ФГБОУ ВО Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Тарасов Павел Борисович

Об условиях равномерности систем функций многозначной логики

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и
математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:	**Колпаков Роман Максимович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Коршунов Алексей Дмитриевич,** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, лаборатория дискретного анализа, ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН»
	Стеценко Владимир Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ «Московский педагогический государственный университет», математический факультет, кафедра теоретической информатики и дискретной математики
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН»

Защита диссертации состоится ______________________________ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 на базе «ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж и на сайте `http://mech.math.msu.su`.

Автореферат разослан __________________________

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО МГУ им. М. В. Ломоносова, доктор физико-математических наук, профессор	Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа относится к математической теории синтеза управляющих систем. Рассматривается задача о реализации функций k-значной логики формулами над конечными системами.

Синтез и сложность управляющих систем является одним из важнейших направлений исследований в математической кибернетике. Класс формул над конечными функциональными системами, реализующих функции k-значной логики ($k \geq 2$), — один из основных модельных классов управляющих систем. Задача изучения сложности формул заключается в построении формулы, которая реализует заданную функцию и является оптимальной относительно некоторой меры сложности. Наиболее часто используемыми мерами сложности для формул являются число символов переменных, входящих в формулу (называемое сложностью формулы), и глубина формулы. Сложность формулы можно интерпретировать как ее «стоимость», а глубину — как время ее вычисления, при условии, что все вычисления можно производить параллельно. Очевидным способом построения оптимальной формулы является перебор, но на практике такой метод не может быть использован в силу экспоненциального роста объема вычислений от числа переменных заданной функции. Поэтому важное значение имеет задача построения формул, близких к оптимальным, без использования перебора.

Большое число методов синтеза формул было разработано для конечных систем, состоящих из булевых функций. Для полных базисов асимптотически оптимальные методы синтеза как формул, так и некоторых других классов управляющих систем, были разработаны О. Б. Лупановым[1]. Оценки глубины формул в полных базисах были получены в работах С. Б. Гашкова[2] и С. А.

[1] *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия ВУЗов. Радиофизика. Т. 1, № 1, 1958. С. 120-140.

Лупанов О. Б. Об асимптотических оценках сложности формул, реализующих функции алгебры логики // ДАН СССР. 128, 3. 1959. С. 464-467.

Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61-80.

Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$ // Проблемы кибернетики. Вып. 6. М.: Физматгиз, 1961. С. 63-97.

Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63-97.

Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14, М.: Физматгиз, 1965. С. 21-110.

Лупанов О. Б. О сложности реализации степеней булевой (n, n)-функции // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. С. 59-67.

[2] *Гашков С. Б.* О глубине булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 265-268.

Ложкина[3]. Сложность и глубина формул также изучалась для случая функционально неполных систем функций двузначной и k-значной логики при $k \geq 3$ (см., например, работы А. Б. Угольникова[4] , А. Е. Андреева[5] и А. А. Андреева[6]).

В последнее время все более актуальной становится проблема вычисления функций с помощью распараллеленных вычислений. Поскольку время распараллеленного вычисления формулы прямо пропорционально ее глубине, проблема минимизации таких вычислений сводится к задаче построения по заданной формуле эквивалентной формулы (то есть формулы, реализующей ту же функцию), имеющей наименьшую возможную глубину. Если функцию f можно реализовать над конечной системой функций A формулой глубины не более l, то несложно получить верхнюю оценку $L \leq n^l$ сложности L реализации функции f формулами над A, где n — максимальное число переменных у функций из A. Таким образом, глубина реализации функции формулами над A не может быть меньше по порядку логарифма сложности этой реализации. В случае, если эта нижняя оценка достигается, говорят о равномерности системы A: конечная система функций A называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулами над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d, \tag{1}$$

где $L_A(f)$ и $l_A(f)$ есть сложность и глубина реализации функции f формулами над системой A. Таким образом, равномерные системы функций — это системы, позволяющие распараллеливать оптимальным образом вычисление функций, реализуемых формулами над этими системами.

Пусть $k \geq 2$. Обозначим через E_k множество $\{0, \ldots, k-1\}$, а через P_k множество всех функций k-значной логики. Вопросы, связанные с равномерностью систем функций из P_k, изучались во многих работах. В работах В. М. Храп-

[3] *Ложкин С. А.* О связи между глубиной и сложность эквивалентных формул и о глубине монотонных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 269-270.

[4] Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Докл. АН. СССР. 1979. **249**, 1. 60-62.

Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР. 1980. Вып. 112.

Угольников А. Б. О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 242-245.

Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 174-176.

[5] Андреев А. Е. О сложности монотонных функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1985. Вып 4. С. 83-87.

Андреев А. Е. О синтезе функциональных сетей // Докт. диссертация. М.: МГУ им М. В. Ломоносова, 1985.

[6] Андреев А. А. Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 3-7.

Андреев А. А. О нижних оценках сложности для некоторых последовательностей функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 25–30.

ченко[7] и Ф. Спиры[8] независимо была доказана равномерность всех конечных полных систем булевых функций. Методы, предложенные в работах В. М. Храпченко и Ф. Спиры, нетрудно перенести на полные системы функций многозначной логики, однако они существенно используют полноту систем. В работе И. Вегенера[9] установлена равномерность всех конечных систем, порождающих класс M всех монотонных булевых функций. А. Б. Угольниковым[10] установлена равномерность всех конечных систем булевых функций (см. также работу М. Е. Рагаза[11]). В данной работе также приведен пример систем функций из P_3, не являющихся полиномиально экивалентными.

Таким образом, вопрос о равномерности конечных систем функций из P_2 решен полностью, поэтому приобретает актуальность задача исследования равномерности систем функций k-значной логики при $k \geq 3$. Задача о равномерности в P_k является существенно более сложной в связи с тем, что для замкнутых классов булевых функций существует удобное описание, приведенное в работах Э. Поста[12], в то время как для замкнутых классов функций из P_k при $k \geq 3$ описание отсутствует, что связано с существованием принципиальных отличий многозначных логик от двухзначной, в частности, с континуальностью[13] семейства всех замкнутых классов k-значной логики при $k \geq 3$ и отсутствием описания всех конечно-порожденных классов k-значной логики.

Ряд публикаций посвящен задаче о соотношении глубины и сложности формул над конечными системами функций, порождающими предполные классы в P_k при $k \geq 3$. Полное предикатное описание предполных классов получено в работах И. Розенберга[14]. Согласно данному описанию, все предполные клас-

---

[7] см. *Яблонский С. В., Козырев В. П.* Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. Вып. 19а. М.: Издв-во МЭИ, 1997.

[8] *Spira P. M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences, North Hollywood, 1971, Western Periodicals Company, P. 525-527.

[9] *Wegener I.* Relating Monotone Formula Size and Monotone Depth of Boolean Functions // Information Processing Letters, 16. 1983. P. 41-42.

[10] *Угольников А. Б.* О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // VII Всесоюзная конференция "Проблемы теоретической кибернетики": тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета. 1985. С. 194-195.

Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двухзначной логики. Математические заметки, том 42, выпуск 4, октябрь 1987. М.: Наука, 1987. С. 603-612.

[11] *Ragaz M. E.* Parallelizable algebras. Archiv fur mathematische Logik und Grundlagenforschung 26 (1986/7). P. 77-99.

[12] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43, № 3. 163-185.

Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princenton-London: London Univ. Press. 1941. **5**. 122.

[13] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. **127**, 1. С. 44-46.

[14] *Rosenberg I.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. C. R. Acad. Sci. Paris Ser A, 260 (1965), 3817-19.

сы функций в P_k при $k \geq 3$ можно разделить на следующие семейства: классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$; классы функций, сохраняющих разбиения множества E_k, — классы типа $\mathbb{E}$; классы функций, сохраняющих сильно гомоморфные прообразы элементарных h-адических отношений, — классы типа $\mathbb{B}$; классы функций, сохраняющих центральные отношения, — классы типа $\mathbb{C}$; классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$; классы монотонных функций — классы типа $\mathbb{O}$.

Пусть ρ — отношение частичного порядка на E_k, такое, что для любых двух элементов a и b из (E_k, ρ) существуют $\sup(a, b)$ и $\inf(a, b)$. Класс всех функций, сохраняющих отношение ρ, называется классом типа $\mathbb{O}^{\#}$. Конечнопорожденные предполные классы функций, монотонных относительно частично упорядоченного множества ширины 2, называются классами типа $\mathbb{O}_2$. Классы типа $\mathbb{C}$, сохраняющие унарные и бинарные центральные отношения, называются классами типа $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ соответственно.

Равномерность всех конечных систем, порождающих предполные классы в P_3, анонсирована в работе Л. И. Ахметовой[15]. Равномерность любых конечных систем, порождающих предполные классы типов $\mathbb{L}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{O}^{\#}$, $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ в P_k, установлена в работе Р. Ф. Сафина[16]. Кроме того, в этой работе для любого $k \geq 3$ доказано существование равномерных порождающих систем для классов типа $\mathbb{C}$. Для некоторых классов типа $\mathbb{O}_2$ в работе О. С. Дудаковой[17] показано существование в этих классах функции специального вида, поэтому применением метода из работ В. М. Храпченко и Ф. Спиры нетрудно установить равномерность всех конечных систем, порождающих эти классы. В работе Д. Ю. Дудорова[18] анонсирована равномерность порождающих систем некоторых предполных классов монотонных функций в P_k при $k > 7$.

Наряду со свойством равномерности функциональных систем в представленной диссертационной работе изучается ослабленный вариант этого свойства, который называется квази-равномерностью. Конечная система функций A называется квази-равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

[15]*Ахметова Л. И.* О глубине формул для предполных классов трехзначной логики // Методы и системы технической диагностики, выпуск 18. Саратов: Изд-во Саратовского университета.

[16]*Сафин Р. Ф.* О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып 13. М. Физматлит. 2004. С. 223–278.

[17] *Дудакова О. С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып 17. М.: Физматлит, 2008. С. 13-104.

[18]*Дудоров Д. Ю.* Материалы X Межд. сем. "Дискр. матем. и ее прилож." М. 2010. С. 18-20.

С задачей нахождения достаточных условий равномерности систем функций связана задача о сравнении базисов. Конечные системы функций A и B, такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$L_A^{c_1}(f) \leq L_B(f) \leq L_A^{c_2}(f).$$

Нетрудно доказать, что если системы A и B равномерны, то они являются полиномиально эквивалентными. Из упомянутых выше результатов А. Б. Угольникова следует, что все конечные системы булевых функций, порождающие один и тот же замкнутый класс, попарно полиномиально эквивалентны. Им же приведен пример систем функций 4-значной логики, не являющихся полиномиально эквивалентными.

Целью работы является нахождение соотношений между глубиной и сложностью реализации функций многозначной логики в различных базисах посредством исследования равномерности различных систем функций k-значной логики.

Основные методы исследования. В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности методы теории синтеза и сложности управляющих систем и теории функциональных систем, а также разработанные автором новые методы синтеза формул, позволяющие устанавливать равномерность конечных систем функций многозначной логики.

Научная новизна: Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Любая конечная система A функций из $P_{k,s}$, такая, что проекция системы A на множество E_s порождает мажоритарную функцию, равномерна. (через $P_{k,s}$ обозначается множество всех функций k-значной логики принимающих значения из множества $\{0, \ldots, s-1\}$).

2. Все конечные системы функций, порождающие предполные классы P_k типа $\mathbb{C}$, равномерны при $k \geq 3$.

3. При $k \leq 7$ все конечные системы функций из P_k, порождающие предполные классы, равномерны.

4. Доказана равномерность конечных систем функций $P_{k,2}$, проекция которых не лежит целиком ни в одном из множеств[19] $O^\infty, I^\infty, K, D, L$.

5. Для конечных систем функций из $P_{k,2}$, монотонных относительно частичного порядка специального вида на E_k, получены достаточные условия равномерности и критерий квазиравномерности.

6. Приведены конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$ такие, что $[A] = [A']$, при этом система A равномерна, система A' не равномерна и системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Специальном семинаре «Функции многозначной логики и смежные вопросы» под руководством проф. А. Б. Угольникова, проф. Р. М. Колпакова и проф. С. Б. Гашкова (неоднократно в 2010 – 2013 гг.),

2. Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012» (г. Москва, 9 – 13 апреля 2012 г.),

3. XI Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (г. Москва, 18 – 23 июня 2012 г.),

4. Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (г. Москва, 8 –13 апреля 2013 г.),

5. CSEDays. Theory 2013. Algorithms and Complexity (г. Екатеринбург, 29 июня – 1 июля 2013 г.),

6. XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Казань, 6 – 20 июня 2014 г.) ,

7. Third Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics (г. Петрозаводск, 15 – 18 сентября 2014 г.).

Публикации. Основные результаты автора опубликованы в 7 работах автора [1-7], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Полный объем диссертации — **94** страницы. Список литературы содержит **69** наименований.

[19] Обозначения для замкнутых классов булевых функций взяты из книги: *Угольников А. Б.* Классы Поста. Учебное пособие: М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова. 64 с.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор известных результатов, связанных с темой диссертации, и формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе приводятся определения и обозначения, используемые в работе. В частности, даны следующие определения.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из P_s, такие, что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через $\mathrm{pr}_s f$. Пусть $A \subseteq P_{k,s}$. Положим $\mathrm{pr}_s A = \{\mathrm{pr}_s f | f \in A\}$. Множество $\mathrm{pr}_s A$ будем называть проекцией системы A на P_s.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ будем называть мажоритарной, если для любых $\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \beta) = f(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \beta, \alpha) = f(\beta, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = \alpha.$$

Множество всех мажоритарных функций из P_k обозначим через $\mathrm{N}A_k$.

Подформулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ формулы Φ вида $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_t)$ называются главными подформулами. Формула Φ над конечной системой функций A называется α-формулой, если у каждой подформулы Φ имеется не более одной нетривиальной главной подформулы.

Конечная система функций A называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d,$$

где $L_A(f)$ и $l_A(f)$ есть минимальная сложность и минимальная глубина реализации функции f формулами над системой A.

Конечная система функций A называется квазиравномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

Конечные системы функций A и B такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$(L_A(f))^{c_1} \leq L_B(f) \leq (L_A(f))^{c_2}.$$

Во второй главе приводятся методы доказательства достаточных условий равномерности конечных систем функций многозначной логики.

В первом параграфе приводятся методы, общие для всех систем функций многозначной логики. В частности, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$, где $k \geq s \geq 2$, такая, что множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда система A равномерна.

В качестве следствия из данного утверждения с использованием результатов работ Р. Ф. Сафина и С. С. Марченкова[20] получены следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть A — конечная система функций из P_k, порождающая предполный класс типа $\mathbb{C}$, $k \geq 3$. Тогда система A равномерна.

Теорема 3. Пусть A — конечная система функций из P_k, где $k \leq 7$, порождающая предполный класс. Тогда система A равномерна.

Теорема 4. Конечная система A функций из $P_{k,2}$ такая, что $\mathrm{pr}_2 A$ не содержится ни в одном из множеств $O^\infty, I^\infty, K, D, L$, является равномерной.

Во втором параграфе рассматриваются методы доказательства равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$, проекция которых порождает класс монотонных булевых функций.

В третьем параграфе рассматриваются методы доказательства равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$, монотонных относительно частичного порядка на множестве E_k, в котором $1 \geq 0$ и остальные элементы попарно несравнимы и несравнимы с 0 и 1.

Приведем необходимые определения. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in E_k$. Положим

$$M_f^{x_i} = \{\mathrm{pr}_2 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) |\ \widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1}\},$$

$$V_f^{x_i} = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-1} |\ \mathrm{pr}_2 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, y, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0, 1\},$$

$$f|_{x_i}^{\beta} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Для произвольных множества $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^t$ положим

$$f|_X^{\widetilde{\alpha}} = (\ldots (f|_{x_{i_1}}^{\alpha_1})|_{x_{i_2}}^{\alpha_2}) \ldots)|_{x_{i_t}}^{\alpha_t},$$

$$M_f^X = \bigcup_{x \in X} M_f^x, \quad \widehat{M}_f^X = \bigcup_{x \in X} \{M_f^x\},$$

[20]*Марченков. С. С.* Об id—разложениях класса P_k над предполными классами // Дискрет. матем., 5:2 (1993), 98–110.

$$V_f^X = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-t} |\ \mathrm{pr}_2 f|^{\widetilde{\alpha}}_{\{x_1,\ldots,x_n\}\setminus X} \neq 0, 1\}.$$

Будем говорить, что монотонная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством $\#$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$ и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, если существует функция $g(x_1, \ldots, x_{n-q}, y_1, \ldots, y_r) \in B$, такая, что:

1. для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^X$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \notin [\{0, 1\}]$;
2. если $\{0, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;
3. если $\{1, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;
4. если $\widehat{M}_f^X = \{\{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Множество функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что f обладает свойством $\#$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ относительно замкнутого класса B и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, будем обозначать через $\#_X^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r)$. Положим

$$\#_X(B, n, r) = \bigcap_{\widetilde{\alpha} \in E_k^{|X|}} \#_X^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r);$$

$$\#(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{X \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} \#_X(B, n, r);$$

Будем говорить, что система A монотонных функций из $P_{k,2}$ обладает свойством $\#$, если $A \subset \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$.

Основными результатами параграфа являются следующие теоремы:

Теорема 5. Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$, равномерна.

Теорема 6. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и любого $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено включение $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. Тогда система A равномерна.

В третьей главе вводится следующее множество функций:

$$\#_1(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \in \{1, \ldots, n\}} \#_{\{x_i\}}(B, n, r).$$

Будем говорить, что система A монотонных функций из $P_{k,2}$ обладает свойством $\#_1$, если $A \subset \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$.

Множество формул F над конечной системой функций A будем называть равномерным, если существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ, для которой выполнено неравенство

$$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d.$$

Основными результатам главы являются следующие теоремы:

Теорема 7. Пусть A — конечная система функций из P_k такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квазиравномерна.

Теорема 8. Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$, где n — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A.

В четвертой главе приводится пример систем функций из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, одна из которых является равномерной, а другая не является равномерной, из чего, в частности, следует, что эти системы не являются полиномиально эквивалентными. Таким образом, получен пример систем функций 3-значной логики, не являющихся полиномиально эквивалентными. Данное утверждение сформулировано в виде теоремы:

Теорема 9. Существуют такие конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$, что $[A] = [A']$ и

1. система A равномерна,
2. система A' не равномерна,
3. системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.

В пятой главе сводятся воедино все результаты работы и доказываются некоторые теоремы, являющиеся следствиями доказанных в первых четырех главах.

В диссертации принята следующая нумерация утверждений: леммы, теоремы и утверждения нумеруются парами чисел — номер главы и номер утверждения, а следствия нумеруются по порядку для каждого утверждения.

Заключение

Дальнейшая разработка темы диссертации включает в себя следующие задачи:

1. Доказательство равномерности систем, удовлетворяющих условию $\widehat{\#}_1$, или нахождение системы функций из $P_{k,2}$, являющейся квази-равномерной но не являющейся равномерной.

2. Перенос методов диссертации на классы не монотонных функций $P_{k,2}$.

3. Перенос методов диссертации на произвольные замкнутые классы P_3.

Благодарности

Основная часть диссертации была выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Борисовича Угольникова, которому автор выражает благодарность за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство, обсуждение результатов и внимание к работе автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Р. М. Колпакова. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук О. С. Дудаковой за обсуждение результатов работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Тарасов П. Б.* О равномерности некоторых систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 2. 61–64.

2. *Тарасов П. Б.* О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. 5. 41–46.

3. *Тарасов П. Б.* Некоторые условия равномерности функций k-значной логики, принимающих значения 0 и 1 // Ученые записки Казанского университета. 2014. № 3. 123–129.

4. *Тарасов П. Б.* Равномерность некоторых конечных систем функций многозначной логики // Тезисы XI Международного семинара "Дискретная Математика и ее приложения" (Москва, МГУ, 18 – 23 июня 2012 г.). Под редакцией О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 213 – 215.

5. *Тарасов П. Б.* Several Sufficient Conditions For Uniformity of Finite Systems of Many-valued Logic // CSEDays. Theory 2013 (г. Екатеринбург, 29 июня - 1 июля 2013 г.). С. 47-49.

6. *Тарасов П. Б.* О некоторых необходимых условиях равномерности систем функций многозначной логики // Материалы XVII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 16-20 июня 2014 г.) Под редакцией Ю. И. Журавлева. Казань: Отечество, 2014. С. 232 – 234.

7. *Тарасов П. Б.* Several Necessary Conditions For Uniformity of Finite Systems of Many-valued Logic // Третий Российско-Финский симпозиум по дискретной математике. Расширенные тезисы докладов. (г. Петрозаводск, 15 – 18 сентября 2014 г.) Под редакцией В. В. Мазалова. С. 129–132.