ОТЗЫВ

о диссертации П. Б. Тарасова "Об условиях равномерности систем функций многозначной логики", представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Исследование сложности вычислений (реализации) дискретных функций с использованием различных средств является одной из основных задач теории сложности вычислений. В диссертации в качестве дискретных функций рассматриваются k-значные функции (иначе: функции k-значной логики)P_k, т. е. функции, переменные которых, как и сами функции, принимают значения из множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, где $k \geq 2$.

В общих чертах рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Задан запас элементов, реализующих некоторые k-значные функции. Такой набор элементов называется базисом. Базис называется полным, если любая k-значная функция представима суперпозицией, реализуемой элементами базиса.

Задача состоит в нахождении для каждой функции из рассматриваемого класса такой суперпозиции над используемым базисом A, которая вычисляет заданную функцию и в определенном смысле является простейшей.

Наиболее часто используемыми мерами сложности формул являются число символов переменных, входящих в формулу (называемое сложностью формулы и обозначаемое через $L_A(f)$) и глубина формулы, обозначаемая через $l_A(f)$. Сложность формулы интерпретируется как её стоимость, а глубина — как время вычисления.

Известно, что глубина вычисления k-значной функции f над конечным базисом A не может быть меньше по порядку логарифма сложности самой простой суперпозиции над A, вычисляющей функцию f. В случае когда эта нижняя оценка справедлива, то говорят о равномерности базиса A.

Вопрос о равномерности базисов в k-значном случае при $k \geq 3$ является, по сравнению с булевым случаем, более сложным в связи с тем, что для замкнутых классов булевых функций имеется предложенное Э. Постом простое описание. Вместе с тем для замкнутых классов k-значных функций при $k \geq 3$ подобное описание в общем случае неизвестно.

Вопросы, связанные с равномерностью базисов в случае k-значных функций при $k \geq 3$, изучали несколько исследователей. В данной работе продолжены исследования в этом направлении. В ней основной целью является нахождение соотношений между глубиной и сложностью k-значных функций при $k \geq 3$, если они реализуются формулами над конечным базисом. Основные результаты содержатся во второй, третьей и четвертой главах.

Во второй главе излагаются следующие основные результаты.

Пусть $2 \leq s \leq k$. Множество функций из P_k, принимающих значения из E_s, обозначается через $P_{k,s}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольная функция из $P_{k,s}$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ – такая функция из P_s, что для любого $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E_s$, выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\alpha})$. Функция g называется *проекцией* функции f и обозначается через $\mathrm{pr}_s f$. Если $A \subseteq P_{k,s}$ то полагается $\mathrm{pr}_s A = \{\mathrm{pr}_s f \mid f \in A\}$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *мажоритарной*, если при любых $\alpha, \beta \in E_k$ выполнены равенства

$$f(\beta, \alpha, \dots, \alpha) = f(\alpha, \beta, \alpha, \dots, \alpha) = \dots = f(\alpha, \dots, \alpha, \beta) = \alpha.$$

Сначала во второй главе диссертации (теорема 2.1) доказывется, что если конечный базис A из $P_{k,s}$ таков, что во множестве $\mathrm{pr}_s A$ содержится мажоритарная функция, то базис равномерен. Далее в теоремах 2.2 – 2.4 этой главы приводятся достаточные условия для равномерности конечных базисов A из $P_{k,s}$, когда $s = 2$. В этой главе доказывется 16 вспомогательных утверждений, которые используются при доказательстве теорем 2.1 – 2.4.

В третьей главе диссертации автор изучает специальные монотонные функции из $P_{k,2}$. Сначала он вводит следующее понятие квазиравномерности конечного базиса при $k \geq 3$. Конечный базис A из $P_{k,2}$ называется *квазиравномерным*, если существуют такие константы c и d, что для любой функции f из замыкания $[A]$ выполняется неравенство

$$l_A(f) \leq c \log_2^2 L_A(f) + d.$$

В этой главе исследуются квазиравномерные монотонные базисы из $P_{k,2}$.

В четвертой главе приводится пример двух базисов из $P_{3,2}$, порождающих один и тот же замкнутый класс, при этом один базис является равномерным другой базис не является равномерным.

При доказательстве теорем используется значительное число вспомогательных утверждений; некоторые из них являются известными, а остальные утверждения доказываются в диссертации.

По оформлению диссертации имеются следующие замечания:

1) В определении равномерного базиса можно вместо двух констант можно обойтись одной константой. Это же замечание отно-

сится к определению квазиравномерного базиса.

2) Утверждение 2.6 на стр. 29 и утверждение 3.8 на стр. 67 лучше заменить на леммы 2.6 и 3.8 соответственно.

3) В работе [22] неправильно указаны страницы.

4) Имеется некоторое число орфографических ошибок.

Основные результаты диссертации опубликованы, в автореферате адекватно освещено её содержание.

Считаю, что работа Павла Борисовича Тарасова удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАКом к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Официальный оппонент
Ведущий научный сотрудник
ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева
доктор физико-математических наук А. Д. Коршунов
29 февраля 2016 года

Контактные данные
ФГБУН «Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН»
630090 Новосибирск,
пр. Академика Коптюга, 4
Телефон: (8-383) 333-28-92
e-mail: im@math.nsc.ru
web-сайт: http://math.nsc.ru/

Подпись А. Д. Коршунова
удостоверяю
Зав. оргтделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«29» 02 2016 г.