\delta^{(n-2)}} \dots \xleftarrow{\delta^{(2)}} C^2(G, V) \xleftarrow{\delta^{(1)}} C^1(G, V) \xleftarrow{\delta^{(0)}} C^0(G, V) \xleftarrow{\delta^{(-1)}} 0,$$

где векторные пространства $C^n(G, V)$, $n \geq 0$ состоят из функций:

$$c: \underbrace{G \times \dots \times G}_n \rightarrow V,$$

а дифференциалы $\delta^{(n)}: C^n(G, V) \rightarrow C^{n+1}(G, V)$ при $n \leq 0$ — нулевые, а при $n > 0$ определяются следующим образом:

$$\delta^{(n)}c(g_1, \dots, g_{n+1}) = c(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i c(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(g_1, \dots, g_n).$$

Замечание 1.5.2. В данной работе мы в основном будем рассматривать когомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} и \mathbb{R} .

Определение 1.5.3. Вещественные ограниченные когомологи $H_b^*(G, \mathbb{R})$ группы G определяются как когомологии коцепного комплекса $C_b^*(G, \mathbb{R})$:

$$\dots \xleftarrow{\delta_b^{(n)}} C_b^n(G, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta_b^{(n-1)}} C_b^{n-1}(G, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta_b^{(n-2)}} \dots \xleftarrow{\delta_b^{(2)}} C_b^2(G, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta_b^{(1)}} C_b^1(G, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta_b^{(0)}} C_b^0(G, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta_b^{(-1)}} 0,$$

где векторные пространства $C_b^n(G, \mathbb{R})$, $n \geq 0$ состоят из ограниченных функций:

$$c: \underbrace{G \times \dots \times G}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

а дифференциалы $\delta_b^{(n)}: C_b^n(G, \mathbb{R}) \rightarrow C_b^{n+1}(G, \mathbb{R})$ определяются так же как и в случае обыкновенных когомологий.

Очевидно, что $C_b^*(G, \mathbb{R})$ является подкомплексом комплекса $C^*(G, \mathbb{R})$. Тем самым определено отображение в когомологиях:

$$i_b: H_b^*(G, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(G, \mathbb{R}).$$

Образ и ядро отображения i_b обозначаются $H_{b,1}^*(G, \mathbb{R})$ и $H_{b,2}^*(G, \mathbb{R})$ и называются *ограниченной* и *сингулярной* частями кохомологий группы G соответственно.

Любой гомоморфизм групп $f: G \rightarrow H$ индуцирует отображения

$$f^*: H^*(H, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(G, \mathbb{R}),$$

$$f_b^*: H_b^*(H, \mathbb{R}) \rightarrow H_b^*(G, \mathbb{R}).$$

В данной работе нас будут интересовать только маломерные (размерностей 1 и 2) кохомологии и ограниченные кохомологии групп. Перечислим их основные свойства:

Утверждение 1.5.4. Пусть V — тривиальный G -модуль. Тогда $H^1(G, V) = \text{Hom}(G, V)$, где $\text{Hom}(G, V)$ — пространство гомоморфизмов из G в абелеву группу V .

Утверждение 1.5.5. Элементы $H^2(G, \mathbb{R})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изоморфизма центральных V -расширений группы G . А именно 2-мерному коциклу $c: G \times G \rightarrow V$ соответствует центральное V -расширение:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{G}_c \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

где элементы группы \tilde{G}_c это пары (g, v) , $g \in G$, $v \in V$, а умножение \cdot_c в группе определяется следующим образом:

$$(g_1, v_1) \cdot_c (g_2, v_2) = (g_1 g_2, v_1 + v_2 + c(g_1, g_2))$$

для любых $(g_1, v_1), (g_2, v_2) \in \tilde{G}_c$.

Доказательство. Доказательство приведено в работе [56, стр. 364-365]. □

Утверждение 1.5.6. $H_b^1(G, \mathbb{R}) = 0$ для любой группы G .

1.6. Квазихарактеры и псевдохарактеры

Сингулярная часть вторых ограниченных когомологий группы G может быть описана в терминах специальных функций на G , называемых квазихарактерами.

Определение 1.6.1. Функция $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ называется *квазихарактером* на группе G , если величина

$$D_\varphi = \sup_{g,h \in G} |\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h)|,$$

называемая *дефектом* данного квазихарактера, конечна.

Замечание 1.6.2. Наряду с термином квазихарактер в литературе используются термины квазиморфизм и квазигомоморфизм.

Квазихарактеры на группе G образуют векторное пространство, которое мы будем обозначать $Q(G)$. Очевидно, что пространство $B(G, \mathbb{R})$ ограниченных функций на G и пространство $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ являются подпространствами $Q(G)$.

Утверждение 1.6.3. $H_{b,2}^2(G, \mathbb{R})$ изоморфно пространству $Q(G)/(B(G, \mathbb{R}) \oplus \text{Hom}(G, \mathbb{R}))$.

Определение 1.6.4. Квазихарактер φ называется *псевдохарактером* (или *однородным квазихарактером*), если

$$\varphi(g^k) = k\varphi(g)$$

для любых $g \in G$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пространство псевдохарактеров на группе G будем обозначать $P(G)$.

Утверждение 1.6.5. Любой квазихарактер φ на произвольной группе единственным образом представляется в виде суммы псевдохарактера и функции,

ограниченной по абсолютной величине его дефектом D_φ . Соответствующий φ псевдохарактер $\bar{\varphi}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{\varphi}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(g^n)}{n}$$

для любого $g \in G$.

Доказательство. Доказательство приведено в книге [30, лемма 2.21]. \square

Следствие 1.6.6. $H_{b,2}^2(G, \mathbb{R})$ изоморфно пространству $P(G)/\text{Hom}(G, \mathbb{R})$.

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства псевдохарактеров.

Утверждение 1.6.7. Пусть G — группа, φ — псевдохарактер на G . Тогда

1. $\varphi(g) = \varphi(hgh^{-1})$ для любых $g, h \in G$.
2. Ограничение φ на любую абелеву подгруппу группы G является гомоморфизмом.
3. Для дефекта φ имеет место следующее равенство:

$$D_\varphi = \sup_{a,b \in G} |\varphi([a, b])|,$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ — коммутатор элементов a и b .

Доказательство. Для доказательства первого свойства заметим, что для любых $g, h \in G$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} |\varphi(hgh^{-1}) - \varphi(g)| &= \frac{1}{n} |\varphi(hg^n h^{-1}) - \varphi(g^n)| \leq \frac{1}{n} |\varphi(hg^n h^{-1}) - \varphi(hg^n) - \varphi(h^{-1})| + \\ &+ \frac{1}{n} |\varphi(hg^n) - \varphi(g^n) - \varphi(h^{-1})| + \frac{1}{n} |\varphi(h^{-1}) + \varphi(h)| \leq \frac{2D_\varphi}{n}. \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, получаем, что $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(g)$.

Для доказательства второго свойства рассмотрим любую пару коммутирующих элементов $g, h \in G$. Тогда для любого натурального n выполнено

$(gh)^n = g^n h^n$. Поэтому можно оценить $|\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h)|$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\varphi(gh) - \varphi(g) - \varphi(h)| &= \frac{1}{n} |\varphi((gh)^n) - \varphi(g^n) - \varphi(h^n)| = \\ &= \frac{1}{n} |\varphi(g^n h^n) - \varphi(g^n) - \varphi(h^n)| \leq \\ &\leq \frac{D_\varphi}{n}. \end{aligned}$$

Поскольку эта оценка верна для любого n , $\varphi(gh) = \varphi(g) + \varphi(h)$.

Доказательство третьего свойства приведено в книге [30, лемма 2.24]. \square

Любой гомоморфизм групп $f: G \rightarrow H$ индуцирует отображение пространств квазихарактеров.

$$f^*: Q(H) \rightarrow Q(G),$$

которое переводит ограниченные функции в ограниченные, гомоморфизмы в гомоморфизмы и псевдохарактеры в псевдохарактеры. Отметим также, что если гомоморфизм $f: G \rightarrow H$ является сюръективным, то соответствующие отображения $f^*: Q(H) \rightarrow Q(G)$, $f^*: P(H) \rightarrow P(G)$ являются вложениями.

Для ограниченных когомологий имеется аналог когомологического трансфера (см. [2]), конструкцию которого мы дадим для случая псевдохарактеров, следуя работе [5].

Пусть H — нормальная подгруппа конечного индекса n в группе G и $C = (g_1, \dots, g_n)$ — произвольный набор представителей классов смежности группы H в G . Определим отображение $T_{H,G;C}: C^1(H, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(G, \mathbb{R})$ следующим образом:

$$T_{H,G;C}(\varphi)(g) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \varphi(g_k g^n g_k^{-1}),$$

где $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$, $g \in G$. Заметим, что поскольку элементы $g_k g^n g_k^{-1}$ лежат в H , то значение φ на каждом из этих элементов корректно определено.

Утверждение 1.6.8 (Предложение 2.1. из работы [5]). *Отображение $T_{H,G;C}$ переводит псевдохарактеры на H в псевдохарактеры на G . Кроме того, огра-*

значение этого отображения на $P(H)$ не зависит от выбора системы представителей S и задает отображение $T_{H,G}: P(H) \rightarrow P(G)$, называемое трансфером псевдохарактеров.

Утверждение 1.6.9 (Утверждение 2.5. из работы [5]). Пусть H — нормальная подгруппа конечного индекса в G и $i: H \hookrightarrow G$ — соответствующее вложение. Обозначим через $P_G(H)$ пространство псевдохарактеров на H инвариантных относительно действия G на H сопряжением. Тогда $i^*: P(G) \rightarrow P(H)$ индуцирует изоморфизм $P(G)$ на $P_G(H)$, а трансфер $T_{H,G}$ является левым обратным к этому отображению:

$$T_{H,G} \circ i^* = \text{id}_G.$$

Глава 2

Метрики на группах классов отображений

2.1. Функции сложности на группах

Изложение в этом разделе в основном следует работе [37].

Определение 2.1.1. Пусть G — произвольная группа. *Обобщенным заданием* или *обобщенным копредставлением* группы G называется тройка $\mathcal{P} = (\mathcal{A}, \mathcal{L}, \pi)$, состоящая из конечного алфавита \mathcal{A} , языка \mathcal{L} над алфавитом \mathcal{A} и отображения $\pi: \mathcal{L} \rightarrow G$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для любых слов $w_1, w_2 \in \mathcal{L}$ слово $w = w_1w_2$ также содержится в \mathcal{L} .
2. Отображение π сюръективно, и $\pi(w_1w_2) = \pi(w_1)\pi(w_2)$ для любых слов $w_1, w_2 \in \mathcal{L}$.

Типичным примером обобщенного задания конечно-порожденной группы G с множеством порождающих $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$ является *задание* или *копредставление* группы в виде множества порождающих и соотношений между ними. В этом случае алфавит \mathcal{A} состоит из букв $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$, язык \mathcal{L} — это множество всех слов в алфавите \mathcal{A} , а гомоморфизм π — это полугрупповой гомоморфизм из \mathcal{L} в G , отправляющий букву a_i^ε в элемент g_i^ε для всех $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Копредставление группы G , заданное системой порождающих \mathcal{G} , мы будем обозначать $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Такой способ представления элементов группы является стандартным в комбинаторной и геометрической теории групп. Однако с некоторыми конечно-порожденными группами бывает удобнее работать, используя обобщенные задания этих групп отличные от классического. Примером такой группы служит $SL(2, \mathbb{Z})$. Соответствующее обобщенное задание $\mathcal{P}_{\text{Matrix}}$ этой группы отвечает

представлению элементов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ в виде целочисленных матриц размера 2×2 с определителем равным 1 и описывается следующим образом.

Пример 2.1.2. В качестве алфавита \mathcal{A} мы рассмотрим алфавит, состоящий из символов $\{0, 1, -, |\}$. Язык \mathcal{L} состоит из слов вида

$$\alpha_1|\beta_1|\gamma_1|\delta_1|\alpha_2|\beta_2|\gamma_2|\delta_2|\dots|\alpha_k|\beta_k|\gamma_k|\delta_k|,$$

где $k \in \mathbb{N}$, и для любого $1 \leq i \leq k$ слова $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ — это целые числа записанные в двоичной системе счисления, такие что $\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1$. Отображение π отправляет слово $\alpha_1|\beta_1|\gamma_1|\delta_1|\alpha_2|\beta_2|\gamma_2|\delta_2|\dots|\alpha_k|\beta_k|\gamma_k|\delta_k|$ из \mathcal{L} в элемент $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, отвечающий произведению следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Если $\mathcal{P} = (\mathcal{L}, \pi)$ — это обобщенное задание группы G и g — произвольный элемент G , то естественно ввести понятие сложности $|g|_{\mathcal{P}}$ элемента g относительно \mathcal{P} следующим образом:

$$|g|_{\mathcal{P}} = \inf_{\pi(w)=g} |w|,$$

где $|w|$ — длина слова w . Если $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{G})$ для некоторой системы порождающих \mathcal{G} , то соответствующую функцию сложности мы будем обозначать $wl_{\mathcal{G}}$ и называть *словарной сложностью* относительно системы \mathcal{G} . Возникает вопрос, как связаны функции сложности для различных заданий группы G ? Заметим, что если $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{G}_1), \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(\mathcal{G}_2)$ — задания группы G , отвечающие системам порождающих группы $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, то как нетрудно видеть соответствующие словарные сложности являются эквивалентными в смысле следующего определения.

Определение 2.1.3. Пусть c_1, c_2 — неотрицательные вещественные функции на группе G . Тогда мы будем писать $c_1 \preceq c_2$, если существуют вещественные константы $K > 1, C > 0$, такие что для любого $g \in G$ выполнено $c_1(g) \leq Kc_2(g) + C$. Мы будем называть функции c_1 и c_2 *эквивалентными*, если

$c_1 \preceq c_2$ и $c_2 \preceq c_1$. Если выполнено $c_1 \preceq c_2$, но не выполнено $c_2 \preceq c_1$, будем писать $c_1 \prec c_2$.

Однако как показывает следующий пример, функции сложности, отвечающие разным обобщенным заданиям группы, не обязаны быть эквивалентными:

Пример 2.1.4. Пусть $G = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, c_1 — функция сложности, отвечающая матричному заданию $\mathcal{P}_{\text{Matrix}}$ группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, c_2 — словарная сложность на $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ относительно образующих $\{A, B\}$, представленных следующими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из определения обобщенного задания $\mathcal{P}_{\text{Matrix}}$ группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ нетрудно видеть, что $c_1 \preceq c_2$, где в качестве констант K, C из определения 2.1.3 можно взять 12 и 8 соответственно. Рассмотрим теперь элементы группы G вида A^n , где $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что они задают следующие матрицы:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что $c_2(A^n) = n$, $c_1(A^n) \leq \log_2(n) + 8$. Тем самым $c_1 \prec c_2$.

В дальнейшем *функцией сложности* на группе G мы будем называть любую функцию $c: G \rightarrow \mathbb{R}_+$, которая эквивалентна функции сложности $|\cdot|_{\mathcal{P}}$ для некоторого обобщенного задания \mathcal{P} . Любое такое обобщенное задание мы будем называть *согласованным* с функцией сложности c . Так нетрудно видеть, что функция $C_{\text{Matrix}}: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, заданная формулой:

$$C_{\text{Matrix}}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \log_2(|a| + 1) + \log_2(|b| + 1) + \log_2(|c| + 1) + \log_2(|d| + 1), \quad (2.1)$$

согласована с обобщенным заданием $\mathcal{P}_{\text{Matrix}}$.

Сложность на $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, согласованную со сложностью C_{Matrix} , можно определить, не используя матричного представления группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Для этой цели

надо использовать сжатую словарную сложность, которая в общем случае была определена Дынниковым в работе [37].

Определение 2.1.5. Пусть G — конечнопорожденная группа, $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$ — система порождающих G . Тогда *сжатой словарной сложностью* на группе G относительно системы \mathcal{G} будем называть функцию $\text{zwl}_{\mathcal{G}}$, определенную следующим образом:

$$\text{zwl}_{\mathcal{G}}(g) = \min_{\substack{g = g_1^{k_1} \dots g_m^{k_m} \\ g_1, \dots, g_m \in \mathcal{G} \\ k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}}} \sum_{i=1}^m \log_2(|k_i| + 1). \quad (2.2)$$

Соответствующее этой функции сложности обобщенное задание группы G определяется кодировкой элементов $g_1^{k_1} g_2^{k_2} \dots g_m^{k_m}$ с помощью последовательностей $|g_1 k_1| |g_2 k_2| \dots |g_m k_m|$, где числа k_i в этой последовательности представлены в двоичном виде.

Функции сложности $\text{zwl}_{\mathcal{G}}$ соответствует правоинвариантная метрика $\rho_{\mathcal{G}}$ на группе G , которая определяется следующим образом:

$$\rho_{\mathcal{G}}(g, h) = \text{zwl}_{\mathcal{G}}(gh^{-1})$$

для любых $g, h \in G$. Метрику $\rho_{\mathcal{G}}$ мы будем называть *сжатой словарной метрикой*, соответствующей системе порождающих \mathcal{G} .

Если в качестве образующих $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ взять элементы A, B из примера 2.1.4, то соответствующая сжатая словарная сложность эквивалентна матричной сложности C_{Matrix} . Это несложно доказать, используя быстрый алгоритм Евклида для $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ (см. [36]).

Заметим, что в отличие от обычной словарной сложности, сжатая словарная сложность существенно зависит от выбора системы образующих. Так, если вместо системы порождающих $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ из примера 2.1.4 взять систему $\mathcal{G}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, то $\text{zwl}_{\mathcal{G}'}$ неэквивалентна $\text{zwl}_{\mathcal{G}}$. Действительно, поскольку матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — гиперболическая, то максимальный элемент матрицы C^n

имеет экспоненциальный порядок роста по n . Тем самым найдется положительное число ε такое, что $C_{\text{Matrix}}(C^n) > \varepsilon n$. С другой стороны $\text{zwl}_{\mathcal{G}'}(C^n) \leq \log n$. Тем самым C_{Matrix} и $\text{zwl}_{\mathcal{G}'}$ не могут быть эквивалентны, и поэтому $\text{zwl}_{\mathcal{G}'}$ и $\text{zwl}_{\mathcal{G}}$ тоже неэквивалентны.

Еще один способ определить сложность на $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, эквивалентную матричной сложности, заключается в рассмотрении стандартного действия этой группы на плоскости Лобачевского \mathbb{H}^2 . А именно в модели верхней полуплоскости действие $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ задается дробно-линейными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

для любого $z \in \mathbb{H}^2$. Выберем произвольную точку $z \in \mathbb{H}^2$ и определим функцию сложности $C_{\mathbb{H}^2, z}$ на $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ следующим образом:

$$C_{\mathbb{H}^2, z}(g) = d_{\mathbb{H}^2}(z, gz) = \ln \frac{|cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b| + |cz^2 + dz - az - b|}{|cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b| - |cz^2 + dz - az - b|},$$

где $d_{\mathbb{H}^2}(\cdot, \cdot)$ — расстояние в метрике Лобачевского, а $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Лемма 2.1.6. *Для любой $z \in \mathbb{H}^2$ функция $C_{\mathbb{H}^2, z}$ эквивалентна функции C_{Matrix} .*

Доказательство. Сначала заметим, что функции $C_{\mathbb{H}^2, z}$, отвечающие разным z эквивалентны. Действительно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ и $g \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ выполнено

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{H}^2, z_1}(g) &= d_{\mathbb{H}^2}(z_1, g(z_1)) \leq d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) + d_{\mathbb{H}^2}(z_2, g(z_2)) + d_{\mathbb{H}^2}(g(z_2), g(z_1)) = \\ &= C_{\mathbb{H}^2, z_2}(g) + 2d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Поскольку в предыдущей цепочке неравенств можно поменять местами z_1 и z_2 , получаем, что

$$|C_{\mathbb{H}^2, z_1}(g) - C_{\mathbb{H}^2, z_2}(g)| \leq 2d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)$$

для любого $g \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Тем самым достаточно доказать утверждение для $z = i$. Пусть $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{H}^2, i}(g) &= \ln \frac{|c + di + ai - b| + |-c + di - ai - b|}{|c + di + ai - b| - |-c + di - ai - b|} = \\ &= \ln \frac{\sqrt{(b-c)^2 + (a+d)^2} + \sqrt{(b+c)^2 + (a-d)^2}}{\sqrt{(b-c)^2 + (a+d)^2} - \sqrt{(b+c)^2 + (a-d)^2}} = \\ &= \ln \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 - 2}}{\sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 + 2} - \sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 - 2}} = \\ &= 2 \ln(\sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 - 2}) - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что функция, принимающая на матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ значение $2 \ln(\sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + a^2 + d^2 - 2}) - 2 \ln 2$, эквивалентна функции C_{Matrix} . \square

Как было показано в примере 2.1.4, сложность некоторых элементов из $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ существенно уменьшается при переходе от задания $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ образующими к обобщенному заданию $\mathcal{P}_{\text{Matrix}}$. Замечательным фактом, однако является то, что при этом переходе проблема равенства слов остается разрешимой. Более того алгоритм решения проблемы равенства для матричного представления очень прост. А именно, если надо определить задают ли слова $w = \alpha_1|\beta_1|\gamma_1|\delta_1|\alpha_2|\beta_2|\gamma_2|\delta_2|\dots|\alpha_k|\beta_k|\gamma_k|\delta_k|$, и $w' = \alpha'_1|\beta'_1|\gamma'_1|\delta'_1|\alpha'_2|\beta'_2|\gamma'_2|\delta'_2|\dots|\alpha'_{k'}|\beta'_{k'}|\gamma'_{k'}|\delta'_{k'}|$, то достаточно вычислить произведения соответствующих матриц и сравнить результаты. Тем самым проблема равенства слов в группе $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ является эффективно разрешимой относительно матричной функции сложности в смысле следующего определения:

Определение 2.1.7. Пусть C — функция сложности на группе G , согласованная с некоторым обобщенным заданием $\mathcal{P} = (\mathcal{A}, \mathcal{L}, \pi)$. Будем говорить, что проблема равенства слов в группе G является *эффективно разрешимой* относительно функции сложности C , если выполнены следующие условия:

1. Существует отображение $\text{nf}: G \rightarrow \mathcal{L}$ такое, что $\pi \circ \text{nf} = \text{id}_G$, и функция, сопоставляющая $g \in G$ длину слова $\text{nf}(g)$, эквивалентна C .

2. Существует алгоритм, который для любого слова w за полиномиальное время проверяет, принадлежит ли это слово языку \mathcal{L} .
3. Существует алгоритм, который для любого слова $w \in \mathcal{L}$ за полиномиальное время предъявляет слово $\text{nf}(\pi(w))$.

Согласно разделу 1.3 группу $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ можно рассматривать как группу классов отображений проколото́го тора. В следующем разделе будет показано, что рассмотренные выше задания и функции сложности для этой группы обобщаются на случай группы классов отображений произвольной поверхности с проколами, а соответствующая проблема равенства допускает эффективное решение.

2.2. Функции сложности на группах классов отображений

Пусть $S = S_{g,n}^0$, причем $n > 0$. Рассмотрим произвольную идеальную триангуляцию T поверхности S и обозначим ее ребра через e_1, e_2, \dots, e_N , где число N определено в формуле (1.4). Тогда, следуя работе [37], любому гомоморфизму $\varphi \in \text{MCG}(S)$ можно сопоставить матрицу M_φ размера $N \times N$ с элементами $m_{ij} = \{e_i, \varphi(e_j)\}$, где фигурные скобки обозначают индекс пересечения кривых. Матричной сложностью $C_T(\varphi)$ диффеоморфизма φ относительно триангуляции T назовем следующую величину:

$$C_T(\varphi) = \sum_{i,j=1}^N \log(|\{e_i, \varphi(e_j)\} + \delta_{ij}| + 1).$$

Соответствующее матричное задание $\text{MCG}(S)$ строится так же как и задание для функции сложности C_{Matrix} (см. пример 2.1.2). Кроме того, как следует из приведенного ниже примера, функция C_T является обобщением функции C_{Matrix} .

Пример 2.2.1. Рассмотрим триангуляцию T проколото́го тора, изображенную на рисунке 2.1. Пусть φ — диффеоморфизм проколото́го тора и A_φ — матри-

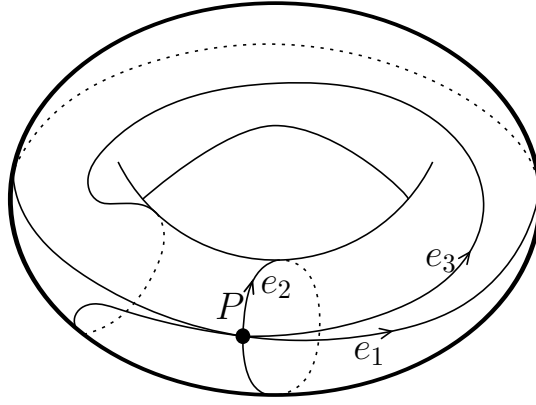


Рис. 2.1. Идеальная триангуляция проколотого тора

ца индуцированного отображения в первых гомологиях (непроколотого) тора, записанного в базисе e_1, e_2 . Тогда, если матрица A_φ имеет вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то матрица M_φ диффеоморфизма φ по отношению к триангуляции T имеет вид

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} |b| & |d| & |b+d| \\ |a| & |c| & |a+c| \\ |b-a| & |c-d| & |b+d-a-c| \end{pmatrix},$$

в том случае, если никакой из элементов правой матрицы не равен нулю. В противном случае надо заменить каждый нулевой элемент матрицы на -1 . Из вида матриц A_φ и M_φ следует, что функции сложности C_T и C_{Matrix} эквивалентны.

Функция сложности C_T была определена Дынниковым в работе [37]. В этой работе мы будем использовать аналог этой функции, который определяется следующим образом:

$$\|\varphi\|_T = \log(\langle \varphi(T), T \rangle + 1), \quad (2.3)$$

где $\varphi \in \text{MCG}(S)$, T — идеальная триангуляция S , а $\langle \varphi(T), T \rangle$ — геометрическое число пересечения триангуляций T и $\varphi(T)$. Легко видеть, что C_T эквивалентна $\|\cdot\|_T$:

$$\|\varphi\|_T \leq C_T(\varphi) \leq N^2 \|\varphi\|_T + N^2 \log 2.$$

Как и в случае $SL(2, \mathbb{Z})$, при правильном выборе системы порождающих \mathcal{G} группы $MCG(S)$ соответствующая сжатая словарная сложность $zwl_{\mathcal{G}}$ эквивалентна матричной сложности на $MCG(S)$. А именно имеет место следующее утверждение, доказанное в работе [37].

Теорема 2.2.2 (Дынников [37]). *Пусть $S = S_{g,n}^0$, $n > 0$, T — идеальная триангуляция S и \mathcal{G} — конечная система порождающих группы $MCG(S)$, обладающая следующими свойствами:*

1. *Каждый элемент \mathcal{G} является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.*
2. *Каждое скручивание Дэна из $MCG(S)$ сопряжено дробной степени некоторого элемента из \mathcal{G} .*

Тогда функции сложности C_T и $zwl_{\mathcal{G}}$ эквивалентны.

Замечание 2.2.3. Из этой теоремы в частности следует, что матричные функции сложности для разных триангуляций эквивалентны.

В той же работе Дынников доказал, что относительно матричной сложности проблема равенства в группе $MCG(S)$ эффективно разрешима и как следствие предыдущей теоремы получил следующий результат:

Теорема 2.2.4 (Дынников [37]). *Пусть $S = S_{g,n}^0$, $g, n > 0$, T — идеальная триангуляция S и \mathcal{G} — конечная система порождающих группы $MCG(S)$, обладающая следующими свойствами:*

1. *Каждый элемент \mathcal{G} является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.*
2. *Каждое скручивание Дэна из $MCG(S)$ сопряжено дробной степени некоторого элемента из \mathcal{G} .*

Тогда проблема равенства в группе $\text{MCG}(S)$ эффективно разрешима относительно сжатой словарной сложности zwl_G .

Аналогами функции сложности $C_{\mathbb{H}}^2$ для $\text{MCG}(S)$, служат функции $C_{\mathcal{T},\sigma}$ и $C_{L,\sigma}$, определяемые следующим образом:

$$C_{\mathcal{T},\sigma}(\varphi) = \rho_{\mathcal{T},\sigma}(1, \varphi), \quad C_{L,\sigma}(\varphi) = \rho_{L,\sigma}(1, \varphi), \quad (2.4)$$

где $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ — гиперболическая структура на S , $\rho_{\mathcal{T},\sigma}, \rho_{L,\sigma}$ — псевдометрики на $\text{MCG}(S)$, определенные в разделе 1.3 (см. формулу (1.6)). Дело в том, что в случае, когда S является тором с проколом, метрики Липшица и Тейхмюллера на $T(S)$ совпадают, пространство Тейхмюллера $T(S)$ снабженное метрикой Тейхмюллера изометрично \mathbb{H}^2 и при подходящем выборе этой изометрии действие $\text{MCG}(S)$ на $T(S)$ совпадает со стандартным действием $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ на \mathbb{H}^2 .

Как отмечалось в разделе 1.3, для произвольной поверхности S и гиперболической структуры σ на S , псевдометрики $\rho_{\mathcal{T},\sigma}, \rho_{L,\sigma}$ квазиизометричны. Отсюда следует, что функции сложности $C_{\mathcal{T},\sigma}$ и $C_{L,\sigma}$ являются эквивалентными.

Нетрудно также показать, что для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{T}(S)$ функции сложности $C_{\mathcal{T},\sigma_1}, C_{\mathcal{T},\sigma_2}$ эквивалентны. Действительно, для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$ выполнено

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{T},\sigma_1}(\varphi) &= d_{\mathcal{T}}(\sigma_1, \varphi(\sigma_1)) \leq d_{\mathcal{T}}(\sigma_1, \sigma_2) + d_{\mathcal{T}}(\sigma_2, \varphi(\sigma_2)) + d_{\mathcal{T}}(\varphi(\sigma_2), \varphi(\sigma_1)) = \\ &= C_{\mathcal{T},\sigma_2}(\varphi) + 2d_{\mathcal{T}}(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Поскольку в предыдущей цепочке неравенств можно поменять местами σ_1 и σ_2 , получаем, что

$$|C_{\mathcal{T},\sigma_1}(\varphi) - C_{\mathcal{T},\sigma_2}(\varphi)| \leq 2d_{\mathcal{T}}(\sigma_1, \sigma_2).$$

Поэтому, как и в случае группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, имеет смысл говорить о *метрической сложности* на $\text{MCG}(S)$. В работе [103] было доказано, что метрическая сложность эквивалентна матричной сложности. А именно имеет место следующее утверждение:

Теорема 2.2.5. Пусть S — двумерная ориентированная поверхность конечно-го топологического типа без края с непустым множеством проколов, T — идеальная триангуляция поверхности S , σ — гиперболическая структура на S . Тогда существуют положительные числа c_1, c_2 , зависящие от T и σ , такие, что для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$ выполнено:

$$\|\varphi\|_T - c_1 \leq C_{L,\sigma}(\varphi) \leq \|\varphi\|_T + c_2.$$

В качестве следствия этой теоремы и теоремы Дынникова 2.2.2 мы также получаем, что $\text{MCG}(S)$, снабженная сжатой словарной метрикой, квазиизометрична толстой части пространства Тейхмюллера:

Теорема 2.2.6. Пусть S — двумерная ориентированная поверхность конечно-го топологического типа без края с непустым множеством проколов, ϵ — положительное вещественное число, σ — гиперболическая структура на S , лежащая в ϵ -толстой части пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ и \mathcal{G} — конечная система порождающих группы $\text{MCG}(S)$, обладающая следующими свойствами:

1. Каждый элемент \mathcal{G} является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.
2. Каждое скручивание Дэна из $\text{MCG}(S)$ сопряжено дробной степени некоторого элемента из \mathcal{G} .

Обозначим через $i_\sigma: \text{MCG}(S) \rightarrow \mathcal{T}_\epsilon(S)$ отображение, которое сопоставляет $\varphi \in \text{MCG}(S)$ обратный образ σ при диффеоморфизме φ . Тогда i_σ является квазиизометрией между группой $\text{MCG}(S)$, снабженной сжатой словарной метрикой, $\rho_{\mathcal{G}}$ и ϵ -толстой частью пространства Тейхмюллера, снабженного метрикой Липшица.

Используя теорему Чой и Рафи о квазиизометричности метрик Липшица и Тейхмюллера на толстой части пространства Тейхмюллера, мы автоматически получаем следующий результат:

Теорема 2.2.7. Пусть S — двумерная ориентированная поверхность конечно-го топологического типа без края с непустым множеством проколов, ϵ — положительное вещественное число, σ — гиперболическая структура на S , лежащая в ϵ -толстой части пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ и \mathcal{G} — конечная система порождающих группы $\text{MCG}(S)$, обладающая следующими свойствами:

1. Каждый элемент \mathcal{G} является дробной степенью некоторого скручивания Дэна.
2. Каждое скручивание Дэна из $\text{MCG}(S)$ сопряжено дробной степени некоторого элемента из \mathcal{G} .

Обозначим через $i_\sigma: \text{MCG}(S) \rightarrow \mathcal{T}_\epsilon(S)$ отображение, которое сопоставляет $\varphi \in \text{MCG}(S)$ обратный образ σ при диффеоморфизме φ . Тогда i_σ является квазиизометрией между группой $\text{MCG}(S)$, снабженной сжатой словарной метрикой $\rho_{\mathcal{G}}$, и ϵ -толстой частью пространства Тейхмюллера, снабженного метрикой Тейхмюллера.

Замечание 2.2.8. Как указывалось во введении, аналогичные теоремам 2.2.6, 2.2.7 результаты не верны, если вместо сжатой словарной метрики рассматривать словарную метрику на $\text{MCG}(S)$.

Замечание 2.2.9. Теорема 2.2.7 является обобщением результата Дынникова и Виста из статьи [38], в которой они получают аналогичный результат в случае, когда поверхность S является проколотой сферой.

Доказательства теорем 2.2.5, 2.2.6 будут приведены в следующем разделе.

2.3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.2.5. Рассмотрим следующую функцию на группе $\text{MCG}(S)$:

$$\|\varphi\|_{L,\sigma} = L(\sigma, \varphi^*(\sigma)),$$

где $\varphi \in \text{MCG}(S)$. Легко видеть, что

$$C_{L,\sigma}(\varphi) = \max\{\|\varphi\|_{L,\sigma}, \|\varphi^{-1}\|_{L,\sigma}\}.$$

Кроме того, для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$ выполнено равенство

$$\|\varphi\|_T = \|\varphi^{-1}\|_T.$$

Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что найдутся положительные числа c_1, c_2 , зависящие от T и σ , такие, что для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$ выполнено:

$$\|\varphi\|_T - c_1 \leq \|\varphi\|_{L,\sigma} \leq \|\varphi\|_T + c_2. \quad (2.5)$$

Сначала докажем, следующее утверждение.

Утверждение 2.3.1.

$$c\langle\alpha, T\rangle \leq l_\sigma(\alpha) \leq C\langle\alpha, T\rangle.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения нам потребуется следующая лемма из гиперболической геометрии:

Лемма 2.3.2 ([89]). *Пусть P — прокол на поверхности S , и \mathcal{U}_P — подмножество S , состоящая из орициклов вокруг P , длина которых в метрике σ меньше единицы. Тогда множество \mathcal{U}_P является нормальной окрестностью прокола P , эти окрестности, отвечающие разным проколам, не пересекаются и любая простая σ -геодезическая не пересекается с этими окрестностями.*

Теперь приведем доказательство утверждения 2.3.1. Рассмотрим изотопную T идеальную триангуляцию T' , ребра которой являются σ -геодезическими, и σ -геодезическую γ_α изотопную α . В силу следствия 1.2.8 геометрическое число пересечения $\langle\alpha, T\rangle$ совпадает с числом точек пересечения γ_α с T' . Последнее, в свою очередь, совпадает с количеством геодезических дуг α_i в $\gamma_\alpha \cap S \setminus T'$. Поскольку каждая компонента Δ в $S \setminus T'$ является внутренностью идеального гиперболического треугольника, длина каждой дуги α_i , содержащейся в Δ ,

совпадает с длиной некоторой геодезической дуги α'_i в идеальном гиперболическом треугольнике. Кроме того каждая дуга α'_i содержится в дополнении до орициклических окрестностей вершин идеального гиперболического треугольника, соответствующих орициклическим окрестностям $\Delta \cap \mathcal{U}_P$, где \mathcal{U}_P — орициклическая окрестность прокола P из прошлой леммы. В силу компактности такого дополнения, найдутся такие положительные числа c_Δ, C_Δ , что длина каждой дуги α_i лежащей в Δ ограничена снизу и сверху соответственно c_Δ и C_Δ . Поскольку количество компонент $S \setminus T'$ конечно, то найдутся такие положительные числа c и C , зависящие от S, T и σ , но не от кривой α , что длина каждой из дуг α_i больше c , но меньше C . Тем самым мы получаем, что для любой α выполнены неравенства

$$c\langle\alpha, T\rangle \leq l_\sigma(\alpha) \leq C\langle\alpha, T\rangle.$$

□

В силу теоремы 1.2.4 функция $\|\varphi\|_{L,\sigma}$ может быть записана в следующем виде:

$$\|\varphi\|_{L,\sigma} = \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{l_{\varphi^*(\sigma)}(\alpha)}{l_\sigma(\alpha)} \right) \right) = \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{l_\sigma(\varphi(\alpha))}{l_\sigma(\alpha)} \right) \right),$$

где супремум ищется среди всех простых существенных кривых на поверхности S .

Из утверждения 2.3.1 следует, что найдется такое неотрицательное число C' , что неравенство

$$\left| \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{l_\sigma(\varphi(\alpha))}{l_\sigma(\alpha)} \right) \right) - \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{\langle\varphi(\alpha), T\rangle}{\langle\alpha, T\rangle} \right) \right) \right| \leq C'$$

выполняется для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$.

Поэтому для доказательства теоремы, достаточно найти такие положительные числа C_1 и C_2 , что для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$ выполнены следующие

неравенства:

$$\|\varphi\|_T - C_1 \leq \sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{\langle \varphi(\alpha), T \rangle}{\langle \alpha, T \rangle} \right) \right), \quad (2.6)$$

$$\sup_{\alpha} \left(\log \left(\frac{\langle \varphi(\alpha), T \rangle}{\langle \alpha, T \rangle} \right) \right) \leq \|\varphi\|_T + C_2. \quad (2.7)$$

Начнем с доказательства первого из этих неравенств. Для этого нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 2.3.3. Пусть β — существенная идеальная дуга на $S \neq S_{0,3}$, β' — граница маленькой трубчатой окрестности β в \bar{S} . Тогда, если β' является связной кривой, она существенна и выполнено следующее неравенство:

$$\langle \beta, T \rangle \leq \frac{1}{2} \langle \beta', T \rangle.$$

В случае, когда β' состоит из двух компонент, как минимум одна из этих компонент, обозначим ее β'_1 , удовлетворяет следующим двум свойствам:

- β'_1 является существенной,
- для β'_1 выполнено следующее неравенство:

$$\langle \beta, T \rangle \leq 3 \langle \beta'_1, T \rangle.$$

Доказательство. Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 2.3.4. Пусть D — диск с двумя проколами. Тогда есть только три различных изотопических класса простых существенных идеальных дуг в D .

Пусть C — цилиндр с одним проколом. Тогда есть только один изотопический класс простых существенных идеальных дуг в C .

Дуги, представляющие эти изотопические классы показаны на рисунке 2.2.

Доказательство. Мы докажем, что существует только одна с точностью до изотопии простая идеальная дуга, соединяющая разные проколы, которые в

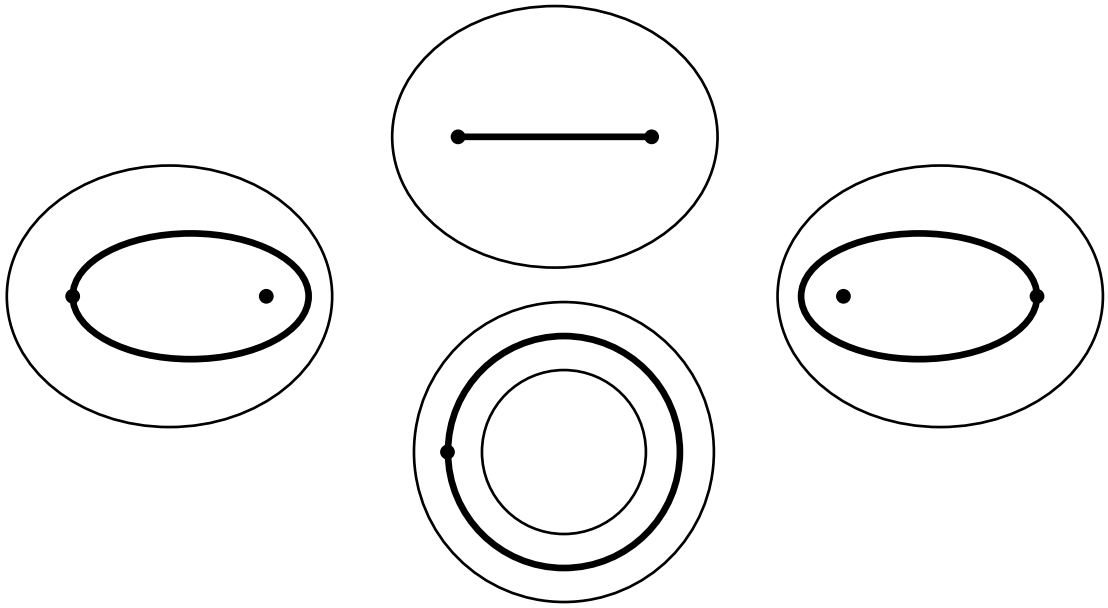


Рис. 2.2. Три типа простых идеальных дуг в диске с двумя проколами и простая идеальная дуга в цилиндре с проколом.

дальнейшем мы будем обозначать P_1 и P_2 , в диске с двумя проколами. Доказательства для других случаев аналогичны этому.

Рассмотрим две различные простые существенные дуги α и β данного типа. Малой изотопией одной из этих дуг мы можем добиться, чтобы все пересечения α и β стали трансверсальны. Если так получилось, что дуги не пересекаются, то в силу теоремы Жордана они вместе ограничивают вложенный диск и поэтому изотопны. Если они пересекаются, будем идти вдоль кривой α , начиная с прокола P_1 , до первой точки пересечения X с кривой β . Обозначим дуги кривых α и β , идущие от P_1 в X , α_1 и β_1 . Кривая, образованная α_1 и β_1 ограничивает или диск, или диск с проколом P_2 . В первом случае мы можем протолкнуть β сквозь этот диск и убрать точку пересечения X . Во втором случае мы рассмотрим дуги, α_2 и β_2 с началом в P_2 , которые строятся также как и α_1, β_1 . Дуги α_2 и β_2 лежат внутри (возможно, за исключением их общего конца) диска с проколом, ограниченного α_1, β_1 . Поэтому дуги α_2 и β_2 ограничивают диск и мы снова можем сократить число точек пересечения α и β с помощью изотопии. Тем самым после конечного числа таких изотопий мы получим непе-

ресекающиеся дуги, которые, как мы уже показали, являются изотопными. \square

Теперь перейдем к доказательству утверждения.

Сначала рассмотрим случай, когда кривая β' является связной, т.е. концы дуги β различны. Тогда связная компонента U множества $S \setminus \beta'$, которая содержит дугу β , является диском с двумя проколами P_1, P_2 — концами β . Если мы предположим, что кривая β' не является существенной, то множество $S \setminus U$ является диском или диском с одним проколом. В этом случае S является сферой с двумя или тремя проколами, что противоречит нашим ограничениям на тип поверхности S .

Теперь произотопируем кривую β' так, чтобы она стала существенно пересекаться с триангуляцией T . В силу известной теореме о продолжении изотопии (см., например [64]) мы можем продолжить изотопию β' до изотопии поверхности S . Будем обозначать образы кривых β, β' и множества U под действием этой изотопии теми же символами, что и раньше. Мы также обозначим через \bar{U} замыкание U в S .

Рассмотрим ребра триангуляции T , которые смежны с одним из проколов P_1 или P_2 . Если среди них найдется ребро e , которое соединяет P_1 и P_2 и содержится внутри U , то по лемме 2.3.4 e изотопно дуге β и поэтому $\langle \beta, T \rangle = 0 \leq \frac{1}{2} \langle \beta', T \rangle$.

Если среди этих ребер найдется ребро e' , целиком лежащее в U , у которого оба конца совпадают с P_1 , то в силу леммы 2.3.4 e' ограничивает диск с одним проколом и тем самым T содержит ребро, лежащее внутри U и соединяющее P_1 с P_2 .

Если же триангуляция T не имеет ребер, которые целиком лежат внутри U , то найдутся ребра $e_1, e_2 \in T$, которые пересекают β' и смежны с проколами P_1 и P_2 соответственно. Пересекая e_i с \bar{U} , мы получаем дуги $\alpha_i \in e_i, i \in \{1, 2\}$, такие что они целиком лежат \bar{U} , а дуга α_i смежна с P_i , и пересекает β' в одной точке X_i (см. часть рисунка 2.3, расположенную слева вверху).

С помощью небольшой изотопии α_1 и α_2 мы можем получить две такие простые кривые α'_1 и α'_2 , что они целиком лежат в \bar{U} , не пересекаются, не пересекают триангуляцию T , и пересекают кривую β' в точках X'_1 и X'_2 соответственно (см. часть рисунка 2.3, расположенную справа вверху). Точки X'_1 и X'_2 разбивают β' на две части δ_1 и δ_2 . Мы можем объединить дуги α'_1 , δ_1 , α'_2 и дуги α'_1 , δ_2 , α'_2 и получить две кусочно гладкие дуги β_1, β_2 соответственно (одна из этих дуг изображена на рисунке 2.3 слева внизу). С помощью небольшой изотопии мы можем сгладить эти дуги, не изменяя при этом количество точек пересечения этих дуг с триангуляцией (одна из этих дуг изображена на рисунке 2.3 справа внизу). Как следует из построения этих дуг и леммы 2.3.4, получившиеся дуги изотопны β , а суммарное число точек пересечения этих дуг с триангуляцией T равняется $\langle \beta', T \rangle$. Тем самым одна из этих дуг пересекает T не более чем в $\frac{1}{2}\langle \beta', T \rangle$ точках, и поэтому мы доказали утверждение в этом случае.

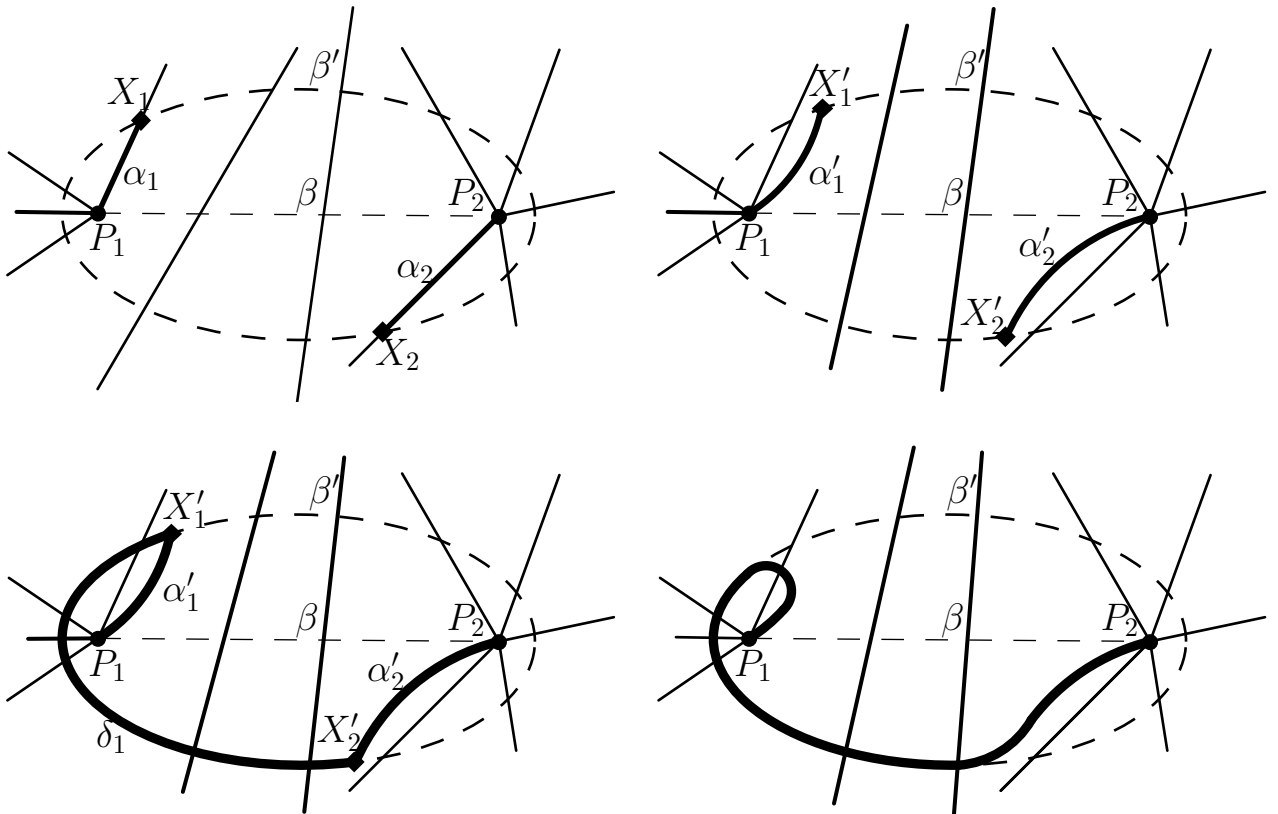


Рис. 2.3. Иллюстрация к доказательству первого случая утверждения 2.3.3.

В случае, когда β' состоит из двух компонент β'_1 и β'_2 , мы будем использовать аналогичные соображения.

Во-первых, отметим, что по крайней мере одна из компонент β' является существенной. Действительно, если и β'_1, β'_2 не являются существенными, то каждая из этих кривых ограничивает диск с одним проколом, и тогда S будет сферой с тремя проколами, что противоречит нашим ограничениям на тип поверхности. Без ограничения общности будем считать, что кривая β'_1 является существенной.

С помощью изотопии поверхности S мы можем деформировать кривую β' так, чтобы она существенно пересекалась с триангуляцией T . Связная компонента U множества $S \setminus \beta'$, содержащая дугу β является цилиндром с одним проколом P — концом β .

Рассмотрим ребра триангуляции T , которые смежны с проколом P . Если среди них найдется ребро, которое содержится внутри U , то по лемме 2.3.4 оно изотопно дуге β и поэтому $\langle \beta, T \rangle = 0 \leq \langle \beta'_1, T \rangle$. Если T не содержит ребер, лежащих внутри U , то возможно два случая. В первом случае найдется ребро $e \in T$, которое пересекает существенную компоненту β' (без ограничения общности β'_1) и смежно P . Во втором случае только одна компонента (без ограничения общности β'_1) является существенной и все ребра T смежные с P не пересекают β'_1 .

Если e пересекает существенную компоненту β' , то найдется дуга $\alpha \in e$, которая смежна с P , лежит в \bar{U} и пересекает β' только в одной точке X (см. часть рисунка 2.4, расположенную слева вверху).

Малыми деформациями α можно получить две простые дуги α'_1 и α'_2 , которые смежны с P , лежат в \bar{U} , не пересекаются, не пересекают триангуляцию T и пересекаются с β' в точках X_1 и X_2 соответственно (см. часть рисунка 2.4, расположенную справа вверху).

Точки X_1 и X_2 разбивают β'_1 на две дуги δ_1 и δ_2 . Мы можем объединить дуги $\alpha'_1, \delta_1, \alpha'_2$ и $\alpha'_1, \delta_2, \alpha'_2$ и получить простые кусочно-гладкие дуги γ_1, γ_2 соответственно. Только одна из этих дуг является существенной и с помощью небольшой изотопии мы можем сгладить эту дугу, не изменяя при этом коли-

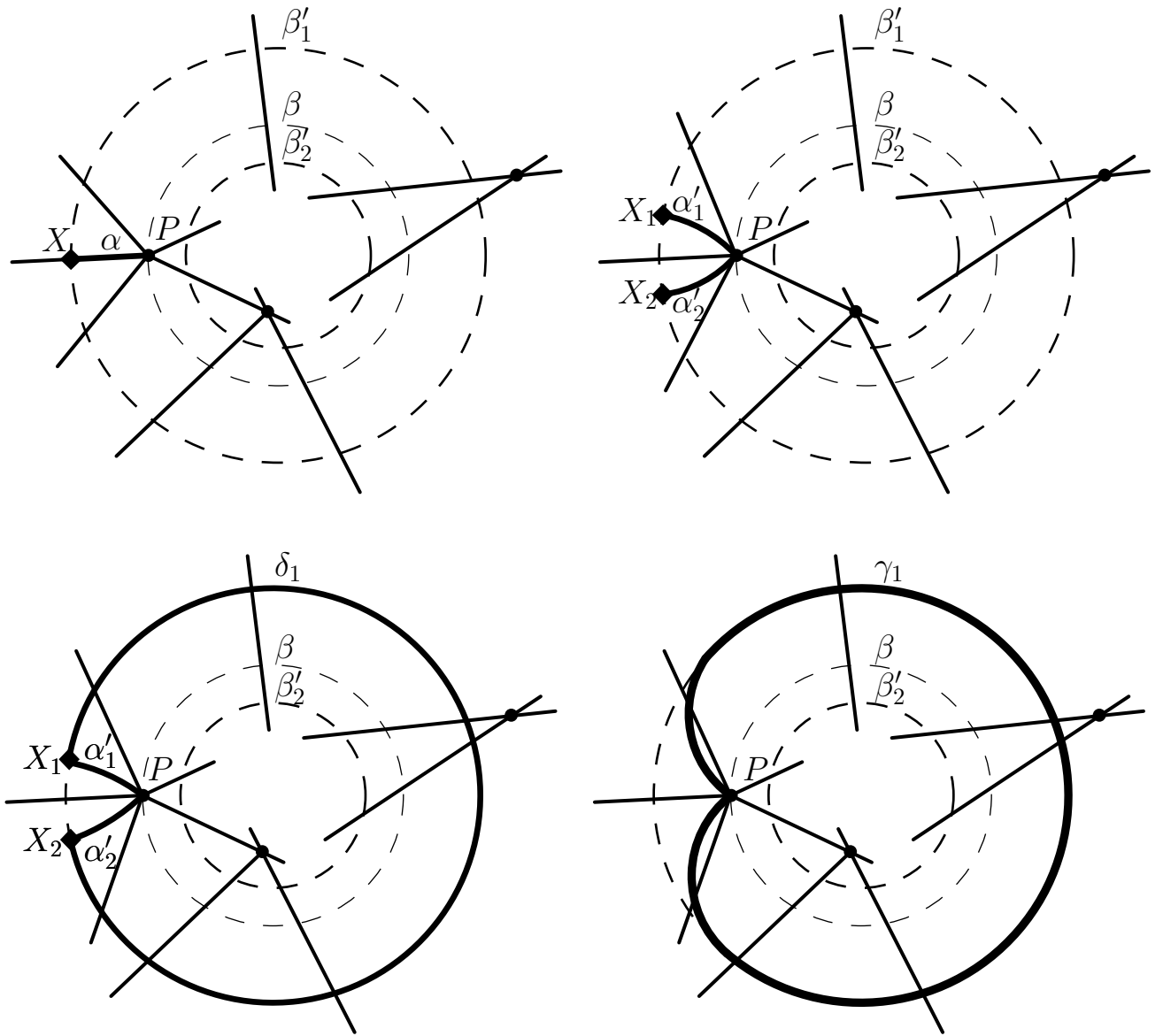


Рис. 2.4. Иллюстрация к доказательству второго случая утверждения 2.3.3.

чество ее точек пересечения с триангуляцией (см. нижнюю часть рисунка 2.4). Как следует из построения и леммы 2.3.4, получившаяся дуга изотопна β , а количество точек пересечения этой дуги с триангуляцией T не превосходит $\langle \beta'_1, T \rangle$

Тем самым $\langle \beta, T \rangle \leq \langle \beta'_1, T \rangle$ и в этом случае утверждение тоже доказано.

Наконец мы рассмотрим случай, когда кривая β'_2 не является существенной, а все ребра триангуляции T смежные с P не пересекаются с β'_1 . В этом случае компонента V множества $S \setminus \beta'_1$, содержащая β , является диском с двумя проколами P, P' , кривая β'_2 стягивается на прокол P' и дуга β — единственная с точностью до изотопии существенная дуга в V с концами в проколе P (см.

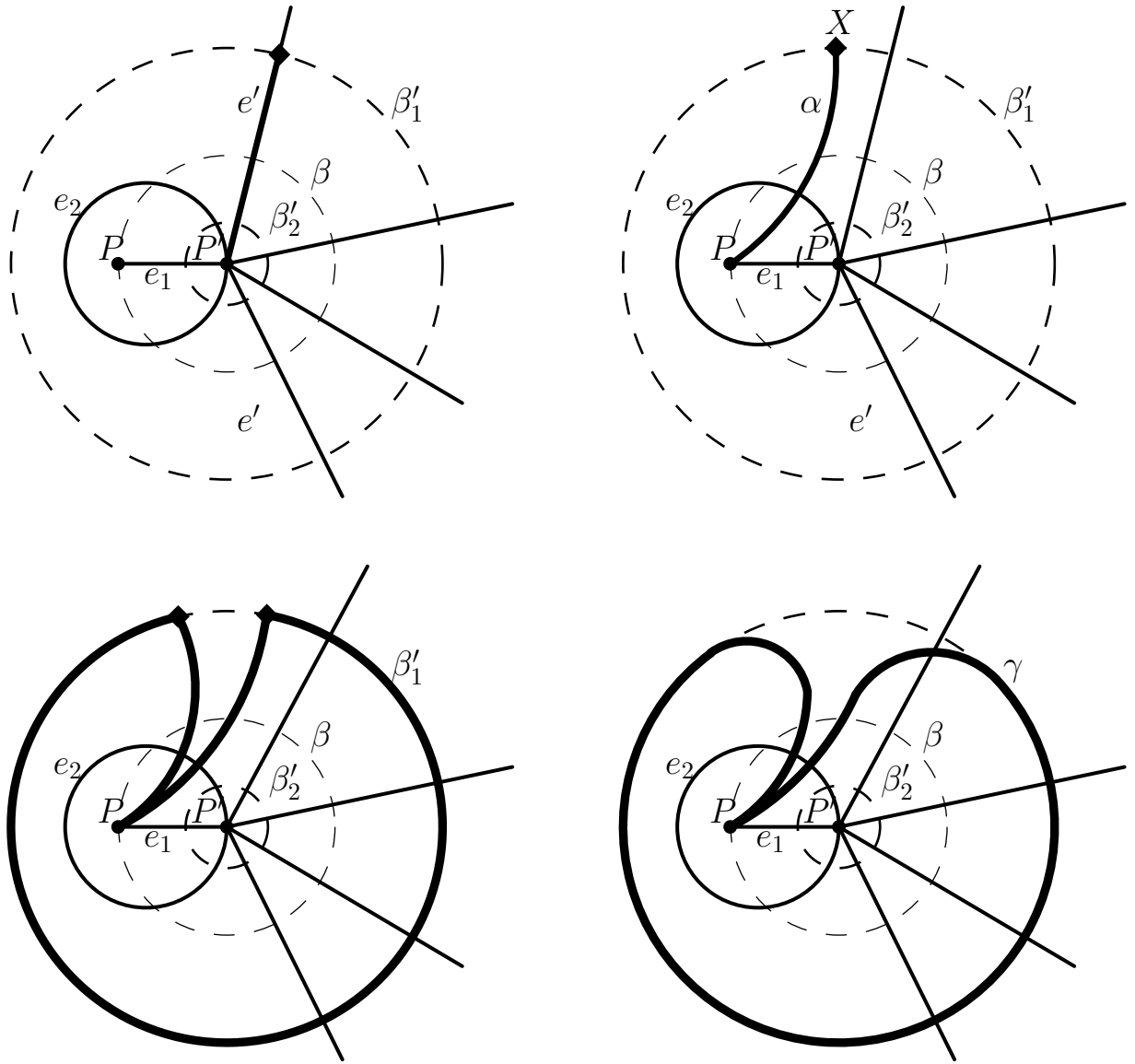


Рис. 2.5. Иллюстрация к доказательству последнего случая утверждения 2.3.3.

рисунок 2.5). Поскольку ребра T смежные с P не пересекают β'_1 , триангуляция T содержит ребра e_1, e_2 , которые содержатся в V и соединяют проколы P, P' и P' с самим собой соответственно (см. рисунок 2.5). Эти ребра ограничивают замкнутый треугольник Δ в T . Рассмотрим замкнутый треугольник Δ' смежный Δ и обозначим e' любую из сторон Δ' отличную от e_2 . Эта сторона пересекает дугу β'_1 , поскольку e' не может быть изотопна e_1 или e_2 . Поэтому найдется точка X на кривой β'_1 , которая содержится внутри Δ' (см. часть рисунка 2.5, расположенную справа сверху). Построим теперь дугу α , которая соединяет P с X , лежит в $\bar{V} \cap (\Delta \cup \Delta')$ и пересекает T только в одной точке

(см. часть рисунка 2.5, расположенную справа вверху). Используя дугу α мы можем, аналогично прошлому случаю, построить простую существенную кривую γ , которая содержится в V , соединяет P с собой и пересекает T не более чем в $\langle \beta', T \rangle + 2$ точках. Две дополнительные точки пересечения возникают из точки пересечения дуги α с ребром e_2 (см. нижнюю часть рисунка 2.5). Как следует из леммы 2.3.4, дуга γ изотопна β , и поэтому выполнены следующие неравенства

$$\langle \beta, T \rangle \leq \langle \beta_1', T \rangle + 2 \leq 3\langle \beta_1', T \rangle.$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку кривая β_1' является существенной и поэтому существенно пересекается с T не менее чем в одной точке. Утверждение 2.3.3 доказано. □

Хотя для $S = S_{0,3}^0$ предыдущая теорема, не верна, теорема 2.2.5 для такой поверхности справедлива, поскольку группа $\text{MCG}(S_{0,3}^0)$ конечная. Поэтому, начиная с этого момента, можем считать, что $S \neq S_{0,3}^0$.

Рассмотрим произвольное ребро β триангуляции T . В силу предыдущего утверждения существует такая простая существенная замкнутая кривая β_0 , что она является частью границы β' трубчатой окрестности β в \bar{S} , и выполнены следующие неравенства:

$$\langle \varphi(\beta), T \rangle \leq 3\langle \varphi(\beta_0), T \rangle \leq \frac{6m\langle \varphi(\beta_0), T \rangle}{\langle \beta_0, T \rangle},$$

где m — максимальная степень вершины триангуляции T . Последнее неравенство в этой цепочке выполняется, поскольку $\langle \beta_0, T \rangle \leq \langle \beta', T \rangle \leq 2m$, что нетрудно понять из рисунка 2.6.

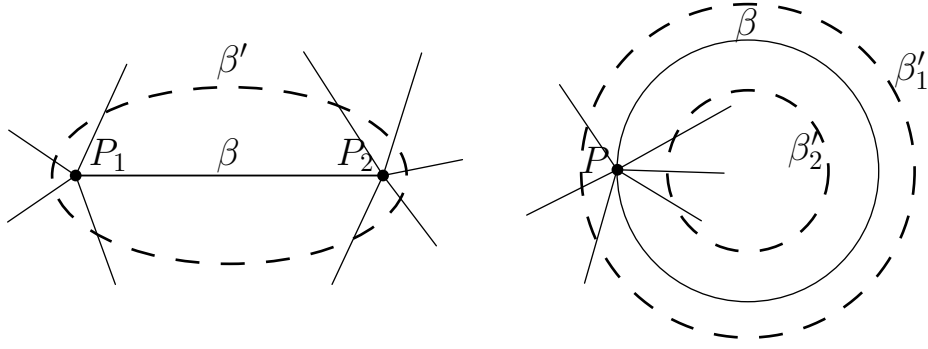


Рис. 2.6. Число пересечений β' с T не превосходит $2m$.

По определению $\|\varphi\|_T = \log \left(\sum_{\beta \in T} \langle \varphi(\beta), T \rangle + 1 \right)$, поэтому мы имеем:

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_T &\leq \log \left(\sum_{\beta \in T} 3 \langle \varphi(\beta_0), T \rangle + 1 \right) \leq \log \left(3 \left(1 + \frac{1}{N} \right) \cdot \sum_{\beta \in T} \langle \varphi(\beta_0), T \rangle \right) \leq \\
 &\leq \log \left(\left(1 + \frac{1}{N} \right) \cdot \sum_{\beta \in T} \frac{6m \langle \varphi(\beta_0), T \rangle}{\langle \beta_0, T \rangle} \right) \leq \\
 &\leq \log \left(6m(N+1) \sup_{\alpha} \left(\frac{\langle \varphi(\alpha), T \rangle}{\langle \alpha, T \rangle} \right) \right) \leq \\
 &\leq \log \left(\sup_{\alpha} \left(\frac{\langle \varphi(\alpha), T \rangle}{\langle \alpha, T \rangle} \right) \right) + \log(6m(N+1)),
 \end{aligned}$$

где N — число ребер в триангуляции T . Второе неравенство в этой цепочке выполнено, поскольку для каждого ребра β триангуляции T кривая β_0 является существенной, и поэтому $\langle \varphi(\beta_0), T \rangle$ больше 1. Тем самым мы доказали неравенство (2.6), где роль константы C_1 играет $\log(6m(N+1))$.

Для того, чтобы доказать неравенство (2.7), нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 2.3.5. Пусть T и T' — идеальные триангуляции поверхности S , α — простая существенная замкнутая кривая на S . Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\langle \alpha, T' \rangle \leq \langle \alpha, T \rangle \cdot (2\langle T', T \rangle + 1).$$

Доказательство. Произотопируем кривую α и триангуляцию T' так, чтобы выполнялись следующие условия:

- α и T , а также T' и T существенно пересекаются,
- α и T' пересекаются трансверсально,
- отсутствуют точки тройного трансверсального пересечения α , T и T' . При этом точки тройного пересечения, в которых пара ребер T и T' совпадает, а α пересекает эти ребра, могут существовать.

Для произвольного треугольника Δ триангуляции T мы обозначим через α_Δ и T'_Δ прообразы α и T' в Δ относительно характеристического отображения φ_Δ этого треугольника. Поскольку α и T , а также T' и T существенно пересекаются, эти прообразы состоят из простых дуг, и каждая дуга либо соединяет различные стороны Δ , либо совпадает с одной из сторон этого треугольника. Легко видеть, что можно так произотопировать α_Δ в Δ , оставляя концы дуг α_Δ неподвижными, что α_Δ и T'_Δ по прежнему будут пересекаться трансверсально, и каждая дуга из α_Δ будет пересекать дугу из T'_Δ не более чем в одной точке.

Обозначим точки пересечения α и T через X_1, \dots, X_n таким образом, чтобы $\alpha_i = [X_i, X_{i+1})$ представляли собой непересекающиеся полуинтервалы в α . Здесь мы полагаем, что $1 \leq i \leq n$ и $X_{n+1} = X_1$. По построению каждый α_i лежит в одном из треугольников Δ триангуляции T , и мы утверждаем, что каждый из этих полуинтервалов пересекает T'_Δ не более чем в $2\langle T', T \rangle + 1$ точках. Действительно, число дуг в T'_Δ , которые не совпадают ни с одной из сторон треугольника Δ не превосходит числа точек пересечения этих дуг со сторонами Δ . В свою очередь, число этих точек не превосходит $2\langle T', T \rangle$ поскольку прообраз точки пересечения триангуляций T' и T при отображении φ_Δ состоит из не более чем двух точек. Для получения правильной оценки нужно добавить 1 к $2\langle T', T \rangle$ поскольку α_i пересекает ровно одну из сторон Δ . Тем самым мы

получаем

$$\langle \alpha, T' \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i, T' \rangle \leq \sum_{i=1}^n (2\langle T', T \rangle + 1) = \langle \alpha, T \rangle \cdot (2\langle T', T \rangle + 1),$$

что и требовалось доказать. \square

Рассмотрим простую существенную замкнутую кривую α на поверхности S и диффеоморфизм $\varphi \in \text{MCG}(S)$. Для тройки $(\varphi(\alpha), \varphi(T), T)$ неравенство из утверждения 2.3.5 записывается следующим образом:

$$\langle \varphi(\alpha), T \rangle \leq \langle \varphi(\alpha), \varphi(T) \rangle \cdot (2\langle T, \varphi(T) \rangle + 1).$$

Поскольку все величины в этом неравенстве являются положительными и $\langle \varphi(\alpha), \varphi(T) \rangle = \langle \alpha, T \rangle$, $\log(2\langle T, \varphi(T) \rangle + 1) \leq \|\varphi\|_T + \log 2$ мы получаем

$$\log \left(\frac{\langle \varphi(\alpha), T \rangle}{\langle \alpha, T \rangle} \right) \leq \|\varphi\|_T + \log 2.$$

Переходя к супремуму по всем простым замкнутым существенным кривым, мы получаем неравенство (2.7), где роль константы C_2 играет $\log 2$. Это завершает доказательство теоремы 2.2.5. \square

Доказательство теоремы 2.2.6. Прежде всего заметим, что для любого $\epsilon > 0$ и произвольной гиперболической структуры σ , лежащей в ϵ -толстой части пространства Тейхмюллера поверхности S отображение $i_\sigma: (\text{MCG}(S), \rho_{L,\sigma}) \rightarrow (\mathcal{T}_\epsilon(S), d_L)$, которое сопоставляет $\varphi \in \text{MCG}(S)$ структуру $\varphi^*(\sigma)$ является квази-изометрией. Действительно действие группы $\text{MCG}(S)$ на $\mathcal{T}_\epsilon(S)$ является кокомпактным (см. [45, утверждение 4.8.]). Поэтому отображение i_σ является $(1, D_\epsilon)$ -квази-изометрией, где D_ϵ — диаметр фактор-пространства $\mathcal{T}_\epsilon(S)/\text{MCG}(S)$ в метрике d_L .

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что сжатая словарная метрика ρ_σ и $\rho_{L,\sigma}$ квази-изометричны. Но поскольку ρ_σ и $\rho_{L,\sigma}$ являются правоинвариантными метриками, для этого достаточно доказать, что функции

сложности zwl_G и $\| \cdot \|_{L,\sigma}$ эквивалентны. Действительно, пусть существуют $K > 1$ и $C > 0$ такие, что следующие неравенства

$$\frac{1}{K} \cdot \text{zwl}_G(\varphi) - C \leq \| \varphi \|_{L,\sigma} \leq K \cdot \text{zwl}_G(\varphi) + C$$

выполняются для любого $\varphi \in \text{MCG}(S)$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) &= \max\{\| \psi\varphi^{-1} \|_{L,\sigma}, \| \varphi\psi^{-1} \|_{L,\sigma}\} \leq K \max\{\text{zwl}_G(\psi\varphi^{-1}), \text{zwl}_G(\varphi\psi^{-1})\} + \\ &+ C \leq K \max\{\rho_G(\varphi, \psi), \rho_G(\psi, \varphi)\} + C = K\rho_G(\varphi, \psi) + C \\ \rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) &= \max\{\| \psi\varphi^{-1} \|_{L,\sigma}, \| \varphi\psi^{-1} \|_{L,\sigma}\} \geq \frac{1}{K} \max\{\text{zwl}_G(\psi\varphi^{-1}), \text{zwl}_G(\varphi\psi^{-1})\} - \\ - C &\geq \frac{1}{K} \max\{\rho_G(\varphi, \psi), \rho_G(\psi, \varphi)\} - C = \frac{1}{K}\rho_G(\varphi, \psi) - C. \end{aligned}$$

Эквивалентность функций zwl_G и $\| \cdot \|_{L,\sigma}$ следует, в свою очередь, из теорем [2.2.2](#), [2.2.5](#).

□

Глава 3

Псевдохарактеры групп кос

3.1. Пространства псевдохарактеров дискретных групп

Какую информацию о группе можно получить, зная ее ограниченные когомологии? Из описанных в разделе 1.6 свойств псевдохарактеров (см. утверждение 1.6.7) следует, что $H_{b,2}^2(G, \mathbb{R}) = 0$ в случае, когда G конечна или абелева. Более того для таких групп ограниченные когомологии во всех размерностях тривиальны. Аналогичное свойство имеет место и для более широкого класса аменабельных групп.

Определение 3.1.1. Группа G называется *аменабельной*, если существует линейный функционал $m: B(G) \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве $B(G)$ ограниченных функций на G , обладающий следующими свойствами:

1. $m(1) = 1$.
2. Если $f(g) \geq 0$ для любого $g \in G$, то $m(f) \geq 0$.
3. $m(L_g f) = m(f)$ для любого $g \in G$ и $f \in B(G)$, где L_g — оператор левого сдвига на элемент g :

$$(L_g f)(h) = f(gh)$$

для любых $f \in B(G)$, $h \in G$.

Теорема 3.1.2 (Траубер). Пусть G — аменабельная группа. Тогда $H_b^*(G, \mathbb{R}) = 0$.

Доказательство. Эта теорема была впервые сформулирована и доказана Филиппом Траубером (см. [60, стр. 246]). Доказательство можно найти в работе [59, теорема 2.1.]. □

Следствие 3.1.3. *Если G — аменабельная группа, то $P(G) = \text{Hom}(G, \mathbb{R})$.*

Обобщение теоремы 3.1.2, которое нам понадобится в дальнейшем было получено Н.Ивановым в работе [4]:

Теорема 3.1.4 (Иванов, [4]). *Пусть H — нормальная аменабельная подгруппа группы G . Тогда отображение $r^*: H_b^*(G/H, \mathbb{R}) \rightarrow H_b^*(G, \mathbb{R})$, индуцированное отображением факторизации $r: G \rightarrow G/H$, является изоморфизмом.*

Важный класс групп, для которых все псевдохарактеры являются гомоморфизмами, составляют решетки в почти полупростых группах Ли высокого ранга. Тривиальность вторых ограниченных когомологий для этих групп была доказана Бургером и Монодом в работе [29].

Теорема 3.1.5 (Бургер, Монод, [29]). *Пусть Γ — решетка в почти простой связной некомпактной вещественной группе Ли G ранга ≥ 2 . Тогда $H_{b,2}^2(\Gamma, \mathbb{R}) = 0$.*

Тем самым для конечнопорожденных аменабельных групп и конечнопорожденных решеток пространство псевдохарактеров конечномерно. Это верно и для многих других интересных классов дискретных групп.

Определение 3.1.6. *Группа G называется ограниченно порожденной, если найдутся элементы $g_1, \dots, g_n \in G$ и натуральное число k , такие что любой элемент $g \in G$ может быть представлен в виде:*

$$g = g_{i_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot g_{i_k}^{l_k},$$

где $1 \leq i_j \leq n$, $l_j \in \mathbb{Z}$, а $j = 1, \dots, k$.

Примером ограниченно порожденных групп служат группы $\text{SL}(n, K)$ при $n \geq 3$, где K — кольцо целых алгебраического числового поля. Ограниченность порожденности $\text{SL}(n, K)$ была доказана Картером и Келлером в работе [31].

Утверждение 3.1.7. Пусть G — ограниченно порожденная группа. Тогда пространство $P(G)$ конечномерно.

Доказательство. Доказательство приведено в работе [59, следствие 3.10]. \square

Интересный класс групп, для которых пространство псевдохарактеров тривиально, представляют равномерно совершенные группы.

Определение 3.1.8. Группа G называется *совершенной*, если любой элемент группы G может быть записан в виде произведения коммутаторов. Если существует число n такое, что любой элемент G может быть записан в виде произведения не более чем n коммутаторов, то группа G называется *равномерно совершенной*.

Примерами равномерно совершенных групп служат специальные линейные группы $SL(n, \mathbb{Z})$ при $n \geq 3$ (см. [83]), симплектические группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ (см. [16]), группа $\text{Homeo}_+(S^1)$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности (см. [56]).

Утверждение 3.1.9. Пусть G — равномерно совершенная группа. Тогда $P(G) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный псевдохарактер $\varphi \in P(G)$. В силу утверждения 1.6.7 для любых $g, h \in G$ выполнено

$$|\varphi([g, h])| \leq D_\varphi.$$

Поскольку G — равномерно совершенная группа, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любой элемент из G представляется в виде произведения не более, чем n коммутаторов. Поэтому для любого $g \in G$ выполнено

$$|\varphi(g)| \leq nD_\varphi.$$

Следовательно псевдохарактер φ является ограниченной функцией на G , и поэтому, в силу утверждения 1.6.5, тождественно равен нулю. \square

Несмотря на приведенные выше примеры, далеко не для всех групп сингулярная часть вторых ограниченных когомологий оказывается конечномерным пространством. Первыми примерами групп G , для которых была доказана бесконечномерность пространства $H_{b,2}^2(\Gamma, \mathbb{R})$, были свободные группы. Этот результат был получен Бруксом в работе [27].

Теорема 3.1.10 (Брукс, [27]). *Пусть F_n — свободная группа с n образующими и $n > 1$. Тогда пространство $P(F_n)$ бесконечномерно.*

Как показали Брукс и Сирис в работе [28], пространства псевдохарактеров фундаментальных групп замкнутых гиперболических поверхностей также имеют бесконечную размерность.

Теорема 3.1.11 (Брукс, Сирис, [28]). *Пусть S_g — замкнутая поверхность рода $g > 1$. Тогда пространство $P(\pi_1(S_g))$ бесконечномерно.*

Развивая идеи и методы Брукса, Фудживара в серии статей [20, 42, 51, 52] доказал бесконечномерность пространств псевдохарактеров для различных классов групп, действующих на гиперболических по Громову пространствах. Для нас особый интерес представляет следующий результат Фудживары, полученный им в совместной работе с Младеном Бествиной [20]:

Теорема 3.1.12 (Бествина, Фудживара, [20]). *Пусть S — замкнутая ориентируемая поверхность с конечным числом проколов, и $H \in \text{MCG}(S)$ — подгруппа группы классов отображений поверхности S , которая не является виртуально-абелевой. Тогда пространство $P(H)$ бесконечномерно.*

Из этой теоремы следует, что пространства псевдохарактеров групп кос B_n при $n \geq 3$ имеют бесконечную размерность.

Следствие 3.1.13. *Пусть B_n — группа кос и $n \geq 3$. Тогда пространство $P(B_n)$ бесконечномерно.*

Доказательство. Сначала докажем это утверждение для случая $n = 3$. Как известно (см. [70, теорема А.2]), фактор B_3 по ее центральной подгруппе изоморфен модулярной группе $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Тем самым $P(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ вкладывается в $P(B_3)$. В свою очередь, модулярная группа является неэлементарной гиперболической группой (см. [1]) и поэтому, в силу работы [42], пространство $P(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ имеет бесконечную размерность. Поэтому $P(B_3)$ также бесконечномерно.

В случае $n > 3$, мы будем рассматривать B_n как $\mathrm{MCG}(D_n^2, \partial D_n^2)$, где D_n^2 — замкнутый диск с n проколами. Диск D_n^2 вкладывается в сферу с n проколами S_n^2 . Вложение $i: D_n^2 \rightarrow S_n^2$ задает гомоморфизм соответствующих групп классов отображений $i_*: \mathrm{MCG}(D_n^2, \partial D_n^2) \rightarrow \mathrm{MCG}(S_n^2)$. Нетрудно проверить (см. [68]), что отображение i_* является сюръективным. Поскольку при $n > 4$ группы $\mathrm{MCG}(S_n^2)$ не являются виртуально абелевыми, то, в силу теоремы 3.1.12, $P(\mathrm{MCG}(S_n^2))$ имеет бесконечную размерность. Из сюръективности гомоморфизма i_* следует, что $P(\mathrm{MCG}(S_n^2))$ вкладывается в $P(\mathrm{MCG}(D_n^2, \partial D_n^2))$. Поэтому пространство $P(B_n)$ также бесконечномерно. \square

Замечание 3.1.14. Отметим, что бесконечномерность пространства $P(P_n)$ была доказана еще в работе [59]. Доказательство заключается в том, что P_n представляется в виде полупрямого произведения (см. [22, следствие 1.8.1]):

$$P_n = F_n \rtimes (F_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes F_2) \dots),$$

где F_n — свободная группа с n образующими. Отсюда, в силу результата Файзиева из работы [11], следует, что пространство $P(P_n)$ имеет в качестве прямого слагаемого пространство $P(F_2)$, которое по теореме Брукса бесконечномерно.

3.2. Операторы на пространствах псевдохарактеров групп кос

Отображениям удаления и добавления нитей, описанным в разделе 1.4, отвечают операторы между пространствами псевдохарактеров групп кос, которые мы сейчас опишем.

Обозначим через ι_{n-1} стандартное вложение $B_{n-1} \rightarrow B_n$, которое переводит артиновские образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ группы B_{n-1} в аналогичные образующие группы B_n . Вложению ι_{n-1} отвечает оператор $I_{n-1} : P(B_n) \rightarrow P(B_{n-1})$. Значение образа $I(\varphi)$ псевдохарактера φ на произвольной косе $\beta \in B_{n-1}$ вычисляется по формуле

$$I(\varphi)(\beta) = \varphi(\iota_{n-1}(\beta)).$$

Операторы I_n не являются инъективными. Псевдохарактеры, лежащие в ядрах этих операторов называются *ядерными*. Пространство ядерных псевдохарактеров на группе кос B_n будем обозначать $KP(B_n)$.

Замечание 3.2.1. Ядерные псевдохарактеры были определены Малютиным в работе [6]. В этой работе он показал, как ядерные псевдохарактеры могут быть использованы для распознавания простых узлов и зацеплений. Краткое изложение этих результатов Малютина будет дано в разделе 3.5.

Используя отображения удаления нитей del_i , следующим образом определим оператор $R_n : P(B_{n-1}) \rightarrow C^1(B_n, \mathbb{R})$:

$$(R_n \varphi)(\beta) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \varphi(\text{del}_i(\beta^{n!})) \quad (3.1)$$

для любой косы $\beta \in B_n$ и $\varphi \in P(B_n)$.

Утверждение 3.2.2. *Оператор R_n переводит псевдохарактеры на B_{n-1} в псевдохарактеры на B_n .*

Доказательство. Рассмотрим группу крашенных кос P_n . В силу того, что отображения del_i , ограниченные на P_n , являются гомоморфизмами, то они ин-

дуцируют отображения псевдохарактеров $\text{del}_i^*: P(P_{n-1}) \rightarrow P(P_n)$. Поскольку P_n — подгруппа конечного индекса в B_n , то для любого n определено отображение трансфера псевдохарактеров $T_{P_n, B_n}: P(P_n) \rightarrow P(B_n)$. Мы покажем, что отображение R_n пропорционально отображению $R'_n = T_{P_n, B_n} \circ \text{del}_1^* \circ t_{n-1}^*$, где t_{n-1} — вложение P_{n-1} в B_{n-1} , а $t_{n-1}^*: P(B_{n-1}) \rightarrow P(P_{n-1})$ — соответствующее отображение псевдохарактеров.

Пусть $c_1, \dots, c_n!$ — представители классов смежности группы P_n в B_n , φ — псевдохарактер на B_{n-1} и β — коса из B_n . По определению трансфера мы имеем:

$$\begin{aligned} (R'_n \varphi)(\beta) &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n!} \varphi(\text{del}_1(c_k \beta^{n!} c_k^{-1})) = \\ &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n!} \varphi((\text{del}_1(c_k) \text{del}_{\pi(c_k)(1)}(\beta^{n!}) \text{del}_1(c_k)^{-1})) = \\ &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n!} \varphi(\text{del}_{\pi(c_k)(1)}(\beta^{n!})) = \frac{1}{n \cdot n!} \sum_{i=1}^n \varphi(\text{del}_i(\beta^{n!})), \end{aligned}$$

где первое равенство в этой цепочке выполнено в силу формулы (1.8), второе равенство имеет место, поскольку φ — псевдохарактер на B_{n-1} , а третье равенство следует из того, что количество тех k , для которых $\pi(c_k)(1) = i$, равно $(n-1)!$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Операторы I_n и R_n были определены Малютиным в работе [5], в которой также указан ряд фактов о структуре пространств $P(B_n)$ и действии операторов I_n , R_n . В работе [102] эти результаты были получены как стандартные следствия следующей теоремы:

Теорема 3.2.3 (Дынников, Шастин). Пусть $P = \bigoplus_{n=2}^{\infty} P(B_n)$ — прямая сумма пространств псевдохарактеров групп кос, $I = \bigoplus_{n=2}^{\infty} I_n$, $R = \bigoplus_{n=2}^{\infty} R_n$ — прямые суммы операторов Малютина. Тогда операторы I и R удовлетворяют соотношению Гейзенберга:

$$IR - RI = \text{id}_P.$$

Доказательство. Пусть φ — произвольный псевдохарактер на B_n . Поскольку псевдохарактер на B_n полностью определяется своим значением на элементах P_n , то для доказательства теоремы нам достаточно показать, что для любой $\beta \in P_n$ выполнено:

$$(IR\varphi)(\beta) - (RI\varphi)(\beta) = \varphi(\beta).$$

Это доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} ((IR)\varphi)(\beta) &= (R\varphi)(\iota_n(\beta)) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(\text{del}_i(\iota_n(\beta))^{(n+1)!}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(\text{del}_i(\iota_n(\beta))) = \sum_{i=1}^n \varphi(\iota_n(\text{del}_i(\beta))) + \varphi(\beta) = \\ &= ((RI)\varphi)(\beta) + \varphi(\beta). \end{aligned}$$

□

Поскольку для любого $\varphi \in P(B_n)$, очевидно, выполнено

$$I^{n-1}\varphi = 0,$$

мы немедленно получаем следующий результат:

Следствие 3.2.4. *Пространство P всех псевдохарактеров на группах кос имеет структуру модуля над алгеброй Вейля, который изоморфен*

$$\mathbb{R}[x] \otimes \left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} KP(B_n) \right),$$

причем изоморфизм на $\mathbb{R} \otimes \left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} KP(B_n) \right) = \bigoplus_{n=2}^{\infty} KP(B_n) \subset X$ можно взять тождественным, и тогда оператору R будет соответствовать умножение на x , а оператору I — дифференцирование d/dx . В частности, имеет место разложение

$$P(B_n) = KP(B_n) \oplus R(KP(B_{n-1})) \oplus R^2(KP(B_{n-2})) \oplus \dots \oplus R^{n-2}(KP(B_2)),$$

оператор R инъективен, а I сюръективен.

Замечание 3.2.5. Разложение

$$P(B_n) = KP(B_n) \oplus R(KP(B_{n-1})) \oplus R^2(KP(B_{n-2})) \oplus \dots \oplus R^{n-2}(KP(B_2))$$

впервые было получено Малютиным в работе [5, предложение 8.5].

Замечание 3.2.6. Пространства ядерных псевдохарактеров $KP(B_n) \neq 0$ при всех $n \geq 2$. В разделе 3.5 мы, следуя работе Малютина [7], опишем конструкцию нетривиального ядерного псевдохарактера на группе кос B_n для каждого $n \geq 2$.

Таким образом, пространство $P(B_n)$ раскладывается в прямую сумму подпространства $KP(B_n)$ ядерных псевдохарактеров и подпространства $R(P(B_{n-1}))$, и для каждого псевдохарактера φ на B_n определена его *ядерная составляющая* φ_{ker} — проекция φ на $P(B_n)$ вдоль $R(P(B_{n-1}))$.

Следствие 3.2.7. *Ядерная составляющая произвольного псевдохарактера $\varphi \in P(B_n)$ равна*

$$\varphi_{\text{ker}} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} R^k I^k \varphi. \quad (3.2)$$

Доказательство. Поскольку имеет место изоморфизм модулей над алгеброй Вейля

$$P \cong \mathbb{R}[x] \otimes \left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} KP(B_n) \right),$$

достаточно проверить указанное соотношение, заменив χ — на многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени $n - 2$, оператор R — на x , а I — на d/dx :

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k} = f(x - x) = f(0).$$

Свободный член $f(0)$ многочлена f — это и есть его «ядерная часть». \square

Заметим, что оператор I^k переводит $P(B_n)$ в $P(B_{n-k})$ для каждого n и представляет собой оператор ограничения на подгруппу при стандартном вложении $B_{n-k} \hookrightarrow B_n$. Оператор R^k , как легко видеть из его определения, действу-

ет на $\varphi \in P(B_n)$ следующим образом:

$$(R^k \varphi)(\beta) = k! \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n+k\}, \\ i_1 < \dots < i_k}} \chi(\text{del}_{i_1, \dots, i_k}(\beta)), \quad (3.3)$$

где $\beta \in P_{n+k}$ — произвольная крашенная коса, а $\text{del}_{i_1, \dots, i_k}$ означает удаление в β нитей с номерами i_1, \dots, i_k . Учитывая сказанное, следствие 3.2.7 представляет собой переформулировку теоремы 2 из работы [6].

В работе [102] описана еще одна серия операторов J_n между пространствами псевдохарактеров групп кос. Конструкция операторов J_n аналогична построению операторов R_n , но использует другой гомоморфизм из P_n в P_{n-1} , который появляется в работе [19] и строится следующим образом.

Пусть $\beta \in P_n$ — крашенная коса. Ее можно представить в виде

$$\beta = \beta_1 \sigma_{n-1}^{\pm 2} \beta_2 \sigma_{n-1}^{\pm 2} \beta_3 \dots,$$

где $\beta_1, \beta_2, \dots \in \iota_{n-1}(B_{n-1})$. Заменим в этом представлении каждое вхождение $\sigma_{n-1}^{\pm 2}$ на $(\sigma_{n-2} \sigma_{n-3} \dots \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2})^{\mp 1}$ и удалим последнюю нить. Полученную косу обозначим через $j_n(\beta)$, см. рис. 3.1.

Утверждение 3.2.8 ([19]). *Указанное выше отображение $j_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ корректно определено и является групповым гомоморфизмом.*

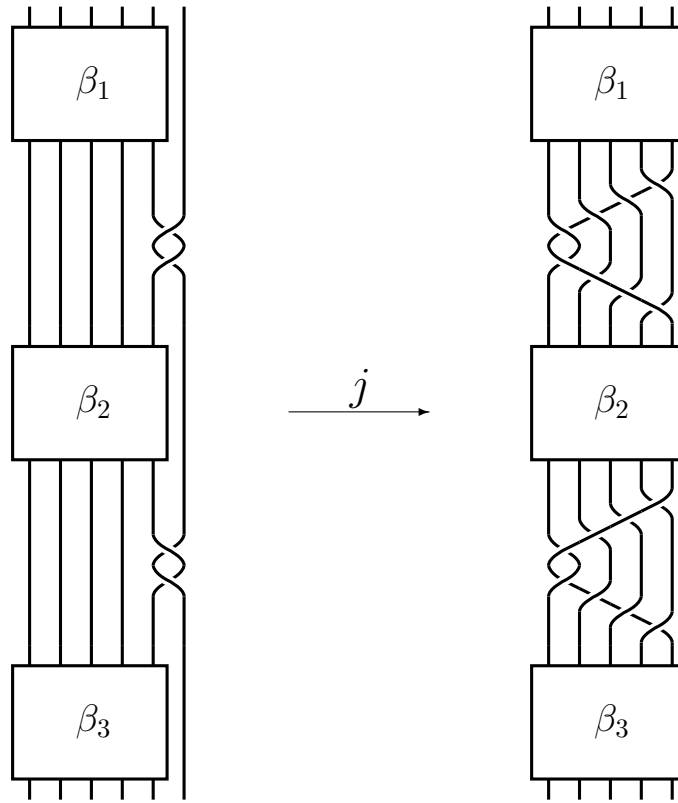
Оператор $J_n : P(B_{n-1}) \rightarrow P(B_n)$, соответствующий гомоморфизму j_n , определяется следующим образом:

$$(J_n \varphi)(\beta) = \frac{1}{n! \cdot (n-1)!} \sum_{k=1}^{n!} \varphi(j_n(c_k \beta^{n!} c_k^{-1})), \quad (3.4)$$

где $\varphi \in P(B_n)$, $\beta \in B_n$, а $c_1, c_2, \dots, c_{n!}$ — произвольные представители классов смежности группы B_n по P_n .

Замечание 3.2.9. Заметим, что из определения гомоморфизма j_n следует, что для любых $\alpha \in B_{n-1}$, $\beta \in P_n$ выполнено

$$j_n(i_{n-1}(\alpha) \beta i_{n-1}(\alpha)^{-1}) = \alpha j_n(\beta) \alpha^{-1}.$$

Рис. 3.1. Гомоморфизм j

Поэтому если в качестве системы представителей $c_1, c_2, \dots, c_{n!}$ классов смежности B_n по P_n взять такую, что $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{n!} \in i_{n-1}(B_n)$, формула для оператора J_n упрощается и принимает следующий вид:

$$(J_n \varphi)(\beta) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \varphi(j_n(c_k \beta^{n!} c_k^{-1})) \quad (3.5)$$

для любых $\varphi \in P(B_n)$, $\beta \in B_n$. В качестве элементов c_1, c_2, \dots, c_n в этой формуле можно взять произвольные представители классов смежности группы B_n по подгруппе, порожденной $i_{n-1}(B_{n-1}) \cup P_n$. В этой работе в качестве таких представителей мы будем использовать элементы $\delta_n^0, \delta_n^1, \dots, \delta_n^{n-1}$, представляющие собой степени косы $\delta_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$. Для этой системы представителей смежных классов формула (3.5) принимает следующий вид:

$$(J_n \varphi)(\beta) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(j_n(\delta_n^k \beta^{n!} \delta_n^{-k})). \quad (3.6)$$

Обозначим через $J: P \rightarrow P$ прямую сумму операторов J_n . В работе [102] были найдены следующие соотношения между операторам I, R, J :

Теорема 3.2.10. *Для произвольного псевдохарактера φ на B_n имеют место следующие равенства*

$$\begin{aligned} RJ\varphi &= JR\varphi, \\ J^2\varphi &= RJ\varphi + 4\varphi(\Delta_n) \exp_{n+2}, \\ JIJ\varphi &= (n+1)J\varphi + 4\varphi(\Delta_n) \exp_{n+1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство следует из того факта, что $\text{del}_i j_n = j_{n-1} \text{del}_i$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$. Эти равенства легко проверить на образующих группы P_n .

Второе равенство следует из того факта, что двукратное применение j_n к косе $\beta \in P_n$ дает тот же результат, что и следующая последовательность действий: удаление последней нити; применение j_{n-1} ; умножение на Δ_{n-2}^{2k} , где k — алгебраическое число пересечений двух последних нитей в косе β . Это, в свою очередь, устанавливается непосредственно из определения операции j_n для представления косы β в виде произведения кос из $P_{n-1} \subset P_n$ и кос вида σ_{n-1}^{2j} , $j \in \mathbb{Z}$.

Третье равенство следует из того, что для любого $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и любой крашеной косы $\beta \in P_n$ выполнено

$$j_n \left(\delta_n^j \iota_{n-1} (j_n(\beta)) \delta_n^{-j} \right) = j_n (\delta_n^j \beta \delta_n^{-j}) \Delta_{n-1}^{2k},$$

где k — алгебраическое число пересечений $(n-j)$ -й и n -й нитей косы β , если $j > 0$, и $k = 0$ при $j = 0$. Для образующих группы P_n это равенство нетрудно проверить непосредственно, а для всех остальных элементов оно следует из того, что обе его части задают гомоморфизм из P_n в P_{n-1} . \square

3.3. Псевдохарактеры в задачах маломерной топологии

При исследовании задач маломерной топологии, динамики, симплектической геометрии в рамках теории ограниченных когомологий бывает полезно

знать не только глобальные свойства пространства псевдохарактеров соответствующей группы, но и иметь представление о свойствах отдельных псевдохарактеров. Изучение отдельных псевдохарактеров оказывается особенно важным в динамике, поскольку возникающие там группы имеют конечномерные пространства псевдохарактеров. Однако и для групп с бесконечномерным пространством псевдохарактеров, поиск конкретных псевдохарактеров и алгоритмов их вычисления представляет важную проблему. Дело в том, что любой псевдохарактер дает нижнюю оценку на коммутаторную длину элементов группы:

Лемма 3.3.1. Пусть G группа, $\varphi \in P(G)$, и $g = [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_n, b_n]$, где $a_i, b_i \in G$ для всех $1 \leq i \leq n$. Тогда $\varphi(g) \leq nD_\varphi$, где D_φ — дефект псевдохарактера φ .

Доказательство. Прямое следствие из утверждения 1.6.7. □

Следствие 3.3.2. Пусть G — группа, $\varphi \in P(G)$, $g \in [G, G]$, и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство: $\varphi(g) > nD_\varphi$. Тогда в любом представлении g в виде произведения коммутаторов содержится более n множителей.

Определение 3.3.3. Пусть G — группа, и $g \in [G, G]$. Тогда коммутаторная длина $\text{cl}(g)$ элемента g — это такое наименьшее число n , что g является произведением k коммутаторов. Для любого элемента $g \in G$, который не содержится в коммутанте, полагаем $\text{cl}(g) = +\infty$.

Стабильная коммутаторная длина $\text{scl}(g)$ элемента g определяется как следующий предел:

$$\text{scl}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{cl}(g^n)}{n}.$$

Для любого элемента g группы G , не лежащего в $[G, G]$, но такого, что существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $g^n \in [G, G]$ полагаем $\text{scl}(g) = \text{scl}(g^n)/n$. Для остальных $h \in G$, то есть элементов представляющих ненулевые классы в $H_1(G, \mathbb{Q})$, полагаем $\text{scl}(h) = +\infty$.

Понятие коммутаторной длины естественным образом возникает в топологии. А именно, если M — топологическое пространство, α — замкнутая петля,

а $[\alpha] \in \pi_1(M)$ соответствующий элемент фундаментальной группы топологического пространства, то $\text{cl}([\alpha])$ — минимальный род $g(S)$ ориентируемой компактной поверхности S с одной компонентой края, затягивающей петлю α в M . Тем самым, если α — несамопересекающаяся петля, $\text{cl}([\alpha])$ дает нижнюю оценку на род вложенной ориентируемой поверхности, затягивающей α . В важном частном случае, когда M — это дополнение до узла K в S^3 , а α — параллель на граничном торе, Дэвид Габай в работе [53] доказал, что коммутаторная длина $\text{cl}([\alpha])$ в точности равна минимальному роду ориентируемой поверхности, затягивающей параллель, т.е. роду узла K .

Стабильная коммутаторная длина элемента фундаментальной группы топологического пространства имеет похожую интерпретацию. А именно, если M — топологическое пространство, α — замкнутая петля, а $[\alpha] \in \pi_1(M)$ соответствующий элемент фундаментальной группы топологического пространства, то $\text{scl}([\alpha]) = \inf g(S)/n(S)$, где инфимум берется по всем связным ориентируемым компактным поверхностям S с одной компонентой края, для которых существует отображение S в M , при котором край поверхности S $n(S)$ раз наматывается на α .

Оказывается, что стабильная коммутаторная длина элементов в группе полностью определяется псевдохарактерами на этой группе. А именно имеет место следующая теорема дуальности, доказанная Баваром в работе [17]:

Теорема 3.3.4 (Бавар, [17]). *Пусть G — произвольная группа. Тогда для любого элемента $g \in [G, G]$ имеет место следующее равенство:*

$$\text{scl}(g) = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in P(G)/H^1(G, \mathbb{R})} \frac{|\varphi(g)|}{D_\varphi}.$$

В силу теоремы Бавара вычисление стабильной коммутаторной длины можно осуществить в группах, для которых явно описано множество псевдохарактеров. Важным примером такой группы служит универсальная накрывающая группы $\text{Homeo}_+(S^1)$. Описанию псевдохарактеров на этой группе будет посвящен следующий раздел этой работы.

3.4. Ограниченный класс Эйлера и число переноса Пуанкаре

Опишем сначала некоторые свойства группы $\text{Homeo}_+(S^1)$. Изложение в этом разделе следует работе [56].

Утверждение 3.4.1. *Группа $\text{Homeo}_+(S^1)$ гомотопически эквивалентна окружности S^1 .*

Из этого утверждения следует, что $\pi_1(\text{Homeo}_+(S^1)) \simeq \mathbb{Z}$. Универсальная накрывающая группы $\text{Homeo}_+(S^1)$ изоморфна $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ — подгруппе $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$, состоящей из гомоморфизмов прямой, коммутирующих с единичным сдвигом. Каждый гомеоморфизм из $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ задает гомеоморфизм \mathbb{R}/\mathbb{Z} , а отождествление $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ определяет гомоморфизм $p: \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$. Возникает точная последовательность групп:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \xrightarrow{p} \text{Homeo}_+(S^1) \longrightarrow 1, \quad (3.7)$$

где $i(1) = s$ — единичный сдвиг на прямой: $s(x) = x + 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Это центральное расширение $\text{Homeo}_+(S^1)$ определяет элемент $[e] \in H^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{Z})$, называемый *классом Эйлера*. Как следует из глубокой теоремы Терстона [94], класс Эйлера является образующей в $H^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{Z})$: $H^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[e]$.

Для центрального расширения (3.7) можно естественным образом указать сечение σ : гомеоморфизму $f \in \text{Homeo}_+(S^1)$ сопоставляется элемент $\sigma(f) \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ такой, что $0 \leq \tilde{g}(0) < 1$. Соответствующий этому сечению целочисленный 2-коцикл c на группе $\text{Homeo}_+(S^1)$ определяется следующим образом:

$$c(f_1, f_2) = (\sigma(f_1 f_2)^{-1} \sigma(f_1) \sigma(f_2))(0),$$

для любых $f_1, f_2 \in \text{Homeo}_+(S^1)$.

Нетрудно проверить, что коцикл c принимает только 2 значения 0 и 1 и поэтому определяет элемент $[e_b] \in H_b^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{Z})$, называемый *ограниченным классом Эйлера*.

Как отмечалось выше, группа $\text{Homeo}_+(S^1)$ является равномерно совершенной. Поэтому $P(\text{Homeo}_+(S^1)) = 0$, и отображение $i_b: H_b^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{R})$ является изоморфизмом.

Теперь опишем пространство псевдохарактеров на группе $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$. В силу теоремы Иванова 3.1.4 отображение $p: \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \text{Homeo}_+(S^1)$ индуцирует изоморфизм $p^*: H_b^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{R}) \rightarrow H_b^2(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R})$. Также имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} P(\text{Homeo}_+(S^1)) & \longrightarrow & H_b^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_b} & H^2(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{R}) \\ \downarrow p^* & & \downarrow p^* & & \downarrow p^* \\ P(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)) & \longrightarrow & H_b^2(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_b} & H^2(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R}) \end{array}$$

Заметим, что из определения класса Эйлера следует, что $p^*([e]) = 0$. Следовательно $p^*(e_b)$ лежит в ядре гомоморфизма $i_b: H_b^2(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R})$ и, в силу утверждения 1.6.6, определяет образующую пространства $P(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1))/H^1(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R})$. Соответствующий этой образующей псевдохарактер τ называется *числом переноса Пуанкаре* и определяется следующим образом:

$$\tau(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} \quad (3.8)$$

для любого $f \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ и для любого $x \in \mathbb{R}$. Существование предела в этой формуле и независимость его от выбора точки x легко следует из того факта, что f коммутирует с единичным сдвигом.

Из формулы (3.8) сразу следует, что на единичном сдвиге s число переноса принимает значение 1. Отсюда нетрудно получить, что $H^1(\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1), \mathbb{R}) = 0$. Действительно, пусть $\psi: \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ — нетривиальный гомоморфизм. Тогда $\psi(s) = c \neq 0$. Действительно, если бы $\psi(i(1)) = 0$, то ψ задавал бы нетривиальный элемент $H^1(\text{Homeo}_+(S^1), \mathbb{R})$. Рассмотрим теперь псевдохарак-

тер $\tau' = c\tau - \psi$. Докажем, что он тождественно равен нулю и тем самым получим противоречие. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$. Поскольку любой элемент группы $\text{Homeo}_+(S^1)$ является коммутатором, то f может быть записан в виде $f = ghg^{-1}h^{-1}s^n$, где $g, h \in \widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$, $n \in \mathbb{N}$. Используя утверждение 1.6.7 и то, что $\tau'(s) = 0$ получаем

$$|\tau'(f)| = |\tau'(ghg^{-1}h^{-1}s^n)| = |\tau'(ghg^{-1}h^{-1}) + \tau'(s^n)| = |\tau'(ghg^{-1}h^{-1})| \leq D_{\tau'}.$$

Следовательно псевдохарактер τ' является ограниченной функцией на группе $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ и поэтому тождественно равен нулю.

Суммируя сказанное выше мы получаем следующее утверждение:

Теорема 3.4.2. *Пространство псевдохарактеров группы $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$ одномерно. Единственным с точностью до умножения нетривиальным псевдохарактером на этой группе является число переноса Пуанкаре.*

Используя число переноса Пуанкаре можно построить нетривиальные псевдохарактеры на группах кос. Эти псевдохарактеры, называемые закрученностями, были исследованы Малютиным в работе [7]. В следующем разделе мы опишем конструкцию этих псевдохарактеров и их основные свойства.

3.5. Закрученность

Сначала опишем конструкцию представления группы кос B_n в группу $\widetilde{\text{Homeo}}_+(S^1)$. Конструкция такого представления принадлежит Терстону и является обобщением конструкции гомоморфизма из группы классов отображений замкнутой гиперболической поверхности в $\text{Homeo}_+(S^1)$, предложенной Нильсенем.

Рассмотрим проколотый диск $D_n^2 = D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$ и введем на нем полную метрику постоянной отрицательной кривизны такую, чтобы край диска был геодезическим в этой метрике. Универсальную накрывающую D_n^2

можно отождествить со связным геодезически выпуклым подмножеством U плоскости Лобачевского \mathbb{H}^2 . Выберем связную компоненту I прообраза края D_n^2 в U . Для каждого гомоморфизма ϕ диска D_n^2 рассмотрим его поднятие до гомеоморфизма $\tilde{\phi}$ накрывающей U , неподвижного на I . Обозначим через \bar{U} замыкание U в $\bar{\mathbb{H}}^2$ — пополнении плоскости Лобачевского абсолютом. Каждый гомеоморфизм $\tilde{\phi}$ продолжается до гомеоморфизма \bar{U} (см. [25]). Кроме того не трудно показать, что индуцированное $\tilde{\phi}$ отображение границы \bar{U} не зависит от класса изотопии гомеоморфизма ϕ . Поскольку каждый $\tilde{\phi}$ является тождественным на \bar{I} , мы получаем гомоморфизм $\rho: B_n \rightarrow \text{Homeo}_+(\partial\bar{U} \setminus \bar{I})$. Заметим, что I является геодезической, а гиперболический сдвиг s вдоль I на длину границы D_n^2 автоморфизмом накрытия, который переводит $\partial\bar{U}$ в себя и коммутирует со всеми гомеоморфизмами $\tilde{\phi}$. Не трудно проверить, что существует гомеоморфизм $f: \partial\bar{U} \setminus \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, переводящий автоморфизм s в единичный сдвиг на прямой. Сопрягая представление ρ гомеоморфизмом f , мы получаем представление $\rho': B_n \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}_+(S^1)}$. Оказывается, что это отображение инъективно, а также, с точностью до сопряжения в группе $\widetilde{\text{Homeo}_+(S^1)}$, не зависит от произвола в выборе гиперболической метрики на D_n^2 и гомеоморфизма f (см. [7]). Тем самым корректно определен прообраз числа переноса Пуанкаре. Этот псевдохарактер на группе B_n называется *закрученностью* и обозначается ω_n . Эти псевдохарактеры не являются тривиальными как показывает следующее утверждение:

Утверждение 3.5.1 (Малютин, [7]). $\omega_n(\Delta_n^2) = 1$

Из описанной выше конструкции нетрудно получить, что закрученность расщепимой косы равна 0. Действительно, рассмотрим произвольную точку p на границе D_n и ее поднятие \tilde{p} в универсальную накрывающую U , такое что $p' \in I$. Пусть коса β является расщепимой, т.е. она может быть представлена словом в артиновских образующих, не содержащем $\sigma_i^{\pm 1}$ для некоторого $i \in 1, \dots, n-1$. Рассмотрим петлю $\alpha \in D_n$ с началом в точке p , пересекающую вещественную ось ровно в двух точках: $\frac{1}{2}$ и $i + \frac{1}{2}$. Очевидно, что при гомео-

морфизме диска φ_β , задаваемом косой β , петля α переходит в изотопную ей петлю. Пусть $\tilde{\alpha}$ — поднятие петли α в U с началом в точке \tilde{p} . Поскольку петля α нетривиальна и не гомотопна границе диска, конец дуги $\tilde{\alpha}$, который мы обозначим p' , содержится в $\partial\bar{U} \setminus \bar{I}$. Поскольку φ_β переводит α в гомотопную петлю, поднятие этого гомеоморфизма в универсальную накрывающую оставляет точку p' на месте. Из формулы (3.8) сразу следует, что для гомеоморфизмов из $\text{Homeo}_+(\partial\bar{U} \setminus \bar{I})$, имеющих неподвижные точки, число переноса Пуанкаре равно нулю. Тем самым $\omega_n(\beta) = 0$.

Поскольку все косы из $i_n(B_{n-1})$ являются расщепимыми мы получаем следующее утверждение:

Утверждение 3.5.2 (Малютин, [7]). *Закрученности являются ядерными псевдохарактерами.*

Из этого свойства закрученностей нетрудно следует, что ω_n не является гомоморфизмом при $n \geq 3$. Действительно $\exp_n(\sigma_1) = 1$ для любого $n \leq 2$, и поэтому $I \exp_n \neq 0$ для всех $n \geq 3$. При $n = 2$ группа кос изоморфна \mathbb{Z} , и поэтому закрученность ω_2 является гомоморфизмом. Отсюда и утверждения 3.5.1 следует, что $\omega_2 = \frac{1}{2} \exp_2$.

Нетрудно также получить и значения для дефектов закрученностей.

Утверждение 3.5.3 (Малютин, [7]). *Дефект ω_n при $n \geq 3$ равен 1.*

В работе [7] Малютин в терминах закрученности сформулировал достаточные условия простоты представленного замкнутой косой зацепления. А именно он доказал следующую теорему:

Теорема 3.5.4 (Малютин, [7]). *Пусть $\beta \in B_n$. Если $|\omega(\beta)| > 1$, то зацепление $\hat{\beta}$ является простым.*

В работе [6] он показал, что аналогичная теорема верна для произвольного ядерного псевдохарактера:

Теорема 3.5.5 (Малютин, [6]). Пусть $\beta \in B_n$ и φ — ядерный псевдохарактер на B_n с дефектом D_φ . Если $|\varphi(\beta)| > D_\varphi$, то зацепление $\widehat{\beta}$ является простым.

Доказательство. Предположим, что зацепление $\widehat{\beta}$ не является простым. Тогда по теореме 1.4.4 существуют такие косы $\alpha \in B_n$, $\gamma_1, \gamma_2 \in B_{n-1}$, что $\beta = \alpha^{-1}\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{-1}\alpha$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(\beta)| &= |\varphi(\alpha^{-1}\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{-1}\alpha)| = |\varphi(\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{-1})| \leq \\ &\leq |\varphi(\gamma_1)| + |\varphi(\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{-1})| + D_\varphi = D_\varphi, \end{aligned}$$

что противоречит условию. □

Для того, чтобы применять теорему Малютина для доказательства простоты зацеплений, нужно уметь строить нетривиальные ядерные псевдохарактеры, а также вычислять значения построенных псевдохарактеров на произвольных косах. Как следует из представленных в разделе 3.2 результатов, задача построения таких псевдохарактеров сводится к построению произвольных нетривиальных псевдохарактеров и последующему вычислению по формуле (3.2) их ядерных составляющих.

Что касается вычисления значений псевдохарактеров, то уже в случае закрученности эта задача не является тривиальной и требует использования специальных алгоритмов из теории групп кос. Прежде чем перейти к описанию способов вычисления закрученности, мы сформулируем следующее важное свойство этого псевдохарактера, доказанное Малютиным в работе [6]:

Теорема 3.5.6 (Малютин, [6]). Закрученность косы на n нитях является рациональным числом со знаменателем, не превосходящим n .

Доказательство. Не приводя подробностей, укажем здесь идею доказательства, которая вполне наглядна. Согласно результату У.Торстона [97], для каждой нетривиальной косы β на n нитях выполнено одно из следующих утверждений:

1. коса β в некоторой степени q совпадает с Δ^{2p} . Такие косы называются *периодическими*;
2. коса β *псевдоаносовская*. Это означает, что для заданного косой β гомеоморфизма сферы S^2 с $n + 1$ проколами, полученной стягиванием края диска D_n в точку, существует пара инвариантных трансверсальных друг другу измеримых слоения с особенностями (называемых *стабильным* и *нестабильным*);
3. коса β *приводима*, т.е. существует нетривиальное семейство окружностей, переводимых гомеоморфизмом φ в себя. Нетривиальность означает, что окружности не параллельны краю диска D_n и не ограничивают дисков, содержащих внутри себя один прокол или не содержат ни одного.

Хорошо известно (см. [57] и приведенные в ней ссылки), что любая периодическая коса из B_n сопряжена некоторой степени одной из кос

$$\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1} \quad \text{или} \quad \sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\dots\sigma_{n-1}.$$

Первая из этих кос является корнем n -й степени из Δ^2 , вторая — корнем степени $n - 1$. Отсюда следует, что q является делителем числа n или $n - 1$. Закрученность периодической косы β , для которой $\beta^q = \Delta^{2p}$, равна, очевидно, p/q .

Если коса β псевдоаносовская, то структуру ее стабильного слоения можно задать с помощью *инвариантного трейн-трека* [21], который по определению представляет собой вложенный в D_n граф T , удовлетворяющий следующим условиям. Ребра графа T должны быть гладкими дугами, все ребра, выходящие из одной вершины, должны иметь общую касательную прямую, причем для каждой вершины должна быть пара ребер, выходящих из нее в противоположные стороны. Каждая компонента дополнения $D_n \setminus (T \cup \partial D)$ должна иметь один или несколько «клювов», т.е. подобластей, находящихся в малой окрестности вершин графа T , ограниченных внутри этих окрестностей двумя касающимися

друг друга отрезками ребер графа T . При подходящем выборе гомеоморфизма φ_β граф T должен под его действием оставаться в своей малой окрестности, причем образы C^1 -гладких путей на нем при гомеоморфизме φ_β должны идти «параллельно» гладким путям на T , т.е. не иметь локальных «складок». Идея проиллюстрирована на рис. 3.2. Если теперь в компоненте Ω множества $D_n \setminus T$,

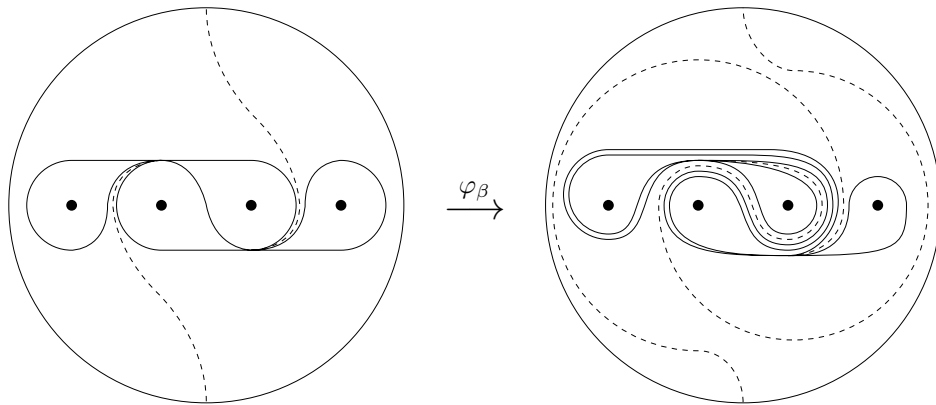


Рис. 3.2. Закрученность косы $\beta = \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$ равна p/q , где $p = 1$, $q = 2$

содержащей край ∂D , провести по одной дуге от края диска до острия каждого «клюва» (отмечены пунктиром на рис. 3.2), то закрученность косы β будет равна p/q , где q — число «клювов», а p указывает, на сколько оборотов больше вокруг отрезка $P_1 P_2$ в сумме делают выбранные дуги после применения гомеоморфизма φ_β . Таким образом, знаменатель закрученности ограничен числом «клювов» в области Ω , которое не превосходит $n - 2$ по соображениям подсчета эйлеровой характеристики диска D_n .

Если коса приводима, то, стянув в точку каждый из дисков, ограниченных окружностями из инвариантного семейства, мы получим гомеоморфизм проколотаго диска с меньшим числом проколов. При этом закрученность соответствующей новому гомеоморфизму косы будет такой же, как у исходной. Таким образом, закрученность приводимой косы равна закрученности некоторой другой косы на меньшем числе нитей. \square

Как следует из доказательства теоремы для вычисления закрученности можно воспользоваться алгоритмом определения геометрического типа косы

и нахождением, в псевдоаносовском случае, инвариантного трейн-трека, как описано в [21].

Другой способ вычисления закрученности возникает из связи закрученности с порядком Деорнуа на группах кос:

Определение 3.5.7. *Антъе Деорнуа* $[\beta]_D$ косы $\beta \in B_n$ называется наибольшее целое k такое, что $\beta \geq \Delta_n^{2k}$, где Δ_n — элемента Гарсайда, квадрат которого равен

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n.$$

Из того, что Δ_n^2 — центральный элемент группы B_n , можно показать следующее.

Утверждение 3.5.8 (Малютин, [7]). *Антъе Деорнуа является квазихарактером с дефектом 1.*

Как показал Малютин в работе [7] псевдохарактер, соответствующий антъе Деорнуа, совпадает с закрученностью.

Более того имеет место следующее неравенство:

Утверждение 3.5.9 (Малютин, [7]). *Для любой косы $\beta \in B_n$ выполнены следующие неравенства:*

$$[\beta]_D \leq \omega(\beta) \leq [\beta]_D + 1.$$

Как следствие этого утверждения и теоремы 3.5.6 мы автоматически получаем следующий результат:

Утверждение 3.5.10. *Закрученность косы $\beta \in B_n$ равна единственному рациональному числу p/q с $|q| \leq n$, лежащему на отрезке между $[\beta^{n^2-n+1}]_D / (n^2 - n + 1)$ и $([\beta^{n^2-n+1}]_D + 1) / (n^2 - n + 1)$*

Тем самым для вычисления закрученности достаточно уметь вычислять антъе Деорнуа. Это делается следующим образом.

Пусть $\beta \in B_n$ — некоторая коса, φ_β — соответствующий β гомеоморфизм стандартного диска D_n^2 с n проколами $\{P_1, \dots, P_n\}$, занумерованными слева направо. Обозначим через γ часть горизонтального диаметра диска D^2 от самой левой точки до P_1 и рассмотрим образ кривой γ при гомеоморфизме φ_β . Учитывая свободу в выборе φ_β , можно считать, что дуга $\varphi_\beta(\gamma)$ имеет наименьшее возможное число пересечений с горизонтальной осью в классе гомотопных себе путей, не проходящих через проколы. Антье Деорнуа отвечает за то, сколько полных оборотов делает кривая $\varphi_\beta(\gamma)$ вокруг отрезка $[P_1, P_n]$ прежде, чем пересечь его. Более точно, пусть γ_1 — это часть кривой $\varphi_\beta(\gamma)$ от крайней левой точки до первого пересечения с $[P_1, P_n]$, а γ_2 — кривая, полученная из γ малой деформацией со сдвигом левого конца вниз по краю диска D_n , правого конца — горизонтально вправо, причем так, чтобы γ_2 обходила прокол P_1 снизу. Тогда индекс пересечения $\text{ind}(\gamma_2, \gamma_1)$ в точности равен Антье Деорнуа $[\beta]_D$.

Если же δ_1 заканчивается в точке P_1 (это возможно, только если $\varphi_\beta(\delta)$ не пересекает внутренности отрезка $[P_1, P_n]$), то при малом шевелении δ_1 или δ_2 мы получим два разных значения для $\text{ind}(\delta_2, \delta_1)$, отличающиеся на единицу. Одно из них всегда равно $[\beta]_D$.

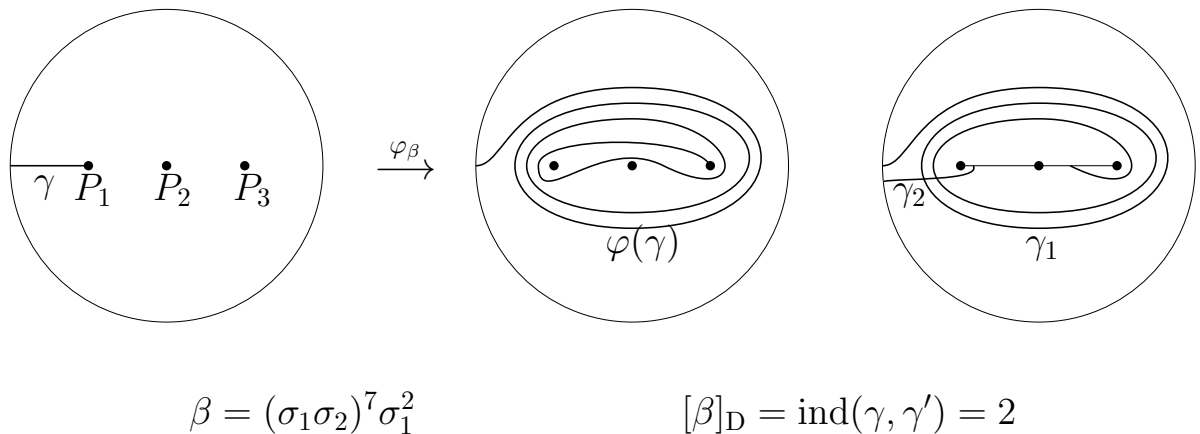


Рис. 3.3. Антье Деорнуа

Другие важные примеры квазихарактеров на группах кос возникают при рассмотрении инвариантов узлов и зацеплений в трехмерной сфере. А именно произвольный инвариант I узлов и зацеплений может рассматриваться как

функция на группе B_∞ следующим образом:

$$I(\beta) = I(\widehat{\beta}),$$

где B_∞ — группа кос на бесконечном числе нитей, т.е. прямой предел групп кос B_n относительно стандартных вложений i_n , а β — произвольная коса из B_∞ . Оказывается, что для некоторых инвариантов, ограничения функции I на группы кос на конечном числе нитей являются квазихарактерами. К числу таких инвариантов относятся инвариант Расмуссена из теории гомологий Хованова (см. [15]), инвариант Ожвата-Сабо из теории гомологий Флоера узлов (см. [26]), обобщенные сигнатуры. Однако, как показано в работе [26], псевдохарактеры, соответствующие инвариантам Расмуссена и Ожвата-Сабо, являются гомоморфизмами. Описанию квази- и псевдохарактеров, возникающих из сигнатур, посвящен следующий раздел этой работы.

3.6. Сигнатуры, представления Бурау и коцикл Мейера

Начнем с основных определений:

Определение 3.6.1. Пусть L — ориентированное зацепление в S^3 . Ориентированная, компактная, связная поверхность $F \in S^3$ называется *поверхностью Зейферта* зацепления L , если $\partial S = L$ и ориентация на крае S совпадает с ориентацией зацепления L .

В силу теоремы, доказанной Франклем и Понтрягиным в [50] и независимо Зейфертом в [90], для любого ориентированного зацепления в S^3 существует поверхность Зейферта.

Определение 3.6.2. Пусть L — ориентированное зацепление в S^3 , F — поверхность Зейферта L , $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — простые кривые на F , образующие базис в $H_1(S, \mathbb{Z})$ (такой набор простых кривых всегда существует). Рассмотрим поле единичных нормалей n к поверхности F и для любой кривой α_i из набора

обозначим через α_i^+ небольшой сдвиг α_k в направлении n . Тогда для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ кривые α_i и α_j^+ не пересекаются, и тем самым определен коэффициент зацепления $\text{lk}(\alpha_i, \alpha_j^+)$. Тогда *матрицей Зейферта* S зацепления L , ассоциированной с поверхностью F и базисом $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, называется матрица размера $m \times m$ с элементами $S_{i,j} = \text{lk}(\alpha_i, \alpha_j^+)$.

Определение 3.6.3. Пусть L — ориентированное зацепление в S^3 , S — его матрица Зейферта, ω — комплексное число по модулю равное 1. Тогда *обобщенной сигнатурой* $\text{sign}_\omega(L)$ зацепления L называется сигнатура следующей эрмитовой матрицы B_ω :

$$B_\omega = (1 - \omega)S + (1 - \bar{\omega})S^T,$$

где S^T — транспонированная матрица S . В случае, когда $\omega = -1$ мы будем использовать вместо $\text{sign}_{-1}(L)$ обозначение $\text{sign}(L)$ и будем называть соответствующее число *сигнатурой* зацепления L .

Определение сигнатуры зацепления было дано в работе Мурасуги [82], обобщенные сигнатуры были определены в работах Тристрама и Левина [72, 98]. В этих работах было доказано, что обобщенные сигнатуры не зависят от выбора матрицы Зейферта, и тем самым являются инвариантами зацеплений.

Используя инвариант sign_ω , можно определить функцию $\text{sign}_{n,\omega}$ на B_n следующим образом:

$$\text{sign}_{n,\omega}(\beta) = \text{sign}_\omega(\widehat{\beta})$$

для любой косы $\beta \in B_n$.

Оказывается, что в случае, когда ω является корнем из 1 функция $\text{sign}_{n,\omega}$ является квазихарактером на группе B_n . Соответствующий этому квазихарактеру ограниченный целочисленный 2-коцикл на B_n возникает как прообраз целочисленного 2-коцикла на симплектической группе при симплектическом представлении B_n — представлении Бурау-Сквайра. Описанию этого представления посвящена следующая часть этого раздела

Определение 3.6.4. Пусть t — формальная переменная, $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ кольцо целочисленных полиномов Лорана от переменной t . Тогда *приведенным представлением Бурау* называется представление $\mathcal{B}_{n,t}: B_n \rightarrow \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ группы кос B_n в группу $\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ обратимых матриц над кольцом $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, при котором артиновские образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ переходят в следующие матрицы:

$$\mathcal{B}_{n,t}(\sigma_1) = \left(\begin{array}{cc|c} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-3} \end{array} \right), \quad \mathcal{B}_{n,t}(\sigma_{n-1}) = \left(\begin{array}{c|cc} I_{n-3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -t \end{array} \right),$$

$$\mathcal{B}_{n,t}(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-2-i} \end{array} \right),$$

где $i \in \{2, \dots, n-2\}$ и I_k обозначает единичную матрицу размера $k \times k$.

Заметим также, что представления $\mathcal{B}_{n,t}$ при разных n можно объединить в одно универсальное. А именно, корректно определено представление $\mathcal{B}_t: B_\infty \rightarrow \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, где B_∞ — группа кос на бесконечном числе нитей, т.е. прямой предел групп кос B_n относительно стандартных вложений i_n , описанных в разделе 1.4, а $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ — прямой предел групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$.

Если теперь ввести формальную переменную s , такую что $s^2 = t$, то матрицы из представлению Бурау группы кос B_n оставляют инвариантной полулинейную форму $\mathrm{Sq}_n(\cdot, \cdot)$ на свободном модуле $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]^{(n-1)}$, заданную следующей

матрицей размера $(n - 1) \times (n - 1)$:

$$\text{Sq}_n = \begin{pmatrix} s + s^{-1} & -s^{-1} & 0 & \vdots \\ -s & s + s^{-1} & -s^{-1} & \vdots \\ 0 & -s & s + s^{-1} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Полулинейность формы $\text{Sq}_n(\cdot, \cdot)$ означает, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}[s, s^{-1}]^{(n-1)}$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполнены следующие равенства:

$$\text{Sq}_n(ka, b) = \text{Sq}_n(a, kb) = k\text{Sq}_n(a, b),$$

$$\text{Sq}_n(sa, b) = s\text{Sq}_n(a, b), \quad \text{Sq}_n(a, sb) = s^{-1}\text{Sq}_n(a, b).$$

Форма $\text{Sq}_n(\cdot, \cdot)$ и доказательство инвариантности этой формы относительно представления Бурау были описаны Сквайром в работе [92].

Если вместо переменной s подставить комплексное число по модулю равное 1, то форма Сквайра $\text{Sq}_n(\cdot, \cdot)$ определяет псевдоэрмитову форму на пространстве \mathbb{C}^{n-1} . Если s не является корнем из единицы степени $2n$ отличным от ± 1 , то форма $\text{Sq}_n(\cdot, \cdot)$ невырождена. Тем самым ее мнимая часть задает симплектическую форму на пространстве \mathbb{R}^{2n-2} , инвариантную относительно представления Бурау. Представления Бурау $\mathcal{B}_{n,\omega}$ рассматриваемое как симплектическое (при значениях параметра ω задающих невырожденную форму Сквайра) будем называть, следуя работе [54], *представлениями Бурау-Сквайра*. Нетрудно понять, что представления Бурау-Сквайра $\mathcal{B}_{n,\omega}$ при разных n , для которых форма Сквайра с параметром ω невырождена, можно также объединить в одно универсальное представление: $\mathcal{B}_\omega: B_\infty \rightarrow \text{Sp}(\infty, \mathbb{R})$. Здесь $\text{Sp}(\infty, \mathbb{R})$ — это прямой предел симплектических групп $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, а представление $\mathcal{B}_\omega: B_\infty \rightarrow \text{Sp}(\infty, \mathbb{R})$ получается из представления Бурау-Сквайра с помощью сопряжения произвольной матрицей, переводящей форму Сквайра в стандартную симплектическую форму.

Используя это симплектическое представление \mathcal{B}_ω для параметра ω равного корню из единицы, Гамбаудо и Жису удалось доказать, что функции sign_ω

для этих значений параметра являются квазихарактерами. Более того они показали, что соответствующий sign_ω 2-коцикл на группе Kos является прообразом известного коцикла Мейера на симплектической группе. Следующее определение коцикла Мейера взято из работы [54].

Определение 3.6.5. Пусть Ω — стандартная симплектическая форма на \mathbb{R}^{2n} , γ_1, γ_2 произвольные элементы группы $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Обозначим через E_{γ_1, γ_2} пересечение образов отображений $\gamma_1^{-1} - \text{id}$ и $\gamma_2 - \text{id}$. Для любого $e \in E_{\gamma_1, \gamma_2}$ рассмотрим пару векторов v_1 и v_2 , таких что $\gamma_1^{-1}(v_1) - v_1 = \gamma_2(v_2) - v_2 = e$ и определим функцию q_{γ_1, γ_2} на E_{γ_1, γ_2} следующим образом:

$$q_{\gamma_1, \gamma_2}(e) = \Omega(v_1 + v_2, e).$$

Нетрудно проверить, что данная функция не зависит от выбора v_1 и v_2 и определяет квадратичную форму на E_{γ_1, γ_2} . *Коциклом Мейера* на группе $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ называется функция $\text{Meyer}_n(\cdot, \cdot): \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}$, которая на паре (γ_1, γ_2) принимает значение равное сигнатуре квадратичной формы q_{γ_1, γ_2} .

Нетрудно показать, что функция $\text{Meyer}_n(\cdot, \cdot)$ является целочисленным ограниченным 2-коциклом на группе $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, причем $|\text{Meyer}_n(\gamma_1, \gamma_2)| \leq 2n$ для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Кроме того коцикл Мейера инвариантен относительно сопряжения:

$$\text{Meyer}_n(\gamma^{-1}\gamma_1\gamma, \gamma^{-1}\gamma_2\gamma) = \text{Meyer}_n(\gamma_1, \gamma_2)$$

для любых $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Заметим также, что для любых $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ выполнено

$$\text{Meyer}_n(\gamma_1, \gamma_2) = \text{Meyer}_{n+1}(\gamma'_1, \gamma'_2),$$

где $\gamma'_1, \gamma'_2 \in \text{Sp}(2n+2, \mathbb{R})$ — образы элементов γ_1, γ_2 при стандартном вложении $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ в $\text{Sp}(2n+2, \mathbb{R})$. Тем самым можно говорить об универсальном коцикле Мейера $\text{Meyer}(\cdot, \cdot)$ на группе $\text{Sp}(\infty, \mathbb{R})$. Как доказали Гамабудо и Жис

в работе [54] прообраз коцикла Мейера при отображении Бурау \mathcal{B}_ω выражается через функцию sign_ω . А именно верна следующая теорема:

Теорема 3.6.6 (Гамбаудо, Жис, [54]). *Пусть $\omega \neq 1$ — комплексный корень из 1. Тогда для любых α и $\beta \in B_\infty$ выполнено следующее равенство:*

$$\text{sign}_\omega(\alpha\beta) - \text{sign}_\omega(\alpha) - \text{sign}_\omega(\beta) = -\text{Meyer}(\mathcal{B}_\omega(\alpha), \mathcal{B}_\omega(\beta)).$$

Следствие 3.6.7 (Гамбаудо, Жис, [54]). *Пусть $\omega \neq 1$ — комплексный корень из 1. Тогда функция $\text{sign}_{n,\omega}$ является квазихарактером на группе B_n . Кроме того дефект $\text{sign}_{n,\omega}$ не превосходит $2n$.*

Псевдохарактер на B_n , соответствующий $\text{sign}_{n,\omega}$, мы будем обозначать $\overline{\text{sign}}_{n,\omega}$.

Также как и в случае закрученности, из определения псевдохарактеров $\overline{\text{sign}}_{n,\omega}$ не очень понятно, как эффективно вычислять значения $\overline{\text{sign}}_{n,\omega}$ на конкретных косах. В следующем разделе мы приведем способ вычисления этих псевдохарактеров, описанный в работе [102].

3.7. Вычисление сигнатур

Здесь мы укажем практический способ вычислить $\overline{\text{sign}}(\beta)$. Пусть β — произвольная коса, w — некоторое представляющее ее слово в артиновских образующих σ_i :

$$w = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_m}^{\epsilon_m}, \quad \epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{-1, 1\}.$$

Положим $(i_{k+2m}, \epsilon_{k+2m}) = (i_{k+m}, \epsilon_{k+m}) = (i_k, \epsilon_k)$ для всех $k = 1, \dots, m$. Для каждого $k = 1, \dots, 2m$ будем обозначать через k' минимальное целое, такое что

$i_{k'} = i_k, k' > k$. Составим матрицу $A_w = (a_{kl})_{k,l=1,\dots,2m}$ по следующему правилу:

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } l \leq m, k = l', \epsilon_k = 1, \\ 1, & \text{если } k = l \leq m, \epsilon_k = \epsilon_{k'} = -1, \\ 1, & \text{если } k \leq m, k < l < k' < l', i_k = i_l + 1, \\ -1, & \text{если } k \leq m, l = k', \epsilon_l = -1, \\ -1, & \text{если } k = l \leq m, \epsilon_k = \epsilon_{k'} = 1, \\ -1, & \text{если } l \leq m, l < k < l' < k', i_k = i_l + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее, положим

$$B_w(t) = \begin{pmatrix} 1_m & \frac{1}{t} \cdot 1_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1_m \\ t \cdot 1_m \end{pmatrix},$$

где 1_m обозначает единичную матрицу размера $m \times m$, и

$$S_w(t) = B_w(t) + B_w(1/t)^T.$$

Очевидно, что при $t \in \mathbb{C}, |t| = 1$, матрица $S_w(t)$ эрмитова. Через $\text{sign}(S_w(t))$ мы обозначим ее сигнатуру — разность положительного и отрицательного индексов инерции.

Утверждение 3.7.1. *В обозначениях выше имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \text{sign}(\beta^s) &= \sum_{t^s=1} \text{sign}(S_w(t)), \\ \overline{\text{sign}}(\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}(S_w(e^{i\phi})) d\phi. \end{aligned}$$

Доказательство. Второе равенство следует из первого, так как функция $\text{sign}(S_w(t))$ на окружности $|t| = 1$ кусочно постоянна и имеет лишь конечное число точек разрыва.

Докажем первое равенство. Пусть

$$S_w(t) = tS_w^+ + \frac{1}{t}S_w^- + S_w^0,$$

где S_w^+ , S_w^- , S_w^0 — числовые матрицы. Тогда матрица

$$T \otimes S_w^+ + T^{-1} \otimes S_w^- + 1_s \otimes S_w^0, \quad (3.9)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица циклической перестановки длины s , а « \otimes » обозначает произведение Кронекера, является матрицей Зейферта для замыкания косы β^s при подходящем выборе поверхности Зейферта и порождающей системы циклов. А именно, поверхность Зейферта строится с помощью стандартной процедуры (см., например, [81]) — из дисков по числу нитей косы (ровно столько будет окружностей Зейферта) и соединяющих их ленточек по числу пересечений на диаграмме косы. В качестве порождающих циклов берутся обходы вокруг областей, на которые диаграмма замыкания косы разбивает плоскость (кроме центральной и внешней) см. рис. 3.4 справа. Циклы нумеруются в соответствии с порядком пересечений, находящихся в их «вершине», см. рис. 3.4 слева.

Эти циклы не образуют базиса в первых гомологиях поверхности Зейферта, но они их порождают. Линейная зависимость циклов не влияет на сигнатуру матрицы пересечения.

Замена матрицы T на подобную ей диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/s} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{4\pi i/s} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{2(s-1)\pi i/s} \end{pmatrix}$$

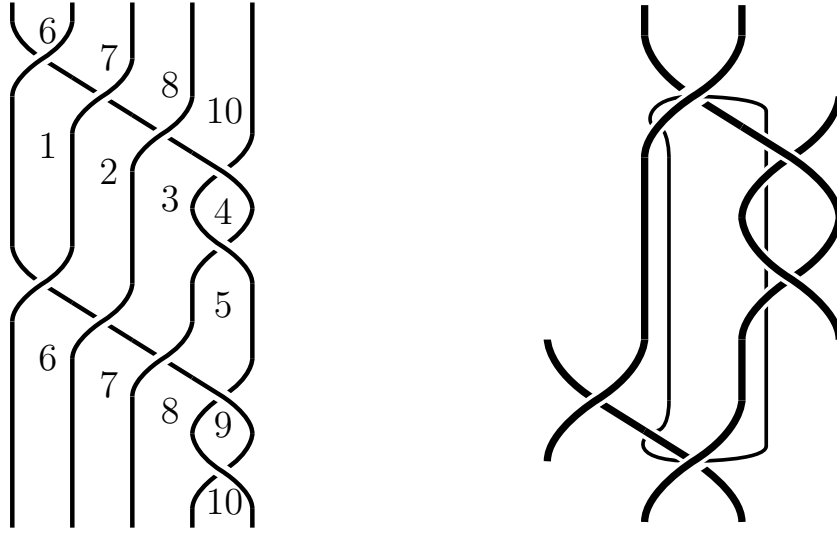


Рис. 3.4. Циклы на стандартной поверхности Зейферта

не меняет сигнатуры матрицы (3.9) и приводит ее к виду прямой суммы матриц $S_w(1), S_w(e^{2\pi i/s}, \dots, S_w(2(s-1)\pi i/s)$, откуда следует доказываемое равенство. \square

Замечание 3.7.2. Вычисление $\overline{\text{sign}}_\omega$ при $\omega \neq -1$ производится аналогично. А именно имеют место следующие равенства:

$$\text{sign}_\omega(\beta^s) = \sum_{t^s=1} \text{sign}(S_w(t, \omega)),$$

$$\overline{\text{sign}}_\omega(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}(S_w(e^{i\phi}, \omega)) d\phi,$$

где матрица $S_w(t, \omega)$ имеет следующий вид:

$$S_w(t, \omega) = (1 - \omega)B_w(t) + (1 - \bar{\omega})B_w(1/t)^T.$$

Приведем пример вычисления сигнатуры косы на пяти нитях. Пусть коса

β представлена словом $w = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4^{-2}$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 + t & -1 + \frac{1}{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + t & -1 + \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 + t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{t} + t & -1 + \frac{1}{t} & 0 & 0 & 0 \\ -1 + t & -2 + \frac{1}{t} + t & -1 + \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & -1 + t & -2 + \frac{1}{t} + t & 0 & -1 + \frac{1}{t} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 - \frac{1}{t} \\ 0 & 0 & -1 + t & -1 - t & 2 \end{pmatrix}$$

Сигнатура матрицы $S_w(e^{i\phi})$ равна

$$\text{sign } S_w(e^{i\phi}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi \in \left[0, \frac{\pi - \arccos(2(\sqrt{2} - 1))}{2}\right) \cup \\ & \cup \left(\frac{3\pi + \arccos(2(\sqrt{2} - 1))}{2}, 2\pi\right], \\ -1, & \text{если } \phi \in \left(\frac{\pi - \arccos(2(\sqrt{2} - 1))}{2}, \frac{3\pi + \arccos(2(\sqrt{2} - 1))}{2}\right). \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\overline{\text{sign}}(\beta) = -\frac{\arccos(2(\sqrt{2} - 1))}{\pi}.$$

3.8. Основные результаты

В силу следствия 3.2.4 псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ единственным образом раскладывается в сумму псевдохарактеров из пространств $R^k KP(B_{n-k})$, где $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Следующая лемма дает описание компонент этого разложения:

Лемма 3.8.1. *Псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ раскладывается в следующую сумму:*

$$\overline{\text{sign}}_n = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} R^k (\overline{\text{sign}}_{n-k})_{\text{ker}}, \quad (3.10)$$

где $(\overline{\text{sign}}_j)_{\text{ker}}$ — ядерная часть псевдохарактера $\overline{\text{sign}}_j$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из того, что равенство $\overline{\text{sign}}_n(i_{n-1}\beta) = \overline{\text{sign}}_{n-1}(\beta)$ выполняется для любого $n \geq 2$ и для любой косы $\beta \in B_{n-1}$. \square

В работе [5] Малютин сформулировал задачу определить количество ненулевых компонент в разложении $\overline{\text{sign}}_n$ по подпространствам $R^k KP(B_{n-k})$ (в работе [5] он называет количество таких компонент *рангом* псевдохарактера) и найти наибольшее $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, для которого компонента $\overline{\text{sign}}_n$, отвечающая подпространству $R^{n-j} KP(B_j)$, ненулевая (в работе [5] Малютин называет эту величину *степенью* псевдохарактера). Следующая теорема, доказанная в работе [102], вместе с леммой 3.8.1 дает ответ на этот вопрос Малютина.

Теорема 3.8.2. *Псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ имеет нетривиальную ядерную составляющую для всех $n \geq 2$.*

Доказательство. Достаточно показать, что ядерная часть псевдохарактера $\overline{\text{sign}}_n$ не равна нулю на некоторой косе. Мы сейчас покажем, что в качестве такой косы годится $\Delta_n^2 \in B_n$. При $n = 2$ псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ совпадает с экспоненциальной суммой и является ядерным, $\overline{\text{sign}}_2(\Delta_2^2) = -2$. Далее мы предполагаем $n > 2$.

Замыкание косы Δ_n^{2k} есть $(n, 2kn)$ -торическое зацепление. Сигнатуры всех торических зацеплений вычислены в [58], где для интересующего нас случая дан следующий ответ:

$$\text{sign}_n(\Delta_n^{2k}) = \begin{cases} 1 - n^2, & \text{если } k = 2, \\ \text{sign}(\Delta_n^{2k-4}) + 1 - n^2, & \text{если } k > 2, n \text{ нечетное,} \\ \text{sign}(\Delta_n^{2k-4}) - n^2, & \text{если } k > 2, n \text{ четное.} \end{cases}$$

Отсюда немедленно получаем

$$\overline{\text{sign}}_n(\Delta_n^2) = \begin{cases} \frac{1 - n^2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{-n^2}{2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

При удалении любых k нитей в косе Δ_n^2 получается коса Δ_{n-k}^2 , а добавление не пересекающихся с другими нитей k любой косе не меняет сигнатуры ее

замыкания. Отсюда, применяя формулы (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned}
\overline{\text{sign}}_{\ker}(\Delta_n^2) &= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n}{k} \overline{\text{sign}}(\Delta_{n-k}^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \overline{\text{sign}}(\Delta_{n-k}^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \overline{\text{sign}}(\Delta_k^2) = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{-k^2}{2} - \frac{(-1)^n}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} = \\
&= 0 - \frac{(-1)^n}{2} 2^{n-1} = -(-2)^{n-2} \neq 0.
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.8.3. Для любого $n \leq 2$ ранг и степень псевдохарактера $\overline{\text{sign}}_n$ равны n и $n - 2$ соответственно.

Доказательство. Прямое следствие теоремы 3.8.2 и леммы 3.8.1. □

Несмотря на то, что определения закрученностей ω_n и сигнатур $\overline{\text{sign}}_n$ существенно различаются, в случае $n = 3$ между этими псевдохарактерами имеется нетривиальное соотношение:

Теорема 3.8.4. На группе B_3 псевдохарактер $\overline{\text{sign}}$ раскладывается в линейную комбинацию закрученности и экспоненциальной суммы:

$$\overline{\text{sign}} = 2 \cdot \omega - \text{exp}_3. \quad (3.11)$$

Доказательство. Утверждение следует из результатов работ [54, 67] (см. [67, замечание на стр. 20]). □

Из определения оператора R и того факта, что $\omega_2 = \frac{1}{2} \text{exp}_2$ нетрудно получить, что для любого $n \geq 2$ выполнено равенство:

$$R^{n-2} \omega_2 = \frac{(n-2)!}{2} \text{exp}_n.$$

Используя это равенство при $n = 3$ формулу (3.11) из предыдущей теоремы можно переписать в следующем виде:

$$\overline{\text{sign}} = 2 \cdot \omega - 2R\omega_2. \quad (3.12)$$

В работе [5] Малютин поставил вопрос существуют ли другие нетривиальные зависимости между псевдохарактерами, которые можно получить, применяя операторы R и I к закрученностям и сигнатурам. В работе [102] мы определяем понятие псевдохарактеров *типа закрученности* как псевдохарактеры, которые можно получить, применяя операторы R , I и J к закрученностям, и доказываем следующее утверждение:

Теорема 3.8.5. *При $n \geq 4$ псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ линейно независим от всех псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов R и I .*

При $n \geq 5$ псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ линейно независим от всех псевдохарактеров типа закрученности. Кроме того, при $n = 5$ этот псевдохарактер независим от псевдохарактеров типа закрученности и всех других псевдохарактеров, полученных применением оператора Малютина R к псевдохарактерам на B_4 .

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится одно вспомогательное утверждение и следствие из него:

Утверждение 3.8.6. *Для любых $k, n \geq 2$ имеет место следующее соотношение:*

$$I^k J\omega_{n+k-1} - IJ\omega_n = -\omega_n.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3.6). Пусть $\beta \in P_n$ — произвольная крашенная коса. Обозначим через β' и β'' косы $\iota_n(\beta) \in B_{n+1}$ и $(\iota_{n+k-1} \circ \dots \circ \iota_n)(\beta) \in B_{n+k}$ соответственно. Для $i = 0, \dots, k-1$ коса $\delta_{n+k}^i \beta'' \delta_{n+k}^{-i}$ представляет собой косу β , к которой слева добавили i нитей и справа $k-i$ нитей. Поэтому

коса $j_{n+k}(\delta_{n+k}^i \beta'' \delta_{n+k}^{-i})$, полученная из $\delta_{n+k}^i \beta'' \delta_{n+k}^{-i}$ удалением последней, ни с чем не зацепленной, нити, будет расщепимой, а ее закрученность нулевой.

Коса $\delta_{n+k}^{k-1+i} \beta'' \delta_{n+k}^{-(k-1+i)}$ при $i = 1, 2, \dots, n$ получена из $\delta_{n+1}^i \beta' \delta_{n+1}^{-i}$ заменой i -й нити на k параллельных нитей. То же верно и для кос $j_{n+k}(\delta_{n+k}^{k-1+i} \beta'' \delta_{n+k}^{-(k-1+i)})$ и $j_{n+1}(\delta_{n+1}^i \beta' \delta_{n+1}^{-i})$. При замене в косе на $n \geq 2$ нитях одной нити на несколько параллельных (или даже на любую косу) закрученность не изменяется. Отсюда получаем

$$(\omega \circ j_{n+k})(\delta_{n+k}^{k-1+i} \beta'' \delta_{n+k}^{-(k-1+i)}) = (\omega \circ j_{n+1})(\delta_{n+1}^i \beta' \delta_{n+1}^{-i}).$$

Наконец, коса $j_{n+1}(\beta')$ совпадает с β , откуда $(\omega \circ j_{n+1})(\beta') = \omega(\beta)$. Таким образом, мы имеем

$$(J\omega_n)(\beta') = (J\omega_{n+k-1})(\beta'') + \omega(\beta),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3.8.7. *Пространство псевдохарактеров типа закрученности на B_n порождается псевдохарактерами ω_n , $J\omega_{n-1}$, $IJ\omega_n$ и псевдохарактерами вида $R\varphi$, где φ — псевдохарактер типа закрученности на B_{n-1} .*

Доказательство. Обозначим через T_n подпространство в $P(B_n)$, определяемое рекурсивно:

$$T_2 = P(B_2) = \langle \exp_2 \rangle, \quad T_n = R(T_{n-1}) + \langle \omega_n, J\omega_{n-1}, IJ\omega_n \rangle, \quad n = 3, 4, \dots$$

По построению T_n не содержит ничего, кроме псевдохарактеров типа закрученности. Для доказательства теоремы достаточно установить, что прямая сумма всех T_n , $n = 2, 3, \dots$, инвариантна относительно R , I и J .

Для R это выполнено по построению. Для J и I индукцией по n доказы-

ваем, что $J(T_n) \subset T_{n+1}$, $I(T_n) \subset T_{n-1}$ (при $n = 2$ это очевидно):

$$\begin{aligned} J(T_n) &= JR(T_{n-1}) + \langle J\omega_n, J^2\omega_{n-1}, JIJ\omega_n \rangle = RJ(T_{n-1}) + \langle J\omega_n, J^2\omega_{n-1}, JIJ\omega_n \rangle \subset \\ &\subset RT_n + \langle J\omega_n, RS\omega_{n-1}, \exp_{n+1} \rangle \subset T_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(T_n) &= IR(T_{n-1}) + \langle I\omega_n, IJ\omega_{n-1}, I^2J\omega_n \rangle \subset RI(T_{n-1}) + T_{n-1} + \langle IJ\omega_{n-1}, \omega_{n-1} \rangle \subset \\ &\subset R(T_{n-2}) + T_{n-1} \subset T_{n-1}. \end{aligned}$$

Описанные выше формулы верны в силу соотношений на операторы I, R, J из теорем 3.2.3, 3.2.10 и предыдущего утверждения. \square

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим следующие косы $\beta_0 \in B_4$
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in B_5$:

$$\beta_0 = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-2}\sigma_3\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^{-1}\sigma_2^2\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1,$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sigma_3^2(\sigma_2\sigma_1^{-1})^2\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}(\sigma_4\sigma_3^{-1})^3\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2\sigma_1\sigma_3^{-2}\sigma_2\sigma_3 \times \\ &\times (\sigma_3\sigma_4^{-1})^3\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_4^2\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_4\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-2} \times \\ &\times \sigma_3^{-1}\sigma_4\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_4\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_4\sigma_3^{-1}\sigma_4^2\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-2}\sigma_3^{-1}\sigma_4\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-2}\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_4^2\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-2}\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-2}\sigma_3 \times \\ &\times \sigma_4^4\sigma_3^{-1}\sigma_2^2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-1}. \end{aligned}$$

Нетрудно напрямую проверить, что эти косы являются брунновыми, т.е. превращаются в тривиальные косы при удалении любой из нитей. Поэтому значения всех псевдохарактеров из $R(P(B_n))$ на этих косах равны нулю. При $n = 4$ мы имеем:

$$\overline{\text{sign}}_4(\beta_0) = -2, \quad \omega_4(\beta_0) = 0.$$

Отсюда сразу следует первая часть утверждения теоремы.

При $n = 5$ значения интересующих нас псевдохарактеров, вычисленные с

помощью описанных выше процедур, приведены в таблице:

	ω_5	$J\omega_4$	$IJ\omega_5$	$\overline{\text{sign}}$
β_1	0	3	2	0
β_2	0	-1	-1	-2
β_3	0	4	4	-2

из которой следует, что псевдохарактер $\overline{\text{sign}}$ линейно независим от остальных.

Тем самым, утверждение теоремы доказано для $n = 5$.

Для доказательства утверждения при $n > 5$ заметим, что оператор I переводит псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ в $\overline{\text{sign}}_{n-1}$, а псевдохарактеры типа закрученности — в псевдохарактеры типа закрученности. Поэтому линейное выражение псевдохарактера $\overline{\text{sign}}_n$ через псевдохарактеры типа закрученности при $n > 5$ влекло бы такое и при $n = 5$, что невозможно, как доказано выше.

□

Заключение

В этом разделе мы опишем возможные обобщения полученных в работе результатов и направления дальнейших исследований.

Теорема 2.2.6 о квазиизометричности сжатой словарной метрики и метрики Тейхмюллера для групп $MCG(S)$ были доказана в предположении, что исследуемая поверхность S имеет непустое множество проколов. Возникает естественный вопрос

Вопрос 1. Верна ли теорема 2.2.6 для случая замкнутых поверхностей?

Из доказательства теоремы 2.2.6 ясно, что этот вопрос тесно связан со следующей задачей:

Задача 1. Построить аналог функции матричной сложности C_T для групп классов отображений замкнутых поверхностей и доказать для нее теорему аналогичную теореме Дынникова 2.2.2.

Для построения такой функции сложности вместо идеальных триангуляций можно было бы использовать трейн-треки или максимальные системы попарно неизотопных и непересекающихся простых кривых (так называемые «разбиения на панты»).

В теореме 3.8.5 доказана независимость сигнатур от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов R , I и J . Тем не менее остался неисследованным следующий вопрос:

Вопрос 2. Пусть $n > 2$. Представляется ли псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_n$ в виде линейной комбинации псевдохарактеров, получаемых из закрученностей и $\overline{\text{sign}}_k$ (при $k < n$) применением операторов R , I и J ?

Кроме того для группы кос B_4 остается открытым вопрос о соотношении между $\overline{\text{sign}}_4$ и псевдохарактерами, получаемыми из закрученностей: ω_4 , $IJ\omega_4$, $J\omega_3$, $R\omega_3$, $R^2\omega_2$.

Вопрос 3. Представляется ли псевдохарактер $\overline{\text{sign}}_4$ в виде линейной комбинации $\omega_4, IJ\omega_4, J\omega_3, R\omega_3, R^2\omega_2$?

Литература

Список литературы

- [1] Балльман В. и др. Гиперболические группы, по Михаилу Грому. – Birkhäuser Boston, 1990.
- [2] Браун К. С. Когомологии групп. – 1987.
- [3] Дынников И. А. Алгоритмы распознавания в теории узлов //Успехи математических наук. – 2003. – Т. 58. – №. 6 (354. – С. 45-92.
- [4] Иванов Н. В. Основания теории ограниченных когомологий //Записки научных семинаров ПОМИ. – 1985. – Т. 143. – №. 0. – С. 69-109.
- [5] Малютин А. В. Операторы пространств псевдохарактеров групп кос //Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21. – №. 2. – С. 136-165.
- [6] Малютин А. В. Псевдохарактеры групп кос и простота зацеплений //Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21. – №. 2. – С. 113-135.
- [7] Малютин А. В. Закрученность (замкнутых) кос //Алгебра и анализ. – 2004. – Т. 16. – №. 5. – С. 59-91.
- [8] Малютин А. В., Нецветаев Н. Ю. Порядок Деорнуа на группе кос и преобразования замкнутых кос //Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15. – №. 3. – С. 170-187.
- [9] Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. – 1986.
- [10] Спрингер Д. Введение в теорию римановых поверхностей. – 1960.
- [11] Файзиев В. А. Псевдохарактеры на полупрямых произведениях полугрупп //Математические заметки. – 1993. – Т. 53. – №. 2. – С. 132-139.
- [12] Alexander J. W., Briggs G. B. On types of knotted curves //Annals of Mathematics. – 1926. – С. 562-586.
- [13] Artin E. Theorie der Zöpfe //Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. – Springer Berlin/Heidelberg, 1925. – Т. 4. – №. 1. – С. 47-72.
- [14] Artin E. Theory of braids //Annals of Mathematics. – 1947. – С. 101-126.
- [15] Baader S. Asymptotic Rasmussen invariant //Comptes Rendus Mathematique. – 2007. – Т. 345. – №. 4. – С. 225-228.
- [16] Barge J., Ghys E. Cocycles d'Euler et de Maslov //Mathematische Annalen. – 1992. – Т. 294. – №. 1. – С. 235-265.
- [17] Bavard C. Longueur stable des commutateurs //Enseign. Math.(2). – 1991. – Т. 37. – №. 1-2. – С. 109-150.
- [18] Benedetti R., Petronio C. Lectures on hyperbolic geometry. – Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] Berrick A. et al. Configurations, braids, and homotopy groups //Journal of the American Mathematical Society. – 2006. – Т. 19. – №. 2. – С. 265-326.
- [20] Bestvina M., Fujiwara K. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups //Geometry & Topology. – 2002. – Т. 6. – №. 1. – С. 69-89.
- [21] Bestvina M., Handel M. Train-tracks for surface homeomorphisms //Topology. – 1995. – Т. 34. – №. 1. – С. 109-140.
- [22] Birman J. S. Braids, links, and mapping class groups. – Princeton University Press, 1975. – №. 82.
- [23] Birman J. S., Menasco W. W. Studying links via closed braids IV: Composite links and split links //Inventiones mathematicae. – 1990. – Т. 102. – №. 1. – С. 115-139.
- [24] Birman J. S., Menasco W. W. Studying links via closed braids. V: The unlink //Transactions of the American Mathematical Society. – 1992. – С. 585-606.
- [25] Bleiler S., Casson A. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston //London Mathematical Society Student Texts. – 1988. – Т. 9.

- [26] Brandenbursky M. On quasi-morphisms from knot and braid invariants //Journal of Knot Theory and Its Ramifications. – 2011. – T. 20. – №. 10. – C. 1397-1417.
- [27] Brooks R. Some remarks on bounded cohomology //Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference. – 1981. – T. 97. – C. 53-63.
- [28] Brooks R., Series C. Bounded cohomology for surface groups //Topology. – 1984. – T. 23. – №. 1. – C. 29-36.
- [29] Burger M., Monod N. Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups //Journal of the European Mathematical Society. – 1999. – T. 1. – №. 2. – C. 199-235.
- [30] Calegari D. scl, volume 20 of MSJ Memoirs //Mathematical Society of Japan, Tokyo. – 2009.
- [31] Carter D., Keller G. Bounded elementary generation of $SL_n(\mathbb{O})$ //American Journal of Mathematics. – 1983. – C. 673-687.
- [32] Choi Y. E., Rafi K. Comparison between Teichmüller and Lipschitz metrics //Journal of the London Mathematical Society. – 2007. – T. 76. – №. 3. – C. 739-756.
- [33] Dehn M. Die gruppe der Abbildungsklassen //Acta Mathematica. – 1938. – T. 69. – №. 1. – C. 135-206.
- [34] Dehn M. Papers on group theory and topology. – Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] Dehornoy P. Braid groups and left distributive operations //Transactions of the American Mathematical Society. – 1994. – T. 345. – №. 1. – C. 115-150.
- [36] Dehornoy P. et al. Ordering braids. – American Mathematical Soc., 2008. – №. 148.
- [37] I. Dynnikov. Counting intersections of normal curves, unpublished preprint
- [38] Dynnikov I., Wiest B. On the complexity of braids //Journal of the European Mathematical Society. – 2007. – T. 9. – №. 4. – C. 801-840.
- [39] Entov M., Polterovich L. Calabi quasimorphism and quantum homology //International Mathematics Research Notices. – 2003. – T. 2003. – №. 30. – C. 1635-1676.
- [40] Epstein D. B. A. Curves on 2-manifolds and isotopies //Acta Mathematica. – 1966. – T. 115. – №. 1. – C. 83-107.
- [41] Epstein D., Holt D. The linearity of the conjugacy problem in word-hyperbolic groups //International Journal of Algebra and Computation. – 2006. – T. 16. – №. 02. – C. 287-305.
- [42] Epstein D. B. A., Fujiwara K. The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups //Topology. – 1997. – T. 36. – №. 6. – C. 1275-1289.
- [43] Faiziev V. A. The stability of the equation $f(xy) - f(x) - f(y) = 0$. // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) – 2000 – T. 69. – №. 1. – C. 127-135
- [44] Farb B., Margalit D. A primer on mapping class groups, volume 49 of Princeton Mathematical Series. – 2012.
- [45] Farb B., Hain R., Looijenga E. (ed.). Moduli Spaces of Riemann Surfaces. – American Mathematical Soc., 2013. – T. 20.
- [46] Farb B. (ed.). Problems on mapping class groups and related topics. – American Mathematical Soc., 2006. – T. 74.
- [47] Fenn R. et al. Ordering the braid groups //Pacific journal of mathematics. – 1999. – T. 191. – №. 1. – C. 49-74.
- [48] Farb B. et al. Rank-1 phenomena for mapping class groups //Duke Mathematical Journal. – 2001. – T. 106. – №. 3. – C. 581-597.
- [49] Fathi A., Laudenbach F., Poénaru V. Thurston's Work on Surfaces (MN-48). – Princeton University Press, 2012. – T. 48.
- [50] Frankl F., Pontrjagin L. Ein knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie //Mathematische Annalen. – 1930. – T. 102. – №. 1. – C. 785-789.
- [51] Fujiwara K. The second bounded cohomology of a group acting on a Gromov-hyperbolic space //Proceedings of the London Mathematical Society. – 1998. – T. 76. – №. 1. – C. 70-94.

- [52] Fujiwara K. The second bounded cohomology of an amalgamated free product of groups //Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – T. 352. – №. 3. – C. 1113-1129.
- [53] Gabai D. et al. Foliations and the topology of 3-manifolds. //Journal of Differential Geometry. – 1983. – T. 18. – №. 3. – C. 445-503.
- [54] Gambaudo J. M., Ghys É. Braids and signatures //Bulletin de la Société mathématique de France. – 2005. – T. 133. – №. 4. – C. 541-579.
- [55] Gervais S. A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface //Topology. – 2001. – T. 40. – №. 4. – C. 703-725.
- [56] Ghys É. Groups acting on the circle //Enseignement Mathématique. – 2001. – T. 47. – №. 3/4. – C. 329-408.
- [57] González-Meneses J. The n th root of a braid is unique up to conjugacy //Algebraic & Geometric Topology. – 2003. – T. 3. – №. 2. – C. 1103-1118.
- [58] Gordon C. M. A., Litherland R. A., Murasugi K. Signatures of covering links //Canad. J. Math. – 1981. – T. 33. – C. 381-394.
- [59] Grigorchuk R. I. Some results on bounded cohomology //Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993). – 1995. – T. 204. – C. 111-163.
- [60] Gromov M. Volume and bounded cohomology //Publications Mathématiques de l’IHÉS. – 1982. – T. 56. – C. 5-99.
- [61] Harvey W. J. 14-Geometric structure of surface mapping class groups //Homological group theory. – 1979. – T. 36. – C. 255.
- [62] Harvey W. J. Boundary structure of the modular group //Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978). – 1981. – T. 97. – C. 245-251.
- [63] Hatcher A., Thurston W. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface //Topology. – 1980. – T. 19. – №. 3. – C. 221-237.
- [64] Hirsch M. W. Differential topology, volume 33 of Graduate Texts in Mathematics. – 1994.
- [65] Hirsch M. W., Thurston W. P. Foliated bundles, invariant measures and flat manifolds //Annals of Mathematics. – 1975. – C. 369-390.
- [66] Honda K., Kazez W. H., Matić G. Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary //Inventiones mathematicae. – 2007. – T. 169. – №. 2. – C. 427-449.
- [67] Honda K., Kazez W. H., Matić G. Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary II //Geometry & Topology. – 2008. – T. 12. – №. 4. – C. 2057-2094.
- [68] Ivanov N. V. Mapping class groups. Handbook of geometric topology, 523–633. – 2002.
- [69] Kapovich M. Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups //Modern Birkhäuser Classics. – 2009.
- [70] Kassel C., Dodane O., Turaev V. Braid Groups. – Springer Science & Business Media, 2008.
- [71] Kerckhoff S. P. The Nielsen realization problem //Annals of mathematics. – 1983. – C. 235-265.
- [72] Levine J. Knot cobordism groups in codimension two //Commentarii Mathematici Helvetici. – 1969. – T. 44. – №. 1. – C. 229-244.
- [73] Lickorish W. B. R. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1964. – T. 60. – №. 04. – C. 769-778.
- [74] Lickorish W. B. R. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds //Annals of Mathematics. – 1962. – C. 531-540.
- [75] Markoff A. Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe //Математический сборник. – 1936. – T. 1. – №. 1. – C. 73-78.
- [76] Matsumoto S., Morita S. Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms //Proceedings of the American Mathematical Society. – 1985. – T. 94. – №. 3. – C. 539-544.

- [77] McCool J. Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group //Journal of Algebra. – 1975. – T. 35. – №. 1. – C. 205-213.
- [78] Milnor J. On the existence of a connection with curvature zero //Commentarii Mathematici Helvetici. – 1958. – T. 32. – №. 1. – C. 215-223.
- [79] Monod N. An invitation to bounded cohomology //Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid, August 22–30, 2006. – 2007. – C. 1183-1211.
- [80] Mosher L. Mapping class groups are automatic //Annals of Mathematics. – 1995. – C. 303-384.
- [81] Murasugi K. Knot Theory & Its Applications //Modern Birkhäuser Classics. – 2008.
- [82] Murasugi K. On a certain numerical invariant of link types //Transactions of the American Mathematical Society. – 1965. – C. 387-422.
- [83] Newman M. Unimodular commutators //Proceedings of the American Mathematical Society. – 1987. – T. 101. – №. 4. – C. 605-609.
- [84] Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen //Acta Mathematica. – 1927. – T. 50. – №. 1. – C. 189-358.
- [85] Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. II //Acta Mathematica. – 1929. – T. 53. – №. 1. – C. 1-76.
- [86] Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. III //Acta Mathematica. – 1932. – T. 58. – №. 1. – C. 87-167.
- [87] Nielsen J. Abbildungsklassen endlicher ordnung //Acta Mathematica. – 1942. – T. 75. – №. 1. – C. 23-115.
- [88] Papadopoulos A. Introduction to Teichmüller theory, old and new //Handbook of Teichmüller theory. – 2007. – T. 1. – C. 1.
- [89] Penner R. C., Harer J. Combinatorics of train tracks. – Princeton University Press, 1992. – №. 125.
- [90] Seifert H. Über das geschlecht von knoten, Mathematische Annalen. – 1935.,T. 110. – №. 1. – C. 571-592.
- [91] Simon G. B., Salamon D. A. Homogeneous quasimorphisms on the symplectic linear group //Israel Journal of Mathematics. – 2010. – T. 175. – №. 1. – C. 221-224.
- [92] Squier C. C. The Burau representation is unitary //Proceedings of the American Mathematical Society. – 1984. – T. 90. – №. 2. – C. 199-202.
- [93] Teichmüller O. Gesammelte Abhandlungen. – Springer, 1982.
- [94] Thurston W. et al. Foliations and groups of diffeomorphisms //Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – T. 80.
- [95] Thurston W. P. Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle //arXiv preprint math/9801045. – 1998.
- [96] Thurston W. P. Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces //arXiv preprint math/9801039. – 1998.
- [97] Thurston W. P. et al. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces //Bulletin (new series) of the american mathematical society. – 1988. – T. 19. – №. 2. – C. 417-431.
- [98] Tristram A. G. Some cobordism invariants for links //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1969. – T. 66. – №. 02. – C. 251-264.
- [99] Vershinin V. V. Homology of braid groups and their generalizations //Banach Center Publications. – 1998. – T. 42. – C. 421-446.
- [100] Wajnryb B. A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface //Israel Journal of Mathematics. – 1983. – T. 45. – №. 2-3. – C. 157-174.
- [101] Wood J. W. Bundles with totally disconnected structure group //Commentarii Mathematici Helvetici. – 1971. – T. 46. – №. 1. – C. 257-273.

Публикации автора по теме диссертации

- [102] Дынников И. А., Шастин В. А. О независимости некоторых псевдохарактеров на группах кос //Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24. – №. 6. – С. 21-41.
- [103] Шастин В. А. Комбинаторная модель метрики Липшица для поверхностей с проколами// Сиб. электрон. матем. изв. – 2015 – Т. 12. – С. 910–929, DOI: 10.17377/semi.2015.12.077
- [104] Шастин В.А., «О некоторых свойствах сигнатуры и закрученности как псевдохарактеров групп кос», Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011» / Отв. ред. А.И.Андреев, А.В.Андриянов, Е.А.Антипов, М.В.Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011.
- [105] Шастин В.А. , «Псевдометрики на модулярных группах поверхностей с проколами», Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / Отв. ред. Отв. ред. А.И. Андреев, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2014.
- [106] Shastin V.A., A combinatorial model of the Lipschitz metric for surfaces with punctures, Тезисы Международной конференции, посвященной 85-летию академика Ю. Г. Решетняка. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014, стр. 118 .