ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Стукопин Владимир Алексеевич

ЯНГИАНЫ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва –2016

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Донской государственный технический университет" на кафедре прикладной математики.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Винберг Эрнест Борисович

Официальные оппоненты:

Фейгин Борис Львович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"г. Москва
профессор факультета математики
и заведующий Международной лабораторией
теории представлений и математической физики

Хорошкин Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор
Институт теоретической и экспериментальной физики
им. А.И. Алиханова (ФГБУ "ГНЦ РФ – ИТЭФ")
главный научный сотрудник.

Сергеев Александр Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор
Национальный исследовательский
Саратовский государственный университет, г. Саратов
профессор кафедры геометрии

Ведущая организация:

"Объединённый институт ядерных исследований"
Дубна

Защита состоится " 2016 г. в час. мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 по защите докторских и кандидатских диссертаций при механико-математическом факультете Московского государственного университета по адресу: 119991, г. Москва, ул. Ленинские Горы, 1, Главное здание МГУ, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А – 8 этаж, к.812 и на сайте http://mech.math.msu.su/.

Автореферат разослан "   "   2016 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВО МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор   Шафаревич А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы. Данная работа посвящена построению начал теории янгианов супералгебр Ли классического типа. Общая задача развития математических методов квантовой теории поля и современной фундаментальной физики имеет важное значение как для самой математики, так и для современной физики. Здесь мы рассматриваем частный случай упомянутой выше задачи — задачу суперсимметризации теории квантовых групп, построенной В.Г. Дринфельдом в середине 80-х годов XX века. В данной работе мы пытаемся развить такую теорию в важном частном случае янгианов – квантовых алгебр, связанных с рациональными решениями квантового уравнения Янга-Бакстера.

Тут следует сказать, что такое появление новых задач алгебры является довольно типичным. Можно напомнить, что теория Галуа возникла в результате попыток объяснить невозможность выражения корней произвольного алгебраического уравнения через коэффициенты при помощи таких допустимых операций как алгебраические операция сложения умножения, возведения в степень, а также обратные к ним (включая взятие радикалов). Аналогично, теория С. Ли возникла в результате попыток объяснить интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений и так далее. Теория квантовых групп появилась таким же образом. Математические физики ленинградской школы: Л.Д. Фаддеев, Л.А. Тахтаджян, Е.К. Склянин, П.П. Кулиш, В.Е. Корепин, Н.Ю. Решетихин, А.Н. Кириллов и др., основываясь на более раннем подходе Р. Бакстера, к 80-м годам XX века развили для квантовых интегрируемых моделей некоторые общие методы исследования, природа которых тогда казалась загадочной. При этом была видна аналогия с методами, используемыми при изучении интегрируемых классических моделей, таких как уравнение Кортевега-де Фриза и модель нелинейного уравнения Шрёдингера, которые появились несколько ранее – в конце 60-х, начале 70-х годов XX века Развитый школой Л.Д. Фаддеева метод исследования был назван тогда квантовый метод обратной задачи рассеяния. В. Г. Дринфельда дал алгебраическое объяснение этого метода введя квантовые группы, которые играли являлись симметриями квантовой интегрируемой системы.

Следует сказать, что янгианы наряду с квантовыми аффинными алгебрами являются наиболее важными для современной математической физики примерами квантовых алгебр. Теория квантовых алгебр насчитывает уже почти тридцатилетнюю историю, начавшуюся с работ В.Г.Дринфельда [1] и М. Джимбо [2] середины 80-х годов прошлого века. В этих работах была по-

[1] Дринфельд В.Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-Бакстера.– *Доклады АН СССР.* – 1985. – Т.283, No 5. – С.1060 – 1064.

[2] Jimbo M. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. – *Lett. Math. Phys.* – Vol.**10**(1985). – P. 63 – 69.

строена алгебраическая теория, объясняющая интегрируемость важных моделей статистической механики и квантовой теории поля. В этих работах была представлена совершенно новая тогда идея – что при квантовании может деформироваться не только пуассонова структура, но и её группа симметрий – пуассонова группа. В.Г. Дринфельд определил квантовую группу, как алгебру Хопфа, которая не обязана быть ни коммутативной, ни кокоммутативной и получается при деформации групповой и пуассоновой структур. В рамках этого подхода получает естественное объяснение, как алгебраический анзатц Бёте (квантовый метод обратной задачи рассеяния), так и интегрируемость квантовых аналогов интегрируемых моделей типа нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Кортевега-де Фриза. С точки зрения теории квантовых алгебр основные составляющие алгебраического анзатца Бёте – трансфер-матрица и квантовая R-матрица получаются при действии тензорного произведения конечномерного представления и тождественного (в случае трансфер-матрицы), либо при действии тензорного произведения конечномерных представлений (в случае квантовой R-матрицы) на универсальную R-матрицу. Универсальная R-матрица – очень важный объект введённый В.Г. Дринфельдом, она сплетает коумножение и противоположное коумножение в квазитреугольной алгебре Хопфа. В силу её важности в математической физике первая задача, которая исследовалась в теории квантовых алгебр, была задача нахождения явных формул для универсальных R-матриц для различных квантовых алгебр. Вторая важная для приложений задача – описание неприводимых представлений квантовых алгебр. Следует отметить, что первая явная формула универсальной R-матрицы для конечномерной квантованной универсальной обёртывающей $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ была получена В.Г. Дринфельдом. Для приложений в математической и теоретической физики важное значение имело вычисление универсальной R-матрицы для квантованных универсальных обёртывающих алгебр и янгианов. Сначала такие формулы были получены для квантовых аффинных алгебр С.М. Хорошкиным и В.Н. Толстым [3] и независимо С.З Левендорским, Я.С. Сойбельманом и автором [4]. Нахождение явной формулы для универсальной R-матрицы янгиана оказалось более сложной задачей. Следует отметить, что первоначальное определение универсальной R-матрицы янгиана простой алгебры Ли, данное В.Г. Дринфельдом подразумевало, что это объект, получающийся из универсальной R-матрицы некоторого гипотетического, тогда ещё не определённого объекта – квантового дубля янгиана. Существование такого объекта было ги-

[3] Толстой В.Н., Хорошкин С.М. Универсальная R-матрица для квантовых нескрученных аффинных алгебр Ли. – *Функцион. анализ и его прилож.*, **26**(1992), No. 3, 85 – 88.

[4] Levendorskii S., Soibelman Ya., Stukopin V., Quantum Weyl group and universal R-matrix for quantum affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ *Lett. Math. Phys.*, **27**,(1993), 253 – 264.

потезой выдвинутой В.Г. Дринфельда. Квантовый дубль янгиана был введён вскоре С.М. Хорошкиным и В.Н. Толстым [5] и ими была получена мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, что блестяще подтвердило гипотезу В.Г. Дринфельда.

Следует отметить, что янгианы супералгебр Ли начали исследоваться с середины 90-х годов прошлого века в работах М. Назарова [6] и автора [7], которые ввели янгиан специальной линейной супералгебры Ли, первый в терминах RTT-соотношений, а второй – в терминах аналога новой системы образующих В.Г. Дринфельда. Позднее Л.Гоу [8] была показана эквивалентность этих двух подходов.

Формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли был несколько получен автором несколько позднее [9], как и явная конструкция квантового дубля янгиана [10]. В этих же работах была также получена и мультипликативная формула для универсальной R-матрицы янгиана (введённая, как отмечено выше, В.Г. Дринфельдом), которая уже относительно несложно получалась из соответствующей формулы универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана.

Вторая важная задача в теории квантовых алгебр – это теория представлений квантовых алгебр. Первые результаты в этой области также были получены В. Г. Дринфельдом. Следует отметить, полученную В.Г. Дринфельдом классификацию конечномерных неприводимых представлений янгиана простой алгебры Ли [11]. Полное доказательство этого результата В.Г. Дринфельда было опубликовано несколько позднее В. Чари и Э. Прессли [12]. Мы формулируем и доказываем аналогичную теорему о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли [13] [14], а также янгиана ортосимплектической супералгебры Ли.

Следующая задача, которая рассмотрена в работе – это определение скрученных янгианов Дринфельда. В работе, в соответствии с подходом В.Г. Дринфельда, определён янгиан странной супералгебры Ли, как квантование скрученной супералгебры токов на аффинной супералгебре Ли типа $A(n,n)$. Структура коалгебры задаётся классической r-матрицей являющейся есте-

[5] Khoroshkin S.M., Tolstoy V.N., Yangian Double, *Lett.Math.Phys.*,**36**, (1996), 373 – 402.

[6] Nazarov M., Quantum Berezinian and the classical Capelly identity. – *Lett.Math.Phys.*, **21**, (1991), 123 – 131.

[7] Стукопин В.А. О янгианах супералгебр Ли типа A(m,n). – *Функцион. анализ и его прилож.*, **28**, no. 3 (1994), 85 – 90.

[8] Gow L. Gauss decomposition of the Yangian $Y(gl(m|n))$. – *Comm. Math. Phys.* – V. **276** (2007), no 3. – P. 799 – 825.

[9] Стукопин В.А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа A(m,n). – *Функцион. анализ и его прилож.*, **40**, No. 2 (2006).

[10] Стукопин В.А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа A(m,n) и вычисление универсальной R-матрицы – *Фундамент. и прикладная математика*, **Т.11**, No. 2 (2005), 185 – 208.

[11] Дринфельд В.Г. Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр. – *Доклады АН СССР.* – 1988. – **36**, 212 – 216.

[12] Chari, V., Pressley, A., Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices. – *J. Reine Angew. Math.*, **417** (1991), 87 – 128.

[13] Стукопин В.А., О представлениях янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. – *Известия РАН. Серия матем.* – Т. **77**(2013), no 5. – С. 179 – 202.

[14] Stukopin V. On representations of Yangian of Lie Superalgebra $A(n,n)$ type. – *Journal of Physics. C. S.*, V. **411**(2013), issue 1., 012027.

ственным обобщением на случай скрученных алгебр токов классической r-матрицы Янга. Эта r-матрица определяется тройкой Манина скрученных супералгебр токов. Как результат квантования по Дринфельду полученной бисупералгебры Ли скрученных полиномиальных токов мы получаем при специализации параметра квантования янгиан странной супералгебры Ли. Следует отметить, что полученный объект, вероятно, изоморфен янгиану странной супералгебры Ли, который был ранее определён М. Назаровым другим способом [15]. Но строгое доказательство этого факта в настоящее время отсутствует. Мы определяем токовую систему образующих для янгиана странной супералгебры Ли, которая является аналогом новой системы образующих В.Г. Дринфельда для янгиана простой алгебры Ли. Далее мы вводим квантовый дубль янгиана странной супералгебры Ли. Завершающий результат в исследовании янгиана странной супералгебры Ли – мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли. В принципе, наличие такой формулы позволяет решить вопрос об изоморфности определённого нами янгиана странной супералгебры Ли и объекта, введённого ранее М. Назаровым, но проверка технически весьма сложна.

Последняя проблема, рассмотренная в данной работе – это задача нахождения мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры. Мы рассматриваем эту задачу в случае аффинной алгебры Ли типа $A_n^{(1)}$. Следует отметить, что эта задача была решена автором в совместной работе с С.З. Левендорским и Я.С. Сойбельманом, результаты которой принадлежат соавторам в равной мере. Постановка задачи в большей степени принадлежит Я.С. Сойбельману, а техническая часть решения автору и С.З. Левендорскому. В процессе нахождения мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы была получена конструкция квантовой группы Вейля и введены псевдовыпуклые базисы для квантовой аффинной алгебры Ли, впоследствии имевшие разнообразные приложения. В частности, формула для универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры была использована М. Джимбо и Т. Мивой при вычислении спектра гамильтониана и корреляционных функций модели квантового XXZ-магнетика Гейзенберга в пределе когда число спинов спиновой цепочки неограниченно возрастает. В заключении мы кратко касаемся вопроса о связи янгианов и квантовых аффинных супералгебр.

[15] Nazarov M., Yangian of the Queer Lie Superalgebra. – *Commun.Math.Phys.*, **208** (1999), 195 – 223.

Методы исследований.

В диссертационной работе используются методы теории представлений, а также методы теории квантовых алгебр, развитые, в первую очередь В. Г. Дринфельдом, а также многими другими авторами, в том числе и оригинальные методы, развитые автором данной работы. Следует отметить большое влияние на данную работу этих методом, развитых В. Г. Дринфельдом. Можно сказать, что и вся работа является следствием усилий по распространению этих методов, введённых В.Г. Дринфельдом, на случай квантовых супералгебр, именно янгианов супералгебр Ли. Важную роль в исследовании сыграла конструкция квантового дубля янгиана Дринфельда для базисных и странной супералгебр Ли, а также разные способы описания структуры квантового дубля, в терминах разных систем образующих и определяющих соотношений. В теории представлений янгианов были развиты методы описания неприводимых представлений, использующие обобщения на случай янгианов супералгебр Ли методов теории представлений со старшим весом. В случае аффинных алгебр Ли следует упомянуть конструкцию псевдовыпуклых базисов Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгианов супералгебр Ли и квантовых аффинных (супер)алгебр, конструкцию квантовой аффинной группы Вейля и методы, использующие эту конструкцию. Были также развиты методы исследования скрученных янгианов Дринфельда, выходящие за рамки теории супералгебр Хопфа.

Научная новизна и практическая значимость.

Результаты, полученные в работе являются новыми. Они имеют теоретический характер и связаны как со структурной теорией квантовых супералгебр, так и с теорией их представлений. В работе сделана попытка построить начала систематической теории янгианов Дринфельда супералгебр Ли. Помимо этого данные результаты, на наш взгляд, могут иметь и приложения. Они могут иметь приложения в теоретической физике в связи с теорией квантовых суперструн, теорией полей Янга-Миллса и AdS-гипотезой. Другие приложения связаны с квантовыми интегрируемыми моделями и математической физикой.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на многочисленных семинарах, в том числе неоднократно на заседаниях семинара Э.Б. Винберга в МГУ, семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, семинаре С.П. Новикова (МИАН им. Стеклова и МГУ), на семинаре лаборатории теоретической физике им.Н.Н. Боголюбова (Объединённый институт ядерных исследований, Дубна), в теоретическом отделе ИТЭФ, на семинарах отдела "Математический анализ"Южного математического института, семинаре кафедры теории функций и функционального анализа института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, заседаниях Ростовского математического общества, на семинарах отдела функционального анализа математического отделения CINVESTAV (Мехико, Мексика). Результаты диссертации также докладывались на многочисленных конференциях и школах по алгебре, интегрируемым системам, квантовым группам, теории представлений, математической физике, алгебраическим группам, функциональному анализу (Черноголовке, Дубне, Праге, Лидсе, Гамбурге, Москве, Санкт-Петербурге, Киеве, Харькове, Владикавказе, Ростове-на-Дону, Воронеже, Самаре, Тамбове, Тольяти). Именно, на международной конференции "Алгебра и анализ"в честь Н.Г. Чеботарёва (Казань, 1994), на школе по интегрируемым системам в 1996 году, проводимой институтом теоретической физики им. Л.Д. Ландау (Черноголовка), конгрессе по прикладной математике в Гамбурге (1995г.), международной конференции "Асимптотическая комбинаторика и её приложения в математической физике"(Санкт-Петербург, институт Эйлера, 2001 год), школе-конференции по интегрируемым системам (г. Лидс, 2002), международной конференции "Симметрия в математической физике"(2003,институт математики НАН, Киев), международной конференции по алгебре (Москва, МГУ, 2004г.), международной конференции имени Петровского (Москва, МГУ, 2006 г.), международной конференции "Алгебра и анализ"в честь 70-летия В.И. Арнольда (Москва, МИАН, 2007 г.), международной конференции "Transformations Groups"(Москва, НМУ, 2007), на школах-конференциях "Алгебраические группы и теория инвариантов"(2009, 2011, 2012, 2014, 2015 годах в Самаре, Москве, Тольятти, Москве и Самаре, соответственно), на международной конференции "Дифференциальные уравнения"(Москва, 2011г.), конференциях "Порядковый, функциональный анализ и дифференциальные уравнения"(Владикавказ, 2008, 2010; Волгодонск, 2011, Владикавказ, 2013), международной конференции "Симметрии в математической физике"(Институт математики НАН, Киев, 2011 год), конференции "Теория групп и её приложения"в честь юбилея З.И. Боревича (Владикавказ, 2012), международной конференции "Классические и квантовые интегрируемые системы"(Дубна, 2012), "Integrable systems and quantum symmetries"(Прага, 2012), на международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"(Ростов-на-Дону, 2012, 2013), международной конференции в честь юбилея профессора М.М. Драгилева (Ростов-на-Дону, 2012г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 26 работ, из них 13 из списка ВАК, список которых приведен в конце автореферата. В совместной с соавторами работе результаты этой работы принадлежат соавторам в равной мере.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, разбитых на параграфы и списка литературы, содержащего 278 наименований. Определения, теоремы, следствия, леммы и замечания имеют свою независимую нумерацию, содержащую номер главы, параграфа и результата. Общий объем диссертации — 323 страницы машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Глава 1.

В главе 1 приведены результаты, относящиеся к общей теории квантовых супералгебр, не обязательно оригинальные, но не являющиеся широко известными, либо фольклорными. Приведены также общие конструкции, например определение квантования бисупералгебры Ли, определение квантового дубля квантовой супералгебры, которые далее используются в работе. В первой главе обсуждается вопрос о существовании и единственности квантования бисупералгебры Ли, даётся общее определение янгиана супералгебры Ли, как квантования бисупералгебры Ли полиномиальных токов. Доказаны некоторые теоремы о существовании квантования бисупералгебр Ли. Рассмотрены вопросы о единственности квантования. Отмечено, что в отличии от случая квантования биалгебры простой алгебры Ли, квантование в бисупералгебры Ли неединственно. При рассмотрении этих вопросов были использованы результаты о вычислении когомологий супералгебр Ли с коэффициентами в разных модулях. В конце главы определяется квантование универсальной обёртывающей супералгебры супералгебры Ли полиномиальных токов со значениями в специальной линейной супералгебре Ли. Специализацию этого квантования при значении параметра деформации равного 1, мы называем янгианом специальной линейной супералгебры Ли. Аналогично, ниже, в главе 4, определён и янгиан базисной супералгебры Ли.

Глава 2.

В главе 2 исследуется янгиан специальной линейной супералгебры Ли. Вводится токовая система образующих и определяющих соотношений, которая является аналогом, так называемой новой системы образующих и определяющих соотношений введённой ранее В.Г. Дринфельдом для янгианов простых алгебр Ли. Доказывается эквивалентность токовой системы образующих и определяющих соотношений исходной системе образующих и определяющих соотношений, которая был введена ранее в главе 1. Именно, пусть $I = \{1, 2, \ldots, m{+}1, \ldots, m{+}n{+}1\}$, $\tau = \{m{+}1\}$ – индекс нечётного чётного простого корня в системе выделенной системы простых корней супералгебры Ли $A(m,n)$. Тогда аналог определения янгиана в терминах "новой"системы образующих для янгиана специальной линейной супералгебры Ли типа $A(m,n)$ (который был впервые получен автором в работе [1] из списка публикаций) выглядит следующим образом.

Пусть $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Определение 2.2.2. Янгиан $Y(A(m,n))$ супералгебры Ли $A(m,n$ это ассоциативная супералгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, порождённая как ассоциативная супералгебра, образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}, x^{\pm}_{i,k} := x^{\pm}_{\alpha_i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$
\begin{gathered}
[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad \delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x^+_{i,k}, x^-_{j,l}], \\
[h_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [h_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + b_{ij}(h_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}h_{i,k}), \quad i \text{ или } j \neq m+1, \\
[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,l}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,l}, \\
[h_{m+1,k+1}, x^{\pm}_{m+1,l}] = 0, \\
[x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + b_{ij}(x^{\pm}_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}x^{\pm}_{i,k}), \quad i \neq m \text{ или } j \neq m+1, \\
[x^{\pm}_{m+1,k+1}, x^{\pm}_{m+1,l}] = 0 \\
[x^{\pm}_{i,k}, [x^{\pm}_{i,s}, x^{\pm}_{j,l}]] + [x^{\pm}_{i,s}, [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}]] = 0, \quad i \neq j, \\
[[x^{\pm}_{m,k}, x^{\pm}_{m+1,0}], [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m+2,t}]] = 0,
\end{gathered}
$$

для произвольных целых m, r, l, t. Здесь $b_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)$ – элементы симметризованной матрицы Картана, делённые на два.

Функция четности принимает следующие значения на образующих: $p(x^{\pm}_{j,k}) = 0$, для $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \setminus \tau \quad p(h_{i,k}) = 0$, для $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^{\pm}_{i,k}) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i \in \tau$.

Описывается также частично структура супеалгебры Хопфа, именно приводятся явные формулы для коумножения на образующих небольшой степени. Один из важных результатов главы – технически сложное доказательство эквивалентности определения 2.1.1 b определения янгиана как специализации квантования при значении параметра деформации $\hbar = 1$ универсальной обёртывающей супералгебры супералгебры Ли полиномиальных токов со значениями в супералгебре Ли $A(m, n)$, которое было дано в главе 1.

Далее вводится базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта и доказывается теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Определение базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта основано на определении нормального порядка. Именно, линейный порядок выберем следующим образом. Зафиксируем сначала нормальный порядок на отмеченном выше множестве вещественных аффинных корней. Если $\alpha + k\delta < \beta + l\delta$, то потребуем, чтобы

$$x_{\alpha+k\delta} < x_{\beta+l\delta}.$$

Кроме того, пусть

$$x^+_{\alpha,\bar{k}} < h_{j,\bar{l}} < x^-_{\beta,\bar{s}}, \quad \text{для} \quad \forall \alpha, \beta, j, k, l, s;$$

если $i < j$ то $x^{\pm}_{\beta(i),\bar{k}} < x^{\pm}_{\beta(j),\bar{l}}$ и $h_{i,\bar{k}} < h_{j,\bar{l}}$ для $\forall k, l$;
если $k < l$ тогда $x^{\pm}_{\beta(i),\bar{k}} < x^{\pm}_{\beta(i),\bar{l}}$ и $h_{j,\bar{k}} < h_{j,\bar{l}}$, для всех $i, j \in I$.

Теорема 2.2.1. (Пуанкаре-Биркгофа-Витта) $\Omega(<)$ *— базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта янгиана* $Y(A(m, n))$.

После этого мы определяем квантовый дубль янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Определение квантового дубля янгиана формально выглядит как определение 2.1.1 янгиана, но второй индекс пробегает множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$, а не множество $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых целых чисел, как в определении 2.1.1 янгиана, но система определяющих соотношений имеет от же вид, что и в определении 2.1.1. Структура супералгебры Хопфа меняется более существенно. Приводится определение в терминах порождающих функций образующих. Далее рассматривается треугольное разложение для квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли. После чего явно вычисляются формулы спаривания в квантовом дубле между двойственными образующими базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Это даёт возможность далее явно вычислить мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана. Основным результатом главы является следующая теорема (см., также работы [5], [7], приведённые в разделе список публикаций).

Теорема 2.5.1. *Универсальная R-матрица дубля может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где

$$R_+ \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes Y_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes Y_+^-.$$

Элементы R_+, R_- в разложении универсальной R- матрицы для $DY(\mathfrak{g})$ могут быть представлены в следующей форме

$$\begin{aligned} R_+ = & \overrightarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_+}\exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta\otimes e_{-\beta}), \\ R_- = & \overleftarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_-}\exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta\otimes e_{-\beta}), \end{aligned}$$

где произведения берутся в соответствии с нормальными порядками $\precneqq_+$, $\precneqq_-$, определелёнными ранее.

Теорема 2.5.2. *Член R_0 определяется следующей формулой:*

$$R_0 =$$
$$\prod_{n\geq 0}\exp\sum_{i,j=1}^r\sum_{k\geq 0}((\phi_i^+(u))')_k\otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi_j^-(v+(n+\tfrac{1}{2})l(\mathfrak{g})))_{-k-1}.$$

Используя эту формулу мы получаем также явную формулу и для универсальной R-матрицы янгиана специальной линейной супералгебры Ли. В данной главе янгиан специальной линейной супералгебры Ли исследован как важный частный случай янгиана Дринфельда базисных супералгебр Ли. Следует отметить, что в рамках подхода Решетихина-Фаддеева-Тахтаджяна янгиан специальной линейной супералгебры, наряду с янгианом общей линейной супералгебры исследовался во многих работах, начиная с пионерской работы М. Назарова. Но в рамках РТФ подхода вопрос о нахождении квазитреугольной структуры не является естественным.

Глава 3.

Основной результат главы – классификация конечномерных неприводимых представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли в терминах аналогов полиномов Дринфельда. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [12], [15], [20], [24] из списка публикаций. Сначала рассмотрен наиболее простой случай янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$. Затем рассмотрен случай янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$, $m\neq n$. Сформулирована теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта в удобной для описания янгианных модулей со старшим весом форме. После чего сформулирована и доказана теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений в терминах полиномов Дринфельда.

Главный результат главы – следующая теорема.

Теорема 3.3.2. *1. Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(m,n))$-модуль V является модулем со старшим весом d :$V = V(d)$.*
2. Модуль $V(d)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены P_i^d, $i \in \{1, 2, \ldots, m, m+2, \ldots m+n+1\} = I \backslash \{m+1\}$, а также многочлены P_{m+1}^d, Q_{m+1}^d, удовлетворяющие следующим условиям:
все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными 1;

$$\frac{P_i^d(u + a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I \backslash \{m+1\},$$

$$\frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k} \cdot u^{-k-1}.$$

Здесь a_{ii} – матричный элемент симметричной матрицы Картана супералгебры Ли $A(m-1, n-1)$.

В четвёртом параграфе рассмотрен случай янгиана супералгебры Ли типа $A(n,n)$, привносящий некоторые технические сложности. Основной результат параграфа – теорема 3.4.1, дающая классификацию простых конечномерных $Y(A(n,n))$-модулей в терминах полиномов Дринфельда. Единственное отличие от теоремы 3.3.2 состоит в том, что полиномов Дринфельда, определяющих простой конечномерный янгианный модуль на один меньше, чем в случае предыдущей теоремы, то есть их $2n+1$ вместо $m+n+2$, как в случае теоремы 3.3.2.

Глава 4.

В главе 4 исследуется янгиан базисной супералгебры Ли в случае, когда эта супералгебра Ли принадлежит одной из бесконечных серий: $B(m,n)$, $D(m,n)$, $C(n)$ (см. также работы [6], [18], [21] из приводимого ниже списка литературы в разделе публикации автора). Своей структурой данная глава повторяет главу 2. Вводится токовая система образующих и определяющих соотношений, которая является аналогом, так называемой новой системы образующих и определяющих соотношений введённой ранее В.Г. Дринфельдом для янгианов простых алгебр Ли. Доказывается эквивалентность токовой системы образующих и определяющих соотношений исходной системе образующих и определяющих соотношений, которая был введена ранее. Далее вводится базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта и доказывается теорема Пуанкаре-

Биркгофа-Витта. После этого мы определяем квантовый дубль янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Рассматриваем треугольной разложение для квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли. После чего явно вычисляем формулы спаривания в квантовом дубле между двойственными образующими базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Это даёт возможность далее явно вычислить мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана. Используя эту формулу мы получаем также явную формулу и для универсальной R-матрицы янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ – одна из указанных выше базисных супералгебр Ли.

Теорема 4.9.1. *1. Универсальная R-матрица квантового дубля янгиана $DY(\mathfrak{g})$ может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes Y_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes Y_+^-$.
2.Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:

$$\langle e_{\beta_0}^{n_0} e_{\beta_1}^{n_1} \dots e_{\beta_k}^{n_k}, e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} \cdots e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \rangle =$$
$$(-1)^{n_0+\dots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \dots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0} \dots \alpha(\gamma_k)^{n_k} (-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)};$$
$$\langle e_{-\beta_k}^{n_k} \dots e_{-\beta_1}^{n_1} e_{\beta_0}^{n_0}, e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \dots e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} \rangle =$$
$$(-1)^{n_0+\dots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \dots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0} \dots \alpha(\gamma_k)^{n_k} (-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)}.$$

Здесь θ – функция чётности, $\beta_k = \beta_k' + n_k' \delta$, а коэффициенты $\alpha(\beta)$ вычисляются из условия $[e_\beta, e_{-\beta}] = \alpha(\beta) h_{\beta'}$.

Элементы R_+, R_- в разложении универсальной R- матрицы для $DY(\mathfrak{g})$ могут быть представлены в следующей форме

$$\begin{aligned} R_+ = & \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \\ R_- = & \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \end{aligned}$$

где произведения берутся в соответствии с нормальными порядками $\precneqq_+$, $\precneqq_-$, удовлетворяющими указанным выше условиям.

Глава 5.

Цель данной главы – описать янгиан и его квантовый дубль для "странной"супералгебры Ли типа Q_n как результат квантования в смысле В.Г. Дринфельда некоторой тройки Манина и вычислить универсальную

$R-$матрицу для квантового дубля янгиана (см. также работы [8], [14], [16], [22], [26] из списка публикаций автора, в которых были впервые изложены основные результаты этой главы). Как отмечено выше, супералгебры Ли классического типа делятся на два класса: базисные и странные супералгебры Ли. Супералгебры Ли из первого класса по своим свойствам похожи на простые алгебры Ли. На них существует невырожденная инвариантная билинейная форма (и ненулевой оператор Казимира). Эти свойства дают возможность определить янгиан для базисной супералгебры Ли также как янгиан простой алгебры Ли, что и было сделано в предыдущей главе. Правда, при этом доказательства некоторых теорем существенно меняются.

Супералгебру Ли Q_n можно определить как множество неподвижных точек некоторого инволютивного автоморфизма σ базисной супералгебры Ли $A(n,n)$. Этот автоморфизм естественно продолжается до автоморфизма $\tilde{\sigma}$ токовой супералгебры Ли $A(n,n)[u]$. При этом скрученная супералгебра Ли совпадает с множеством неподвижных точек этого автоморфизма $\tilde{\sigma}$ – $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$. Специализацию квантования при $\hbar = 1$ бисупералгебры Ли $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$ поэтому естественно считать янгианом странной супералгебры Ли Q_n.

В данной главе мы вводим янгиан странной супералгебры Ли типа Q_n как специализацию при $\hbar = 1$ квантования по В.Г. Дринфельду скрученной бисупералгебры Ли полиномиальных петель $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$ и описываем полученный объект в терминах аналогов образующих Картана-Вейля. Мы также вводим токовую систему образующих и соотношений, которая является аналогом "новой"системы образующих, введённой В.Г.Дринфельдом для янгианов простых алгебр Ли. Мы такую систему образующих называем токовой. Мы доказываем важную теорему об эквивалентности токовой системы образующих и определяющих соотношений исходной системе образующих и определяющих соотношений янгиана, которая получается при специализации квантования. Мы также продолжаем данную токовую систему образующих до корневой системы образующих, составляющих базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Схематично опишем конструкцию корневых векторов для $Y(Q_{n-1})$. Пусть $\Delta_+ = \Delta_+(n-1)$ – множество положительных корней супералгебры Ли $A(n-1,n-1)$. Рассмотрим также множество $\hat{\Delta}_+ = \hat{\Delta}_+(n-1)$ положительных корней аффинной супералгебры Ли $A^{(2)}(n-1,n-1)$ и $\Delta_+^0 = \Delta_+^0(n-1)$ – множество положительных корней простой алгебры Ли $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n)$ (которая совпадает с корневой системой странной супералгебры Ли Q_{n-1}). Идея упорядочения состоит в том, чтобы зафиксировать определяемый ниже порядок на множестве положительных корней скрученной токовой аффинной супералгебры Ли типа $A^{(2)}(n-1,n-1)$. Этот порядок индуцирует порядок на соответствующих корневых образующих. Используя тот факт, что в присоединённой градуированной супералгебре янгиана $Y(Q_{n-1})$ (а также и его квантового дубля) коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями скрученной токовой супералгебры Ли (являющейся подалгеброй скрученной аффинной супералгебры Ли $A^{(2)}(n-1,n-1)$), мы можем определить такой же порядок и на корневых образующих янгиана $Y(Q_{n-1})$ (а также его квантового дубля). Далее фиксируем некоторый выпуклый порядок, сначала на множестве положительных корней. Далее, по индукции, используя коммутационные соотношения определяем корневые векторы и одновременно задаём выпуклый порядок на корневых векторах. Множество упорядоченных таким образом корневых векторов обозначаем через $(\Omega, \prec)$.

Теорема 5.9.1. $(\Omega, \prec)$ – *базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в янгиане* $Y(Q_{n-1})$.

Далее доказывается теорема Пуанкаре-Биркгоф-Витта. При доказательстве линейной независимости элементов базиса Пуанкаре-Биркгоф-Витта используется существенным образом наличие эпиморфизма $Y(Q_n) \to U(Q_n)$ и существование точного представления янгиана $Y(Q_n)$. Полнота легко получается из явной конструкции выпуклого порядка

Далее мы вводим квантовый дубль янгиана странной супералгебры Ли и вычисляем хопфово спаривание для образующих дубля. На основе полученных формул получаем структурную мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы дубля янгиана супералгебры Ли Q_n (не вычисляя точно коэффициенты спаривания в квантовом дубле янгиана). Имеет место следующая структурная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли, формулировка и доказательство которой содержатся в следующих трёх теоремах.

Теорема 5.10.3. Универсальная R-матрица квантового дубля янгиана $DY(Q_n)$ может быть представлена в следующей факторизованной форме:

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes Y_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes Y_+^-$.

Теорема 5.10.4. *Элементы* R_+, R_- *в разложении универсальной* R-*матрицы янгианного дубля* $DY(\mathfrak{g})$ *могут быть представлены в следующей форме*

$$\begin{aligned} R_+ = & \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \\ R_- = & \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \end{aligned}$$

где произведение берётся в соответствии с определённым выше нормальным упорядочиванием $\precneqq_+, \precneqq_-$, которое строится по по корневой системе аффинной супералгебры Ли $A(n,n)^{(2)}$. Кроме того это упорядочивание является выпуклым порядком.

Теорема 5.10.5.

$$R_0 = R_0^{even} R_0^{odd} =$$
$$\prod_{n\geq 0} \exp \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{k\geq 0} ((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji} (T^{-\frac{1}{2}}) (\phi_j^-(v+(n+\tfrac{1}{2}) l(A_n)))_{-k-1} \cdot$$
$$\prod_{n\geq 0} \exp \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{k\geq 0} ((\hat{\phi}_i^+(u))')_k \otimes \tilde{c}_{ji} (T^{-\frac{1}{2}}) (\hat{\phi}_j^-(v+(n+\tfrac{1}{2}) l(A_n)))_{-k-1}. \quad (1)$$

Глава 6.

В главе 6 исследуются квантовые аффинные алгебры (см. также [19], [25] из списка публикаций). В первом параграфе излагаются, в основном, результаты работы [19], которая послужила основой дальнейших исследований автора, а также некоторые несложные её обобщения. В этой работе были развит метод нахождения универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры, основанный на конструкции выпуклых базисов, которые в свою очередь строятся при помощи квантовой аффинной группы Вейля, также впервые введённой в этой работе. Эта работа и послужила источником идей нахождения мультипликативных формул для квантовых дублей янгианов базисных и странной супералгебр Ли, полученных в данной диссертации.

В главе определяется квантовая аффинная группа Вейля, которая порождается следующими автоморфизмами. Пусть

$$ad_{q,a}(\cdot) = \Delta(a) \circ (\cdot),$$
$$ad'_{q,a}(\cdot) = \Delta^{op}(a) \circ (\cdot),$$

где Δ^{op} – противоположное коумножение, а значок $\circ$, введенный В.Г. Дринфельдом, обозначает следующую операцию:

$$(a \otimes b) \circ x := a \cdot x \cdot S(b), \quad (2)$$

где S – антипод в $U_q(A_1^{(1)})$.

Определим автоморфизмы T_i алгебры $U_q(A_1^{(1)})$ следующими формулами на образующих алгебры.

$$
\begin{gathered}
T_i(E_i) = -q^{-h_i} \cdot F_i, \\
T_i(F_i) = -E_i \cdot q^{h_i}, \\
T_i(h_i) = -h_i, \\
T_i(h_j) = h_i + 2H_j, i \neq j, \\
T_i(E_j) = q^{-3} \cdot [2]_q^{-1} \cdot ad^2_{q,E_i}(E_j), i \neq j, \\
T_i^{-1}(E_j) = q^{-1} \cdot [2]_q^{-1} \cdot ad^2_{q^{-1},E_i}(E_j), i \neq j, \\
T_i(F_j) = q^{-1} \cdot [2]_q^{-1} \cdot (ad'_{q^{-1},F_i})^2(F_j), i \neq j, \\
T_i^{-1}(F_j) = q \cdot [2]_q^{-1} \cdot (ad'_{q^{-1},F_i})^2(F_j), i \neq j.
\end{gathered}
$$

Здесь, как обычно, $[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$.

Предложение 6.2.1. *Автоморфизмы $T_i, T_i^{-1}, i = 0, 1, id$ порождают подалгебру в алгебре всех автоморфизмов, в которой как в векторном пространстве они образуют базис.*

Введённые выше автоморфизмы играют важную роль при определении корневой системы образующих и доказательстве теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Также существенным образом они используются и при выводе мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы.

Основной результат первого параграфа следующая теорема.

Теорема 6.2.1. *1. Универсальная R-матрица дубля может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in U_+^+ \otimes U_-^-, R_0 \in U_0^+ \otimes U_0^-, R_- \in U_-^+ \otimes U_+^-$.
2.Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
\langle e_{\beta_0}^{n_0} e_{\beta_1}^{n_1} \ldots e_{\beta_k}^{n_k}, e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} \ldots e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \rangle = \\
(-1)^{n_0+\ldots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \ldots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \ldots n_k!;
\end{gathered}
$$

3. Имеет место следующая формула для универсальной R-матрицы:

$$R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \exp_{q_\alpha^{-2}}(c_\alpha(q) E_\alpha \otimes F_\alpha) q^{\mathfrak{t}_0}. \tag{3}$$

Здесь $c_\alpha(q) = 1 - q_\alpha^{-2}$, Δ_+ *– множество положительных корней,* $\mathfrak{t}_0$ *– тензор, соответствующий инвариантному скалярному произведению на картановской подалгебре,*

$$\exp_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_t!},$$

а $(n)_t! = (1)_t \cdot (2)_t \dots (n)_t, (m)_t = \dfrac{t^m - 1}{t - 1}$.

Из этой теоремы как образ универсальной R-матрицы в двумерном представлении π получается формула для квантовой тригонометрической R-матрицы с параметром, хорошо известная математическим физикам.

$$R_\pi(\lambda) = A(q,\lambda) \cdot$$
$$[q^{1/2} E_{11} \otimes E_{11} + q^{1/2} E_{22} \otimes E_{22} + \frac{(1-\lambda^2) q^{-1/2}}{1 - \lambda^2 q^{-2}} (E_{11} \otimes E_{22} + E_{22} \otimes E_{11})$$
$$+ \frac{(1-\lambda^{-2}) q^{1/2}}{1 - \lambda^2 q^{-2}} (E_{11} \otimes E_{22} + E_{22} \otimes E_{11})].$$

Отметим, что в квазиклассическом пределе мы получаем, что

$$A(q,\lambda) = 1 + \frac{\hbar}{2} \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} + O(\hbar^2),$$

где $\hbar = 2 \ln q \to 0$.

Следовательно, в квазиклассическом пределе получаем следующую формулу, согласующуюся с хорошо известной формулой для классической r-матрицы

$$R_\pi(\lambda) = I \otimes I + \hbar r_\pi(\lambda) + O(\hbar^2),$$

где $r_\pi(\lambda)$ – хорошо известная, классическая матрица.

В параграфе 2 рассмотрена связь между янгианами и квантовыми аффинными (супер)алгебрами. Будем обозначать через $L\mathfrak{g}$ алгебру Ли (лорановских полиномиальных) петель со значениями в простой алгебре (базисной супералгебре) Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что это просто аффинная (супер)алгебра Каца-Муди без центрального элемента и градуировочного элемента d, задающего дифференцирование. Строится гомоморфизм квантовой (супер)алгебры токов $U_\hbar(L\mathfrak{g})$ на квантовую (супер)алгебру $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ из которой янгиан $Y(\mathfrak{g})$ получается специализацией при $\hbar = 1$. При построении мы ограничиваемся рассмотрением частного случая базисной супералгебры Ли типа $A(m,n)$, то есть мы будем предполагать, что $\mathfrak{g}$ либо простая алгебра Ли, либо $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Построение этого гомоморфизма основано на описании квантовых аффинных алгебр (супералгебр) и янгианов в терминах производящих функций образующих. Пусть $\{1, 2, \ldots, m, \ldots m+n-1\}$. Это множество мы будем отождествлять с множеством простых корней $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots \alpha_{m+n-1}\}$ базисной супералгебры Ли, причём, мы будем предполагать, что α_m – нечётный корень, то есть будем иметь дело с выделенной системой простых корней базисной супералгебры Ли $A(m,n)$.

Пусть $\{E_{i,r}, F_{i,r}, H_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}}$ – токовые образующие квантовой аффинной алгебры $U_\hbar((L\mathfrak{g})$, а $\{e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}\}_{i\in I, k\in\mathbb{Z}_+}$ – образующие янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$. Определим отображение

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}), \tag{4}$$

на образующих следующими формулами:

$$\Phi(H_{i,r}) = \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \textstyle\sum_{k\geq 0} t_{i,k} \frac{r^k}{k!},$$
$$\Phi(E_{i,r}) = e^{r\sigma_i^+} \textstyle\sum_{m\geq 0} g_{i,m}^+ e_{i,m},$$
$$\Phi(F_{i,r}) = e^{r\sigma_i^-} \textstyle\sum_{m\geq 0} g_{i,m}^- f_{i,m}.$$

В этой главе, мы используем следующие обозначения: $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$ – элементы симметризующей матрицы для матрицы Картана (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Мы используем систему логарифмических образующих $\{t_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$ коммутативной подалгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{g})$ порождённую элементами $\{h_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$, аналогичную системе, логарифмических картановских образующих, ранее использованных для янгиана. Эти логарифмические образующие для квантованной универсальной обёртывающей супералгебры определяются следующим равенством для порождающих функций:

$$\hbar \sum_{r\geq 0} t_{i,r} u^{-r-1} = \log(1 + \sum_{r\geq 0} h_{i,r} u^{-r-1}). \tag{5}$$

Элементы $\{g_{i,m}^\pm\}_{i\in I, m\in\mathbb{N}}$ лежат в пополнении алгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h})$ и определяются следующим образом. Рассмотрим следующий формальный степенной ряд:

$$G(v) = \log\left(\frac{v}{e^{v/2} - e^{v/2}}\right) \in Q[[v]]$$

и определим $\gamma_i \in \hat{Y^0}[v]$ формулой:

$$\gamma_i(v) = \hbar \sum_{r\geq 0} \frac{t_{i,r}}{r!} \left(-\frac{d}{dv}\right)^{r+1} G(v).$$

Тогда,

$$\sum_{m\geq 0} g^{\pm}_{i,m} v^m = \left(\frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\gamma_i(v)}{2}\right).$$

Окончательно, $\sigma_i^{\pm}$ – это гомоморфизмы подсупералгебр

$$\sigma_i^{\pm} : Y_\hbar(\mathfrak{b}_\pm)(\subset Y_\hbar(\mathfrak{g})) \to Y_\hbar(\mathfrak{b}_\pm),$$

которые задаются на образующих $\{h_{i,r}, e_{i,r}, f_{i,r}\}$ следующим образом. Они оставляют неподвижными образующие $h_{i,k}$, а на остальные образующие действуют сдвигами: $\sigma_i^+ : e_{j,r} \to e_{j,r+\delta_{ij}}$, $\sigma_i^- : f_{j,r} \to f_{j,r+\delta_{ij}}$. Эти гомоморфизмы являются небольшой модификацией рассмотренных ранее гомоморфизмов T_λ.

Основной результат параграфа состоит в том, что это отображение может быть продолжено до изоморфизма топологических пополнений.

Теорема 6.5.1. *Отображение*

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}),$$

однозначно определяется заданием на образующих и является гомоморфизмом ассоциативных алгебр.
2) Отображение Φ единственным образом может быть продолжено до гомоморфизма топологических пополнений:

$$\hat{\Phi} : \widehat{U_\hbar(L\mathfrak{g})} \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})},$$

причём отображение $\hat{\Phi}$ является изоморфизмом топологических ассоциативных (супер)алгебр.

Приложение.

Приложение содержит результаты, являющиеся естественным продолжением и обобщением результатов главы 5. Здесь рассматривается общая конструкция квантования скрученной суперaлгебры Ли полиномиальных токов со значениями в базисной суперaлгебре Ли и скручиванием, порождённым диаграммным автоморфизмом, которая была введена в работах [9], [23] из списка публикаций автора по теме диссертации. В этом случае, вообще говоря, в отличии от частного случая, рассмотренного в главе 5, суперaлгебра Ли токов не является косуперaлгеброй Ли, а лишь комодулем над нескрученной суперaлгеброй Ли токов. Мы обобщаем конструкцию квантования бисуперaлгебры Ли, рассмотренную выше на случай квантования пары – бисуперaлгебры Ли и комодульной суперaлгебры (то есть суперaлгебры Ли и комодуля). Это довольно общая конструкция, как нам кажется может быть полезна при рассмотрении точно решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля с граничными условиями. Отметим, что в случае когда комодульная суперaлгебра превращается бисуперaлгебру эта общая конструкция превращается в квантование, рассмотренное в главе 5. Следует также отметить, что близкая по духу конструкция появилась ранее в работах Г.Ольшанского, М. Назарова, А. Молева (см., например, обзор [16]), в которых были введены так называемые скрученные янгианы, которые не являются алгебрами Хопфа, но наделены структурой комодуля. При их введении был использован подход Решетихина-Тахтаджяна-Фаддеева (РТФ-подход) в теории янгианов, двойственный подходу В.Г. Дринфельда. Но эти авторы использовали автоморфизмы, связанные с полной линейной алгеброй. Мы вводим аналогичные объекты используя подход В.Г. Дринфельда и диаграммные автоморфизмы для произвольной базисной суперaлгебры Ли. Следует также сказать, что явное построение изоморфизма между объектами полученными на основе этих двух подходов является нетривиальной задачей основанной на треугольном (или гауссовском) разложении. Отметим, что подход Дринфельда, являющийся более общим позволяет распространить данную конструкцию на янгианы исключительных алгебр Ли.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Определён янгиан Дринфельда специальной линейной суперaлгебры Ли. Дано его описание в терминах аналог "новой"системы образующих Дринфельда.

2. Введены янгианы Дринфельда базисных суперaлгебр Ли (суперянгианы), как квантования бисуперaлгебр Ли. Получено их описание в терминах токовых систем образующих и порождающих соотношений.

2. Определён янгиан Дринфельда странной суперaлгебры Ли как квантование скрученной бисуперaлгебры Ли. Получено его описание в терминах токовых образующих и соотношений.

3. Доказаны теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для суперянгианов.

4. Получены описания квантовых дублей суперянгианов в терминах образующих и порождающих соотношений.

5. Получены мультипликативные формулы для универсальных R-матриц

[16] Молев А.И., Назаров М.Л., Ольшанский Г.И., Янгианы и классические алгебры Ли. – *Успехи математических наук* – 1996. – Т. 51(308), no 2. – С.27 – 104.

янгиана специальной линейной супералагебр Ли и его квантового дубля.
6. Получены мультипликативные формулы для универсальных R-матриц янгианов базисных супералгебр Ли и их квантовых дублей.
7. Доказана теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли типов $A(m,n), m \neq n$ и $A(n,n)$.
8. Получена мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантвого дубля странной супералгебры Ли.
9. Получена мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантовой аффинной (супер)алгебры.
10. Введена квантовая аффинная группа Вейля.
11. Построен изоморфизм пополнения квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли в пополнение квантовой аффинной супералгебры Ли типа $A^{(1)}(n,m)$.

Построены основы теории янгианов супералгебр Ли классического типа.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1]Стукопин В.А. О янгианах супералгебр Ли типа A(m,n). - *Функцион. анализ и его прилож.*, **28**, no. 3 (1994), 85 - 90.

[2]Стукопин В.А. О квантовании некоторых псевдотреугольных супербиалгебр Ли, связанных с рациональными решениями уравнения Янга-Бакстера. - *Интегро-дифференциальные операторы и их прилож.*, выпуск **4**(1999), 73 - 78.

[3]Стукопин В.А. О новой системе образующих янгианов классических супералгебр Ли. -*Интегро-дифференциальные операторы и их прилож.*, выпуск **5**(2001), 111 - 120.

[4]Стукопин В.А. О янгианах супералгебр Ли: системы образующих и соотношений, PBW-теорема. - *Деп. в ВИНИТИ 22.01.2002, No 111*, 2002, 18с.

[5]Стукопин В.А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа A(m,n) и вычисление универсальной R-матрицы - *Фундамент. и прикладная*

математика, **Т.11**, No. 2 (2005), 185 - 208.

[6]Стукопин В.А. Янгианы базисных супералгебр Ли их квантовые дубли. - *Известия вузов. Сев.-Кав. науч. центр. Спец. выпуск*,(2005), 217 - 219.

[7]Стукопин В.А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа A(m,n). - *Функцион. анализ и его прилож.*, **40**, No. 2 (2006).

[8]Стукопин В.А., Янгиан "странной"супералгебры Ли Q_{n-1}. - *Известия вузов. Сев.-Кав. науч. центр. Естеств. науки*, No. 2 (2006), 22 - 27.

[9]Стукопин В.А., Скрученные янгианы, подход Дринфельда. - *Современная математика и её приложения*, т. **60**(2008), с.145-162 .

[10]Стукопин В.А. О квантовании скрученных алгебр токов. – *Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.*-Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.-С. 189 - 196.-(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. **1**).