Отзыв научного руководителя — доктора физико-математических наук, ведущего научного сотрудника Математического института им. В. А. Стеклова РАН Иван Алексеевича Дынникова — о диссертации Владимира Алексеевича Шастина «Геометрические свойства модулярных групп», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Диссертационная работа В.А. Шастина посвящена изучению групп классов отображений проколотых поверхностей конечного типа и, в частности, групп кос. Эти группы, называемые также модулярными группами и группами Тейхмюллера, являются предметом активных исследований, начиная с 1920-х годов, и занимают особое место в математике. Они играют важную роль в классификации трехмерных многообразий и узлов, в изучении геометрии пространств Тейхмюллера и топологии пространств модулей римановых поверхностей, в теории динамических систем. Они интересны также с чисто алгебраической точки зрения как группы, которые не являются арифметическими, но имеют с арифметическими группами много общих свойств.

В изучении модулярных групп достигнут значительный прогресс, но многие фундаментальные вопросы по-прежнему остаются нерешенными. Для этих групп известны задания образующими и соотношениями, существуют достаточно быстрые (полиномиальные) алгоритмы для решения проблемы равенства, а также алгоритмы для решения проблемы сопряженности с экспоненциальными оценками на сложность. Имеется ряд результатов о геометрии групп классов отображений. Эти группы не гиперболичны, но допускают достаточно хорошие точные действия на гиперболических метрических пространствах.

В диссертационной работе В.А. Шастина исследуются геометрические аспекты теории модулярных групп. Один из них связан с изучением инвариантных метрик на этих группах. На модулярных группах существует несколько различных естественных способов вводить метрику. Простейший из них — длина кратчайшего слова в фиксированной системе образующих — принят по умолчанию в геометрической теории групп, но совершенно далек от метрик геометрического происхождения, связанных с пространствами Тейхмюллера.

Недавно мною был предложены два новых способа ввести метрику на модулярной группе, которые дают одинаковый результат с точностью до квазиизометрии и обладают тем замечательным свойством, что проблема равенства по-прежнему остается разрешимой за полиномиальное время по отношению к этим метрикам. Одно из определений чисто алгебраическое и использует понятие сжатой длины слова. Другое определение дается в терминах индексов пересечений ребер фиксированной триангуляции и ребер ее образа.

В задачу В.А. Шастина входило выяснить взаимоотношение этих метрик с известными ранее, с чем он успешно справился, показав, что они квазиизометричны метрике, индуцированной на орбите фиксированной точки в пространстве Тейхмюллера, снабженного метрикой Тейхмюллера.

Другой сюжет диссертации В.А. Шастина связан с псевдохарактерами на группах кос, т.е. отображений из группы в $\mathbb{R}$, близких к гомоморфизмам. Пространство настоящих гомоморфизмов в $\mathbb{R}$ одномерно и неинтересно, но пространство псевдохарактеров оказывается уже бесконечномерным и служит богатым источником инвариантов классов сопряженности. Однако в этом бесконечномерном пространстве лишь для немногих элементов известно явное описание.

В недавней работе А.В. Малютин предложил способ строить псевдохарактеры на группах кос с помощью антье Деорнуа и операций добавления и удалений нитей и поставил вопрос о том, выражается ли через них псевдохарактер, определенный Ж.-М. Гамбаудо и Э. Жисом через сигнатуру замыкания косы. Линейная зависимость имеет место для случая трех нитей, но в общем случае вопрос был открыт.

Данная вопрос решен в диссертации В.В. Шастина отрицательно с помощью предложенной мною методологии вычисления псевдохарактеров. Подобрав подходящее семейство кос, Шастин сводит эту задачу к элементарной линейной алгебре. Решена также другая поставленная А.В. Малютиным задача о нетривиальности ядерной части связанного с сигнатурой псевдохарактера.

Работа В.А. Шастина потребовала глубоких знаний теории пространств Тейхмюллера и модулярных групп, а также большой технической работы и компьютерных вычислений. Работа выполнена на высоком профессиональном уровне и вносит существенный вклад в теорию модулярных групп. Считаю, что диссертация В.А. Шастина удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор без сомнения заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математическим наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Математического института им. В. А. Стеклова РАН И.А.Дынников

10.11.15г

Подпись И.А.Дынникова заверяю:
Ученый секретарь
Математического института им. В. А. Стеклова РАН А. Н. Печень