ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Тарасов Павел Борисович

Об условиях равномерности систем функций многозначной логики

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Р. М. Колпаков

Москва – 2016

Содержание

Введение

Работа относится к математической теории синтеза управляющих систем. В ней рассматривается задача о реализации функций k-значной логики формулами над конечными системами.

Синтез и сложность управляющих систем является одним из основных направлений в математической кибернетике. Класс формул над конечными системами, реализующих функции k-значной логики ($k \geq 2$), — один из основных модельных классов управляющих систем. Задача изучения сложности формул заключается в построении формулы, которая реализует заданную функцию и является оптимальной относительно некоторой меры сложности. Наиболее часто используемыми мерами сложности для формул являются число символов переменных, входящих в формулу (называемое сложностью формулы), и глубина. Сложность формулы можно интерпретировать как ее стоимость, а глубину — как время вычисления при условии, что все вычисления можно производить параллельно. Очевидным способом построения оптимальной формулы является перебор, но, с точки зрения практики, такой метод не может быть использован в силу экспоненциального роста объема вычислений от числа переменных данной функции. Поэтому важное значение имеет задача построения формул, близких к оптимальным, без использования перебора.

Большое число методов синтеза формул было разработано для конечных систем, состоящих из булевых функций. Для полных базисов асимптотически оптимальные методы синтеза формул (и некоторых других классов управляющих систем) были разработаны О. Б. Лупановым [13–19] (см. также [12]). Оценки глубины формул в полных базисах были получены в работах [8, 11]. Сложность и глубина формул также изучалась для случая функционально неполных систем двузначной и k-значной логики при $k \geq 3$ (см., например, [2, 4, 5, 29, 30, 35, 36]).

В последнее время все более актуальной становится проблема вычисления функций с помощью распараллеленных вычислений. Поскольку время распараллеленного вычисления формулы прямо пропорционально ее глубине, проблема минимизации таких вычислений сводится к задаче построения по заданной формуле эквивалентной формулы (то есть формулы, реализующей ту же функцию), имеющей наименьшую возможную глубину. Если функцию f можно реализовать над конечной системой A формулой глубины не более l, то несложно получить верхнюю оценку $L \leq n^l$ сложности L реализации функции f формулами над A, где n — максимальное число переменных у функций из A. Таким образом, глубина реализации функции формулами не может быть меньше по порядку логарифма сложности этой реализации. В случае, если эта нижняя оценка достигается, говорят о равномерности системы A. Приведем точное определение.

Конечная система функций A называется равномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d, \tag{1}$$

где $L_A(f)$ и $l_A(f)$ есть минимальная сложность и минимальная глубина реализации функции f формулами над системой A. Таким образом, равномерные системы функций — это системы, позволяющие оптимальным образом распараллеливать вычисление функций, реализуемых формулами над этими системами.

Пусть $k \geq 2$. Положим $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$. Обозначим через P_k множество всех функций k-значной логики. Вопросы, связанные с равномерностью систем в P_k, изучались во многих работах. В работах В. М. Храпченко и Ф. Спиры [43, 65] независимо была доказана равномерность всех конечных полных систем булевых функций (см. также [50–52, 57]). В ряде работ [39, 40, 48, 56, 60, 64] рассматриваются методы оценки константы c из неравенства (1) для различных полных систем булевых функций. Методы, предложенные в работах [43, 65] нетрудно перенести на полные системы функций многозначной логики. Однако они существенно используют полноту систем.

В работе И. Вегенера [66] установлена равномерность всех конечных систем, порождающих класс M всех монотонных булевых функций. А. Б. Угольниковым [31] установлена равномерность всех конечных систем булевых функций и приведены примеры неравномерных систем функций из P_3. Аналогичный результат был получен в работе [61].

Таким образом, вопрос о равномерности конечных систем функций из P_2 решен полностью, поэтому приобретает актуальность задача исследования равномерности систем k-значной логики при $k > 2$.

Данная задача является принципиально более сложной по сравнению с аналогичной задачей для P_2 в связи с тем, что для замкнутых классов булевых функций существует удобное описание, приведенное в работах Э. Поста [58, 59], в то время как для замкнутых классов функций из P_k при $k \geq 3$ описание отсутствует, что связано с существованием принципиальных отличий многозначных логик от двухзначной, в частности, с континуальностью семейства всех замкнутых классов k-значной логики при $k \geq 3$ (см. [46]) и отсутствием описания всех конечно-порожденных классов k-значной логики.

Ряд публикаций посвящен задаче о соотношении глубины и сложности формул над конечными системами функций, порождающими предполные классы P_k при $k \geq 3$. Изучение данных классов облегчается существованием их полного предикатного описания, полученного в работах И. Розенберга [62, 63] (см. также [44, 55]).

Согласно данному описанию все предполные классы функций P_k при $k \geq 3$ можно разделить на следующие семейства: классы линейных функций — классы типа $\mathbb{L}$; классы функций, сохраняющих разбиения множества E_k, — классы типа $\mathbb{E}$; классы функций, сохраняющих сильно гомоморфные прообразы элементарных h-адических отношений, — классы типа $\mathbb{B}$; классы функций, сохраняющих центральные отношения, — классы типа $\mathbb{C}$; классы самодвойственных функций — классы типа $\mathbb{P}$; классы монотонных функций — классы типа $\mathbb{O}$.

Пусть ρ — отношение частичного порядка на E_k такое, что для любых двух элементов a и b из $(E_k,\ \rho)$ существуют $\sup(a,b)$ и $\inf(a,b)$ (частично упорядоченные множества такого вида называются решетками). Класс всех функций, сохраняющих отношение ρ, будем называть классом типа $\mathbb{O}^{\#}$. Конечно-порожденные предполные классы функций, монотонных относительно частично упорядоченного множества ширины 2, будем называть классами типа $\mathbb{O}_2$ (см. [9]). Классы типа $\mathbb{C}$, сохраняющие унарные и бинарные центральные отношения, называются классами типа $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ соответственно (см. [24]).

Равномерность всех конечных систем, порождающих предполные классы в P_3, анонсирована в работе [1]. Равномерность любых конечных систем, порождающих предполные классы типов $\mathbb{L}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{O}^{\#}$, $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ в P_k, установлена в работах [24, 25]. Кроме того, в этих работах для любого $k \geq 3$ доказано существование равномерных порождающих систем для классов типа $\mathbb{C}$. В работе [26] показана равномерность всех конечных порождающих систем для классов типа $\mathbb{O}$ при $k \leq 7$. Для некоторых классов типа $\mathbb{O}_2$ в [9] показано существование в этих классах функции специального вида, поэтому применением метода из работ [39, 65] нетрудно установить равномерность всех конечных систем, порождающих эти классы. В работе [10] анонсирована равномерность порождающих систем некоторых предполных классов монотонных функций при $k > 7$.

Как отмечено выше, в многозначной логике неизвестно никакого полного описания множества замкнутых классов. Более того, даже для конкретных известных семейств замкнутых классов функций k-значной логики остается открытым вопрос, являются ли классы из этих семейств конечно-порожденными. Одним из самых распространенных методов доказательства конечности семейств классов и наличия в них конечного базиса является метод мажоритарных функций, вытекающий из теоремы Бейкера-Пиксли [47] (см. также [55]). Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $n \geq 3$, называется мажоритарной, если для любых

$\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\beta, \alpha, \ldots, \alpha) = f(\alpha, \beta, \alpha, \ldots, \alpha) = \ldots = f(\alpha, \ldots, \alpha, \beta) = \alpha.$$

Множество всех мажоритарных функций k-значной логики будем обозначать через $\mathrm{N}A_k$.

Также очень важной задачей теории управляющих систем является задача сравнения базисов. Конечные системы функций A и B такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$(L_A(f))^{c_1} \leq L_B(f) \leq (L_A(f))^{c_2}.$$

В работе [33] доказано, что все конечные системы функций P_2, порождающие один и тот же замкнутый класс, полиномиально эквивалентны. В той же работе приведен пример систем функций из P_4, порождающих один и тот же замкнутый класс и не являющихся полиномиально эквивалентными. Примеров не полиномиально эквивалентных систем функций из P_3 до настоящего времени не приводилось. Кроме того, не было известно примеров систем, порождающих один и тот же замкнутый класс, часть из которых равномерна, а часть — нет.

Данная диссертация также посвящена задаче нахождения соотношений между глубиной и сложностью формул в многозначной логике. Найдены некоторые необходимые и достаточные условия равномерности систем функций многозначной логики. Кроме того отдельно рассмотрены два семейства замкнутых классов P_k при $k \geq 3$: предполные классы P_k и замкнутые классы функций из множества $P_{k,2}$ (функций k-значной логики, принимающих только значения 0 и 1).

Наряду со свойством равномерности функциональных систем в представленной диссертационной работе изучается ослабленный вариант этого свойства, который называется квазиравномерностью. Конечная система функций A называется квазиравномерной, если существуют такие константы c и d (зависящие только от A), что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

Работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы.

В первой главе приводятся определения и обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей работы. В частности, даны следующие определения.

Обозначим через $P_{k,s}$ множество всех функции k-значной логики, принимающих значения из множества E_s, $k \geq s \geq 2$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из P_s такие, что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через $\mathrm{pr}_s f$. Пусть $A \subseteq P_{k,s}$. Положим $\mathrm{pr}_s A = \{\mathrm{pr}_s f | f \in A\}$.

Во второй главе приводятся методы доказательства достаточных условий равномерности конечных систем функций многозначной логики. В первом параграфе приведены методы, общие для всех систем функций многозначной логики, во втором — методы для систем, порождающих в проекции класс всех монотонных булевых функций, а в третьем — методы, специфичные для всех систем функций $P_{k,2}$.

В третьей главе доказывается критерий квазиравномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$ и показывается, что выполнение данного критерия можно проверить за конечное время.

В четвертой главе приводится пример двух систем функций из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, одна из которых является равномерной, а другая не является равномерной, из чего, в частности, следует, что эти системы не являются полиномиально эквивалентными.

В пятой главе сводятся воедино все результаты работы и доказываются некоторые теоремы, являющиеся следствиями утверждений доказанных в первых четырех главах.

В диссертации принята следующая нумерация утверждений: леммы, теоремы и утверждения нумеруются парами чисел — номер главы и номер утверждения, а следствия нумеруются по порядку для каждого утверждения. Ниже приведено описание результатов работы.

Теорема 1 (см. также теорему 2.1.). *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$, где $k \geq s \geq 2$, такая, что множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда система A равномерна.*

Следствие 1. *Пусть A и B — конечные системы функций из $P_{k,s}$, $k \geq s \geq 2$, такие, что $[\mathrm{pr}_s A] = [\mathrm{pr}_s B]$, и множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда системы A и B полиномиально эквивалентны.*

Теорема 2. *Пусть A — конечная система функций из P_k, порождающая предполный класс типа $\mathbb{C}$, $k \geq 3$. Тогда система A равномерна.*

Теорема 3. *Пусть A — конечная система функций из P_k, $k \leq 7$, порождающая предполный класс. Тогда система A равномерна.*

Теорема 4. *Конечная система A функций из $P_{k,2}$ такая, что $\mathrm{pr}_2 A$ не содержится ни в одном из множеств*[1] *$O^\infty, I^\infty, K, D, L$, является равномерной.*

Некоторые соотношения между глубиной и сложностью реализации функций формулами получены для конечных систем функций из $P_{k,2}$, монотонных относительно частичного порядка на множестве E_k, в котором $1 > 0$, а остальные элементы несравнимы с 0 и 1 и попарно несравнимы между собой. Функции из $P_{k,2}$, монотонные относительно данного частичного порядка, в дальнейшем будем называть монотонными функциями.

Для каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ вводятся множества $V_f^{x_i}$ наборов специального вида длины $n-1$ элементов из E_k (для всех i, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

[1] Определения замкнутых классов булевых функций O^∞, I^∞, K, D, L приводятся в первой главе.

Для любого замкнутого класса B, состоящего из монотонных функций из $P_{k,2}$, и любого числа $r \geq 3$ определяются множества функций $\#(B, r)$ и $\#_1(B, r)$.

Теорема 5 (см. также теорему 2.3.). *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$, равномерна.*

Теорема 6 (см. также теорему 2.4.). *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ и любого $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ существует функция $g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_r) \in [A]$ такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. Тогда система A равномерна.*

Множество формул F над конечной системой функций A будем называть равномерным, если существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ, для которой выполнено неравенство

$$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d.$$

Подформулы $\Phi_1, \dots, \Phi_t$ формулы Φ вида $f(\Phi_1, \dots, \Phi_t)$ называются главными подформулами. Формула Φ над конечной системой функций A называется α-формулой, если у каждой подформулы Φ имеется не более одной нетривиальной главной подформулы.

Теорема 7 (см также лемму 3.2.). *Пусть A — конечная система функций из P_k, такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квазиравномерна.*

Теорема 8. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$, где n — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A.*

Теорема 9. *Существуют конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$ такие, что $[A] = [A']$ и*

1) система A равномерна,

2) система A' не равномерна,

3) системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [67–69].

Благодарности. Основная часть диссертации была выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Борисовича Угольникова, которому автор выражает благодарность за постановку задачи и научное руководство. Также за научное руководство, обсуждение результатов и внимание к работе автор благодарит научного руководителя доктора физико-математических наук профессора Р. М. Колпакова. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук О. С. Дудаковой и кандидату физико-математических наук Р. Ф. Сафину за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению диссертации.

Глава 1

Определения и обозначения

Положим $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geq 2$. Через A^n обозначается n-я декартова степень множества A.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, аргументы которой определены на множестве E_k, такую, что для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$ выполнено включение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k$, называют функцией k-значной логики. Множество всех функций k-значной логики обозначается через P_k. Множество функций k-значной логики, принимающих значения только из множества E_s, $s \leq k$, обозначим через $P_{k,s}$. Переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, называется существенной, если для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta, \gamma \in E_k$ выполнено неравенство

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \gamma, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Переменные, не являющиеся существенными, называются фиктивными. Под равными функциями понимаются функции, зависящие от одного и того же множества существенных переменных и задающих одно и тоже отображение.

Для удобства, если это не вызывает двусмысленности, любой набор вида $(\alpha_t, \ldots, \alpha_n)$, $t \geq 1$, элементы которого обозначены одинаковыми символами с последовательными порядковыми индексами, будем обозначать через $\widetilde{\alpha}$. Например, вместо $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_k^m$ мы будем использовать сокращенную запись $\widetilde{\alpha} \in E_k^m$.

Определим сигнатуру как конечное множество функциональных символов $\{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}\}$, где каждому символу f_i соответствует число n_i, называемое арностью этого символа. Если $A = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_{n_m})\}$ — конечная система функций из P_k, то сигнатурой A назовем множество функциональных символов $\{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}\}$, состоящее из символов, обозначающих функции из A. Сигнатуру системы A будем обозначать через $\Sigma(A)$.

Через $x_1, x_2, \ldots$, $y_1, y_2, \ldots$ и $z_1, z_2, \ldots$ будем обозначать переменные.

Пусть Σ — произвольная сигнатура. Определим индуктивно понятие формулы над Σ:

1) символы переменных являются формулами над Σ; такие формулы называются тривиальными;

2) если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над Σ, а $f^{(n)}$ — n-арный функциональный символ из Σ, то выражение $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над Σ.

Пусть X — некоторое множество переменных. Формулу будем называть формулой от переменных из X, если в этой формуле содержатся только символы переменных из X.

Будем говорить, что Φ является формулой над системой функций A, если Φ — формула над сигнатурой $\Sigma(A)$. Отметим, что в качестве формулы над A, формула Φ реализует некоторую функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ от переменных, входящих в Φ. В этом случае мы говорим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется формулой Φ над системой A. Будем также полагать, что формула Φ наряду с функцией f реализует все функции, равные f. Формулы Φ и Φ' над A, реализующие равные функции, будем называть эквивалентными над A. Если формулы Φ и Φ' являются эквивалентными над системой $A \subseteq P_k$, то будем писать $\Phi = \Phi'$ для системы A. В доказательстве утверждений будем также писать $\Phi = \Phi'$ без указания системы A, если это не вызывает двусмысленности.

Множество всех функций, реализуемых нетривиальными формулами над A, обозначается через $[A]$ и называется замыканием A. Будем говорить, что система A порождает множество функций $B \subseteq P_k$ если $B \subseteq [A]$.

Сложностью формулы Φ назовем число входящих в Φ символов переменных. Сложность формулы Φ будем обозначать через $L(\Phi)$.

Дадим индуктивное определение глубины $l(\Phi)$ формулы Φ:

1) тривиальные формулы имеют глубину 0;

2) пусть Φ — формула вида $f_i(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$, где $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ — произвольные формулы. Положим

$$l(\Phi) = \max_{1 \le j \le m} (l(\Phi_j)) + 1.$$

Пусть A — конечная система функций из множества P_k, f — некоторая функция из $[A]$. Положим

$$L_A(f) = \min_{\Phi} L(\Phi), \quad l_A(f) = \min_{\Phi} l(\Phi),$$

где минимум берется по всем формулам Φ над A, реализующим функцию f. Величины $L_A(f)$ и $l_A(f)$ называются сложностью и глубиной реализации функции f над системой A соответственно. В дальнейшем для удобства вместо $L_A(f)$ и $l_A(f)$ будем писать $L(f)$ и $l(f)$ соответственно.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция из $P_{k,s}$, а $g(x_1, \dots, x_n)$ — функция из P_s, такие, что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_s^n$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функцию g будем называть проекцией функции f и обозначать через $\mathrm{pr}_s f$. Пусть $A \subseteq P_{k,s}$. Положим $\mathrm{pr}_s A = \{\mathrm{pr}_s f | f \in A\}$. Заметим, что $[\mathrm{pr}_s A] = \mathrm{pr}_s [A]$. Если $A \subseteq P_s$, то положим $\mathrm{pr}_k^{-1} A = \{f \in P_{k,s} | \mathrm{pr}_s f \in A\}$.

Дадим рекурсивное определение подформулы произвольной формулы Φ. Если Φ — тривиальная формула, то она сама является своей подформулой. Подформулами формулы Φ вида $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ будем называть саму формулу Φ и подформулы формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. В таком случае формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ будем называть главными подформулами формулы Φ. Подформулы, являющиеся тривиальными формулами, будем называть тривиальными подформулами.

Формулу, каждая подформула которой имеет не более одной нетривиальной главной подформулы, будем называть α-формулой.

Внешней формулой будем называть формулу, в которой выделены некоторые переменные, называемые внешними переменными; при этом каждая внешняя переменная встречается в формуле ровно один раз. Внешнюю формулу Φ с множеством $\{y_1, \dots, y_t\}$ внешних переменных будем обозначать через $\Phi[y_1, \dots, y_t]$.

Сложность внешней формулы определим как число всех (в том числе внешних) символов переменных, входящих в данную формулу. Для удобства любую обычную формулу будем рассматривать как частный случай внешней формулы с пустым множеством внешних переменных.

Пусть $\Phi[y_1, \ldots, y_m]$, $\Psi_1[y_1^1, \ldots, y_{n_1}^1]$, $\ldots$, $\Psi_m[y_1^m, \ldots, y_{n_m}^m]$ — внешние формулы такие, что все переменные $y_1, \ldots, y_m, y_1^1, \ldots, y_{n_1}^1, \ldots, y_1^m, \ldots, y_{n_m}^m$ являются различными. Тогда через

$$\Phi[\Psi_1[y_1^1, \ldots, y_{n_1}^1], \ldots, \Psi_m[y_1^m, \ldots, y_{n_m}^m]]$$

обозначим внешнюю формулу с внешними переменными

$$y_1^1, \ldots, y_{n_1}^1, \ldots, y_1^m, \ldots, y_{n_m}^m,$$

полученную из формулы Φ подстановкой вместо каждой внешней переменной $y_1, \ldots, y_m$ формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ соответственно.

В частности, будем говорить, что формула Φ представляется в виде

$$\Psi_1[\Psi_2[\ldots \Psi_{n-1}[\Psi_n] \ldots]],$$

если $\Psi_1[y], \ldots, \Psi_{n-1}[y], \Psi_n$ являются некоторыми внешними формулами над A такими, что Φ графически равна формуле $\Psi_1[\Psi_2[\ldots \Psi_{n-1}[\Psi_n]] \ldots]$. Заметим, что Ψ_n — внешняя формула с пустым множеством внешних переменных.

Пусть Φ — формула, $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ — подформулы формулы Φ, ни одна из которых не является подформулой другой. Внешнюю формулу $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ будем называть внешней подформулой формулы Φ, если формула Φ может быть представлена в виде $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$.

Дадим рекурсивное определение составной подформулы произвольной формулы Φ:

1) формула Φ а также все нетривиальные подформулы Φ являются составными подформулам Φ;

2) если формула Φ представляется в виде $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$, где формула Φ_3 является нетривиальной, то все составные подформулы формулы $\Phi_1[\Phi_3]$ являются составными подформулами формулы Φ.

Конечная система A функций из множества P_k называется равномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2 L_A(f) + d. \tag{1.1}$$

Конечная система A функций из множества P_k называется квазиравномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d. \tag{1.2}$$

В дальнейшем для удобства будем писать log вместо $\log_2$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется мажоритарной, если $n \geq 3$ и для любых $\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\beta, \alpha, \ldots, \alpha) = f(\alpha, \beta, \alpha, \ldots, \alpha) = \ldots = f(\alpha, \ldots, \alpha, \beta) = \alpha.$$

Множество всех мажоритарных функций из P_k будем обозначать через NA_k.

На множестве E_k введем частичный порядок следующим образом: $1 > 0$, а остальные элементы несравнимы с 0 и 1 и попарно между собой. Далее под монотонными функциями будем понимать функции, монотонные относительно данного частичного порядка. Заметим, что если $f \in P_{k,2}$ — монотонная функция, то $\mathrm{pr} f \in M$, где M — класс монотонных булевых функций.

Будем говорить что функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$ не меньше функции $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$, если для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ выполнено неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \geq g(\widetilde{\alpha})$, где сравнение производится относительно частичного введенного выше порядка. В этом случае будем также писать $f \geq g$.

Обозначим через K, D и L множества булевых конъюнкций, дизъюнкций и линейных функций соответственно. Через O^∞ обозначим множество всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, таких, что $f(\widetilde{x}) \geq x_i$, для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Через I^∞ обозначим множество всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, таких, что $f(\widetilde{x}) \leq x_i$, для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Обозначения замкнутых классов соответствуют книге [38].

Конечные системы функций A и B, такие, что $[A] = [B]$, называются полиномиально эквивалентными, если существуют такие константы c_1 и c_2, что для любой функции $f \in [A]$ выполнены неравенства

$$L_A^{c_1}(f) \leq L_B(f) \leq L_A^{c_2}(f).$$

Нетрудно доказать, что если системы A и B равномерны и $[A]=[B]$, то они являются полиномиально эквивалентными.

Глава 2

Достаточные условия равномерности

2.1. Общие методы

Следующая лемма является обобщением утверждения, используемого в работах [39, 65].

Лемма 2.1. *Пусть Σ — некоторая конечная сигнатура такая, что арность каждого функционального символова из Σ не превосходит n. Пусть Φ — формула над Σ такая, что для некоторого $r \geq 2$ выполнено неравенство $L(\Phi) \geq 2(n+1)^r$. Тогда формула Φ представима в виде*

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]],$$

где $\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$ — внешние формулы над Σ, и для каждого $i \in \{1, \ldots, r\}$ выполняется неравенство

$$L(\Phi_i) \geq \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{r-1}}.$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по r. Установим базу индукции для $r = 2$. Пусть Φ — формула над Σ такая, что $L(\Phi) \geq 2(n+1)^2$. Определим последовательность формул $\Psi_0, \ldots, \Psi_t$ следующим образом. Обозначим через Ψ_0 формулу Φ. Для всех i, $i \geq 1$, таких, что $l(\Psi_{i-1}) > 1$, через Ψ_i обозначим произвольную главную подформулу формулы Ψ_{i-1} максимальной сложности. Пусть t — наименьше число такое, что $l(\Psi_t) = 1$. Заметим, что для всех i, $1 \leq i \leq t$, выполнены неравенства

$$L(\Psi_i) \leq L(\Psi_{i-1}) \quad \text{и} \quad L(\Psi_i) \geq \frac{L(\Psi_{i-1})}{n}.$$

Выберем наибольшее i, $i \in \{1, \ldots, t\}$, такое, что $L(\Psi_i) \geq \frac{L(\Phi)+1}{n+1}$. Отметим, что

$L(\Psi_t) \le n < \frac{L(\Phi)+1}{n+1}$. Следовательно $i < t$. Тогда имеем

$$\frac{L(\Phi)+1}{n+1} \le L(\Psi_i) \le nL(\Psi_{i+1}) \le (L(\Phi)+1)\frac{n}{n+1}.$$

Обозначим формулу Ψ_i через Φ_2. Через $\Phi_1[y]$ обозначим внешнюю формулу, полученную из Φ заменой подформулы Φ_2 на внешнюю переменную y. Тогда формула Φ представляется в виде $\Phi_1[\Phi_2]$. Заметим, что

$$L(\Phi_1) = L(\Phi) - L(\Phi_2) + 1 \ge L(\Phi) - (L(\Phi)+1)\frac{n}{n+1} + 1 \ge \frac{L(\Phi)+1}{n+1}.$$

$$L(\Phi_2) = L(\Psi_i) \ge \frac{L(\Phi)+1}{n+1}.$$

Таким образом, база индукции установлена.

Пусть $r_0 > 2$ и утверждение леммы верно для всех $r < r_0$, докажем для $r = r_0$. По индукционному предположению формула Φ представима в виде

$$\Phi'_1[\Phi'_2[\ldots\Phi'_{r-2}[\Phi'_{r-1}]\ldots]],$$

где $\Phi'_1[y], \ldots, \Phi'_{r-2}[y], \Phi'_{r-1}$ — внешние формулы над Σ, и для каждого $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ выполняется неравенство

$$L(\Phi'_i) \ge \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{r-2}}.$$

Заметим, что

$$L(\Phi'_{r-1}) \ge \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{r-2}} \ge \frac{2(n+1)^r+1}{(n+1)^{r-2}} > 2(n+1)^2.$$

Следовательно, по доказанному выше для $r = 2$, формула Φ'_{r-1} представима в виде $\Phi_{r-1}[\Phi_r]$ где $\Phi_{r-1}[y], \Phi_r$ — внешние формулы над Σ, и для каждого $i \in \{r-1, r\}$ выполняется неравенство

$$L(\Phi_i) \ge \frac{L(\Phi'_{r-1})+1}{(n+1)} > \frac{L(\Phi'_{r-1})}{(n+1)} \ge \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{r-1}}$$

Для всех $i \in \{1, \ldots, r-2\}$ обозначим через $\Phi_i[y]$ внешнюю формулу $\Phi'_i[y]$. Нетрудно заметить, что формулы $\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$ удовлетворяют условиям леммы. Лемма доказана.

Пусть $\widetilde{f} = (f_1(x), ..., f_r(x))$ — некоторый набор одноместных функций. Обозначим через $\widetilde{f}(x)$ функцию

$$f_1(f_2(\ldots f_{r-1}(f_r(x))\ldots))$$

и для i и j, где $1 \leq i < j \leq r$, через $\widetilde{f}_{i,j}(x)$ обозначим функцию

$$f_1(f_2(\ldots f_{i-1}(f_j(f_{j+1}(\ldots f_{r-1}(f_r(x)))\ldots))$$

Заметим, что $\widetilde{f}_{1,j}(x) = f_j(f_{j+1}(\ldots f_{r-1}(f_r(x)))\ldots))$.

Через $\widetilde{x}^r$ будем обозначать набор переменных

$$(x_{1,2}, \ldots, x_{1,r}, x_{2,3}, x_{2,4}, \ldots, x_{2,r}, \ldots, x_{r-2,r-1}, x_{r-2,r}, x_{r-1,r}),$$

в котором индексы — это всевозможные упорядоченные пары элементов из множества $\{1, \ldots, r\}$, в которых второй элемент строго больше первого, упорядоченные по возрастанию сначала второго, а затем первого индекса. Например,

$$\widetilde{x}^4 = (x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}).$$

Заметим, что в наборе $\widetilde{x}^r$ имеется C_r^2 переменных.

Через $P_{k,s}(1)$ обозначим множество всех одноместных функций из $P_{k,s}$, зависящих от переменной x.

Лемма 2.2. *Пусть $d_m^{(m)}$ — m-арный функциональный символ, $m \geq 3$. Тогда существуют число $r \geq 2$ и формула Φ над сигнатурой $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из набора $\widetilde{x}^r$ такие, что для любой функции*[1] $d_m(x_1, ..., x_m) \in pr_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ *и любого упорядоченного набора функций $\widetilde{f} = (f_1(x), ..., f_r(x)) \in P_{k,s}^r(1)$ выполняется равенство*

$$\widetilde{f}(x) = g(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)), \tag{2.1}$$

[1] Здесь и дальше под $d_m^{(m)}$ подразумевается m-арный функциональный символ, а через d_m — функция, обозначаемая этим функциональным символом. В дальнейшем функциональный символ обозначается с указанием арности в качестве верхнего индекса.

где $g(\widetilde{x}^r)$ — функция, реализуемая формулой Φ над системой $\{d_m\}$, а функция $\widetilde{f}_{i,j}(x)$ подставляется в функцию g вместо переменной $x_{i,j}$, $1 \le i < j \le r$.

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы эквивалентно следующему утверждению: существует формула Φ над $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из $\widetilde{x}^r$ такая, что для любой функции $d_m(x_1, ..., x_m) \in pr_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ функция $g(\widetilde{x}^r)$, реализуемая формулой Φ над системой $\{d_m\}$, удовлетворяет равенству (2.1) для всех наборов $\widetilde{f} = (f_1(x), \ldots, f_r(x))$ из $P^r_{k,s}(1)$.

Положим $r = s^{k(m-1)} + 2$. Докажем, что для любого множества наборов функций $B \subseteq P^r_{k,s}(1)$ существует формула Φ над $d_m^{(m)}$ такая, что для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любого набора $\widetilde{f} \in B$ справедливо соотношение (2.1). Доказательство проведем индукцией по мощности t множества B.

База индукции. Пусть $t = |B| \le m-1$, $B = \{\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^{m-1}\}$. Без ограничения общности будем считать, что $t = m-1$ (если $t < m-1$, то в B можно добавить $m-1-|B|$ произвольных наборов из $P^r_{k,s}(1)$). Пусть

$$\widetilde{f}^1 = (f^1_1, \ldots, f^1_r), \ldots, \widetilde{f}^{m-1} = (f^{m-1}_1, \ldots, f^{m-1}_r).$$

Докажем, что существуют такие i, j, $1 \le i < j \le r$, что для любого l, $1 \le l \le m-1$, выполнено равенство $\widetilde{f}^l(x) = \widetilde{f}^l_{i,j}(x)$, т. е.

$$f^l_1(f^l_2(\ldots(f^l_r(x))\ldots))) = f^l_1(f^l_2(\ldots, f^l_{i-1}(f^l_j(f^l_{j+1}(\ldots(f^l_r(x)))))\ldots)).$$

Положим $h^l_j(x) = f^l_j(f^l_{j+1}(\ldots(f^l_r(x)))\ldots)$ для $1 < j \le r$, $1 \le l \le m-1$. Рассмотрим $r-1$ набор

$$\widetilde{h}_2 = (h^1_2(x), \ldots, h^{m-1}_2(x)),\ \widetilde{h}_3 = (h^1_3(x), \ldots, h^{m-1}_3(x)), \ldots, \widetilde{h}_r = (h^1_r(x), \ldots, h^{m-1}_r(x))$$

из $P^{m-1}_{k,s}(1)$. Заметим, что $|P^{m-1}_{k,s}(1)| = s^{k(m-1)} < r-1$. Значит, существуют такие i, j, $2 \le i < j \le r$, что $\widetilde{h}_i = \widetilde{h}_j$. Тогда для всех l, $1 \le l \le m-1$, выполняется равенство

$$f^l_i(f^l_{i+1}(\ldots f^l_{r-1}(f^l_r(x))\ldots)) = f^l_j(f^l_{j+1}(\ldots f^l_{r-1}(f^l_r(x))\ldots))$$

Следовательно, для каждого $l \in \{1, \ldots, m-1\}$ выполняются равенства

$$f_1^l(f_2^l(\ldots(f_r^l(x))\ldots)) = f_1^l(f_2^l(\ldots, f_{i-1}^l(h_i^l(x)\ldots))) =$$
$$= f_1^l(f_2^l(\ldots f_{i-1}^l(h_j^l(x))\ldots)) = f_1^l(f_2^l(\ldots, f_{i-1}^l(f_j^l(f_{j+1}^l(\ldots(f_r^l(x)))))\ldots)),$$

т. е. $\widetilde{f}^l(x) = \widetilde{f}^l_{i,j}(x)$, что и требовалось доказать.

В качестве Φ возьмем формулу $d_m(x_{i,j}, \ldots, x_{i,j})$. Так как для любой функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in pr_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любого $\alpha \in E_s$ выполняется равенство $d_m(\alpha, ..., \alpha) = \mathrm{pr}_s d_m(\alpha, ..., \alpha) = \alpha$, то в силу доказанного получаем, что равенство (2.1) имеет место для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и всех наборов из B. Таким образом, база индукции доказана.

Переход индукции. Пусть утверждение леммы выполнено для всех подмножеств, состоящих не более чем из t_0 наборов функций, где $t_0 \geq m-1$. Докажем утверждение для $t = t_0 + 1$. Пусть B — произвольное множество, такое, что $B = \{\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^t\}$, где $\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^t$ — наборы из $P^r_{k,s}(1)$. По индуктивному предположению для множеств

$$B_1 = \{\widetilde{f}^2, \widetilde{f}^3, \ldots, \widetilde{f}^t\}, B_2 = \{\widetilde{f}^1, \widetilde{f}^3, \ldots, \widetilde{f}^t\}, \ldots, B_m = \{\widetilde{f}^1, \ldots, \widetilde{f}^{m-1}, \widetilde{f}^{m+1}, \ldots, \widetilde{f}^t\}$$

существуют формулы Φ_1,…,Φ_m над сигнатурой $d_m^{(m)}$ от переменных из $\widetilde{x}^r$ такие, что для любой функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in pr_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любого упорядоченного набора функций $\widetilde{f}^j$ из B_i (т. е. при $i \neq j$) выполняется равенство

$$\widetilde{f}^j(x) = g_i(\widetilde{f}^j_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}^j_{r-1,r}(x)), \tag{2.2}$$

где $g_i(\widetilde{x}^r)$ — функция, реализуемая формулой Φ_i над системой $\{d_m\}$.

Возьмем в качестве Φ формулу $d_m^{(m)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$. Пусть $d_m(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторая функция из $pr_k^{-1}\mathrm{N}A_s$, $\widetilde{f}(x)$ — некоторый набор из B. Тогда формула Φ над системой $\{d_m\}$ реализует функцию

$$g(\tilde{x}^r) = d_m(g_1(\tilde{x}^r), ..., g_m(\tilde{x}^r)).$$

Из определения функций g_i следует, что соотношение (2.2) справедливо для всех j, i, где $j \in \{1, \ldots, t\}$, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Таким образом, все функции

$$g_i(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)),$$

кроме, возможно, одной, равны функции $\widetilde{f}(x)$. Так как $\mathrm{pr}_s d_m$ — мажоритарная функция из P_s, имеем

$$g(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)) = d_m(g_1(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x)), \ldots$$
$$\ldots, g_m(\widetilde{f}_{1,2}(x), \ldots, \widetilde{f}_{r-1,r}(x))) = \widetilde{f}(x).$$

Таким образом для произвольного набора $\widetilde{f}(x)$ из множества B установлено соотношение 2.1 и индукционный переход доказан.

Следовательно, для произвольного множества B наборов длины r функций из $P_{k,s}(1)$, в том числе и для всего множества $P_{k,s}(1)$, установлено, что существует формула Φ над $\{d_m^{(m)}\}$, такая, что для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ формула Φ реализует над множеством $\{d_m\}$ функцию g, удовлетворяющую условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $r \geq 2$ и пусть функция $g(\widetilde{x}^r) \in P_{k,s}$ такова, что для любого набора функций $\widetilde{f} \in P_{k,s}^r(1)$ выполнено равенство (2.1). Тогда для любой конечной системы A функций из $P_{k,s}$ и любых формул $\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$ над A выполнено равенство*

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots[\Phi_{r-1}[\Phi_r]]\ldots]] = g(\Psi_{1,2}, \ldots, \Psi_{r-1,r}),$$

где $\Psi_{i,j}$ — формула[2] *вида $\Phi_1[\Phi_2[\ldots[\Phi_{i-1}[\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]]\ldots]]$, $1 \leq i < j \leq r$, подставляемая в g вместо переменной $x_{i,j}$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности формулы

$$\Phi_1[y], \ldots, \Phi_{r-1}[y], \Phi_r$$

[2] $\Psi_{1,j}$ — формула вида $\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]$.

реализуют над A функции[3]

$$g_1(x_1,\ldots,x_n,y),\ldots,g_{r-1}(x_1,\ldots,x_n,y),g_r(x_1,\ldots,x_n)$$

соответственно. Тогда для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что выполнено равенство

$$g_1(\widetilde{x},g_2(\widetilde{x},\ldots,g_{r-1}(\widetilde{x},g_r(\widetilde{x}))\ldots))=g(g_{1,1}((\widetilde{x}),g_{1,2}(\widetilde{x}),\ldots,g_{r-1,r}(\widetilde{x})),\qquad(2.3)$$

где

$$g_{i,j}(\widetilde{x})=g_1(\widetilde{x},g_2(\widetilde{x},\ldots,g_{i-1}(\widetilde{x},g_j(\widetilde{x},\ldots,g_{r-1}(\widetilde{x},g_r(\widetilde{x}))\ldots)),1\le i<j\le r.$$

Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из E_k^n. В качестве набора $\widetilde{f}$ рассмотрим следующий набор функций:

$$f_1(x)=g_1(\widetilde{\alpha},x),\ f_2(x)=g_2(\widetilde{\alpha},x),\ldots f_{r-1}(x)=g_{r-1}(\widetilde{\alpha},x),,f_r(x)=g_r(\widetilde{\alpha}).$$

Согласно условиям леммы для функции g и набора $\widetilde{f}$ выполнено равенство (2.1). Поэтому

$$g_1(\widetilde{\alpha},g_2(\widetilde{\alpha},\ldots g_{r-1}(\widetilde{\alpha},g_r(\widetilde{\alpha}))\ldots))=f_1(f_2(\ldots f_{r-1}(f_r(x))\ldots))=$$
$$=g(\widetilde{f}_{1,2}(x),\ldots,\widetilde{f}_{r-1,r}(x))=g(g_{1,2}(\widetilde{\alpha}),\ldots,g_{r-1,r}(\widetilde{\alpha})).$$

Равенство выполняется для произвольного набора $\widetilde{\alpha}$, отсюда следует требуемое соотношение (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть Σ — конечная сигнатура. Пусть $d_m^{(m)}$ – m-арный функциональный символ, $m\ge 3$. Тогда существуют константы c и d такие, что для любой нетривиальной формулы Φ над Σ существуют формула Ψ над сигнатурой $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из множества $\{y_1,\ldots,y_t\}$ и составные подформулы $\Phi_1,\ldots,\Phi_t$ формулы Φ, удовлетворяющие следующим условиям*

1) $l(\Psi)\le c\log L(\Phi)$,

[3] Отметим, что некоторые переменные функций $g_1,\ldots,g_r$ могут быть несущественными.

2) $L(\Phi_i) \le d$ *для всех* i, $1 \le i \le t$,

3) *для любой конечной системы функций* $A \subset P_{k,s}$ *сигнатуры* Σ *и для любой функции* $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ *формула* Θ *над* $\Sigma \cup \{d_m^{(m)}\}$, *полученная из формулы* Ψ *заменой переменных* $y_1, \ldots, y_t$ *на формулы* $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ *соответственно, эквивалентна формуле* Φ *над системой* $A \cup \{d_m\}$.

Доказательство. По лемме 2.2 существуют число $r \ge 2$ и такая формула Ψ' над $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из $\tilde{x}^r$, что для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любого набора функций $\widetilde{f} = (f_1(x), \ldots, f_r(x)) \in P_{k,s}^r(1)$ формула Ψ' реализует функцию $g(\widetilde{x}^r)$ над $\{d_m\}$, для которой выполнено равенство (2.1).

Пусть функциональные символы из Σ имеют арность не более чем n. Положим

$$c = \frac{l(\Psi')}{\log \frac{(n+1)^{2r}}{(n+1)^{2r}-1}}; \quad d = 2(n+1)^r.$$

Докажем утверждение леммы индукцией по сложности формулы Φ. В случае $L(\Phi) \le d$, в качестве формул Ψ и Φ_1 можно взять формулу y_1 и формулу Φ.

Пусть утверждение леммы выполнено для всех формул Φ сложности не более N, $N \ge d$. Докажем утверждение для формулы Φ такой, что $L(\Phi) = N+1$.

Так как $L(\Phi) > d = 2(n+1)^r$, то по лемме 2.1 формулу Φ можно представить в виде $\Phi_1[\Phi_2[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]$, причем $L(\Phi_i) \ge \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^r}$ для всех $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Для всех i, j, $1 \le i < j \le r$, через $\Phi_{i,j}$ обозначим формулу

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots[\Phi_{i-1}[\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots\Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]]\ldots]\ldots]].$$

В формуле Ψ' переменные $x_{i,j}$ заменим на формулы $\Phi_{i,j}$ для всех i, j, $1 \le i < j \le r$. Полученную формулу обозначим через Φ'. По лемме 2.3 для любой функции $d_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_s$ и любой системы $A \subset P_{k,s}$ сигнатуры Σ формулы Φ и Φ' эквивалентны над $\{d_m\} \cup A$.

Поскольку сложность любой формулы Φ_i больше 2, $L(\Phi) = N + 1$ и Φ есть формула $\Phi_1[\Phi_2[\ldots, [\Phi_r]\ldots]]$, то сложность любой формулы $\Phi_{i,j}$ не превосходит N. Следовательно, по предположению индукции для любой формулы $\Phi_{i,j}$ существуют формула $\Psi_{i,j}$ над $\{d_m^{(m)}\}$ от переменных из множества $\{y_{i,j,1}, \ldots, y_{i,j,q_{i,j}}\}$ и такие составные подформулы $\Phi_{i,j,1}, \ldots, \Phi_{i,j,q_{i,j}}$ формулы $\Phi_{i,j}$, что

1) $l(\Psi_{i,j}) \leq c \log L(\Phi_{i,j})$;

2) $L(\Phi_{i,j,p}) \leq d$ для всех $1 \leq p \leq q_{i,j}$;

3) для любой конечной системы функций $A \subset P_{k,s}$ сигнатуры Σ и функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1} \mathrm{N} A_s$ формула $\Theta_{i,j}$ над сигнатурой $\Sigma \cup \{d_m^{(m)}\}$, полученная из формулы $\Psi_{i,j}$ заменой переменных $y_{i,j,1}, \ldots, y_{i,j,q_{i,j}}$ на формулы $\Phi_{i,j,1}, \ldots, \Phi_{i,j,q_{i,j}}$ соответственно, эквивалентна формуле $\Phi_{i,j}$ над $\{d_m\} \cup A$.

Заметим, что составные подформулы $\Phi_{i,j,p}$ составных подформул $\Phi_{i,j}$ формулы Φ, являются составными подформулами Φ.

Заменим в формуле Ψ' переменные $x_{i,j}$ на формулы $\Psi_{i,j}$. Полученную формулу обозначим через Ψ. Докажем, что формула Ψ и все составные подформулы $\Phi_{i,j,p}$ — удовлетворяют условиям леммы.

Для проверки условия 3) рассмотрим формулу, полученную из формулы Ψ заменой каждой переменной $y_{i,j,p}$ на формулу $\Phi_{i,j,p}$. Заметим, что данная формула может быть получена из формулы Ψ' заменой каждой переменной $x_{i,j}$ на формулу $\Theta_{i,j}$, эквивалентную согласно индуктивному предположению формуле $\Phi_{i,j}$ над $\{d_m\} \cup A$. Поэтому рассмотренная формула эквивалентна формуле Φ' и, следовательно, эквивалентна формуле Φ над $\{d_m\} \cup A$.

Условие 2) для составных подформул $\Phi_{i,j,p}$ выполняется в силу индуктивного предположения (следует из условия 2) для формул $\Phi_{i,j}$). Проверим условие 1). Так как $L(\Phi_{i,j}) \leq L(\Phi) - L(\Phi_j) + 1$, то:

$$
\begin{aligned}
l(\Psi) \le l(\Psi') + \max_{1\le i<j\le r} l(\Psi_{i,j}) \le l(\Psi') + \max_{1\le i<j\le r} (c\log L(\Phi_{i,j}) \le \\
\le l(\Psi') + c\log(L(\Phi) - \min_{1\le i\le r} L(\Phi_i) + 1) \le \\
\le c\log\bigl((L(\Phi)+1)\frac{(n+1)^r-1}{(n+1)^r}\bigr) + l(\Psi') < \\
< c\log\bigl((L(\Phi) + \frac{L(\Phi)}{(n+1)^r})\frac{(n+1)^r-1}{(n+1)^r}\bigr) + l(\Psi') = \\
= c\log L(\Phi) + l(\Psi') - c\log\frac{(n+1)^{2r}}{(n+1)^{2r}-1} \le c\log L(\Phi). \quad (2.4)
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Любая конечная система A функций из $P_{k,s}$ такая, что множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию, равномерна.*

Доказательство. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$. Пусть функция $d_m(x_1,\ldots,x_m) \in [A]$ такова, что $\mathrm{pr}_s d_m \in \mathrm{N}A_s$.

Положим $B = A \cup \{d_m\}$. Из леммы 2.4 следует существование констант c и d таких, что для любой формулы Φ над A существует формула Ψ и формула Θ над B, которая получается из формулы Ψ подстановкой составных подформул $\Phi_1,\ldots,\Phi_t$ формулы Φ вместо переменных, эквивалентная формуле Φ, и выполняются соотношения $l(\Psi) \le c\log L(\Phi)$ и $l(\Phi_i) \le d$. Отсюда следует, что $l(\Theta) \le c\log L(\Phi) + d$.

Пусть g — произвольная функция из $[A]$. Тогда

$$
\begin{aligned}
l_A(g) \le l_A(d_m) l_B(g) \le l_A(d_m)(c\log L_A(g) + d) \le c l_A(d_m)\log L_A(g) + d l_A(d_m) = \\
= c'\log L_A(g) + d',
\end{aligned}
$$

где $c' = c l_A(d_m)$ и $d' = d l_A(d_m)$. В силу произвольности выбора функции g теорема доказана.

2.2. Равномерность конечных систем функций из $P_{k,2}$ в проекции порождающих класс монотонных булевых функций

Основной результат этого параграфа можно получить в качестве следствия из теоремы 2.1, однако методы, приведенные в этом параграфе, позволяют получить точные оценки для констант c и d из определения равномерности.

Лемма 2.5. *Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ — произвольные функции из $P_{k,2}$, а $g(x_1, \ldots, x_7)$ — функция из $P_{k,2}$ такая, что*

$$\mathrm{pr}_2 g = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\&(x_4x_5 \vee x_4x_6 \vee x_5x_7). \tag{2.5}$$

Тогда выполнено равенство

$$f_1(f_2(f_3(x))) = \\ = g(f_1(1), f_1(0), f_2(f_3(x)), f_1(f_2(1)), f_1(f_2(0)), f_3(x), f_1(f_3(x))). \tag{2.6}$$

Доказательство. Положим $g'(x_1, \ldots, x_7) = \mathrm{pr}_2 g$, $h_i = \mathrm{pr}_2 f_i$ для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$. В равенстве (2.6) все вхождения $f_3(x)$ заменим на переменную x, а все функции g, f_1 и f_2 заменим на функции g', h_1 и h_2. Получим равенство

$$h_1(h_2(x)) = g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)). \tag{2.7}$$

Поскольку функции g, f_1, f_2, f_3, f_3 принимают только значения 0 и 1, то для доказательства равенства (2.6) достаточно доказать равенство (2.7).

Обозначим через Φ формулу[4]

$$h_1(h_2(1))\&h_1(h_2(0)) \vee h_1(h_2(1))\&x \vee h_1(h_2(0))\&h_1(x).$$

[4] Под константами 0 и 1 мы формально будем понимать некоторые формулы, реализующие функции, тождественно равные 0 и 1 соответственно.

Рассмотрим три случая. Пусть $h_1(x) = c$. Тогда

$$g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)) = \\ = c \vee c\&h_2(x) \vee c\&\Phi = c = h_1(h_2(x)).$$

Пусть $h_1(x) = x$. Тогда

$$g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)) = \\ = 1\&0 \vee 1\&h_2(x) \vee 0\&\Phi = h_2(x) = h_1(h_2(x)).$$

Пусть $h_1(x) = \overline{x}$. Тогда

$$g'(h_1(1), h_1(0), h_2(x), h_1(h_2(1)), h_1(h_2(0)), x, h_1(x)) = \\ = 0\&1 \vee 0\&h_2(x) \vee 1\&(\overline{h_2(1)}\&\overline{h_2(0)} \vee \overline{h_2(1)}\&x \vee \overline{h_2(0)}\&\overline{x}) = \\ = \neg\big((h_2(1) \vee h_2(0))\&(h_2(1) \vee \overline{x})\&(h_2(0) \vee x)\big) = \\ = \neg\big(h_2(1)\&h_2(0) \vee h_2(1)\&x \vee h_2(1)\&\overline{x}\&h_2(0) \vee h_2(0)\&h_2(1)\&x \vee h_2(0)\&\overline{x}\big) = \\ = \neg\big(h_2(1)\&h_2(0) \vee h_2(1)\&x \vee h_2(0)\&\overline{x}\big) = \overline{h_2(x)} = h_1(h_2(x)).$$

Следовательно, равенство (2.7) установлено, а значит, равенство (2.6) выполнено для любых f_1, f_2 и f_3. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что $[\mathrm{pr}_2 A] = M$. Тогда для любой формулы Φ над A вида $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$ выполнено равенство

$$\Phi = g(\Phi_1[1], \Phi_1[0], \Phi_2[\Phi_3[x]], \Phi_1[\Phi_2[1]], \Phi_1[\Phi_2[0]], \Phi_3[x], \Phi_1[\Phi_3]),$$

где $g(x_1, \ldots, x_7)$ — функция из $P_{k,2}$, удовлетворяющая условию (2.5).

Утверждение 2.6. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что $[\mathrm{pr}_2 A] = M$. Тогда существует формула Φ над A, такая, что $l(\Phi) \leq 7$ и формула Φ реализует функцию удовлетворяющую условию (2.5).*

Доказательство. Покажем, что $0, 1 \in [A]$ и эти функции реализуются формулами глубины не более чем 2. Заметим, что так как $[\mathrm{pr}_2 A] = M$, то существуют функции $f_1(x_1,\ldots,x_{n_1}), f_2(x_1,\ldots,x_{n_2}) \in A$, такие, что $\mathrm{pr}_2 f_1 = 0$ и $\mathrm{pr}_2 f_2 = 1$. Следовательно, формулы

$$f_1(f_1(x,\ldots,x),\ldots,f_1(x,\ldots,x)) \quad \text{и} \quad f_2(f_2(x,\ldots,x),\ldots,f_2(x,\ldots,x)) \tag{2.8}$$

реализуют константы 0 и 1 соответственно.

Далее, так как $[\mathrm{pr}_2 A] = M$, то существуют функции $f_3(x_1,\ldots,x_{n_3})$, $f_4(x_1,\ldots,x_{n_4}) \in A$ такие, что $\mathrm{pr}_2 f_3 \notin I^\infty$ и $\mathrm{pr}_2 f_4 \notin O^\infty$ и функции $\mathrm{pr}_2 f_3$ и $\mathrm{pr}_2 f_4$ существенно зависят более чем от 2 переменных. Пусть без ограничения общности $\mathrm{pr}_2 f_3$ зависит существенно от x_1 и $\mathrm{pr}_2 f_3(0,1,\ldots,1) = 1$. Тогда существует такой набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_3}) \in E_2^{n_3-1}$, что $f(0,\widetilde{\alpha}) \neq f(1,\widetilde{\alpha})$ и $\widetilde{\alpha} \neq (1,\ldots,1)$. Пусть без ограничения общности $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_t = 0$ и $\alpha_{t+1} = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n_3} = 1$. Тогда

$$\mathrm{pr}_2 f_3(x, \underbrace{y,\ldots,y}_{t-1 \text{ раз}}, 1,\ldots,1) = x \vee y. \tag{2.9}$$

Аналогично, из функции f_4 можно построить формулу, реализующую в проекции конъюнкцию. Заметим, что

$$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\&(x_4x_5 \vee x_4x_6 \vee x_5x_7) =$$
$$= \big((x_1x_2) \vee (x_1x_3)\big) \vee \big(x_2\&(((x_4x_5) \vee (x_4x_6)) \vee (x_5x_7))\big).$$

Нетрудно заметить, что с использованием формул (2.8) и (2.9) можно построить формулу глубины 7, удовлетворяющую условию (2.5). Утверждение доказано.

Теорема 2.2. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что $[\mathrm{pr}_2 A] = M$ Тогда система A равномерна, и константы c и d из неравенства (1.1) определяются следующим образом:*

$$c = \frac{9}{\log_2 \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)^2-1}}, \; d = \max_{\substack{f\in[A] \\ L(f)\leq 2(n+1)^3}} l_A(f),$$

где n — максимальное число переменных у функций из A.

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из A, Φ — формула минимальной сложности реализующая f. Для того, чтобы доказать неравенство (1.1) достаточно установить, что существует формула Ψ над A, эквивалентная Φ, такая, что выполнено неравенство $l(\Psi) \le c \log L(\Phi) + d$. После этого утверждение теоремы будет следовать из неравенств

$$l(f) \le l(\Psi) \le c \log L(\Phi) + d = c \log L(f) + d.$$

Докажем это утверждение индукцией по $N = L(\Phi)$.

База индукции при $N \le 2(n+1)^3$, очевидно, выполнена. Пусть утверждение теоремы выполнено для всех $N < N_0$, где $N_0 > 2(n+1)^3$, докажем его для $N = N_0$. Так как $L(\Phi) > 2(n+1)^3$, то по лемме 2.1 формулу Φ можно представить в виде $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$, где $\Phi_1[y]$, $\Phi_2[y]$ и Φ_3 внешние формулы над A, такие, что $L(\Phi_i) \ge \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^2}$ для всех $i \in \{1,2,3\}$. Обозначим через $\Theta_1, \dots, \Theta_5$ формулы $\Phi_1[y], \Phi_2[\Phi_3[y]], \Phi_1[\Phi_2[y]], \Phi_3[y], \Phi_1[\Phi_3]$. Заметим, что $L(\Theta_i) \le L(\Phi) - \min\limits_{i \in \{1,2,3\}} L(\Phi_i) + 1$. По индуктивному предположению получаем, что существуют формулы $\Theta'_1, \dots, \Theta'_5$ над A, эквивалентные $\Theta_1, \dots, \Theta_5$, такие, что

$$\begin{aligned}
&l(\Theta'_i) \le c \log L(\Theta_i) + d \le c \log(L(\Phi) - \min_{j \in \{1,2,3\}} L(\Phi_j) + 1) + d \le \\
&\le c \log((L(\Phi)+1)\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}) + d \le c \log((L(\Phi))\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}) + d \le \\
&\le c \log((L(\Phi))\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} + \frac{L(\Phi)}{2(n+1)^2}) + d \le c \log((L(\Phi))\frac{2(n+1)^2 - 1}{2(n+1)^2}) + d \le \\
&\qquad\le c \log(L(\Phi)) + d - c \log \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)^2 - 1} \le c \log L(\Phi) + d - 9
\end{aligned}$$

Подставив вместо переменной y в формулы $\Theta'_1, \dots, \Theta'_5$ формулы миниальной глубины, реализующие 0 и 1 (как отмечено в доказательстве утверждения 2.6, их глубина не превосходит 2), можно получить формулы $\Xi_1, \dots, \Xi_7$, эквивалентные формулам

$$\Phi_1[1], \Phi_1[0], \Phi_2[\Phi_3[x]], \Phi_1[\Phi_2[1]], \Phi_1[\Phi_2[0]], \Phi_3[x], \Phi_1[\Phi_3],$$

такие, что $l(\Xi_i) \leq c \log L(\Phi) + d - 7$.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_7)$ — произвольная функция из $[A]$, удовлетворяющая условию (2.5). Тогда по следствию 1 из леммы 2.5 формулы Φ и $g(\Xi_1, \ldots, \Xi_7)$ эквивалентны и по утверждению 2.6 выполнено $l(g) \leq 7$. Таким образом получаем:

$$l(g(\Xi_1, \ldots, \Xi_7)) \leq \max_{i \in \{1, \ldots, 7\}} l(\Xi_i) + l(g) \leq c \log L(\Phi) + d,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

2.3. Достаточные условия равномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$

Пусть σ —некоторая подстановка на множестве E_k. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ называется двойственной к функции $g(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ относительно σ, если для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ выполнено равенство

$$\sigma^{-1}(f(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n))) = g(\widetilde{\alpha}).$$

Имеет место принцип двойственности[5]. Пусть σ —некоторая подстановка на множестве E_k, $\Sigma = (f_1^{n_1}, \dots, f_t^{n_t})$— некоторая сигнатура. Пусть A и B — конечные системы функций P_k сигнатуры Σ такие, что каждая функция f_i из A двойственна функции f_i из B относительно σ, $i \in \{1, \dots, t\}$. Тогда произвольная формула Φ над Σ реализует функции над A и B, двойственные относительно σ.

В данном параграфе в качестве двойственных функций мы будем рассматривать функции, двойственные относительно фиксированной подстановки σ на множестве E_k, состоящей из одного цикла $(0, 1)$ и $k-2$ циклов длины 1. Нетрудно заметить, что если f и g —двойственные функции из $P_{k,2}$, то их проекции $\mathrm{pr}_2 f$ и $\mathrm{pr}_2 g$ будут двойственными булевыми функциями (определение двойственности для булевых функций см., например, [38]). Заметим, что булева функция содержится в замкнутом классе O^∞ тогда и только тогда, когда двойственная к ней функция содержится в замкнутом классе I^∞.

Будем говорить, что множества функций $A, B \subseteq P_{k,2}$ двойственны, если множество B состоит из всех функций, двойственных к функциям из A, и только из них. Двойственную систему к системе A будем обозначать через A^*. Заметим что, если $A \subset P_{k,2}$, $\mathrm{pr}_2 A \subset O^\infty$, то $\mathrm{pr}_2 A^* \subset I^\infty$. Аналогично, если $\mathrm{pr}_2 A \subset M_{01} \setminus O^\infty$, то $\mathrm{pr}_2 A^* \subset M_{01} \setminus I^\infty$.

[5] См. [44].

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)\in P_{k,2}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\beta\in E_k$. Положим

$$M_f^{x_i}=\{\mathrm{pr}_2 f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},x,\alpha_i,\dots,\alpha_{n-1})|\ \widetilde{\alpha}\in E_k^{n-1}\},$$

$$V_f^{x_i}=\{\widetilde{\alpha}\in E_k^{n-1}|\ \mathrm{pr}_2 f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},y,\alpha_i,\dots,\alpha_{n-1})\neq 0,1\},$$

$$f|_{x_i}^{\beta}=f(x_1,\dots,x_{i-1},\beta,x_{i+1},\dots,x_n).$$

Для произвольных множества $X=\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$ и набора $\widetilde{\alpha}\in E_k^t$ положим

$$f|_X^{\widetilde{\alpha}}=(\dots(f|_{x_{i_1}}^{\alpha_1})|_{x_{i_2}}^{\alpha_2})\dots)|_{x_{i_t}}^{\alpha_t},$$

$$M_f^X=\bigcup_{x\in X}M_f^x,\quad \widehat{M}_f^X=\bigcup_{x\in X}\{M_f^x\},$$

$$V_f^X=\{\widetilde{\alpha}\in E_k^{n-t}|\ \mathrm{pr}_2 f|_{\{x_1,\dots,x_n\}\setminus X}^{\widetilde{\alpha}}\neq 0,1\}.$$

Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, Φ — нетривиальная формула над A. Пусть Φ имеет вид $f(\Phi_1,\dots,\Phi_t)$, $t\geq 1$. Пусть $I\subseteq\{1,\dots,t\}$ — множество индексов такое, что для всех $i\in I$ формула Φ_i является нетривиальной, а для всех $j\in\{1,\dots,t\}\setminus I$ формула Φ_j является тривиальной. Положим

$$w_A(\Phi)=\bigcup_{i\in I}M_f^{x_i},\quad \widehat{w}_A(\Phi)=\bigcup_{i\in I}\{M_f^{x_i}\}.$$

Заметим, если A — система монотонных функций, то $w_A(\Phi)\subseteq\{0,1,x\}$, а $\widehat{w}_A(\Phi)$ — множество различных множеств $M_f^{x_i}$.

Пусть P — множество нетривиальных подформул формулы Φ. Положим

$$W_A(\Phi)=\bigcup_{\Psi\in P}w_A(\Psi);\quad \widehat{W}_A(\Phi)=\bigcup_{\Psi\in P}\widehat{w}_A(\Psi).$$

В дальнейшем для удобства будем писать $w(\Phi)$, $\widehat{w}(\Phi)$, $W(\Phi)$ и $\widehat{W}(\Phi)$ вместо $w_A(\Phi)$, $\widehat{w}_A(\Phi)$, $W_A(\Phi)$ и $\widehat{W}_A(\Phi)$ соответственно.

Лемма 2.7. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ и пусть Φ — нетривиальная формула над A такая, что $W(\Phi)\subseteq\{0,x\}$. Пусть Ψ — составная подформула формулы Φ. Пусть формула Φ реализует функцию $f(x_1,\dots,x_n)$, а формула Ψ — функцию $g(x_1,\dots,x_n)$. Тогда выполнено неравенство $f\leq g$.*

Доказательство. Если формулы Φ и Ψ совпадают, то неравенство очевидно выполнено. В противном случае формула Φ имеет вид $\Phi_1[\Phi_2[\Phi_3]]$, где формула Ψ является составной подформулой формулы вида $\Phi_1[\Phi_3]$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $f \le g$ для составной подформулы Ψ вида $\Phi_1[\Phi_3]$, из чего утверждение леммы будет следовать для произвольной составной подформулы формулы Ψ.

Пусть Ψ есть формула $\Phi_1[\Phi_3]$. Пусть формулы $\Phi_1[y], \Phi_2[y], \Phi_3$ реализуют функции $f_1(\widetilde{x}, y)$, $f_2(\widetilde{x}, y)$ и $f_3(\widetilde{x})$ соответственно. Так как $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$, то $M^y_{f_1} \subseteq \{0, x\}$ и $M^y_{f_2} \subseteq \{0, x\}$. Поэтому $f_1(\widetilde{x}, 0) = 0$ и $f_2(\widetilde{x}, 0) = 0$. Следовательно, имеем [6]

$$f(\widetilde{x}) = f_1(\widetilde{x}, f_2(\widetilde{x}, f_3(\widetilde{x}))) = f_1(\widetilde{x}, f_3(\widetilde{x})) \& f_2(\widetilde{x}, 1) \le f_1(\widetilde{x}, f_3(\widetilde{x})) = g(\widetilde{x}).$$

Лемма доказана.

Утверждение 2.8. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ — монотонные функции из $P_{k,2}$ и пусть Φ — нетривиальная формула над $\{f^{(n)}\}$, а Ψ — формула над $\{g^{(n)}\}$, полученная из Φ заменой каждого функционального символа f на g. Тогда если $f \ge g$, то $f' \ge g'$, где f' и g' — функции, реализуемые формулами Φ и Ψ над $\{f\}$ и $\{g\}$ соответственно.*

Доказательство нетрудно провести индукцией по глубине формулы Φ.

Лемма 2.9. *Пусть Σ — конечная сигнатура и пусть $d^{(m)}_m$ – m-арный функциональный символ, $m \ge 3$. Тогда существуют константы c и d такие, что для любой нетривиальной формулы Φ над Σ существуют формула Ψ над сигнатурой $\{d^{(m)}_m\}$ от переменных из множества $\{y_1, \dots, y_t\}$ и составные подформулы $\Phi_1, \dots, \Phi_t$ формулы Φ, удовлетворяющие условиям:*

1) $l(\Psi) \le c \log L(\Phi)$;

[6] Так как рассматриваемые функции f_1, f_2, f_3 принадлежат множеству $P_{k,2}$, то к значениям этих функций можно применять логические операции, в том числе конъюнкцию. В дальнейшем подобные рассуждения будут проводиться без пояснений.

2) $L(\Phi_i) \leq d$ для всех i, $1 \leq i \leq t$;

3) для любой конечной системы функций $A \subset P_{k,2}$ сигнатуры Σ такой, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$, и любой функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формула, полученная из формулы Ψ заменой переменных $y_1, \ldots, y_t$ на формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ соответственно, эквивалентна формуле Φ над системой $A \cup \{d_m\}$.

Доказательство. Пусть $d'^{(m)}$ — m-местный функциональный символ. По лемме 2.4 существует формула Ψ' над сигнатурой $\{d_m'^{(m)}\}$ и составные подформулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ формулы Φ, удовлетворяющие свойствам 1—2 такие, что для любой функции $d'_m \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_2$ и любой системы A сигнатуры Σ формула Θ, полученная из формулы Ψ' заменой переменных $y_1, \ldots, y_t$ на формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ соответственно, эквивалентна формуле Φ над системой $A \cup \{d'_m\}$. Заменим в формуле Ψ' все функциональные символы d'_m на d_m, полученную формулу обозначим через Ψ. Очевидно, что формулы Ψ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ удовлетворяют условиям 1 и 2 из условия леммы. Докажем, что формулы Ψ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ удовлетворяют условию 3.

Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ сигнатуры Σ такая, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$ и $d_m(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{pr}_k^{-1} M_{01} \setminus O^\infty$. Положим

$$d'_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{\alpha} \in E_2^m \text{ и в наборе } \widetilde{\alpha} \\ & \text{имеется не более одного нуля;} \\ d_m(\widetilde{\alpha}) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что $d'_m \geq d_m$ и $\mathrm{pr}_2 d'_m \in \mathrm{N}A_2 \cap M$.

Пусть формула Ψ реализует функцию $g(y_1, \ldots, y_t)$, формула Φ — функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, а формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ реализуют функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$ $f_t(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно. Пусть формула Ψ' реализует функцию $g'(y_1, \ldots, y_t)$. Заметим, что формула Θ реализует функцию $g'(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x}))$. Так как $d'_m \geq$

d_m, то из утверждения 2.8 следует, что $g' \geq g$. Поэтому

$$f(\widetilde{x}) = g'(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})).$$

С другой стороны, так как $g \in [d_m]$, то $\mathrm{pr}_2 g \in M_{01}$. Следовательно $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{x}) \geq x_1 \& \ldots \& x_t$ и поэтому

$$g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq f_1(\widetilde{x}) \& f_2(\widetilde{x}) \& \ldots \& f_t(\widetilde{x}).$$

По лемме 2.7 имеем $f_i(\widetilde{x}) \geq f(\widetilde{x})$ для всех i, $1 \leq i \leq t$. Следовательно, выполнено неравенство

$$f_1(\widetilde{x}) \& f_2(\widetilde{x}) \& \ldots \& f_t(\widetilde{x}) \geq f(\widetilde{x}).$$

Поэтому имеем

$$f(\widetilde{x}) = g'(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x})) \geq \\ \geq f_1(\widetilde{x}) \& f_2(\widetilde{x}) \& \ldots f_t(\widetilde{x}) \geq f(x).$$

Таким образом выполнено равенство $f(\widetilde{x}) = g(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_t(\widetilde{x}))$, следовательно справедливо свойство 3 утверждения леммы. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $d_m^{(m)}$— m-местный функциональный символ. Тогда существуют константы c и d такие, что для любой формулы Φ над A, существует формула Ξ над $\Sigma(A) \cup \{d_m^{(m)}\}$ такая, что $l(\Xi) \leq c \log L(\Phi) + d$, и формула Φ эквивалентна формуле Ξ над $A \cup \{d_m\}$, если выполнено одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{pr}_2 d_m \in \mathrm{N}A_2$*;*

2) $W_A(\Phi) = \{0, x\}$ *и* $\mathrm{pr}_2 d_m \in M_{01} \setminus O^\infty$*;*

3) $W_A(\Phi) = \{1, x\}$ *и* $\mathrm{pr}_2 d_m \in M_{01} \setminus I^\infty$*.*

Утверждение следует из лемм 2.4 и 2.9 (см. также доказательство теоремы 2.1) и принципа двойственности.

Будем говорить, что монотонная функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством $\#$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$ и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, если существует функция $g(x_1, \dots, x_{n-q}, y_1, \dots, y_r) \in B$ такая, что:

1) $V_f^X \subseteq V_g^{\{y_1,\dots,y_r\}}$;

2) если $\{0, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3) если $\{1, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

4) если $\widehat{M}_f^X = \{\{0, 1, x\}\}$ и $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Множество функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что f обладает свойством $\#$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ относительно замкнутого класса B и набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^{n-q}$, будем обозначать через $\#_X^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r)$. Положим

$$\#_X(B, n, r) = \bigcap_{\widetilde{\alpha} \in E_k^{|X|}} \#_X^{\widetilde{\alpha}}(B, n, r);$$

$$\#(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{X \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}} \#_X(B, n, r).$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{k,2}$ обладает свойством $\widehat{\#}$ уровня r по множеству переменных $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ относительно замкнутого класса $B \subseteq P_{k,2}$, если существует функция $g(x_1, \dots, x_{n-q}, y_1, \dots, y_r) \in B$ такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено:

1) если $\{0, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

2) если $\{1, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

3) если $\widehat{M}_f^X = \{\{0, 1, x\}\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Множество всех функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$, обладающих свойством $\widehat{\#}$ уровня r по множеству переменных X относительно замкнутого класса B, будем обозначать через $\widehat{\#}_X(B, n, r)$. Положим

$$\widehat{\#}(B, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{X \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}} \widehat{\#}_X(B, n, r).$$

Лемма 2.10. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$ такая, что $A \subseteq \#([A], r)$. Тогда для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и любого множества $X \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует число $q \geq 3$ такое, что $f \in \widehat{\#}_X([A], n, q)$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$. Пусть без ограничения общности $X = \{x_{t+1}, \ldots, x_n\}$, $t \geq 0$.

Так как $f \in \#([A], r)$, то для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ существует функция

$$g_{\widetilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r) \in [A],$$

удовлетворяющая условиям 1)—4) из определения свойства $\#$. Пусть $V_f^X = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_p\}$. Положим $h_1(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r) = g_{\widetilde{\alpha}_1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Для всех $i \in \{2, \ldots, p\}$ положим

$$\begin{aligned} h_i(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_{r^i}) = h_{i-1}(&x_1, \ldots, x_t, g_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r), \ldots \\ &g_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_t, y_{r+1}, \ldots, y_{2r}), \ldots, g_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_t, y_{r^i - r + 1}, \ldots, y_{r^i})). \end{aligned}$$

Положим $q = r^p$ и $g(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = h_p(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Докажем, что для функции g выполняются условия 1—3 из определения свойства $\widehat{\#}$. Так как для всех $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g_{\widetilde{\alpha}_i}(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) \in M_{01}$, то для всех $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01}$.

Проверим условие 1 свойства $\widehat{\#}$. Пусть

$$\{0, x\} \subseteq \widehat{M}_f^X \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}.$$

Докажем индукцией по $j \in \{1, \ldots, p\}$, что для любого $\widetilde{\alpha}_i$, где $i \in \{1, \ldots, j\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 h_j(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{y}) \notin O^\infty$. Для $j = 1$ это утверждение следует из того, что функция $g_{\widetilde{\alpha}_1}$ удовлетворяет условиям из определения свойства $\#$ для функции f, и из предположения рассматриваемого случая. Докажем утверждение для $j \in \{j_0, \dots, p\}$. Пусть $i \in \{1, \dots, j-1\}$, $s \in \{1, \dots, r^j\}$. Имеем

$$h_j(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1 \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r^j - s \text{ раз}}) = h_{j-1}\big(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \dots, 0), \dots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \dots, 0)}_{[(s-1)/r] \text{ раз}},$$

$$g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1-[(s-1)/r]r \text{ раз}}, 1, 0, \dots, 0), \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \dots, 0), \dots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_i, 0, \dots, 0)}_{r^{j-1}-1-[(s-1)/r] \text{ раз}}\big) \leq$$

$$\leq h_{j-1}(\widetilde{\alpha}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{[(s-1)/r] \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r^{j-1}-1-[(s-1)/r] \text{ раз}}) = 0.$$

Далее, имеем

$$h_j(\widetilde{\alpha}_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1 \text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r^j - s \text{ раз}}) = h_{j-1}\big(\widetilde{\alpha}_j, \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \dots, 0), \dots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \dots, 0)}_{[(s-1)/r] \text{ раз}},$$

$$g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-1-[(s-1)/r]r \text{ раз}}, 1, 0, \dots, 0), \underbrace{g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \dots, 0), \dots, g_{\alpha_j}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \dots, 0)}_{r^{j-1}-1-[(s-1)/r] \text{ раз}}\big) \leq$$

$$\leq h_{j-1}(\widetilde{\alpha}_j, 0, \dots, 0) = 0.$$

Аналогично имеем $h_i(\widetilde{\alpha}_i, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0$. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) \notin O^\infty$ для всех i и j, $1 \leq i \leq j \leq p$, и $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \notin M_{01} \setminus O^\infty$.

Выполнение условия 2 свойства $\widehat{\#}$ следует из пункта 1 по принципу двойственности, а выполнение условия 3 следует из того, что $\mathrm{N}A_2 = M_{01} \setminus (O^\infty \cup I^\infty)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#([A], r)$, $r \geq 3$. Тогда существует такое $q \geq r$, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], q)$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$. По лемме 2.10 для любой $f \in A$ и любого $X \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ существует число $q = q(f, X)$ и такая функция $g(x_1, \dots, x_{n-|X|}, y_1, \dots, y_q)$, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнены условия 1–3 из определения свойства $\widehat{\#}$.

Нетрудно заметить, что если $q_1 > q_2$ и $f \in \widehat{\#}_X(B, q_1)$, то $f \in \widehat{\#}_X(B, q_2)$, так как любую функцию $g(x_1, ..., x_{n-|X|}, y_1, ...y_{q_1})$, удовлетворяющую свойствам 1)—3) из определения свойства $\widehat{\#}$, можно рассматривать как функцию от переменных $x_1, \ldots, x_{n-|X|}, y_1, \ldots, y_{q_2}$.

Следовательно, можно положить $q = \max\limits_{\substack{f \in A \\ X \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}}} q(f, X)$. Лемма доказана.

Лемма 2.11. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда следующие множества формул над A равномерны:*

1) множество F_0 всех формул Φ над A таких, что $\widehat{W}(\Phi) = \{\{0, x\}\}$,

2) множество F_1 всех формул Φ над A таких, что $\widehat{W}(\Phi) = \{\{1, x\}\}$,

3) множество F' всех формул Φ над A таких, что $\widehat{w}(\Phi) = \{\{0, 1, x\}\}$.

Доказательство. Положим $p = \max\limits_{h(x_1, \ldots, x_{m+r}) \in [A]} l(h)$, где m — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A. Пусть $d_r^{(r)}$ — r-местный функциональный символ.

Пусть F одно из множеств $\{F_0, F_1, F'\}$. Тогда по следствию 1 из леммы 2.9 существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$ такая, что $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$ и Φ эквивалентна Ψ над $A \cup \{d_r\}$, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathrm{pr}_2 d_r \in \mathrm{N}A_2$;

2) $\Phi \in F_0$ и $\mathrm{pr}_2 d_r \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3) $\Phi \in F_1$ и $\mathrm{pr}_2 d_r \in M_{01} \setminus I^\infty$.

Пусть Φ — формула из F такая, что $l(\Phi) \geq 2$. Пусть без ограничения общности формула Φ имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q)$, где все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$

являются нетривиальными. Пусть $\Psi_1, \dots, \Psi_q$ — формулы над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$, эквивалентные формулам $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ соответственно над $A \cup \{d_r\}$ для всех функций d_r, для которых выполнены приведенные выше условия 1)—3), и такие, что $l(\Psi_i) \le c \log L(\Phi_i) + d$.

Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, то существует функция $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in [A]$ такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, где $X = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+q}\}$, выполнено:

1) если $\widehat{M}_f^X = \widehat{w}(\Phi) = \{\{0, 1, x\}\}$, т. е. $\Phi \in F'$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$;

2) если $\widehat{M}_f^X = \widehat{W}(\Phi) = \{\{0, x\}\}$ т. е. $\Phi \in F_0$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3) если $\widehat{M}_f^X = \widehat{W}(\Phi) = \{\{1, x\}\}$ т. е. $\Phi \in F_1$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$.

В формулах $\Psi_1, \dots, \Psi_q$ все подформулы вида $d_r(\Phi'_1, \dots, \Phi'_r)$ заменим на формулы $g(x_1, \dots, x_n, \Phi'_1, \dots, \Phi'_r)$. Полученные формулы обозначим через $\Psi'_1, \dots, \Psi'_q$. Пусть формула Ψ_i реализует функцию $h_i(x_1, \dots, x_p)$, а формулы Ψ'_i реализует функцию $h'_i(x_1, \dots, x_p)$, где $p \ge n$. Так как при любом $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ функция $d_r^\alpha(x_1, \dots, x_r) = g(\widetilde{\alpha}, x_1, \dots, x_r)$ удовлетворяет условиям следствия 1 из леммы 2.9, то при каждом $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ имеем

$$h_i(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \dots, x_p) = h'_i(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \dots, x_p). \tag{2.10}$$

Обозначим черех Ψ' формулу $f(x_1, \dots, x_n, \Psi'_1, \dots, \Psi'_q)$. Пусть формулы Φ и Ψ' реализуют функции $h(x_1, \dots, x_p)$ и $h'(x_1, \dots, x_p)$ соответственно. Из определения множества V_f^X следует, что для любого $\widetilde{\beta} \in E_k^n \setminus V_f^X$ выполнены равенства

$$\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta}, x_1, \dots, x_q) = h(\widetilde{\beta}, x_{n+1}, \dots, x_p) = h'(\widetilde{\beta}, x_{n+1}, \dots, x_p) = \mathrm{const}.$$

Кроме того, из (2.10) следует, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполнено равенство $h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) = h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x})$. Следовательно, Ψ' и Φ эквивалентны. Кроме того, имеем

$$l(\Psi') \le 1 + \max_{i \in \{1, \dots, q\}} l(\Psi'_q) \le 1 + c \log L(\Phi) + d.$$

Так как $g \in [A]$, то существует формула Ψ над A такая, что Ψ эквивалентна формуле Ψ' и

$$l(\Psi) \leq l(\Psi')l(g) \leq cp \log L(\Phi) + dp + p.$$

Следовательно, поскольку формула Ψ' эквивалентна формуле Φ над A, то лемма доказана.

Формулу Φ над конечной системой монотонных функций A будем называть приведенной, если $\widehat{W}(\Phi) \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$, т. е. в множестве $\widehat{W}(\Phi)$ не содержатся множества $\{0\}$, $\{1\}$, $\{x\}$ и $\{0, 1\}$.

Лемма 2.12. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть F— множество всех приведенных формул Φ над A таких, что $\{1, x\} \in \widehat{w}_A(\Phi)$. Тогда для любого $q \geq 3$ и q-местного функционального символа $d_q^{(q)}$ существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_q^{(q)}\}$, удовлетворяющая следующим условиям: $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$, и для любой функции $d_q(x_1, \ldots, x_q) \in \mathrm{pr}_k^{-1} M_{01} \setminus O^\infty$ формулы Φ и Ψ эквивалентны над $A \cup \{d_q\}$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности формула Φ имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_t, \Phi_1, \ldots, \Phi_m),$$

где $f \in A$ и все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ являются нетривиальными и $M_f^{x_{t+m}} = \{1, x\}$. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, то существует функция $g(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r)$ такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, где $X = \{x_{t+1}, \ldots, x_m\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$. Тогда для любой функции $d_q(x_1, \ldots, x_q) \in M_{01} \setminus O^\infty$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$, имеем

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, d_q(x_1^1, \ldots, x_q^1), \ldots, d_q(x_1^r, \ldots, x_q^r)) \in \mathrm{N}A_2. \tag{2.11}$$

По пункту 1 из следствия 1 из леммы 2.9 существуют константы c' и d' и такая формула Ψ' над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_{qr}^{(qr)}\}$, что $l(\Psi) \leq c' \log L(\Phi) + d'$, и для любой функции d_{qr} такой, что $\mathrm{pr}_2 d_{qr} \in \mathrm{N}A_2$ формулы Φ и Ψ' эквивалентны над $A \cup \{d_{qr}\}$ (константы c' и d' определяются системой A и числом qr). Заменим в формуле Ψ' все подформулы вида $d_{qr}(\Phi_1, \ldots, \Phi_{qr})$ на формулы

$$g(x_1, \ldots, x_t, d_q(\Phi_1, \ldots, \Phi_q), d_q(\Phi_{q+1}, \ldots, \Phi_{2q}), \ldots, d_q(\Phi_{qr-q+1}, \ldots, \Phi_{qr}).$$

Полученную формулу обозначим через Ψ''. Пусть без ограничения общности формулы Φ и Ψ'' реализуют функции $h(x_1, \ldots, x_p)$ и $h'(x_1, \ldots, x_p)$ соответственно, где $p \geq t$. Из (2.11) следует, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ справедливо равенство

$$h'(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, x_{t+1}, \ldots, x_p). \tag{2.12}$$

Обозначим через Ψ''' формулу $f(x_1, \ldots, x_t, \Psi'', \ldots, \Psi'')$. Пусть формула Ψ''' реализует функцию $h'''(x_1, \ldots, x_p)$. Так как для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^X$ выполняется равенство $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha}, x, \ldots, x) = x$, то из (2.12) следует, что выполнено равенство $h'''(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p)$. Кроме того, для любого $\widetilde{\beta} \in E_k^t \setminus V_f^X$ выполнены равенства

$$\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_{t+r}) = \mathrm{const} = h(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h'''(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p),$$

поэтому формулы Ψ''' и Φ эквивалентны. Пусть функции из A зависят не более чем от m переменных. Положим

$$p = \max_{h(x_1, \ldots, x_{r+m}) \in [A]} l(h), \quad c = 2pc, \quad d = 2pd' + p.$$

Имеем $l(g) \leq p$. Следовательно, существует формула Ψ над A, эквивалентная формуле Ψ''' такая, что

$$\begin{aligned} l(\Psi) &\leq pl(\Psi''') \leq p(1 + l(\Psi'')) \leq p(1 + 2l(\Psi)) \leq \\ &\leq p(1 + 2(c' \log L(\Phi) + d')) = 2pc' \log L(\Phi) + 2pd' + p = c \log L(\Phi) + d. \end{aligned}$$

Поскольку формула Ψ эквивалентна формуле Φ над $A \cup \{d_q\}$, то лемма доказана.

Лемма 2.13. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть F— множество всех приведенных формул Φ над A таких, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A, удовлетворяющая следующим условиям: $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$ и выполнено неравенство $f(\widetilde{x}) \leq g(\widetilde{x})$, где $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ — функции, реализуемые формулами Φ и Ψ соответственно.*

Доказательство. Пусть F_1 —множество всех приведенных формул Ξ над A таких, что $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Xi)$. По лемме 2.12 существуют такие константы c_1 и d_1, что для любой формулы $\Phi' \in F_1$ существует формула Φ'' над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$ такая, что выполнено неравенство $l(\Phi'') \leq c_1 \log L(\Phi') + d_1$, и для любой функции $d_r(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формулы Φ' и Φ'' эквивалентны над $A \cup \{d_r\}$.

По лемме 2.11 множество F' всех формул Ξ над A таких, что $\widehat{w}(\Xi) = \{\{0, 1, x\}\}$, равномерно. Следовательно, существуют такие константы c_2 и d_2, что для любой формулы $\Xi \in F'$ существует формула Ξ' над A, эквивалентная формуле Ξ такая, что $l(\Xi') \leq c_2 \log L(\Xi) + d_2$.

Положим

$$u = \max_{h(x_1, \ldots, x_r) \in [A]} l(h); \quad c = u \max(c_1, c_2); \quad d = u \max(d_1, d_2) + 1.$$

Докажем индукцией по глубине формулы Φ, что константы c и d удовлетворяют условиям леммы. Если $l(\Phi) = 1$, то утверждение леммы очевидно выполнено. Пусть утверждение леммы выполнено для всех формул Φ глубины не более M. Докажем это утверждение для формулы Φ такой, что $l(\Phi) = M + 1$. Пусть без ограничения общности Φ имеет вид $h(x_1, \ldots, x_t, \Phi_{t+1}, \ldots, \Phi_n)$, где $h \in A$ и все формулы $\Phi_{t+1}, \ldots, \Phi_n$ являются нетривиальными.

Так как $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$, то существует такое i, $i \in \{t+1, \ldots, n\}$ что $M_h^{x_i} = \{0, x\}$. Без ограничения общности будем считать что $i = n$. Рассмотрим три случая: $\Phi_n \in F$, $\Phi_n \in F_1$ и $\Phi_n \in F'$.

Пусть $\Phi_n \in F$. Тогда по предположению индукции существует формула Φ_n' над A такая, что

$$l(\Phi_n') \leq c \log L(\Phi_n) + d \leq c \log L(\Phi) + d,$$

и выполнено неравенство $f_n'(\widetilde{x}) \leq g_n'(\widetilde{x})$, где $f_n'(\widetilde{x})$ и $g_n'(\widetilde{x})$ — функции, реализуемые формулами Φ_n и Φ_n' соответственно. Следовательно, так как $M_h^{x_n} = \{0, x\}$, то $f \leq f_n' \leq g_n'$. Поэтому в качестве формулы Ψ можно взять формулу Φ_n'.

Если $\Phi_n \in F'$, то существует формула Φ_n' над A, эквивалентная Φ_n, такая что $l(\Phi_n') \leq c_2 \log L(\Phi_n) + d_2$. Так как $M_h^{x_n} = \{0, x\}$, то функция, реализуемая формулой Φ, не превосходит функцию, реализуемую формулой Φ_n, и в качестве формулы Ψ можно взять формулу Φ_n'.

Если $\Phi_n \in F_1$, то, как указано выше, существует такая формула Ψ_n над $\Sigma(A) \cup d_r^{(r)}$, что для любой функции $d_r(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формулы Φ_n и Ψ_n эквивалентны над $A \cup \{d_r\}$, и выполнено неравенство

$$l(\Psi_n) \leq c_1 \log L(\Phi_n) + d_1.$$

Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, то существует такая функция $w(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_h^X$, где $X = \{x_{t+1}, \ldots, x_n\}$, справедливо включение $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$. В формуле Ψ_n все подформулы вида $d_r(\Xi_1, \ldots, \Xi_r)$ заменим на формулы

$$w(x_1, \ldots, x_t, \Xi_1, \ldots, \Xi_r).$$

Полученную формулу обозначим через Ψ_n'. Пусть формулы Φ_n и Ψ_n' реализуют функции $h_1(x_1, \ldots, x_p)$ и $h_2(x_1, \ldots, x_p)$ соответственно. Тогда согласно построению формулы Ψ_n' для любого $\widetilde{\alpha} \in V_h^X$ выполнено равенство

$$h_1(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h_2(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p).$$

Обозначим через Ψ' формулу $h(x_1, \ldots, x_t, \Psi_n', \ldots, \Psi_n')$. Пусть формула Ψ' реализует функцию $f'(x_1, \ldots, x_p)$. Поскольку $M_h^{x_n} = \{0, x\}$, то $h_1 \geq f$. Кроме того, если $\widetilde{\alpha} \in E_k^t \setminus V_f^X$, то $f(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = f'(\widetilde{\alpha}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = 0$. Если $\widetilde{\beta} \in V_h^X$, то

$$f'(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h_2(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) = h_1(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p) \geq f(\widetilde{\beta}, x_{t+1}, \ldots, x_p).$$

Следовательно, $g(\widetilde{x}) \geq f(\widetilde{x})$. Так как $w \in A$, то существует такая формула Ψ над A, эквивалентная формуле Ψ', что

$$l(\Psi) \leq l(\Psi')l(w) \leq l(\Psi')u \leq c \log L(\Phi) + d.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой приведенной формулы Φ над A вида*

$$f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_1, \ldots, \Psi_t),$$

где $q \geq 1$, $t \geq 0$, все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_1, \ldots, \Psi_t$ являются нетривиальными, и для функции $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_t)$ выполнены условия:

1) $\widehat{M}_f^{\{y_1,\ldots,y_q\}} = \{\{0, x\}\}$,

2) $\widehat{M}_f^{\{z_1,\ldots,z_t\}} \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$,

а также существуют формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_t$ над A, для которых выполнено неравенство $l(\Xi_i) \leq c \log L(\Phi) + d$, и $\Phi = f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Xi_1, \ldots, \Xi_t)$ над A.

Доказательство. Поскольку для $t = 0$ утверждение теоремы, очевидно, будем полагать $t > 0$. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ и $q \geq 1$, то существует функция $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$ такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{\{y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_t\}}$ выполнено включение $g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$.

По лемме 2.12 существуют константы c_1 и d_1 над A такие, что для любой приведенной формулы Ψ над A такой, что $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Psi)$, существует формула

Ψ' над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$ такая, что $l(\Psi') \leq c_1 \log L(\Psi) + d_1$, и для любой функции $d_r \in \mathrm{pr}_k^{-1}(M_{01} \setminus O^\infty)$ формулы Ψ и Ψ' эквивалентны.

По лемме 2.11 существуют такие константы c_2 и d_2 над A, что для любой приведенной формулы Ψ такой, что $\widehat{w}(\Psi) = \{\{0, 1, x\}\}$, существует такая эквивалентная формула Ψ' над A, что $l(\Psi') \leq c_2 \log L(\Psi) + d_2$.

По лемме 2.13 существуют константы c_3 и d_3 такие, что для любой приведенной формулы Ψ над A такой, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$, существует формула Ψ' над A, для которой выполнены неравенства $l(\Psi') \leq c_3 \log L(\Psi) + d_3$ и $h' \geq h$, где h и h' — функции, реализуемые формулами Ψ и Ψ' соответственно.

Пусть функции из A зависят не более чем от m переменных. Положим

$$p = \max_{h(x_1,\ldots,x_{m+r}) \in [A]} l(h); \quad c = pc_1 + pc_2 + c_3; \quad d = pd_1 + pd_2 + d_3 + p \log m.$$

Пусть Φ — формула, удовлетворяющая условиям леммы. Пусть формула Φ реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_u)$ над A, где $u \geq n$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$ через Φ_i' обозначим формулу

$$f(x_1, \ldots, x_n, \underbrace{y, \ldots, y}_{q \text{ раз}}, \underbrace{\Psi_i, \ldots, \Psi_i}_{t \text{ раз}}).$$

Заметим, что $\widehat{w}(\Phi_i') \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$. Рассматривая отдельно два случая $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Phi_i')$ и $\widehat{w}(\Phi_i') = \{\{0, 1, x\}\}$, получим, что существует формула Ψ_i' над $\Sigma(A) \cup \{d_r^{(r)}\}$ такая, что

$$l(\Psi_i') \leq \max(c_1, c_2) \log L(\Phi_i') + \max(d_1, d_2)$$

и для любой функции $d_r \in M_{01} \setminus O^\infty$ формулы Φ_i' и Ψ_i' эквивалентны над $A \cup \{d_r\}$. В формуле Ψ_i' все подформулы вида $d_r(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ заменим на формулы $g(x_1, \ldots, x_n, \Omega_1, \ldots, \Omega_r)$. Полученную формулу обозначим через Ψ_i''.

Пусть формулы Ψ_i, Φ_i' и Ψ_i'' реализуют функции $h_i(x_1, \ldots, x_u)$, $h_i'(x_1, \ldots, x_u, y)$ и $h''(x_1, \ldots, x_u, y)$ соответственно, где $u \geq n$. Согласно построению формул Ψ_i'' и Φ_i' для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ такого, что $(\widetilde{\alpha}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q \text{ раз}}) \in V_f^Z$, где $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$, (заметим, что в этом случае $\widetilde{\alpha} \in V_f^{\{y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_t\}}$) имеем

$$h_i(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_u) = h_i'(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_u, 1) = h_i''(\widetilde{\alpha}, x_{n+1}, \ldots, x_u, 1). \tag{2.13}$$

Пусть Ψ_i''' — формула над A минимальной глубины, эквивалентная формуле Ψ_i''. Тогда

$$\begin{aligned} l(\Psi_i''') \le l(\Psi_i'')l(g) \le l(g)l(\Psi_i') \le pl(\Psi_i') \le \\ \le p\max(c_1, c_2)\log L(\Phi_i') + p\max(d_1, d_2) \le \\ \le p\max(c_1, c_2)\log(mL(\Psi_i)) + p\max(d_1, d_2) \le \\ \le p\max(c_1, c_2)\log L(\Phi) + p\log m + p\max(d_1, d_2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Пусть формула $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_1''', \ldots, \Psi_t''')$ реализует функцию $h''(x_1, \ldots, x_u, y)$. Докажем, что $h''(\widetilde{x}, 1) = h(\widetilde{x})$. Пусть $\widetilde{\beta} \in E_k^u$. Если $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 1, \ldots, 1) \in V_f^X$, то $h''(\widetilde{\beta}, 1) = h(\widetilde{\beta})$ согласно равенству (2.13). Если $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 1, \ldots, 1) \notin V_f^X$ и $\beta_{n+1} = \ldots = \beta_{n+q} = 1$, то функция

$$\mathrm{pr}_2 f(\beta_1, \ldots, \beta_{n+q}, x_{n+q+1}, \ldots, x_{n+q+t})$$

является константой и равенство $h''(\widetilde{\beta}, 1) = h(\widetilde{\beta})$ очевидно выполнено. Если $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 1, \ldots, 1) \notin V_f^X$ и существует j, $j \in \{n+1, \ldots, n+q\}$, такое, что $\beta_j = 0$, то $h''(\widetilde{\beta}, 1) = h(\widetilde{\beta}) = 0$, так как $M_f^{x_j} = \{0, x\}$.

Так как $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$, то существует формула Φ' над A такая, что $l(\Phi') \le c_3 \log L(\Phi) + d_3$ и $h' \ge h$, где $h'(x_1, \ldots, x_u)$ — функция, реализуемая формулой Φ'. Заменим в формулах Ψ_i'' все вхождения переменной y на формулу Φ'. Полученную формулу обозначим через Ξ_i. Заметим, что

$$\begin{aligned} l(\Xi_i) \le l(\Psi_i'') + l(\Phi') \le \\ \le p\max(c_1, c_2)\log L(\Phi) + p\log m + p\max(d_1, d_2) + c_3\log L(\Phi) + d_3 \le \\ \le c\log L(\Phi) + d \end{aligned}$$

Так как $h' \ge h$, то, пользуясь монотонностью функции h'', получим

$$h(\widetilde{x}) = h''(\widetilde{x}, 1) = h''(\widetilde{x}, h'(\widetilde{x})).$$

Поскольку $h''(\widetilde{x}, h'(\widetilde{x}))$ — функция, реализуемая формулой $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Xi_1, \ldots, \Xi_t)$, то формулы Ξ_i удовлетворяют условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть Ψ — формула над A такая, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Psi)$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой подформулы Φ формулы Ψ такой, что Ψ представляется в виде $\Psi_0[\Phi]$ и такой, что $\widehat{w}(\Phi) \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$, существует такая формула Φ' над A, что $l(\Phi') \leq c \log L(\Phi) + d$, и выполнено равенство*

$$\Psi_0[\Phi] = \Psi_0[\Phi'].$$

Доказательство. Пусть формула Φ имеет вид

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, \Psi_1, \ldots, \Psi_t),$$

где $t \geq 1$ и все формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ являются нетривиальными. Пусть формула Ψ имеет вид $f_2(z_1, \ldots, z_m, \Xi_1, \ldots, \Xi_u)$, где все формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_u$ — нетривиальные. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$, $\{0, x\} \in w(\Phi)$ и $\widehat{w}(\Psi) \subseteq \{\{1, x\}, \{0, 1, x\}\}$, то существуют такие функции $g_1(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_r), g_2(z_1, \ldots, x_m, v_1, \ldots, v_r) \in [A]$, что для любых наборов $\widetilde{\alpha} \in V_{f_1}^X, \widetilde{\beta} \in V_{f_2}^Z$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ выполнены включения

$$\mathrm{pr}_2 g_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{v}) \in M_{01} \setminus I^{\infty}, \quad pr_2 g_2(\widetilde{\beta}, \widetilde{v}) \in M_{01} \setminus O^{\infty}. \tag{2.15}$$

Положим

$$g(\widetilde{x}, \widetilde{z}, \widetilde{v}) = g_1(\widetilde{x}, g_2(\widetilde{z}, v_1, v_1, \ldots, v_r), g_2(\widetilde{z}, v_{r+1}, \ldots, v_{2r}), \ldots, g_2(\widetilde{z}, v_{r^2-r+1}, \ldots, v_{r^2})).$$

Из (2.15) имеем $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{v}) \in \mathrm{N}A_2$ для всех наборов $\widetilde{\alpha} \in V_{f_1}^X, \widetilde{\beta} \in V_{f_2}^Z$.

По следствию 1 из леммы 2.9 существуют такие константы c и d, что для любой формулы Ξ над A существует формула Ξ' над $\Sigma(A) \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$ такая, что для любой функции $d_{r^2}(x_1,\dots,x_{r^2}) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_2$ формулы Ξ и Ξ' эквивалентны над $A \cup \{d_{r^2}\}$ и $l(\Xi') \le c\log L(\Xi) + d$.

Пусть Φ'' такая формула над $\Sigma(A) \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$, эквивалентная формуле Φ для любой функции $d_{r^2}(x_1,\dots,x_{r^2}) \in \mathrm{pr}_k^{-1}\mathrm{N}A_2$, что $l(\Phi'') \le c\log L(\Phi) + d$. Заменим в формуле Φ'' все подформулы вида $d_{r^2}(\Phi_1,\dots,\Phi_{r^2})$ на формулы $g(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_m,\Phi_1,\dots,\Phi_{r^2})$. Полученную формулу обозначим через Φ'''. По построению формулы Ψ и $\Psi_0[\Phi''']$ эквивалентны над $A \cup \{g\}$. Так как $g \in [A]$, то существует формула $\widehat{\Phi}$ над A, эквивалентная Φ''', такая, что $l(\widehat{\Phi}) \le l(g)L(\Phi''') \le cp\log L(\Phi) + dp$, где $p = \max\limits_{h(x_1,\dots,x_{q+r^2}) \in [A]} l(h)$ и q — максимальное количество переменных от которых зависят функции из A. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A],r)$ для некоторого $r \ge 3$. Тогда существуют такие константы c и d, что для любой приведенной формулы Φ над A вида $\Phi_0[\Psi_1,\dots,\Psi_t]$, где*

1) *$\Phi_0[y_1,\dots,y_t]$ — максимальная*[7] *внешняя подформула формулы Φ такая, что $\widehat{W}(\Phi_0) = \{\{0,x\}\}$,*

2) *все формулы $\Psi_1,\dots,\Psi_t$ являются нетривиальными,*

существуют формулы $\Xi_1,\dots,\Xi_t$ над A такие, что $l(\Xi_i) \le c\log L(\Phi) + d$ и $\Phi = \Phi_0[\Xi_1,\dots,\Xi_t]$ над A.

Доказательство. Так как $A \subseteq \widehat{\#}([A],r)$, то существуют константы c_1 и d_1, удовлетворяющие условиям леммы 2.14, и константы c_2 и d_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.15. Положим $c = \max(c_1,c_2)$, $d = \max(d_1,d_2)$.

Пусть $\Psi'_1,\dots,\Psi'_u$ — все подформулы Φ такие, что формулы из множества $F = \{\Psi_1,\dots,\Psi_t\}$ являются их главными подформулами. Заметим, что каждая подформула из множества F является главной подформулой только одной из формул из множества $\{\Psi'_1,\dots,\Psi'_u\}$.

[7] Заметим, что для каждой формулы Φ внешняя подформула $\Phi_0[y_1,\dots,y_t]$ определяется однозначным образом.

Пусть Ψ'_i — произвольная подформула из множества $\{\Psi'_1, \ldots, \Psi'_u\}$. Без ограничения общности формула Ψ'_i имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_p})$, где $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, t\}$ и $V_f^{x_{n+e}} = \{0, x\}$ для всех $e \in \{1, \ldots, q\}$. Тогда по леммам 2.14 (при $q \neq 0$) и 2.15 (при $q = 0$) существуют формулы $\Xi_{i_1}, \ldots, \Xi_{i_p}$ такие, что формулы Ψ'_i, $f(x_1, \ldots, x_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_q, \Xi_{i_1}, \ldots, \Xi_{i_p})$ эквивалентны и $l(\Xi_{i_u}) \leq c \log L(\Psi_{i_u}) + d$ для всех $u \in \{1, \ldots, p\}$.

Применяя аналогичную процедуру для всех подформул Ψ'_i, каждой формуле Ψ_i мы сопоставим такую формулу Ξ_i, что формулы $\Phi_0[\Xi_1, \ldots, \Xi_t]$ и Φ эквиваленты. Следовательно, формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_t$ — удовлетворяют условиям леммы. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$. Пусть F — множество всех приведенных формул Φ над A таких, что $\{0, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$. Тогда множество F равномерно над A.*

Доказательство. Пусть F_0 — множество всех формул Φ над A таких, что $W(\Phi) \subseteq \{0, x\}$. По лемме 2.11 множество F_0 равномерно. Следовательно, существуют такие константы c_1 и d_1, что для любой формулы $\Phi \in F_0$ существует такая формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ, что $l(\Psi) \leq c_1 \log L(\Phi) + d_1$.

Пусть $\Phi \in F$. Пусть $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ — внешняя подформула формулы Φ максимальной сложности такая, что $\widehat{W}(\Phi_0) = \{\{0, x\}\}$. Пусть Φ имеет вид $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$. Тогда по следствию 1 из леммы 2.14 существуют такие константы c_2 и d_2, зависящие только от A, и формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_t$ над A, для которых выполнены условия $l(\Psi_i) \leq c_2 \log L(\Phi) + d_2$ и $\Phi = \Phi_0[\Psi_1, \ldots, \Psi_t]$.

Так как $\Phi_0 \in F_0$, то существует такая формула Φ'_0 над A, эквивалентная формуле Φ, что $l(\Phi'_0) \leq c_1 \log L(\Phi'_0) + d_1$. Заменим в формуле Φ'_0 все вхождения переменных y_i на формулы Ψ_i. Полученную формулу обозначим через Ψ. Так как $\Phi = \Phi_0[\Psi_1, \dots, \Psi_t]$, то $\Psi = \Phi$. Кроме того, имеем

$$l(\Psi) \leq l(\Phi_0') + \max_{i \in \{1,\dots,t\}} l(\Psi_i) \leq c_1 \log L(\Phi_0) + d_1 + c_2 \max_{i \in \{1,\dots,t\}} \log L(\Phi) + d_2 \leq$$
$$\leq (c_1 + c_2) \log L(\Phi) + d_1 + d_2.$$

Следовательно, множество формул F равномерно. Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$ таких, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$. Пусть F — множество всех приведенных формул над A таких, что если $\Phi \in F$, то $\{1, x\} \in \widehat{w}(\Phi)$. Тогда множество F равномерно над A.*

Утверждение следует из принципа двойственности.

Слествие 4. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, $r \geq 3$ таких, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], r)$. Тогда множество приведенных формул над A равномерно.*

Утверждение следует из пункта 3 леммы 2.11 и следствий 2 и 3 из леммы 2.14.

Лемма 2.16. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, Φ — формула над A такая, что $\{x\} \in \widehat{W}(\Phi)$. Тогда существует такая формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ, что $L(\Psi) \leq L(\Phi)$ и $\{x\} \notin \widehat{W}(\Psi)$.*

Доказательство. Если $\{x\} \in \widehat{W}(\Phi)$, то без ограничения общности формула Φ имеет вид $\Phi_0[f(x_1, \dots, x_n, \Psi_1, \dots, \Psi_t)]$, где $\Phi_0[y], \Psi_1, \dots, \Psi_t$ — нетривиальные формулы над A, $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) \in A$ и существует i, $i \in \{1, \dots, t\}$, такое, что для любого $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ выполнено равенство $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) = y_i$. Тогда формула Φ эквивалентна формуле $\Phi_0[\Psi_i]$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ и существует такое $r \geq 3$, что $A \subseteq \#([A], r)$. Тогда система A равномерна.*

Доказательство. Пусть Φ — нетривиальная формула над A, Φ реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. По лемме 2.16 существует такая формула Φ_0 над A, эквивалентная Φ, что $L(\Phi_0) \leq L(\Phi)$ и $\{x\} \notin \widehat{W}(\Phi_0)$.

Пусть F — множество нетривиальных подформул формулы Φ_0. Пусть $\Psi_i \in F$ и Ψ_i является главной подформулой формулы Ψ_i', т. е. Ψ_i' имеет вид $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_{j-1}, \Psi_i, \Phi_{j+1}, \ldots, \Phi_t)$. Каждой формуле $\Psi_i \in F$ сопоставим множество $M_g^{x_j}$. Это множество обозначим через $u(\Psi_i)$. Пусть F' —множество таких формул Ψ из Φ, что $u(\Psi) \subseteq \{0, 1\}$. Заменим в формуле Φ_0 все подформулы из множества F' на переменную y. Полученную формулу обозначим через Φ'. Заметим, что формула Φ' —приведенная. Пусть формула Φ' реализует функцию $f'(x_1, \ldots, x_n, y)$. Заметим, что

$$f(\widetilde{x}) = f'(\widetilde{x}, 0) = f'(\widetilde{x}, 1). \tag{2.16}$$

По следствию 1 из леммы 2.10 существует такое q, что $A \subseteq \widehat{\#}([A], q)$. По следствию 4 из леммы 2.14 существуют такие константы c и d, что для любой приведенной формула Ψ над A существует формула Ψ' над A, эквивалентная Ψ такая, что $l(\Psi') \leq c \log L(\Psi) + d$.

Пусть Φ'' — такая формула, эквивалентная формуле Φ', что выполняется неравенство $l(\Phi'') \leq c \log L(\Phi') + d$. Заменим в формуле Φ'' все вхождения переменной y на произвольную нетривиальную формулу глубины 1 над A. Полученную формулу обозначим через Ψ. Из (2.16) следует что формулы Φ и Ψ эквивалентны. Кроме того,

$$l(\Psi) \leq l(\Phi'') + 1 \leq c \log L(\Phi') + d + 1 \leq c \log L(\Phi) + d + 1.$$

Следовательно множество всех формул над системой A равномерно, т. е. система A равномерна. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть A — такая конечная система функций из $P_{k,2}$, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и любого $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует функ-*

ция $g(z_1, \ldots, z_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$ *такая, что для любого* $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ *выполнено включение* $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. *Тогда система* A *равномерна.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных и

$$A = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Так как при добавлении несущественных переменных функция остается мажоритарной, то, добавляя, если необходимо, дополнительные переменные в качестве несущественных, будем считать, что для любых i, j, где $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$, существует функция

$$g_i^j(z_1, \ldots, z_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$$

такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_{f_i}^{x_j}$ выполнено включение $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. По леммам 2.2 и 2.3 существуют число $q \geq r$ и функции

$$h_i^j(z_1, \ldots, z_{n-1}, y_1, \ldots, y_{q(q-1)})) \in [A]$$

такие, что для любой формулы Φ над A вида $\Phi_1[\Phi_2[\ldots, \Phi_{r-1}[\Phi_r]\ldots]]$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_{f_i}^{x_j}$ выполнено

$$\Phi = h_i^j(\widetilde{\alpha}, \Phi_{1,2}, \ldots, \Phi_{q-1,q}),$$

где $\Phi_{i,j}$ — формула

$$\Phi_1[\Phi_2[\ldots \Phi_{i-1}[\Phi_j[\Phi_{j+1}[\ldots \Phi_{q-1}[\Phi_q]\ldots]]]\ldots]].$$

Положим

$$c = \frac{\max\limits_{\substack{i \in \{1,\ldots,m\} \\ j \in \{1,\ldots,n\}}} l(g_i^j) + 1}{\log \frac{2(n+1)^q}{2(n+1)^q - 1}}; \quad d = 2n(n+1)^q.$$

Пусть Φ — произвольная формула над A. Докажем индукцией по сложности $L(\Phi)$ формулы Φ, что существует такая формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ, для которой выполнено неравенство $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$. Если

$l(\Psi) \leq d$, то утверждение очевидно выполнено. Пусть утверждение выполнено для всех формул, сложности не более N, где $N \geq d$.

Пусть $L(\Phi) = N + 1$. Пусть без ограничения общности Φ имеет вид $f_1(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, где

$$L(\Phi_1) \geq L(\Phi_2) \geq \ldots L(\Phi_n).$$

Тогда

$$L(\Phi_1) \geq \frac{d}{n} \geq 2(n+1)^q \quad \text{и} \quad L(\Phi_i) \leq \frac{L(\Phi)}{2}$$

при всех $i \in \{2, \ldots, n\}$. По лемме 2.1 существуют такие формулы $\Psi_1[y], \ldots, \Psi_{q-1}[y], \Psi_q$ над A, что формула Φ_1 имеет вид $\Psi_1[\ldots[\Psi_{q-1}[\Psi_q]]\ldots]$ и для всех $j \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено неравенство $L(\Psi_j) \geq \frac{L(\Phi)+1}{(n+1)^{q-1}}$. Следовательно, пользуясь леммами 2.2 и 2.3, аналогично доказательству леммы 2.12 можно показать, что формула

$$f_1(h_1^1(\Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Psi_{1,1}, \ldots, \Psi_{q-1,q}), \Phi_2, \ldots, \Phi_n),$$

эквивалентна формуле Φ, где $\Psi_{i,j}$ — формула

$$\Psi_1[\Psi_2[\ldots \Psi_{i-1}[\Psi_j[\Psi_{j+1}[\ldots \Psi_{q-1}[\Psi_q]\ldots]]]\ldots]],$$

Поскольку $L(\Phi) \geq 2(n+1)^q$, то

$$L(\Psi_{i,j}) \leq L(\Phi) - \min_{i\in\{1,\ldots,q\}} L(\Psi_i) + 1 \leq (L(\Phi)+1)\frac{(n+1)^q - 1}{(n+1)^q} \leq$$
$$L(\Phi)\frac{2(n+1)^q - 2}{2(n+1)^q} + 1 \leq L(\Phi)\frac{2(n+1)^q - 2}{2(n+1)^q} + \frac{L(\Phi)}{2(n+1)^q} \leq L(\Phi)\frac{2(n+1)^q - 1}{2(n+1)^q}.$$

По предположению индукции существуют формулы $\Phi'_2, \ldots, \Phi'_n, \Psi'_{1,1}, \ldots, \Psi'_{q-1,q}$, эквивалентные формулам $\Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Psi_{1,1}, \ldots, \Psi_{q-1,q}$ над A соответственно, для которых выполнены неравенства

$$l(\Phi'_i) \leq c \log L(\Phi_i) + d \quad \text{и} \quad l(\Psi'_{j,p}) \leq c \log L(\Psi_{j,p}) + d.$$

Поэтому формула Ψ' вида

$$f_1(g_1^1(\Phi'_2, \ldots, \Phi'_n, \Psi'_{1,1}, \ldots, \Psi'_{q-1,q}), \Phi'_2, \ldots, \Phi'_n),$$

эквивалентна формуле Φ и выполнено

$$l(\Psi') \le 2 + c\log\max(\max_{i\in\{2,\dots,n\}} \Phi'_i, \max_{1\le j<p\le q} \Psi'_{i,j}) + d \le$$

$$\le 2 + c\log(L(\Phi)\max(\frac{1}{2}, \frac{2(n+1)^q-1}{2(n+1)^q})) + d \le$$

$$\le 2 + c\log L(\Phi) + d - c\log\frac{2(n+1)^q}{2(n+1)^q-1} \le$$

$$\le c\log L(\Phi) + d + 1 - \max_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} l(g_i^j)$$

Так как $g_i^j \in [A]$, то существует формула Ψ'', эквивалентная формуле Ψ' такая, что

$$l(\Psi'') \le l(\Psi') + l(g_1^1) - 1 \le c\log L(\Phi) + d,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Глава 3

Критерий квазиравномерности конечных систем монотонных функций из $P_{k,2}$

3.1. Формулировки и основная лемма о квазиравномерности

Конечную систему A функций из P_k будем называть квазиравномерной, если существуют такие константы c и d, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l(f) \leq c \log^2 L(f) + d.$$

Множество формул F над конечной системой функций A будем называть равномерным, если существуют такие константы c и d, что для любой формулы $\Phi \in F$ существует формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ, для которой выполнено неравенство

$$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d.$$

Лемма 3.1. *Пусть A — конечная система функций из P_k, Φ — нетривиальная формула над A. Тогда Φ можно представить в виде $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$, $t \geq 0$, где $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ — α-формула, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ — некоторые подформулы Φ такие, что $L(\Phi_i) \leq L(\Phi)/2$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$.*

Доказательство. Построим рекурсивно следующую последовательность подформул формулы Φ: в качестве Ψ_0 возьмем саму формулу Φ. Если формула Ψ_i нетривиальная, то в качестве формулы Ψ_{i+1} возьмем произвольную главную подформулу формулы Ψ_i максимальной сложности. Пусть получилась последовательность формул $\Psi_0, \ldots, \Psi_u$.

Пусть без ограничения общности для всех i, $i \in \{1, \ldots, u-1\}$, формула Ψ_i имеет вид $f_i(\Psi_{i+1}, \Xi_i^1, \ldots, \Xi_i^{t_i}, x_i^1, \ldots, x_i^{p_i})$, где все формулы $\Xi_i^1, \ldots, \Xi_i^{t_i}$ — нетривиальные, $f_i \in A$ для всех $i \in \{1, \ldots, u\}$, и формула Ψ_u имеет вид $f_u(x_u^1, \ldots, x_u^{p_u})$. Через Φ_0' обозначим формулу

$$f(f_2(\ldots f_{u-1}(f_u(x_u^1, \ldots, x_u^{p_u}), y_{u-1}^1, \ldots, y_{u-1}^{t_{u-1}}, x_{u-1}^1, \ldots, x_{u-1}^{p_{u-1}}) \ldots), \\ y_1^1, \ldots, y_1^{t_1}, x_1^1, \ldots, x_1^{p_1})$$

Положим $t = \sum_{i \in \{1, \ldots, u-1\}} t_i$. Через $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ обозначим формулу полученную из Φ_0', заменой переменных

$$y_{u-1}^1, \ldots, y_{u-1}^{t_{u-1}}, y_{u-2}^1, \ldots, y_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, y_1^1, \ldots, y_1^{t_1}$$

на переменные $y_1, \ldots, y_t$ соответственно.

Тогда формула Φ имеет вид

$$\Phi_0[\Xi_{u-1}^1, \ldots, \Xi_{u-1}^{t_{u-1}}, \Xi_{u-2}^1, \ldots, \Xi_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, \Xi_1^1, \ldots, \Xi_1^{t_1}].$$

Через $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ обозначим формулы

$$\Xi_{u-1}^1, \ldots, \Xi_{u-1}^{t_{u-1}}, \Xi_{u-2}^1, \ldots, \Xi_{u-2}^{t_{u-2}}, \ldots, \Xi_1^1, \ldots, \Xi_1^{t_1}$$

соответственно. Тогда формула Φ имеет вид $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$.

Заметим, что если у формулы Ψ_i есть главная подформула сложности более $\frac{L(\Phi)}{2}$, то это есть формула Ψ_{i+1}. Следовательно, все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ имеют сложность не более $\frac{L(\Phi)}{2}$ и найденное представление удовлетворяет условиям утверждения. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть A — конечная система функций из P_k такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квазиравномерна.*

Доказательство. Так как множество α-формул над A равномерно, то существуют такие константы c и d, что для любой α-формулы Φ над A существует формула Ψ над A, эквивалентная формуле Φ такая, что $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$. Положим

$$d_1 = \max(\max_{\substack{f \in [A] \\ L(f) \leq 4}} l(f), d), \quad c_1 = 2\max(c, d_1).$$

Докажем, что для любой $f \in [A]$ выполнено неравенство

$$l(f) \leq c_1 \log^2 L(f) + d_1. \tag{3.1}$$

Тем самым мы докажем, что система A квазиравномерна. Проведем доказательство индукцией по сложности функции f. Если $L(f) \leq 4$, то неравенство (3.1) выполнено очевидным образом. Пусть неравенство (3.1) выполнено для всех функций $f \in [A]$ таких, что $L(f) \leq N$, $N \geq 4$. Докажем неравенство (3.1) для функции $f \in [A]$ такой, что $L(f) = N + 1$.

Пусть Φ — формула реализующая f над A такая, что $L(\Phi) = L(f) = N+1$. Из леммы 3.1 следует, что формула Φ представляется в виде $\Phi_0[\Phi_1, \ldots, \Phi_t]$, где $t \geq 0$, $\Phi_0[y_1, \ldots, y_t]$ — α-формула и $L(\Phi_i) \leq \frac{L(\Phi)}{2}$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Пусть формулы $\Phi_0, \ldots, \Phi_t$ реализуют функции

$$f_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t), f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_t(x_1, \ldots, x_n)$$

соответственно. Так как формула Φ_0 является α-формулой, реализует функцию f_0 и множество α -формул над системой A равномерно, то $l(f_0) \leq c \log L(f_0) + d$. По индуктивному предположению для всех i, $i \in \{1, \ldots, t\}$, выполнено неравенство $l(f_i) \leq c_1 \log^2 L(\Phi_i) + d_1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
l(f) \leq l(f_0) + \max_{i \in \{1,\ldots,t\}} l(f_i) \leq c \log L(\Phi_0) + d + c_1 \log^2 \frac{L(\Phi)}{2} + d_1 \leq \\
\leq c \log L(\Phi) + c_1(\log L(\Phi) - 1)^2 + 2d_1 \leq \\
\leq c_1 \log^2 L(\Phi) + c \log L(\Phi) - 2c_1 \log L(\Phi) + 2d_1 + c_1 \leq \\
\leq c_1 \log^2 L(f) + 2d_1 + c_1 - c_1 \log L(\Phi) \leq \\
\leq c_1 \log^2 L(f) + 2d_1 + c_1 - 2c_1 \leq c_1 \log^2 L(f) + d_1
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

3.2. Достаточные условия квазиравномерности конечных систем функций из $P_{k,2}$

Пусть $B \subseteq P_{k,2}$, $r \geq 3$. Через $\#_1(B,r)$ обозначим множество функций $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_{k,2}$, где $n \geq 1$, таких, что для любого $x_i \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существует такая функция $g(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_r) \in B$, что выполнено

1) если $M_f^{x_i} = \{0,x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

2) если $M_f^{x_i} = \{1,x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

3) если $M_f^{x_i} = \{0,1,x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$;

4) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta},\widetilde{y}) \neq 0,1$.

Таким образом,

$$\#_1(B,r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} \#_{\{x_i\}}(B,n,r).$$

Через $\widehat{\#}_1(B,r)$ обозначим множество функций $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_{k,2}$, $n \geq 1$, таких, что для любого $x_i \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ существует функция $g(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_r) \in B$ такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено:

1) если $M_f^{x_i} = \{0,x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

2) если $M_f^{x_i} = \{1,x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

3) если $M_f^{x_i} = \{0,1,x\}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},\widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$.

Таким образом,

$$\widehat{\#}_1(B,r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} \widehat{\#}_{\{x_i\}}(B,n,r).$$

Лемма 3.3. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$, где $r \geq 3$. Тогда для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ существует такое число $q \geq 3$, что $f \in \widehat{\#}_1([A], q)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.10.

Лемма 3.4. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \widehat{\#}_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, $g(y_1, \ldots, y_m) \in A$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ такие, что*

$$\{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\} \subseteq \{\{0, x\}, \{1, x\}, \{0, 1, x\}\}.$$

Тогда существует функция

$$h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{r^2}) \in [A]$$

такая, что для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, $\widetilde{\beta} \in V_g^{y_j}$ выполнены условия:

1) если $\{0, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty$,

2) если $\{1, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty$,

3) если $\{0, 1, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in \mathrm{N}A_2$,

4) если $\{\{0, x\}, \{1, x\}\} \subseteq \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}$, то $\mathrm{pr}_2(h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in \mathrm{N}A_2$.

Доказательство. Докажем пункт 4, пункты 1-3 доказываются аналогично. Пусть без ограничения общности $m = n = i = j$ и $M_f^{x_n} = \{0, x\}$, $M_g^{y_n} = \{1, x\}$. Так как $A \subseteq \widehat{\#}_1([A], r)$ то существуют функции

$$g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_1, \ldots, z_r) \text{ и } g_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_r)$$

такие, что для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, $\widetilde{\beta} \in V_g^{y_j}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty$ и $\mathrm{pr}_2 g_2(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty$. Положим

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_{r^2}) = g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, g_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_r),$$
$$g_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_{r+1}, \ldots, z_{2r}), \ldots, g_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, z_{z^2-r+1}, \ldots, z_{r^2})).$$

Нетрудно проверить, что данная функция удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда следуюшие множества приведенных*[1] *α-формул над A равномерны:*

1) множество F_0 формул Φ_0 таких, что $\widehat{W}(\Phi_0) = \{\{0, x\}\}$,

2) множество F_1 формул Φ_1 таких, что $\widehat{W}(\Phi_1) = \{\{1, x\}\}$,

3) множество F_{01} формул Φ_{01} вида

$$f(x_1 \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_{j-1}, \Psi, y_{j+1}, \ldots, y_m), x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где Ψ — некоторая α-формула и f и g такие функции из A, что

$$\{\{0, x\}, \{1, x\}\} \subseteq \widehat{M}_f^{x_i} \cup \widehat{M}_g^{y_j} \quad \text{или} \quad \{0, 1, x\} \in \{M_f^{x_i}\} \cup \{M_g^{y_j}\}.$$

Доказательство[2]**.** Пусть F одно из множеств формул $\{F_0, F_1, F_{01}\}$. Пусть $d_{r^2}^{(r^2)}$ — r^2-местный функциональный символ. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных. По следствию 1 из леммы 2.9 существуют такие константы c и d, что для любой формулы Φ над A существует такая формула Ψ над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$, что $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d$ и формулы Φ и Ψ эквивалентны над $A \cup \{d_{r^2}\}$, если выполнено одно из следующих условий:

a) $\mathrm{pr}_2 d_{r^2} \in \mathrm{N}A_2$;

b) $\widehat{W}(\Phi) = \{0, x\}$ и $\mathrm{pr}_2 d_{r^2} \in M_{01} \setminus O^\infty$;

c) $\widehat{W}(\Phi) = \{1, x\}$ и $\mathrm{pr}_2 d_{r^2} \in M_{01} \setminus I^\infty$.

[1] Определение приведенной формулы см. в разделе 2.3, страница 43.

[2] Доказательство данной леммы во многом похоже на доказательство леммы 2.11.

Пусть без ограничения общности формула $\Phi \in F$ имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \Phi')),$$

где $f, f_2 \in A$ и Φ' — произвольная α-формула. Пусть Ψ — формула над сигнатурой $\Sigma(A) \cup \{d_{r^2}^{(r^2)}\}$ такая, что $l(\Psi) \leq c \log L(\Phi') + d$ и формулы Φ' и Ψ эквивалентны, если для функции d_{r^2} выполнены условия a—c, приведенные выше.

По лемме 3.4 существует такая функция $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_{r^2})$, что для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_n}$, $\widetilde{\beta} \in V_{f_2}^{y_n}$ выполнены условия

1) если $F \in F_0$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

2) если $F \in F_1$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

3) если $F \in F_{01}$, то $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) \in \mathrm{N}A_2$.

Заменим в формуле Ψ все подформулы вида $d_{r^2}(\Psi_1, \ldots, \Psi_{r^2})$ на формулы $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \Psi_1, \ldots, \Psi_{r^2})$. Полученную формулу обозначим через Ψ'. Пусть формулы Φ' и Ψ' реализуют функции $g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \widetilde{z})$ и $g_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}, \widetilde{z})$ соответственно. Так как для любых $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, $\widetilde{\beta} \in V_{f_2}^{y_j}$ функция $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z})$ удовлетворяет условиям a— c, то имеем $g_1(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z}) = g_2(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{z})$. Обозначим через Ψ'' формулу

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, f_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \Psi')).$$

Очевидно, что формулы Φ и Ψ'' эквивалентны и выполнено неравенство

$$l(\Psi'') \leq c \log L(\Phi') + d + 2 \leq c \log L(\Phi) + d + 2.$$

Положим $u = \max\limits_{w(x_1, \ldots, x_{n+r^2}) \in [A]} l(w)$. Так как $h \in [A]$, то существует формула Ψ''' над A, эквивалентная формуле Ψ'', такая, что выполнены неравенства

$$l(\Psi''') \leq l(h) l(\Psi'') \leq uc \log L(\Phi) + ud + 2u.$$

Так как формулы Φ и Ψ''' эквивалентны, то множества F_0, F_1 и F_{01} равномерны. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда множество всех приведенных α-формул над A равномерно.*

Доказательство. Пусть F_0, f и F_{01} — множества приведенных α-формул над A, определенных в формулировке леммы 3.5. Нетрудно заметить, что любую приведенную α-формулу Ψ над системой A можно представить в виде $\Psi_1[\Psi_2]$, где $\Psi_1 \in F_0 \cup F_1$ и $\Psi_2 \in F_{01}$. Следовательно, множество приведенных α-формул над A равномерно. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$. Тогда система A квазиравномерна.*

Доказательство. По лемме 3.6 множество приведенных формул над A равномерно. Следовательно существуют такие константы c и d, что для любой приведенной α-формулы Ψ над A существует такая формула Ψ', эквивалентная формула Ψ над A, что $l(\Psi') \leq c \log L(\Psi) + d$.

Пусть Φ — произвольная α-формула над A. Следуя доказательству леммы 2.16, нетрудно показать, что существует α-формула Φ' над A, эквивалентная формуле Φ такая, что $\{x\} \notin \widehat{W}(\Phi')$ и $l(\Phi') \leq l(\Phi)$.

Пусть $\Psi_0[y]$ — такая внешняя подформула формулы Φ' максимальной сложности, что $\Psi_0[y]$ — приведенная формула. Пусть формулы Φ' и $\Psi_0[y]$ реализуют функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ соответственно. По построению имеем $f(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x}, 0) = g(\widetilde{x}, 1)$. Пусть Ξ —произвольная формула глубины 1 над A. Тогда формулы Φ' и $\Psi_0[\Xi]$ эквивалентны. Так как формула $\Psi_0[y]$ приведенная, то существует такая эквивалентная формула Ψ_0' над A, что $l(\Psi_0') \leq c \log L(\Psi_0) + d$. Заменим в формуле Ψ_0' все вхождения переменной y на формулу Ξ. Полученную формулу обозначим через Ψ. По построению $\Phi = \Phi' = \Psi$ и

$l(\Psi) \leq c \log L(\Phi) + d + 1$. Следовательно, множество α-формул над системой A равномерно и по лемме 3.2 система A квазиравномерна. Теорема доказана.

3.3. Необходимые условия квазиравномерности конечных систем монотонных функций из $P_{k,2}$

Лемма 3.7. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, Φ — формула над A. Пусть $\Psi[y_1,\ldots,y_t]$ — внешняя подформула формулы Φ. Пусть формулы Φ и $\Psi[y_1,\ldots,y_t]$ реализуют функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_t)$ соответственно. Тогда для любых $m<n$ и $\widetilde{\alpha}\in E_2^m$ таких, что $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\alpha},x_{m+1},\ldots,x_n)\in M_{01}$ выполнено включение $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},x_{m+1},\ldots,x_n,\widetilde{y})\in M_{01}$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},x_{m+1},\ldots,x_n,\widetilde{y})\notin M_{01}$, т. е. $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},x_{m+1},\ldots,x_n,\widetilde{y})=c$, где $c=0,1$. Пусть Φ имеет вид $\Psi[\Phi_1,\ldots,\Phi_t]$ где формулы $\Phi_1,\ldots,\Phi_t$ реализуют функции $h_1(\widetilde{x}),\ldots,h_t(\widetilde{x})$. Тогда

$$f(\widetilde{\alpha},1,\ldots,1)=\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},1,\ldots,1,h_1(\widetilde{\alpha},1,\ldots,1),\ldots,h_t(\widetilde{\alpha},1,\ldots,1))=$$
$$=c=\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha},0,\ldots,0,h_1(\widetilde{\alpha},0,\ldots,0),\ldots,h_t(\widetilde{\alpha},0,\ldots,0))=f(\widetilde{\alpha},0,\ldots,0).$$

Получили противоречие. Лемма доказана.

Конечную систему функций A из $P_{k,2}$ будем называть псевдоравномерной, если для любого $r\geq 1$ существует $n=n(r)\geq 1$ такое, что для любой α-формулы Ψ над A такой, что $l(\Psi)\geq n$, существует формула Φ над A, эквивалентная формуле Ψ, для которой выполнено неравенство $l(\Phi)\leq\frac{l(\Psi)}{r}$.

Имеет место следующее очевидное утверждение:

Утверждение 3.8. *Пусть A — конечная квазиравномерная система функций из $P_{k,2}$. Тогда A является псевдоравномерной.*

Теорема 3.2. *Пусть A — конечная псевдоравномерная система монотонных функций из $P_{k,2}$. Тогда существует такое $r\geq 3$, что $A\subseteq \#_1([A],r)$.*

Доказательство. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от n переменных. Необходимо доказать, что для произвольной функции $f\in A$, произвольного $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существуют число $r' \geq 3$ и такая функция $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'}) \in [A]$, что выполнены условия:

1) если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

2) если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

3) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Пусть f — произвольная функция из A. Без ограничения общности будем считать, что $i = n$. Докажем существование функции w, удовлетворяющей пунктам 1 и 3. Аналогично можно доказать существование функции удовлетворяющий пунктам 2 и 3. Существование функции w удовлетворяющей пунктам 1–3 будет выведено из существования функции w_1 удовлетворяющей пунктам 1 и 3 и существования функции w_2 удовлетворяющей пунктам 2 и 3.

Для любого $q \geq 1$ рассмотрим формулу

$$f(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1, f(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2, \ldots, f(x_1^q, \ldots, x_{n-1}^q, y) \ldots)).$$

Обозначим ее через Ψ_q. Согласно определению псевдоравномерности существует такое m и формула Φ над A, эквивалентная Ψ_m, что $l(\Phi) \leq \frac{l(\Psi_m)}{n+1} = \frac{m}{m+1} < \frac{m}{n}$. Пусть Φ реализует функцию

$$g(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^m, y) = f(\widetilde{x}^1, f(\widetilde{x}^2(\ldots f(\widetilde{x}^{m-1}, f(\widetilde{x}^m, y)) \ldots))),$$

где $\widetilde{x}^i = (x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i)$. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из множества $V_f^{x_n}$. Обозначим набор $(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \ldots, \widetilde{\alpha}}_{m \text{ раз}})$ через $\widehat{\alpha}$, а через $\widehat{x}$ обозначим набор переменных

$$(\overbrace{x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1}^{\widetilde{x}^1}, \overbrace{x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2}^{\widetilde{x}^2}, \ldots, \overbrace{x_1^m, \ldots x_{n-1}^m}^{\widetilde{x}^m}).$$

Пусть, без ограничения общности, нетривиальная подформула $\widehat{\Phi}$ формулы Φ имеет вид $h(\widetilde{x}', y, y, \ldots, y, \widehat{\Phi}_1, \ldots, \widehat{\Phi}_u)$, где $\widehat{\Phi}_1, \ldots, \widehat{\Phi}_u$ — нетривиальные подформулы формулы Φ и $\widetilde{x}' = (x_1', \ldots, x_p')$ — набор (возможно, одинаковых) переменных из $\widehat{x}$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_p')$ набор значений переменных из $\widetilde{x}'$, взятых для этих переменных из набора значений $\hat{\alpha}$. Обозначим через H_0 множество всех подформул $\widehat{\Phi}$ таких, что $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}', y, \ldots, y, z_1, \ldots, z_u) = 0$. Через H_0' обозначим подмножество формул из H_0, не являющихся нетривиальными подформулами никаких подформул из H_0 кроме их самих.

Заметим, что формулу Φ можно представить в виде $\Phi'[\Phi_1^0, \ldots, \Phi_q^0]$, где $\Phi'[z_1, \ldots, z_q]$ — внешняя подформула Φ, $\{\Phi_1^0, \ldots, \Phi_q^0\} = H_0'$. Через Ξ' обозначим формулу $\Phi'[z_1, \ldots, z_q]$.

Заменим в формуле Ξ' все вхождения переменной y на различные переменные $y_1, \ldots, y_t$, $t \geq 0$. Полученную формулу обозначим через Ξ. Пусть Ξ реализует функцию $h'(\widehat{x}, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_q)$. Заметим, что если $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \leq z_i$, то

$$1 = g(\widehat{\alpha}, 1) = h'(\widehat{\alpha}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{t \text{ раз}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{q \text{ раз}}) = 0,$$

тем самым получаем противоречие. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq z_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, q\}$.

Докажем, что для любого j, $j \in \{1, \ldots, t\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq y_j$. Допустим противное. Пусть существует такое $j, j \in \{1, \ldots, t\}$, что $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \leq y_j$. Без ограничения общности будем считать, что $j = 1$.

Нетрудно увидеть, что формулу Ξ можно представить в виде $\Xi''[y_1, \Xi_1, \ldots, \Xi_u]$ так, что формула $\Xi''[y_1, v_1, \ldots, v_u]$ является α-формулой минимальной глубины содержащей y_1, $u \geq 0$, а $\Xi_1, \ldots, \Xi_u$ — некоторые формулы над A. Пусть формула Ξ'' реализует функцию $h''(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{v})$, а формулы $\Xi_1, \ldots, \Xi_u$ — функции $h_1(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}), \ldots, h_u(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ соответственно. Заметим, что переменная y_1 входит в формулу Ξ только один раз. Следовательно функции h_i не зависят существенно от переменной y_1.

Докажем, что для всех i, $i \in \{1, \ldots, u\}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 h_i(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in M \setminus \{0\}$. Допустим противное, т. е. $\mathrm{pr}_2 h_i(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = 0$. Тогда у формулы Ξ_i существует такая подформула Ω, которая реализует функцию, в проекции равную нулю, а все подформулы формулы Ω реализуют функции, проекции которых отличны от нуля. Пусть Ω имеет вид $w'(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widehat{\Psi}_1, \dots, \widehat{\Psi}_l)$, где $w'(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, u_1, \dots, u_l) \in A$. Поскольку $\mathrm{pr}_2 w'(\widehat{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{u}) = 0$, то подформула формулы Φ, из которой была получена подформула Ω, принадлежит H_0, что противоречит построению формулы Ξ'. Следовательно для всех i, $i \in \{1, \dots, u\}$ выполнено

$$h_i(\widehat{\alpha}, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) = h_i(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 = h'(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) = \\ = h''(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1, h_1(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1), \dots, h_u(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1)) = \\ = h''(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h''(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \le y_1$. Так как

$$L(\Xi'') \le nl(\Phi') \le nl(\Phi) < m,$$

то существует такое i, $i \in \{1, \dots, m\}$, что переменные $x_1^i, \dots, x_{n-1}^i$ не входят в формулу Ξ''. Пусть $\widetilde{\beta}$ — такой набор из E_k^{n-1}, что $\mathrm{pr}_2 f(\widetilde{\beta}, y) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 = g(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \dots, \widetilde{\alpha}}_{i-1 \text{ раз}}, \widetilde{\beta}, \underbrace{\widetilde{\alpha}, \dots, \widetilde{\alpha}}_{m-i \text{ раз}}, 0) \le h'(\underbrace{\widetilde{\alpha}, \dots, \widetilde{\alpha}}_{i-1 \text{ раз}}, \widetilde{\beta}, \underbrace{\widetilde{\alpha}, \dots, \widetilde{\alpha}}_{m-i \text{ раз}}, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) = \\ = h''(\widehat{\alpha}, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1) = 0, \end{aligned}$$

т. е. получаем противоречие. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 h'(\widehat{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\le y_j$ для всех j, $j \in \{1, \dots, t\}$.

Так как формула Ξ получается из внешней подформулы формулы Φ заменой переменной y на переменные $y_1, \dots, y_t$, то для любого $\widetilde{\gamma} \in V_f^{x_n}$ по лемме 3.7 выполнено включение

$$\mathrm{pr}_2 h'(\underbrace{\widetilde{\gamma}, \dots, \widetilde{\gamma}}_{m \text{ раз}}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in M_{01}. \tag{3.2}$$

Положим

$$w(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = h'(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, x_1, \dots, x_{n-1}}_{m \text{ раз}}, y_1, \dots, y_r),$$

где $r' = t + q$. Заметим, что поскольку в силу соотношения (3.2) выполнено $\mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01}$, и как показано выше

$$\mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq y_i, \quad \mathrm{pr}_2 h'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \not\leq z_j$$

для любых $i \in \{1, \ldots, t\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$, то $\mathrm{pr}_2 w(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \backslash I^\infty$, т. е. функция w удовлетворяет условию 1. В силу соотношения (3.2) для w выполнено условие 3.

Таким образом, для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, любой переменной $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ и любого набора $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ найдутся число $r'_1 = r'_1(f, x_i, \widetilde{\alpha})$ и функция $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'_1})$, удовлетворяющая условиям 1 и 3. Обозначим эту функцию через w_1. Аналогично, найдется число $r'_2 = r'_2(f, x_i, \widetilde{\alpha})$, для которого можно построить функцию $w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'_2})$, удовлетворяющую условиям 2 и 3. Обозначим эту функцию через w_2. Тогда нетрудно показать, что функция

$$\begin{aligned} w(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'_1 r'_2}) = w_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{r'_1}), \\ w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{r'_1+1}, \ldots, y_{2r'_1}), \ldots, w_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{r'_1 r'_2 - r'_1 + 1}, \ldots, y_{r'_1 r'_2})) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям 1–3. Поэтому в качестве числа r можно взять $\max\{r'_1(f, x_i, \widetilde{\alpha}) r'_2(f, x_i, \widetilde{\alpha})\}$, где максимум берется по всем функциям f из A, переменным x_i функции f и всем наборам $\widetilde{\alpha}$ из $V_f^{x_i}$. Теорема доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 и утверждения 3.8 следует

Теорема 3.3. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$.*

3.4. Алгоритм проверки критерия квазиравномерности.

Пусть $A \subseteq P_{k,2}$, $r \geq 3$. Будем говорить что система функций A обладает свойством $\#_1'(r)$, если для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, любой переменной $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, что

1) если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i} =$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$;

2) если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$;

3) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$;

4) существует формула Ψ над A, реализующая функцию g такая, что каждая из переменных $y_1, \ldots, y_r$ входит в формулу Ψ ровно один раз.

Леммы 3.9–3.11 следуют из определения свойства $\#_1'(r)$.

Лемма 3.9. *Пусть A — такая конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, что A обладает свойством $\#_1'(r)$. Тогда для любого $r' > r$ система A обладает свойством $\#_1'(r')$.*

Лемма 3.10. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что A обладает свойством $\#_1'(r)$. Тогда $A \subseteq \#_1([A], r)$.*

Лемма 3.11. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#_1([A], r)$. Тогда существует такое $r' \geq 2$, что A обладает свойством $\#_1'(r')$.*

Лемма 3.12. *Пусть A — конечная система монотонных функций из $P_{k,2}$, функции из A зависят не более чем от n переменных и A обладает свойством $\#_1'(r)$, где $r \geq 3$. Тогда A обладает свойством $\#_1'(n^{3^{k^n+1}})$.*

Доказательство. Пусть q — минимальное число такое, что A обладает свойством $\#_1'(q)$. Докажем, что $q \leq n^{3^{k^n+1}}$. Пусть без ограничения общности все функции из A зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $n > 1$. Тогда существуют

такие функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$, число $i \in \{1, \ldots, n\}$ и набор $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$, что q является минимальным числом таким, что найдется функция
$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_q) \in [A]$, удовлетворяющая условиям 1—4 свойства $\#_1'$.

Пусть Φ — формула над A минимальной сложности, реализующая функцию g, удовлетворяющую условиям 1–4 свойства $\#_1'$. Пусть $F = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_t\}$ — множество нетривиальных подформул формулы Φ. Тогда для любого i, $i \in \{1, \ldots, t\}$, формулу Φ можно представить в виде $\Psi_i[\Phi_i]$, где $\Psi_i[z]$ — внешняя подформула формулы Φ. Пусть формулы Φ_i и Ψ_i реализуют функции
$f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_q)$ и $h_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_q, z)$ соответственно для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Пусть $V_f^{x_i} = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_v\}$. Сопоставим каждой формуле $\Phi_i \in F$ набор $\widetilde{\gamma}^i = (\gamma_1^i, \ldots, \gamma_{v+1}^i) \in E_3^{v+1}$ следующим образом:

1) если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) = 0$, то $\gamma_j^i = 0$;

2) если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) = 1$, то $\gamma_j^i = 1$;

3) если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{y}) \neq 0, 1$, то $\gamma_j^i = 2$;

4) если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in I^\infty$, то $\gamma_{v+1}^i = 0$;

5) если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in O^\infty$, то $\gamma_{v+1}^i = 1$;

6) если $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$, то $\gamma_{v+1}^i = 2$.

Предположим, что в формуле Φ есть две подформулы Φ_i и Φ_j такие, что $i \neq j$, Φ_j является подформулой Φ_i и $\widetilde{\gamma}^i = \widetilde{\gamma}^j$. Рассмотрим формулу $\Psi_i[\Phi_j]$. Обозначим ее через Φ'. Пусть формула Φ' реализует функцию $g'(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_q)$. Докажем что функция g' удовлетворяет условиям:

a) если $\{0, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$,

b) если $\{1, x\} \subseteq M_f^{x_i}$, то выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus I^\infty$,

c) для любого $\widetilde{\beta} \in V_f^{x_i}$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\beta}, \widetilde{y}) \neq 0, 1$.

Докажем сначала условие c. Пусть $u \in \{1, \ldots, v\}$. Рассмотрим случаи:

1) если $\gamma_u^i = \gamma_u^j = 0, 1$ или функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z)$ не зависит существенно от переменной z, то очевидно что $g'(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}) = g(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y})$ и условие c следует из условия 3 для функции g;

2) если функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z)$ зависит существенно от переменной z и $\gamma_u^i = \gamma_u^j = 2$, то $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z) \in M_{01}$ и $\mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}) \in M_{01}$. Следовательно, функция
$$\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}) = \mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, \mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y})) \in M_{01}$$
существенно зависит от хотя бы одной из переменных $y_1, \ldots, y_q$.

Таким образом, функция g' удовлетворяет условию c.

Пусть без ограничения общности $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_1$. Докажем пункт a. Пункт b следует из пункта A согласно принципу двойственности. Согласно пункту c выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \in M_{01}$. Следовательно достаточно доказать, что $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \notin O^\infty$. Если $\gamma_1^i = \gamma_1^j = 0, 1$ или функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z)$ не зависит существенно от переменной z, то аналогичным образом имеем $g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) = g(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y})$ и пункт a для функции g' следует из пункта 1 для функции g.

Пусть $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$, $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \neq 0, 1$ и функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_u, \widetilde{y}, z)$ существенно зависит от переменной z. Заметим, что так как каждая из переменных $y_1, \ldots, y_q$ входит в формулу Φ только один раз, то функции $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y})$ и $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z)$ существенно зависят от непересекающихся множеств переменных.

Рассмотрим случаи:

I) Пусть $\gamma_{v+1}^i = \gamma_{v+1}^j \in \{0, 2\}$. Тогда $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$ и $\mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$. Следовательно, $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$.

II) Пусть $\gamma_{v+1}^i = \gamma_{v+1}^j = 1$. Тогда возможны два варианта:

   a) Пусть $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z) \geq z$. Тогда $\mathrm{pr}_2 f_i(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$, что противоречит тому, что $\gamma_{v+1}^i = 1$.

a) Пусть $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z) \not\geq z$. Тогда для любой переменной y_u такой, что f_j существенно зависит от y_u выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \not\geq y_u$. Следовательно, для всех переменных y_l, от которых существенно зависит функция $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z)$, выполнено неравенство $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}) \not\geq y_l$. Из того, что $\mathrm{pr}_2 h_i(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{y}, z) \not\geq z$ следует что для любой переменной y_b, от которой существенно зависит $\mathrm{pr}_2 f_j(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y})$ выполнено $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \not\geq y_b$. Поэтому, $\mathrm{pr}_2 g'(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in M_{01} \setminus O^\infty$.

Следовательно, пункт 1 доказан, пункт 2 следует из принципа двойственности. Так как $L(\Phi') < L(\Phi)$, то получаем противоречие с минимальностью сложности формулы Φ, следовательно таких подформул Φ_i и Φ_j не существует. Поэтому для любой вложенной последовательности подформул Φ_i формулы Φ все вектора $\widetilde{\gamma}^i$ различны. Следовательно,

$$l(\Phi) \leq |E_3^{v+1}| \leq 3^{v+1} \leq 3^{k^n+1}.$$

Поэтому $q \leq L(\Phi) \leq n^{l(\Phi)} \leq n^{3^{k^n+1}}$. Лемма доказана.

Следующая теорема вытекает из лемм 3.9, 3.10, 3.11 и 3.12:

Теорема 3.4. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$, функции из A зависят не более, чем от n переменных и $A \subseteq \#_1([A], r)$, где $r \geq 3$. Тогда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$.*

Следствие 1. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$, где n — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A*

Доказательство. Утверждение следует из теорем 3.3 и 3.4. Отметим, что так как для фиксированного числа $r \geq 3$ множество $\#_1([A], r)$ является конечным, то выполнение условия $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$ можно проверить за конечное время, а значит, задача проверки квазиравномерности конечной системы монотонных функций из $P_{k,2}$ допускает алгоритмическое решение.

Глава 4

Контрпримеры

В этой главе приводится пример двух систем функций из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, одна из которых является равномерной, а другая не является равномерной, из чего, в частности, следует, что эти системы не являются полиномиально эквивалентными.

Обозначим через $d_3(x_1, x_2, x_3)$ функцию $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ из P_2.

Определим функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ из $P_{3,2}$ следующим образом. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in E_k^{11}$ — набор значений переменных функции f. Тогда

$$f(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = \begin{cases} \beta_1 \& \beta_2 \& d_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), & \text{если } \widetilde{\alpha} \in \{(2,2,2,2,1,1), (2,2,1,1,2,2), \\ & (2,2,1,1,1,1)\} \text{ и } \beta_i, \gamma_j \in E_2; \\ \beta_1 \vee \beta_2 \vee d_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), & \text{если } \widetilde{\alpha} = (1,1,2,2,2,2) \text{ и } \beta_i, \gamma_j \in E_2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим

$$f_2(x_1, x_2, x_3, y, z_1, z_2, z_3) = f(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, y, y, z_1, z_2, z_3),$$

$$A = \{f\}, \quad A' = \{f, f_2\}.$$

Очевидно, что $[A] = [A']$.

Лемма 4.1. *Система A равномерна.*

Доказательство. Покажем, что для системы A выполнены условия теоремы 2.4. Поскольку $f(x_1, x_1, \ldots, x_1) = 0$, то $0 \in [A]$. Заметим, что функция f симметрична относительно перестановок переменных из множеств $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{y_1, y_2\}$ и $\{z_1, z_2, z_3\}$, следовательно, достаточно показать существование функций f_{x_1}, f_{x_3}, f_{x_5}, f_{y_1} и f_{z_1}, удовлетворяющих условиям теоремы (2.4) для переменных x_1, x_3, x_5, y_1 и z_1 соответственно. Положим

$$f_{x_1}(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_2, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 0, 0, v_1, v_2, v_3),$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_1, x_2, x_4, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3),$$

$$f_{x_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_6, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3),$$

$$f_{y_1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_2, v_1, v_2, v_3),$$

$$f_{z_1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, v_1, v_2, v_3).$$

Нетрудно проверить, что для любого $u \in \{x_1, x_3, x_5, y_1, z_1\}$ и любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^u$ выполнено равенство $\mathrm{pr}_2 f_u(\widetilde{\alpha}, v_1, v_2, v_3) = v_1v_2 \vee v_2v_3 \vee v_1v_3 \in \mathrm{N}A_2$. Приведем проверку для $u = x_1$. Заметим, что если $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_1}$ (т. е. $\mathrm{pr} f(x, \widetilde{\alpha}) \neq \mathrm{const}$), то $\widetilde{\alpha}$ имеет вид $(1, 2, 2, 2, 2, 0, 0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где γ_i — либо 0 либо 1. Следовательно,

$$\mathrm{pr}_2 f_{x_1}(\widetilde{\alpha}, v_1, v_2, v_3) = \mathrm{pr}_2 f(1, 2, 2, 2, 2, 0, 0, v_1, v_2, v_3) = d_3(v_1, v_2, v_3),$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Системы A и A' состоят из монотонных*[1] *функций.*

Доказательство. Так как $[\{f\}] = [A] = [A']$, то достаточно доказать что функция f является монотонной. Если функция f не является монотонной, то существует такое множество переменных $X \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3\}$, и набор $\widetilde{\alpha} = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{|X| \text{ раз}})$, что $\mathrm{pr}_2 f|_X^{\widetilde{\alpha}} \notin M$. Предположим, что

$$X \notin \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}\},$$

тогда нетрудно заметить что $\mathrm{pr}_2 f|_X^{\widetilde{\alpha}} = 0$, получаем противоречие. Следовательно, $X \in \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}\}$. Рассмотрим эти четыре случая:

1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, тогда $\mathrm{pr}_2 f|_{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}^{(2,2,2,2)} = x_5 \& x_6 \& y_1 \& y_2 \& d_3(z_1, z_2, z_3) \in M$,

[1] Напомним, что рассматривается такой частичный порядок на E_k, в котором $0 < 1$, а остальные элементы не сравнимы между собой и с 0 и 1.

2. $X = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, тогда $\mathrm{pr}_2 f|^{(2,2,2,2)}_{\{x_3,x_4,x_5,x_6\}} =$
$x_1 \& x_2 \& (y_1 \vee y_2 \vee d_3(z_1, z_2, z_3)) \in M$,

3. $X = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$, тогда $\mathrm{pr}_2 f|^{(2,2,2,2)}_{\{x_1,x_2,x_5,x_6\}} = x_3 \& x_4 \& y_1 \& y_2 \& d_3(z_1, z_2, z_3) \in M$,

4. $X = \{x_1, x_2\}$, тогда $\mathrm{pr}_2 f|^{(2,2)}_{\{x_1,x_2\}} = x_3 \& x_4 \& x_5 \& x_6 \& (y_1 \& y_2 \& d_3(z_1, z_2, z_3)) \in M$.

Таким образом, f — монотонная функция. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Система A' не является псевдоравномерной*[2].

Доказательство. Предположим противное. Пусть система A' псевдоравномерна. Тогда по теореме 3.2 выполняется[3] $A' \subseteq \#_1([A'], r)$ для некоторого $r \geq 3$. По лемме 3.3 для любой функции $h \in A'$ выполняется включение $h \in \widehat{\#}_1([A'], t)$ для некоторого $t \geq 3$, будем считать t наименьшим из возможных.

Рассмотрим функцию $f_2(x_1, x_2, x_3, y, z_1, z_2, z_3)$. Легко видеть, что $M^y_{f_2} = \{0, 1, x\}$. Тогда из условия $f_2 \in \widehat{\#}_1([A'], t)$ следует, что существует функция $g(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, v_1, \ldots, v_t) \in [A']$, такая, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V^y_{f_2}$ выполнено включение $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{v}) \in \mathrm{N}A_2$.

Тогда для любых $\widetilde{\beta} \in \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ и $\widetilde{\gamma} \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ следующие функции являются мажоритарными:

$$\mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, \widetilde{\beta}, \widetilde{v}); \quad \mathrm{pr}_2 g(2, 1, 2, \widetilde{\beta}, \widetilde{v});$$

$$\mathrm{pr}_2 g(2, 1, 1, \widetilde{\beta}, \widetilde{v}); \quad \mathrm{pr}_2 g(1, 2, 2, \widetilde{\gamma}, \widetilde{v}).$$

Так как A' — система монотонных функций и $g \in [A']$, то функция $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}, \widetilde{v})$ является монотонной. Докажем, что для любого $\widetilde{\alpha} \in \{(2,2,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,1,1)\}$ выполнено

$$\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}, \widetilde{v}) \in \mathrm{N}A_2. \tag{4.1}$$

Докажем для $\widetilde{\alpha} = (2,2,1)$, для остальных наборов доказательство аналогично. Предположим противное, тогда либо $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}, \widetilde{v}) \in O^\infty$, либо $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}, \widetilde{v}) \in I^\infty$.

---

[2] Определение псевдоравномерности см. в разделе 3.3.

[3] Определения множеств $\#_1(B, r)$ и $\widehat{\#}_1(B, r)$ см. в разделе 3.2.

Рассмотрим первый случай. Для некоторого $i \in \{1, \ldots, t+3\}$ выполнено

$$\mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ нулей}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{t+3-i \text{ нулей}}) = 1.$$

Достаточно рассмотреть два случая: $i = 1$ и $i = 4$. В первом случае имеем

$$1 = \mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, 1, 0, \ldots, 0) \leq \mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0) = 0,$$

во втором случае имеем:

$$1 = \mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots, 0) \leq \mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, 1, 1, 0, 1, \ldots, 0) = 0.$$

В обоих случаях получаем противоречие, следовательно $\mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, \widetilde{z}, \widetilde{v}) \notin O^\infty$. Соотношение $\mathrm{pr}_2 g(2, 2, 1, \widetilde{z}, \widetilde{v}) \notin I^\infty$ доказывается аналогично. Таким образом, равенство (4.1) доказано.

Пусть Q — множество функций $q(x_1, x_2, x_3, z_1, \ldots, z_p) \in [A']$ таких, что $p > 0$,

$$\mathrm{pr}_2 q(2, 2, 1, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty, \quad \mathrm{pr}_2 q(2, 1, 2, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty,$$

$$\mathrm{pr}_2 q(2, 1, 1, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus I^\infty, \quad \mathrm{pr}_2 q(1, 2, 2, \widetilde{z}) \in M_{01} \setminus O^\infty.$$

Заметим, что множество Q не пусто, так как $g(x_1, x_2, x_3, z_1, \ldots, z_{t+3}) \in Q$. Пусть функция $h(x_1, x_2, x_3, z_1, \ldots, z_p) \in Q$ такова, что $l_A(h) = \min\limits_{h' \in Q} l_A(h')$.

Пусть Φ — формула над A минимальной глубины, реализующая функцию h. Пусть формула Φ имеет вид $f(\Psi_1, \ldots, \Psi_{11})$ и формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_{11}$ реализуют функции

$$h_1(x_1, x_2, x_3, \widetilde{z}), \ldots, h_{11}(x_1, x_2, x_3, \widetilde{z})$$

соответственно. Докажем, что

$$(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6) \in \{(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3), (x_1, x_1, x_3, x_3, x_2, x_2)\}. \quad (4.2)$$

Предположим противное. Среди формул $\Psi_1, \ldots \Psi_6$ найдется хотя бы один символ переменной x_1 (в противном случае $h(2, 1, 1, 1, \ldots, 1) = 0$ и тогда $\mathrm{pr}_2 h(2, 1, 1, \widetilde{z}) = 0 \notin M_{01}$, что противоречит условию $h \in Q$) и хотя бы одна одна из переменных x_2, x_3 (в противном случае $h(1,2,2,1,\dots,1) = 0$ и, аналогично, это противоречит условию $h \in Q$). Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть одна из формул $\Psi_1, \dots, \Psi_6$ является символом переменной из множества $\{z_1, \dots, z_p\}$. Пусть без ограничения общности одна из этих формул есть z_1. Тогда $h(2,2,1,0,1,\dots,1) = 0$. Следовательно, либо $\mathrm{pr}_2 h(2,2,1,\widetilde{z}) \notin M_{01}$, либо $\mathrm{pr}_2 h(2,2,1,\widetilde{z}) \in M_{01} \cap I^\infty$, т. е. получаем противоречие с условием $h \in Q$.

2) Пусть для некоторого i, $i \in \{1,2,3\}$, одна из формул Ψ_{2i-1}, Ψ_{2i} является нетривиальной, а другая формула символом одной из переменных из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда для некоторого $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in \{(2,2,1),(1,2,2)\}$, выполнено $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) = 0$, т. е. получаем противоречие.

3) Пусть для некоторого i, $i \in \{1,2,3\}$, одна из формул Ψ_{2i-1}, Ψ_{2i} является символом переменной x_a а другая — символом переменной x_b, где $a \neq b$ и $a, b \in \{1,2,3\}$. Тогда для некоторого $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in \{(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$, выполнено равенство $\mathrm{pr}_2 h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{z}) = 0$, т. е. получаем противоречие.

4) Пусть формулы Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_1, а Ψ_3, Ψ_4 — нетривиальные формулы. Тогда Ψ_5, Ψ_6 являются либо переменными x_2, либо переменными x_3. Поэтому

$$\begin{aligned}1 = h(1,2,2,1,\dots,1) = f(1,1,h_3(1,2,2,1,\dots,1), h_4(1,2,2,1,\dots,1), 2, 2,\\ h_7(1,2,2,1\dots,1), \dots, h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) \leq\\ \leq f(1,1,1,1,2,2,h_7(1,2,2,1\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) = 0\end{aligned}$$

Тем самым получаем противоречие. Аналогичным образом получаем противоречие в случае, когда формулы Ψ_1 и Ψ_2 являются переменными x_1, а Ψ_5 и Ψ_6 являются нетривиальными формулами.

5) Пусть формулы Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_2, а формулы Ψ_3 и Ψ_4 являются

нетрививальными. Тогда имеем

$$1 = h(2,1,2,1,\dots,1) = f(1,1,h_3(1,2,2,1\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) \leq$$
$$\leq f(1,1,1,1,h_5(1,2,2,1\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) = 0.$$

Тем самым, получаем противоречие. Аналогично рассматриваются случаи, когда Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_2, а формулы Ψ_5 и Ψ_6 являются нетривиальными, и когда Ψ_1 и Ψ_2 есть переменные x_3 и либо формулы Ψ_3 и Ψ_4 либо формулы Ψ_5 и Ψ_6 являются нетривиальными.

6) Пусть Ψ_1 и Ψ_2 — нетривиальные формулы. Тогда либо формулы Ψ_3 и Ψ_4 есть переменные x_1, либо формулы Ψ_5 и Ψ_6 есть переменные x_1. Рассмотрим первый случай: предположим, что Ψ_3 и Ψ_4 есть переменные x_1. Второй случай, когда Ψ_5 и Ψ_6 есть переменные x_1, рассматривается аналогично. Имеем

$$1 = h(1,2,2,1\dots,1) = f(h_1(1,2,2,1,\dots,1),h_2(1,2,2,1\dots,1),1,1,$$
$$h_5(1,2,2,1,\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) \leq$$
$$f(1,1,1,1,h_5(1,2,2,1,\dots,1),\dots,h_{11}(1,2,2,1\dots,1)) = 0,$$

тем самым, получаем противоречие.

Таким образом получаем что все формулы $\Psi_1,\dots,\Psi_6$ есть переменные x_1, x_2 и x_3.

7) Пусть хотя бы одна из переменных x_1, x_2 или x_3 не встречается среди формул $\Psi_1,\dots,\Psi_6$, тогда для некоторого $\widetilde{\alpha} \in \{(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$ имеем

$$h(\widetilde{\alpha},1,\dots,1) = f(2,2,2,2,2,2,h_7(\widetilde{\alpha},1,\dots,1),\dots,h_{11}(\widetilde{\alpha},1,\dots,1)) = 0,$$

получаем противоречие.

Таким образом, из невозможности рассмотренных выше случаев вытекает, что пары $(\Psi_1, \Psi_2), (\Psi_3, \Psi_4), (\Psi_5, \Psi_6)$ есть различные пары переменных (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3).

8) Пусть пара (Ψ_1, Ψ_2) не является парой переменных (x_1, x_1). Тогда нетрудно проверить, что для набора $(2, 1, 1)$ выполнено равенство $\mathrm{pr}_2 h(2, 1, 1, \widetilde{z}) = 0$. Тем самым, получаем противоречие.

Таким образом мы доказали соотношение (4.2). Заметим, что тогда из представления $h = f(\Psi_1, \ldots, \Psi_{11})$, соотношения (4.2) и определения функции f вытекает, что

$$\mathrm{pr}_2 h_7(2, 2, 1, \widetilde{z}) \geq \mathrm{pr}_2 h(2, 2, 1, \widetilde{z}); \quad \mathrm{pr}_2 h_7(2, 1, 2, \widetilde{v}) \geq \mathrm{pr}_2 h(2, 1, 2, \widetilde{v});$$

$$\mathrm{pr}_2 h_7(2, 1, 1, \widetilde{z}) \geq \mathrm{pr}_2 h(2, 1, 1, \widetilde{z}); \quad \mathrm{pr}_2 h_7(1, 2, 2, \widetilde{v}) \leq \mathrm{pr}_2 h(1, 2, 2, \widetilde{v}),$$

где h_7 — функция, реализуемая формулой Ψ_7. Следовательно,

$$\mathrm{pr}_2 h_7(2, 2, 1, \widetilde{z}) \in M \setminus I^\infty; \quad \mathrm{pr}_2 h_7(2, 1, 2, \widetilde{z}) \in M \setminus I^\infty;$$

$$\mathrm{pr}_2 h_7(2, 1, 1, \widetilde{z}) \in M \setminus I^\infty; \quad \mathrm{pr}_2 h_7(1, 2, 2, \widetilde{z}) \in M \setminus O^\infty.$$

Таким образом получаем $h_7 \in Q$. С другой стороны, $l_A(h_7) \leq l_A(h) - 1$. Поэтому получаем противоречие с выбором функции h. Следовательно, множество Q пусто, т. е $A' \not\subseteq \#_1([A'], r)$, а значит, по теореме 3.2, система A' не является псевдоравномерной. Лемма доказана.

Следствие 1. *Система A' не является равномерной.*

Утверждение следует из леммы 4.3, утверждения 3.8 и определений равномерности и квазиравномерности системы функций.

Лемма 4.4. *Системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.*

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Пусть существует такая константа p, что для любой функции $f \in [A]$ выполнено неравенство

$L_A(f) \leq L^p_{A'}(f)$. Так как система A' не является псевдоравномерной, то существует такая константа q и последовательность формул $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, что $l(\Phi_i) > i$ и для каждого j, $j \geq 1$, не существует формулы Ψ_j, эквивалентной формуле Φ_j, такой, что $l(\Psi_j) \leq \frac{l(\Phi_j)}{q}$. Пусть формулы $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ реализуют функции $g_1, g_2, \ldots$ соответственно. Выберем из этой последовательности функций подпоследовательность $h_1, h_2, \ldots$ так, что $L(h_i) \geq i$. По выбору формул Φ_i имеем $l(h_i) \geq \frac{L(h_i)}{q}$.

Заметим, что для любой $f \in [A]$ выполнено равенство $l_A(f) = l_{A'}(f)$. Поэтому имеем

$$l_{A'}(h_i) = l_A(h_i) \leq c \log L_A(h_i) + d \leq c \log L^p_{A'}(h_i) + d \leq cp \log L_{A'}(h_i) + d \leq$$
$$\leq cp \log(l_{A'}(h_i)q) + d \leq cp \log l_{A'}(h_i) + d + cp \log q.$$

Очевидно, что в силу соотношений $l_{A'}(h_i) \geq \frac{L_{A'}(h_i)}{q} \geq \frac{i}{q}$ при достаточно большом i неравенство $l_{A'}(h_i) \leq cp \log l_{A'}(h_i) + d + cp \log q$ не будет выполнено независимо от констант c, p и q. Тем самым получаем противоречие. Лемма доказана.

Глава 5

Заключение

В данной главе мы дадим формулировки основных результатов и приведем их доказательства, опирающиеся на доказанные ранее факты.

Теорема 1. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,s}$, где $k \geq s \geq 2$, такая, что множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда система A равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 2 (см. теорему 2.1).

Следствие 1. *Пусть A и B — такие конечные системы функций из $P_{k,s}$, $k \geq s \geq 2$, что $[A] = [B]$ и множество $[\mathrm{pr}_s A]$ содержит мажоритарную функцию. Тогда системы A и B полиномиально эквивалентны.*

Теорема 2. *Пусть A — конечная система функций из P_k, порождающая предполный класс типа $\mathbb{C}$, $k \geq 3$. Тогда система A равномерна.*

Доказательство. В [21] доказано, что все предполные классы типа $\mathbb{C}$ содержат мажоритарную функцию. Тогда из теоремы 1 следует, что все конечные системы, порождающие предполные классы типа $\mathbb{C}$, равномерны.

Теорема 3. *Пусть A — конечная система функций из P_k, где $k \leq 7$, порождающая предполный класс. Тогда система A равномерна.*

Доказательство. В работах [24, 25] доказано, что при $k \leq 7$ все конечные системы функций, порождающие предполные классы типов $\mathbb{L}, \mathbb{P}, \mathbb{E}, \mathbb{B}, \mathbb{O}$, равномерны. Равномерность всех конечных систем, порождающих предполные классы типа $\mathbb{C}$, следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Теорема 4. *Конечная система A функций из $P_{k,2}$ такая, что $\mathrm{pr}_2 A$ не содержится ни в одном из множеств $O^\infty, I^\infty, K, D, L$, является равномерной.*

Доказательство. Как известно из теоремы Поста (см., например, [33]), если $\mathrm{pr}_2 A$ не содержится ни в одном из множеств $O^\infty, I^\infty, K, D, L$, то множество $[\mathrm{pr}_2 A]$ содержит мажоритарную функцию. Следовательно, по теореме 1 система A равномерна.

Теорема 5. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ такая, что $A \subseteq \#([A], r)$ для некоторого $r \geq 3$, равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 2 (см. теорему 2.3).

Теорема 6. *Пусть A — конечная система функций из $P_{k,2}$ такая, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и любого $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_r) \in [A]$, что для любого $\widetilde{\alpha} \in V_f^{x_i}$ выполнено включение $\mathrm{pr}_2 g(\widetilde{\alpha}, \widetilde{y}) \in \mathrm{N}A_2$. Тогда система A равномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 2 (см. теорему 2.4).

Теорема 7. *Пусть A — конечная система функций из P_k такая, что множество всех α-формул над системой A равномерно над A. Тогда система A квазиравномерна.*

Доказательство этой теоремы приведено в главе 3 (см. лемму 3.2).

Теорема 8. *Конечная система монотонных функций A из $P_{k,2}$ квазиравномерна тогда и только тогда, когда $A \subseteq \#_1([A], n^{3^{k^n+1}})$, где n — максимальное число переменных, от которых зависят функции из A.*

Доказательство теоремы приведено в главе 3 (см. следствие 1 из теоремы 3.4).

Теорема 9. *Существуют такие конечные системы A и A' функций из $P_{3,2}$, что $[A] = [A']$ и*

1) *система A равномерна,*

2) *система A' не равномерна,*

3) *системы A и A' не являются полиномиально эквивалентными.*

Системы A и A' в явном виде приведены в главе 4. Также в главе 4 приведено доказательство пунктов 1—3 (см. лемму 4.1, следствие 1 из леммы 4.3 и лемму 4.4).

Дальнейшая разработка темы диссертации включает в себя следующие задачи:

1. доказательство равномерности систем удовлетворяющих условию $\widehat{\#}_1$ или нахождение системы функций из $P_{k,2}$, являющейся квази-равномерной но не являющейся равномерной,

2. перенос методов диссертации на классы не монотонных функций $P_{k,2}$,

3. перенос методов диссертации на произвольные замкнутые классы P_3.

Литература

1. *Ахметова Л. И.* О глубине формул для предполных классов трехзначной логики // Методы и системы технической диагностики, выпуск 18. Саратов: Изд-во Саратовского университета.

2. *Андреев А. А.* Об одной последовательности функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 3–7.

3. *Андреев А. А.* О нижних оценках сложности для некоторых последовательностей функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 25–30.

4. *Андреев А. Е.* О сложности монотонных функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1985. № 4. С. 83–87.

5. *Андреев А. Е.* О синтезе функциональных сетей // Докт. диссертация. М.: МГУ, 1985.

6. *Буевич В. А.* Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 4. . С. 11–36.

7. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М. Факториал Пресс, 2002. 544 с.

8. *Гашков С. Б.* О глубине булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 265–268.

9. *Дудакова О.С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины 2 // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математик. Механика. 2008. № 1. 31–37.

10. *Дудоров Д. Ю.* Материалы X Международного семинара «Дискр. матем. и ее прилож.» М. 2010. С. 18–20.

11. *Ложкин С. А.* О связи между глубиной и сложностью эквивалентных формул и о глубине монотонных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 269–270.

12. *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. 1996. С. 189–214.

13. *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Радиофизика. Т. 1, № 1, 1958. С. 120–140.

14. *Лупанов О. Б.* Об асимптотических оценках сложности формул, реализующих функции алгебры логики // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 3. С. 464–467.

15. *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

16. *Лупанов О. Б.* О реализации функций алгебры логики формулами ограниченной глубины в базисе $\&, \vee, \neg$ // Проблемы кибернетики. Вып. 6. М.: Физматгиз, 1961. С. 5–14.

17. *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63–97.

18. *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем—принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14, М.: Физматгиз, 1965. С. 31–110.

19. *Лупанов О. Б.* О сложности реализации степеней булевой (n, n)-функции // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 1. С. 59–67.

20. *Марченков. С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1990. 147 с.

21. *Марченков. С. С.* Об id—разложениях класса P_k над предполными классами // Дискрет. матем. 1993. 15, вып 2., С. 98–110.

22. *Марченков. С. С.* Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. 1996. 368 с.

23. *Марченков. С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000. 126 с.

24. *Сафин Р. Ф.* О глубине и сложности формул в некоторых классах k-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. № 6. С. 65–68.

25. *Сафин Р.Ф.* О соотношении между глубиной и сложностью формул для предполных классов k-значной логики // Математические вопросы кибернетики. М. Физматлит. 2004. С. 223–278.

26. *Сафин Р.Ф.* О равномерности систем монотонных функций // Вест. Моск. ун-та. Сер 1. Математика. Механика. 2003. № 2. С. 15–20.

27. *Субботовская Б. А.* О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee, \&, \neg$ // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136, № 3. С. 553–555.

28. *Севиджс Д. Э.* Сложность вычислений. М.: Факториал. 1998. 368 с.

29. *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 60–62.

30. *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР. 1980. Вып. 112.

31. *Угольников А. Б.* О полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // VII Всесоюзная конференция «Проблемы теоретической кибернетики»: тезисы докладов. Часть 1. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного ун-та. 1985. С. 194–195.

32. *Угольников А. Б.* О соотношении между глубиной и сложностью формул для замкнутых классов двузначной логики // IV Всесоюзная конференция «Применение методов математической логики»: тезисы докладов. Таллин. 1986. С. 184.

33. *Угольников А. Б.* О глубине и полиномиальное эквивалентности формул для замкнутых классов двухзначной логики // Математ. заметки. 1987. Т 42. Вып 4. М.: Наука, С. 603–612.

34. *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. Матем. 1988. № 7. С. 79–88.

35. *Угольников А. Б.* О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 242–245.

36. *Угольников А. Б.* О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики, вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 174–176.

37. *Угольников А. Б.* Сложность функций из замкнутых классов // Сборник трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям (2–4 февраля 1993 г.). М: Изд-во механико-математического факультета МГУ. 1998. С. 49–56.

38. *Угольников А.Б.* Классы Поста. Учебное пособие: М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 64 с.

39. *Храпченко В. М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып 32. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1978. С. 76–94.

40. *Храпченко В. М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып 37. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1981. С. 77–84.

41. *Яблонский С. В.* Функциональный построения в k-значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 51. С. 5–142.

42. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966. 119 с.

43. *Яблонский С. В., Козырев В. П.* Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. Вып. 19а. М.: Изд-во МЭИ, 1997.

44. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А.* Предполные классы в многозначных логиках. М.: Изд-во МЭИ, 1997. 141 с.

45. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа 2001. 384 с.

46. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

47. *Baker K. A., Pixley A. F.* Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems //Mathematische Zeitschrift. 1975. Т. 143. №. 2. С. 165–174.

48. *Barak R. P. Shamir E.* On the parallel evaluation of boolean expressions // SIAM Journal on Computing. Volume 5, Number 4, December 1976. P. 678–681.

49. *Bonet M. L., Buss S. R.* Size-depth tradeoff for Boolean formulae // Information Processing Letters. 1994, v. 49, Issue 3. P. 151–155.

50. *Brent P. P., Kuck D. J., Maryama K.* The parallel evaluation of arithmetic expressions without division // IEEE Transactions on Computers C-22. 1973. P. 532–534.

51. *Brent P. P.* The parallel evaluation of arithmetic expressions in logarithmic time // Complexity of Sequential and Parallel Numerical Algorithms, Academic Press, New York. 1973. P. 83–102.

52. *Brent P. P.* The parallel evaluation of general arithmetic expressions // Journal of the ACM, 1974. V.21, № 2. P. 201–206.

53. *Bshouty N. H., Cleve R., Elberly W.* Size-depth tradeoffs for algebraic formulae // 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, San Juan, Puerto Rico, 1-4 October 1991. IEEE. P. 334–341.

54. *Kuntzman J.* Algebra de Boole. Bibliothegue de I'Ingenieur // Automaticien (Dunod, Paris). 1965. № 1.

55. *Lau D.* Function algebras on finite sets. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.

56. *Muller D. E., Preparata F. P.* Restructuring of arithmetic expressions for parallel evaluation // J. of the ACM, 1976, v. 23, № 3. P. 534–543. (Русский перевод: Мюллер. Д. Е. Препарата Ф. П. Перестроение арифметических выражений для параллельного вычисления // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 16. М.: Мир, 1979. С. 5–22.).

57. *Pratt V. R.* The Efect of Basis on the Size of Boolean Expressions // Proc. 16th Annual IEEE Symposium of Foundations of Computer Science. New York, 1975. P. 119–121 (Русский перевод: Пратт В. Р. Влияние базиса на сложность булевых формул // Кибернетический сборник (новая серия). Выпуск 17. М. Мир, 1980. С. 114–123).

58. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921, v. 43, № 3. 163–185.

59. *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princenton Univ. Press. 1941, v. 5. 112 p.

60. *Preparata F. P., Muller D. E.* Efficient Parallel Evaluation of Boolean Expressions // IEEE Trans. Comput. 1976. V. 25, № 5. P. 548–549.

61. *Ragaz M. E.* Parallelizable algebras // Archiv fur mathematische Logik und Grundlagenforschung. (1986/7). V. 26. P. 77–99

62. *Rosenberg I.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris Ser A. 1965, v. 260, 3817–3819.

63. *Rosenberg I.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Československe Akad. Ved. Řada Mat. Prirod. Věd 80, 3–93 (1970).

64. *Shamir E., Snir M.* On the depth and complexity of formulas // Mathematical Systems Theory. 1980. V. 13, № 4 P. 301–322.

65. *Spira P. M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawai Symposium on System Sciences, North Hollywood, 1971, Western Periodicals Company, P. 525–527.

66. *Wegener I.* Relating monotone formula size and monotone depth of boolean functions // Information Processing Letters, 1983. V. 16, № 1. P. 41–42.

67. *Тарасов П. Б.* О равномерности некоторых систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Математика. Механика. 2013. № 2. С. 61–64.

68. *Тарасов П. Б.* О некоторых достаточных условиях равномерности систем функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Математика. Механика. 2013. № 5. С. 41–46.

69. *Тарасов П. Б.* Некоторые условия равномерности функций k-значной логики, принимающих значения 0 и 1 // Ученые записки Казанского университета. 2014, № 3. С. 123–129.