Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
(ИМ СО РАН)
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru
06.05.16 № 15302-2-2171

На № _____________ от __________

Утверждаю
Директор ИМ СО РАН
член-корр. РАН
_____________ С.С.Гончаров

ОТЗЫВ

ведущей организации – Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН на диссертационную работу Шастина Владимира Алексеевича «Геометрические свойства модулярных групп», представленную на соискание ученой степени кандидата физико- математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертационная работа **Шастина Владимира Алексеевича** посвящена изучению модулярных групп Тейхмюллера или групп классов отображений двумерных поверхностей – важного класса групп, возникающего в различных разделах современной математики: маломерной топологии, геометрической теории групп, алгебраической геометрии, комплексном анализе, гиперболической геометрии, математической физике и др.

Исследование этих групп было начато в начале прошлого века М.Дэном и Я. Нильсенем. Особое внимание, благодаря связям с теорией узлов, уделялось исследованию групп классов отображений проколотого диска – групп кос. Теория этих групп получила глубокое развитие в работах Э.Артина и А.А.Маркова. Эти исследования положили начало довольно интенсивному и плодотворному изучению этих групп во второй половине двадцатого века. Так были получены основные струкутрные результаты о группах классов отображений: найдены конечные системы образующих (В. Ликориш) и соотношений в этих группах (А.Хэтчер, В.Терстон, Б. Вайнриб), доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности в этих группах – , получены важные результаты о свойствах отдельных элементов и подгрупп этих групп: классификация гомеоморфизмов поверхности (В.Терстон), альтернатива Титса для подгрупп групп классов отображений (Н.Иванов). Исследования групп классов отображений позволили получить замечательные результаты в таких областях математики как алгебраическая геометрия: вычисление виртуальной эйлеровой характеристики и младших групп когомологий пространств модулей Д.Харером и Д. Загиром, гиперболическая геометрия: работы Терстона о трехмерных гиперболических многообразиях, математическая физика: построение моделей квантовых топологических теорий поля.

В диссертационной работе для исследования свойств групп классов отображений рассматриваются действия этих групп на различных геометрических объектах: системах простых кривых на поверхности, гиперболических и комплексных структурах. Такой подход к изучению групп классов отображений использовался еще в работах Дэна и Нильсена, в дальнейшем получил развитие в работах В. Харви о комплексах кривых и Терстона о динамике диффеоморфизмов поверхностей и в настоящее время является основным методом исследования этих групп.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Она изложена на 111 страницах. Список литературы состоит из 106 наименований и включает в себя пять работ автора по теме диссертации, две из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Перейдем к обсуждению содержания диссертации.

Во **введении** кратко изложена история изучения групп классов отображений.

В контексте изучения ограниченных когомологий дискретных групп с одной стороны и инвариантных метрик на группах с другой описываются основные результаты работы. Особое внимание уделено обоснованию актуальности исследования. Приводится краткое содержание работы. Формулируются цели работы, обсуждаются используемые методы и научная новизна, описывается структура диссертации и ее содержание по главам.

Первая глава диссертации посвящена изложению предварительных сведений о двумерных поверхностях, их пространствах Тейхмюллера и группах классов отображений, а также об ограниченных когомологиях и квази- и псевдохарактерах дискретных групп. Дается определение метрик Тейхмюллера, Терстона и Липшица на пространствах Тейхмюллера. Приводится формулировка теоремы Терстона об эквивалентном определении асимметричной метрики Терстона в терминах длин простых кривых. Вводится понятие дробной степени скручивания Дэна и объясняется существование у каждой группы классов отображений конечной системы порождающих, состоящей из дробных степеней некоторых скручиваний Дэна. Напоминаются определение групп кос и некоторые свойства этой группы и ее элементов. Формулируются классические теоремы Дж.Александера и Маркова, а также недавний результат А.В.Малютина и Н.Ю.Нецветаева о связи кос с зацеплениями в трехмерной сфере. Дается определение ограниченных когомологий групп, вводится понятие квази- и псевдохарактеров, описываются некоторые их свойства, приводится, следуя Малютину, конструкция трансфера псевдохарактеров.

Во **второй** главе вводится понятие обобщенного задания группы и функции сложности на группе. Определяется сжатая словарная сложность на произвольной конечно-порожденной группе. На модельном примере группы классов отображений тора с одним проколом исследуется связь между различными функциями сложности на этой группе: классической словарной сложностью, сжатой словарной сложностью, матричной сложностью, геометрической сложностью, возникающей из действия модулярной группы на плоскости Лобачевского. Показывается, что для этой группы сжатая словарная сложность при правильном выборе системы порождающих оказывается эквивалентной матричной сложности и геометрической сложности. Для групп классов отображений произвольной поверхности с проколами, следуя И.А. Дынникову, определяется понятие допустимой системы образующих и аналог матричной функции сложности. Определяется понятие геометрической сложности на группе классов в терминах действия группы на пространстве Тейхмюллера, снабженного одной из метрик. Показывается, что для групп классов отображений поверхностей с проколами возникает аналогичная ситуация, что и для группы классов отображений проколотого тора. В силу результата Дынникова сжатая словарная сложность, ассоциированная с допустимой системой образующих, эквивалентна матричной функции сложности. В свою очередь основная теорема первой части работы (Теорема 2.2.5.) утверждает эквивалентность матричной функции сложности и геометрической сложности.

В последнем параграфе второй главы приводится доказательство основной теоремы. Оно состоит из двух основных частей. Во-первых доказывается (Утверждении 2.3.1), что длина простой замкнутой геодезической в любой гиперболической метрике пропорциональна количеству пересечений этой геодезической с ребрами произвольной идеальной триангуляции поверхности с коэффициентом, не зависящим от выбора геодезической. Во-вторых (утверждения 2.3.3. и 2.3.5.) показывается что матричная сложность гомеоморфизма дает двустороннюю оценку на отношение индексов пересечения простой замкнутой кривой с исходной триангуляцией и триангуляцией, полученной

применением к исходной исследуемого гомеоморфизма. Вместе с теоремой Терстона (Теорема 1.2.4.) это доказывает основную теорему.
В качестве следствий основной теоремы 2.2.5., а также теоремы Дынникова (Теоерма 2.2.2) и теоремы Я.Чой и К.Рафи о эквивалентности метрик Тейхмюллера и Лишица на толстой части пространства Тейхмюллера, приводятся теоремы 2.2.6. и 2.2.7., утверждающие, что группа классов отображений с сжатой словарной метрикой, ассоциированной с допустимой системой образующих, квазиизометрична толстой части пространства Тейхмюллера с метриками Липшица и Тейхмюллера соответственно.

В первом параграфе **третьей** главы приводятся теоремы о структуре пространств ограниченных когомологий и пространств псевдохарактеров некоторых известных классов групп. В частности в качестве следствия теоремы М. Бествины и К. Фудживары (Теорема 3.1.12) приводится доказательство бесконечномерности пространства псевдохарактеров групп кос на более чем двух нитях.

Во втором параграфе, следуя работам Малютина и Дынникова с автором, описывается конструкция операторов I, R, J на пространствах псевдохарактеров групп кос и выписываются соотношения между этими операторами. Доказывается, что пространство псевдохарактеров группы кос раскладывается в прямую сумму псевдохарактеров, принимающих нулевое значение на расщепимых косах,так называемых ядерных псевдохарактеров, и псевдохаракетров, получающихся применением оператора R к псевдохарктерам групп кос на меньшем числе нитей.
В следующих параграфах дается описание двух классов псевдохарактеров групп кос: закрученностей и сигнатур – , изучаемых в этой работе. Описываются основные свойства этих псевдохарактерам, найденные в работах Малютина и Ж. Гамбаудо и Э. Жиса и приводятся способы их вычисления. Так для вычисления закрученности косы используется геометрический метод сравнения кос в порядке Деорнуа. Для вычисление псевдохарактеров, отвечающим сингнатурам, используется специальная поверхность Зейферта, соответствующая степени исследуемой косы, и особым образом выбранная система циклов на этой поверхности. Показывается, что задача вычисления псевдохарактера сигнатуры сводится к вычислению интеграла от кусочно-постоянной целочисленной функции на окружности.

В заключительном параграфе третьей главы приводятся доказательства основных результатов этой части диссертации. Дается доказательство того, что псевдохарктеры, соответствующие сигнатурам имеют нетривиальную ядерную часть(теорема 3.8.2.). Для доказательства используются результаты К.Гордона, Р. Лизерлэнда и К.Мурасуги по вычислению сигнатур торических зацеплений. Из этих вычислений получается значение псевдохарактера сигнатуры на элементе Гарсайда и из этого, по формуле для вычисления ядерной части псевдохарактера(следствие 3.2.7), следует, что значение ядерной части этого псевдохарактера на элементе Гарсайда не равно нулю.

Далее доказываются результаты о соотношении псевдохарактеров, отвечающих сигнатурам, и псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов I,R,J (теорема 3.8.5.). А именно доказывается, что начиная с четырех нитей, псевдохарактеры, отвечающие сигнатурам, линейно независимы от псевдохарактеров получаемых из закрученностей применением операторов I и R, а начиная с пяти нитей псевдохарактеры, отвечающие сигнатурам, линейно независимы от псевдохарактеров получаемых из закрученностей применением операторов I, R и J.

Доказательство этих результатов проводится по следующей схеме. Используя соотношения между операторами I, R, J, доказанные в параграфе 2 третьей главы, и соотношения между псевдохарактерами, получаемыми из закрученностей действием операторов I и J (утверждение 3.8.6.) удается свести исходную задачу к проверке того, может ли линейная комбинация псевдоахарктера, отвечающего сигнатуре, закрученности, и двух пседохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов I и J задавать псевдохарактер, лежащий в образе оператора R (Следствие 3.8.7.). Далее строятся специальные косы на четырех и пяти нитях, которые тривиализуются при удалении любой нити. На них все псевдохарактеры, лежащие в образе оператора R равны нулю, и теорема сводится к проверке того, что один трехмерный вектор, не выражается в виде линейно комбинации других трех.

В главе **«Заключение»** автор формулирует несколько вопросов, которые, по его мнению, естественно связаны с тематикой диссертации и для получения ответов на которые могут быть использованы развитые в диссертационной работе методы. Наиболее интересным представляется вопрос о возможности обобщения теорем о сжатой словарной метрике на случай замкнутых поверхностей.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что проекция группы классов отображений поверхности с проколами на свою орбиту при стандартном действии на пространстве Тейхмюллера является квазиизометрией между группой классов отбражений со сжатой словарной метрикой и толстой частью пространства Тейхмюллера с метриками Тейхмюллера и Липшица.
2. Доказано, что при n > 3 псевдохарактеры сигнатуры на группе кос на n нитях линейно независимы от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов Малютина R и I.
3. Доказано, что при n > 4 псевдохарактеры сигнатуры на группе кос на n нитях линейно независимы от псевдохарактеров, получаемых из закрученностей применением операторов R, I и J.
4. Доказано, что псевдохарактеры сигнатуры на группе кос на n нитях имеют нетривиальную ядерную составляющую при n > 1.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Работа написана достаточно тщательно и подробно. Имеющиеся опечатки и терминологические неточности не стоят отдельного упоминания и не влияют на математическое содержание работы.

Результаты, полученные в диссертации, несомненно, найдут применение в исследованиях по теории групп классов отображений и топологии малых размерностей, проводимых в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Челябинском государственных университетах, в математических институтах РАН, СО РАН, УрО РАН. Они найдут отражение в соответствующих спецкурсах по теории групп классов отображений, читаемых в ведущих университетах России и за рубежом.

Диссертационная работа В.А.Шастина представляет собой цельное законченное научное исследование. Совокупность полученных в ней результатов можно квалифицировать как решение задач, имеющих существенное значение для соответствующей отрасли знаний

Диссертация В.А.Шастина «Геометрические свойства модулярных групп» соответствует «Положению о порядке присуждения степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертационным работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических нацк по специальности 01.01.04 – геометрия и топология, а ее автор Шастин Владимир Алексеевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании лаборатории динамических систем 6 мая 2016 г., протокол № 1.

Ведущий научный сотрудник
лаборатории динамических систем, д.ф.-м.н. А.Е. Миронов
06.05.2016 г.

Почтовый адрес: ИМ СО РАН,
пр. ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090
Тел. Раб. 8-383-329-7672
Электронная почта: mironov@math.nsc.ru

Подпись А.Е. Миронова
удостоверяю
Зав. орготделом
ИМ СО РАН Н.З. Киндалева
«06» 05 2016 г.