УТВЕРЖДАЮ
Врио директора Института
Прикладной Математики
им. М. В. Келдыша РАН,
д.ф.-м.н. А. И. Аптекарев
«28» апреля 2016 г.

Отзыв ведущей организации
на диссертацию П. Б. Тарасова «Об условиях равномерности систем функций многозначной логики», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

В диссертации рассматривается проблема, которая впервые возникла при реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и имела целью уменьшение глубины схемы, т. е. времени ее работы. Конкретнее задача ставилась так: по произвольной схеме некоторой сложности (определяемой, например, как число элементов в ней) построить эквивалентную схему, глубина которой значительно меньше сложности исходной схемы.

При такой постановке задачи сколько-нибудь заметного продвижения достигнуть не удалось. Однако, если ограничиться схемами без ветвлений выходов элементов, т. е. формулами, то ситуация резко меняется: формулу, реализующую булеву функцию, можно преобразовать в формулу, глубина которой равна по порядку логарифму сложности исходной формулы.

Это свойство в общем случае приводит к определению: конечная система функций A называется *равномерной*, если существуют такие константы c и d, что для любой функции f, реализуемой формулой над A, выполнено неравенство

$$l_A(f) \le c \log_2 L_A(f) + d,$$

где $l_A(f)$ и $L_A(f)$ — соответственно минимальная глубина и минимальная сложность формул над системой A, реализующих функцию f.

С этим понятием довольно тесно связано еще одно понятие. Конечные системы функций A и B, порождающие один и тот же замкнутый класс, называются *полиномиально эквивалентными*, если существуют такие константы a и b, что для любой функции f из этого замкнутого класса выполнено двойное неравенство

$$(L_A(f))^a \le L_B(f) \le (L_A(f))^b.$$

Равномерность (конечных) полных систем булевых функций была установлена Ф.Спирой и В.М.Храпченко. Равномерность всех систем булевых функций, а также полиномиальная эквивалентность любых двух систем, порождающих один и тот же замкнутый класс, была установлена А.Б.Угольниковым. Тем самым для двузначной логики проблема была закрыта. Осталась задача для k-значной логики при $k \geq 3$.

Поскольку для полных систем функций многозначной логики задача решается примерно так же, как в булевом случае, предметом исследования стали замкнутые классы, и прежде всего предполные классы. Р.Ф.Сафин установил равномерность любых конечных систем, порождающих предполные классы четырех типов (из шести) и предполные классы еще одного типа при $k \leq 7$. Для остальных типов предполных классов проблема оставалась открытой, что обуславливает актуальность диссертационного исследования.

Диссертация состоит из введения и пяти глав.

В диссертации установлена равномерность любых конечных систем, порождающих предполные классы шестого типа — классы функций, сохраняющих центральные отношения. В итоге только один тип предполных классов остался исследованным не до конца (классы монотонных функций). Тем не менее полученный результат позволяет сделать вывод, что в наиболее важном случае, когда k невелико, а именно, при $k \leq 7$ любая конечная система функций, порождающая предполный класс, равномерна.

Для получения результата, сформулированного выше, диссертанту пришлось разработать специальную технику, применимую для систем функций, содержащих в себе (в определенном смысле) мажоритарную функцию. Заслуживает внимания идея перехода от «вытянутой» формулы к более «сжатой» формуле, заключающаяся в том, что подформулы в «вытянутой» части «обеспечиваются» свойством: какими бы ни были значения других подформул, подформулы «вытянутой» части одинаково сворачиваются эквивалентным преобразованием в более сжатую формулу. Интересен и такой необычный прием, как проведение индукции по мощности множества, элементы которого обладают общим свойством. Разработанный метод удалось сформулировать в виде теоремы о равномерности конечной системы функций многозначной логики. Из этой теоремы помимо сформулированного выше результата следуют еще несколько других, относящихся к более узким классам. В качестве следствия теоремы установлена полиномиальная эквивалентность систем функций, удовлетворяющих теореме.

К сожалению, данный метод дает очень большую константу c в неравенстве, определяющем равномерность (в лучшем случае это трехэтажная величина). В связи с этим диссертант рассмотрел конечные системы функций, в проекции порождающие монотонные булевы функции, и для них понизил константы.

Из остальных результатов диссертанта стоит выделить пример двух систем функций в трехзначной логике, порождающих один и тот же замкнутый класс и не являющихся полиномиально эквивалентными. (Ранее подобный пример в четырехзначной логике был предложен А.Б.Угольниковым.) Более того, доказано, что из этих двух систем функций одна является равномерной, а другая нет.

Автореферат адекватно отражает содержание диссертации. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и принадлежат автору, они опубликованы в трех статьях в центральных математических журналах. По материалам диссертации сделаны доклады на конференциях и семинарах.

Недостатком диссертации является ее весьма небрежное оформление. Помимо опечаток, которые легко исправить, встречаются и такие, которые удается исправить лишь после серьезного размышления. В теореме 2.1 возникает путаница из-за того, что уже введенные для определенных подформул обозначения $\Phi_1, \ldots$ затем вводятся повторно для других подформул, и т. п. Тем не менее, учитывая математические трудности, которые преодолел диссертант, можно не придавать недостаткам слишком большого значения.

Основные положения и выводы диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях, проводимых в ИПМ РАН (Москва), Институте математики СО РАН (Новосибирск), Нижегородском государственном университете, Казанском государственном университете.

Диссертация Тарасова П. Б. является научно-квалификационной работой, в которой достигнуто существенное продвижение в задаче о равномерности систем, порождающих предполные классы многозначной логики, что представляет собой определенный вклад в теорию синтеза и сложности управляющих систем. Работа выполнена на высоком уровне и полностью соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения искомой ученой степени по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Отзыв составлен кандидатом физико-математических наук В. М. Храпченко, обсужден и одобрен на заседании семинара сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, протокол №1 от 26 апреля 2016 г.

Старший научный сотрудник
кандидат физ.-мат. наук — Храп — В.М.Храпченко

Контактные данные
ФГУ «ИПМ им. М.В. Келдыша РАН»
Москва, Миусская пл., д.4, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН
Телефон: +7 499 978-13-14
e-mail: office@keldysh.ru
web-сайт: http://www.keldysh.ru