ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Стукопин Владимир Алексеевич

ЯНГИАНЫ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
профессор
доктор физ.-мат. наук Э.Б.Винберг

Ростов-на-Дону — 2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

0.1 Введение

Данная работа посвящена построению начал теории янгианов супералгебр Ли классического типа. Задача суперсимметризации теории квантовых групп, построенной В.Г. Дринфельдом в середине 80-х годов XX века, имеет важное значение, как для фундаментальной математики, так и для математической и фундаментальной физики. В данной работе мы пытаемся развить такую теорию в частном случае янгианов – квантовых алгебр, связанных с рациональными решениями квантового уравнения Янга-Бакстера. В работе определяются янгианы базисных супералгебр Ли как квантования бисупералгебр Ли полиномиальных токов со значениями в базисных супералгебрах Ли. Для них вводятся токовые системы образующих и определяющих соотношений, аналогичные новой системе образующих и соотношений В.Г. Дринфельда, определяются корневые образующие, строится базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта, доказывается теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Вводится квантовый дубль. В случае супералгебры Ли типа $A(m, n)$ вычисляется мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля. Также вычисляется мультипликативная формула и для универсальной R-матрицы янгиана. В общем случае янгиана базисной супералгебры Ли получены структурные формулы для универсальной R-матрицы квантового дубля. Исследованы также представления янгианов супералгебр Ли типа $A(m, n)$. Получена теорема о классификации неприводимых конечномерных представлений янгианов супералгебр Ли этого типа. Определён янгиан странной супералгебры Ли, как квантование скрученной бисупералгебры Ли токов со значениями в супералгебре Ли типа $A(n, n)$. Для янгиана странной супералгебры Ли также вводится аналог новой системы образующих В.Г. Дринфельда, определяются корневые образующие и доказывается теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта, описывается квантовый дубль в терминах образующих и определяющих соотношений. На основе полученных результатов выводится формула для универсальной R-матрицы квантового дубля. Введены скрученные янгианы – квантования скрученных алгебр токов со значениями в базисных супералгебрах Ли. Доказаны существование и единственность квантования. В некоторых частных случаях получено описание скрученных янгианов в терминах образующих и соотношений. Исследованы также квантованные универсальный обёртывающие нескрученных аффинных алгебр Каца-Муди. Получена мультипликативная формула для квантовой аффинной алгебры $A_n^{(1)}$. Описана квантованная универсальная обёртывающая аффинной специальной линейной супералгебры (квантовая аффинная специальная линейная супералгебра). Исследована связь между квантовыми аффинными специальными линейными супералгебрами и янгианами базисных супералгебр Ли типа $A(m, n)$.

Следует сказать, что янгианы наряду с квантовыми аффинными алгебрами являются наиболее важными для современной математической физики примерами квантовых алгебр. Теория квантовых алгебр насчитывает уже почти тридцатилетнюю историю, начавшуюся с работ В.Г.Дринфельда и М. Джимбо середины 80-х годов прошлого века (см. [120], [24], [25], [26], [27], [169], [170]). Следует отметить и появившуюся в тоже время работу [49] Е.К. Склянина в которой, по существу, была введена система образующих и определяющих соотношений для квантовой группы $SL(2)$. В работах В.Г. Дринфельда было наиболее полно получено алгебраическое объяснение методов исследования задач статистической механики и квантовой теории поля, развитых Р. Бакстером (см. [2]), а также Л.Д. Фаддеевым и его сотрудниками: Л.А. Тахтаджяном, Е.К. Скляниным, Н.Ю. Решетихиным, П. П. Кулишом (см., например, [50], [77]) в 70-х и 80-х годах XX века. Следует сказать, что эти работы, в свою очередь развивали методы ещё раньше использованные Г. Бёте, Л. Онсагером, C.N. Yang, C.P. Yang, Э. Либом, Сазерлендом и другими в 30-60-е годы 20 века и получившие название "координатный анзатц Бёте". Тут следует сказать, что такое появление новых задач алгебры является довольно типичным. Можно напомнить, что теория Галуа возникла в результате попыток объяснить невозможность выражения корней произвольного алгебраического уравнения через коэффициенты при помощи таких допустимых операций как алгебраические операция сложения умножения, возведения в степень, а также обратные к ним (включая взятие радикалов). Аналогично, теория С. Ли возникла в результате попыток объяснить интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. Такого рода примеры можно продолжить. Теория квантовых групп появилась таким же образом. Математические физики ленинградской школы: Л.Д. Фаддеев, Л.А. Тахтаджян, Е.К. Склянин, П.П. Кулиш, В.Е. Корепин, Н.Ю. Решетихин, А.Н. Кириллов и др., основываясь на более раннем подходе Р. Бакстера, к 80-м годам XX века развили для квантовых интегрируемых моделей некоторые общие методы исследования, природа которых тогда казалась загадочной. При этом была видна аналогия с методами, используемыми при изучении интегрируемых классических моделей, таких как уравнение Кортевега-де Фриза и модель нелинейного уравнения Шрёдингера, которые появились несколько ранее – в конце 60-х, начале 70-х годов XX века (см., например, монографию [15], в которой эта аналогия отражена наиболее полно, а также приведена подробная бибилиография). Развитый школой Л.Д. Фаддеева метод исследования был назван тогда квантовый метод обратной задачи рассеяния. Одним из важных технических средств этого метода были, так называемые квантовые R-матрицы, задающие коммутационные соотношения между локальными наблюдаемыми решёточных систем. Если рассмотреть их квазиклассический аналог – так называемую классическую r-матрицу, то она будет задавать коммутационные соотношения (скобки Пуассона) между между функциями, определяющими физические величины, в соответствующей классической интегрируемой системе. Существует непосредственная связь между классическими r-матрицами и методом одевания Захарова-Шабата исследования классических интегрируемых систем, появившимся несколько ранее. Осмысливая приведённые выше факты, В.Г. Дринфельд понял, что в основе методов исследования квантовых точно решаемых моделей лежит структура квазитреугольной алгебры Хопфа, определяющая квантовую R-матрицу, которая задаёт коммутационные соотношения в трансфер-матрице, которая в свою очередь определяет квантовые интегралы движения. Эта схема аналогична схеме исследования интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, таких как уравнение Кортевега-де Фриза и нелинейное уравнение Шрёдингера, теория которых, как отмечено выше, была развита несколько ранее. Отличие состоит в том, что в классическом случае начинают со структуры либо универсальной обёртывающей алгебры Каца-Муди, (либо группы Ли-Каца-Муди) элементы тензорного квадрата которой и определяют как классическую r-матрицу, так и трансфер-матрицу. Квантовые интегрируемые модели, как правило, являются деформациями соответствующих классических моделей. Но, раньше считалась, что при этом структура группы симметрий не деформируется, но остаётся неизменной. В. Г. Дринфельд объяснил, что это не всегда так. В методах, основанных на использовании квантовой R-матрицы, при исследовании моделей статистической механики и квантовой теории поля, можно считать, что используемая там квантовая R-матрица является деформацией классической r-матрицы соответствующей классической интегрируемой системы ([15]). Таким образом, структура алгебры Хопфа является деформацией или квантованием группы симметрий (являющейся коммутативной алгеброй Хопфа) исходной классической системы. В силу этого В.Г. Дринфельд назвал алгебры Хопфа, возникающие в связи с квантовыми интегрируемыми моделями, квантовыми группами. Как правило эти алгебры Хопфа возникают как деформации биалгебр Ли или, что тоже самое, их универсальных обёртывающих алгебр. В настоящее время чаще используют для обозначения деформированных универсальных обёртывающих алгебр Ли термин "квантовые алгебры"называя квантовыми группами, двойственные квантовым алгебрам, объекты, являющиеся деформациями алгебр функций на группах Ли. Этой терминологии мы будем придерживаться.

За прошедшее после их возникновения время, квантовые алгебры нашли приложения при решении многих задач, возникающих как в фундаментальной математике: теория представлений бесконечномерных групп([220]), теория узлов, алгебраическая геометрия (гипотезы Ленглендса, в частности геометрическая двойственность Ленглендса (см. [133], [137]), алгебраическая K-теория, полиномы Каждана-Люстига и многое другое, см. также, [147], [148], [149] и многие другие работы), задачи комбинаторики (q-ряды, q-последовательности), алгебра и теория чисел (конечные поля и функциональные поля), математические методы квантовой теории поля (см., например, [134], [135]) и т.д., так и в различного рода приложениях, в основном в теоретической и математической физике: интегрируемые задачи квантовой теории поля (см. [9], [47], [50], [77], [100], [195], [213], [215], [246], [261], [264]), статистическая механика ([9]), теория струн (см., например, [92], [93], [112], [117], [118], [152], [153], [277], [278]). В теории представлений алгебр Ли янгианы могут быть использованы для описания центра универсальной обёртывающей алгебры бесконечномерной алгебры Ли классической серии (индуктивного предела простых алгебр Ли). В работах Г.Ольшанского, А. Молева они использовались при построении элементов центра – операторов Лапласа ([40], [232]). Теория представлений янгианов и рациональные квантовые R-матрицы используются в теории киральных моделей, при описании симметрий в массивных моделях квантовой теории поля ([87], [100]). Тесно связана теория квантовых алгебр с теорией алгебраических групп и теорией групп и алгебр Ли, испытывая влияние на себя этих дисциплин и сама, в определенной степени, влияет на них. В настоящее время методы, возникшие в теории квантовых групп, получили глубокое обобщение в теории деформационного квантования и вместе с методами алгебраической геометрии используются при исследовании сложных задач квантовой теории суперструн (см., например, [192], [193], [194], [212]). Таким образом, суммируя сказанное выше, теория квантовых алгебр возникла как результат алгебраического объяснения В.Г. Дринфельдом определённых методов решения интегрируемых моделей квантовой теории поля и статистической физики, в первую очередь квантового метода обратной задачи рассеяния (или, как сейчас говорят, алгебраического анзатца Бете) и превратилась в настоящее время в самостоятельную область фундаментальной математики, имеющую многочисленные связи с другими частями математики, а также разнообразные приложения в фундаментальной физике. Квантовая алгебра (или двойственный объект – квантовая группа) по В.Г. Дринфельду – это квазитреугольная (или как сейчас часто говорят косовая) алгебра Хопфа, структура которой определяет решение квантового уравнения Янга-Бакстера. Следует отметить, что естественное определение квантовых алгебр в рамках алгебраического анзатца Бёте было дано Л.Д. Фаддеевым, Н.Ю. Решетихиным и Л.А. Тахтаджяном, вскоре после пионерских работ В.Г. Дринфельда (см. [42]). Квантовые алгебры, появляющиеся при этом подходе (который мы называем ниже РТФ подходом или FRT подходом) являются двойственными квантовым алгебрам, определяемым в рамках подхода В.Г. Дринфельда, и в этом случае структура алгебры Хопфа определяется решением квантового уравнения Янга-Бакстера. Отметим, что подход В.Г. Дринфельда, как правило, обладает несколько большей общностью, но РТФ подход бывает часто удобным в приложениях к задачам математической физики. Классический объект, соответствующий квантовой алгебре – это биалгебра Ли. Одной из гипотез В.Г. Дринфельда было предположение о взаимно-однозначном соответствии между биалгебрами Ли и квантовыми алгебрами. Это соответствие не только биективно, но и функториально, что и было доказано П. Этингофом и Д. Кажданом (см. [126], [127], [128], [129], [130]). А.А. Белавиным и В. Г. Дринфельдом была получена классификация решений классического уравнения Янга-Бакстера (см. [18]). Эти решения делятся на три класса: тригонометрические, рациональные и эллиптические. Также классифицируются и решения квантового уравнения Янга-Бакстера. Соответствующие этим решениям квантовые алгебры были названы В.Г. Дринфельдом: квантованные универсальные обёртывающие алгебры, янгианы и эллиптические квантовые алгебры. Следует отметить, что аналогичная классификация имеет место и при классификации решений классического уравнения Янга-Бакстера со значениями в супералгебрах Ли (см. [199]). Следует уточнить, что первоначально В.Г. Дринфельд определил янгианы как квантовые алгебры связанные с вполне определенным рациональными решением квантового уравнения Янга-Бакстера, с так называемой квантовой R-матрицей Янга. Мы ниже будем следовать этой терминологии введенной В.Г. Дринфельдом. Главным объектом исследования данной работы является янгиан – квантовая алгебра, связанная с рациональным решением квантового уравнения Янга-Бакстера, именно с решением Янга (матрицей Янга).

Квантованные универсальные обёртывающие были первым примером квантовых алгебр, которые стали исследоваться на начальном этапе развития теории квантовых групп. В пионерских работах В.Г. Дринфельда и М. Джимбо начали изучаться квантованные универсальные обёртывающие простых алгебр Ли. Одна из главных задач, которые тогда стояли, была задача вычисления универсальной R-матрицы. Само понятие универсальной R-матрицы было тогда введено В.Г. Дринфельдом, как элемента тензорного квадрата алгебры Хопфа, сплетающего коумножение и противоположное коумножение. Интерес к этой задаче объяснялся тем, что квантовая R-матрица, играющая важную роль в алгебраическом анзатце Бёте является образом универсальной R-матрицы в тензорном произведении конечномерных представлений алгебры Хопфа. Первая явная формула универсальной R-матрицы для $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ была получена в конце 80-х годов прошлого века самим В.Г.Дринфельдом ([24]). Вскоре в работе М.Россо такая формула была получена для универсальной R-матрицы алгебры $U_q(\mathfrak{sl}(n))$ (см. [242]). В начале 90-х годов в работе Я.С. Сойбельмана и С.З. Левендорского такая формула была получена для квантованной универсальной обёртывающей алгебры произвольной простой алгебры Ли ([38], [203]). Ими же была введена квантовая группа Вейля, представляющая удобный аппарат для естественного определения выпуклых базисов, игравших основную роль в конструировании универсальной R-матрицы ([203]). Но в физических приложениях теории квантовых групп использовались квантовые аффинные алгебры – квантованные универсальные обёртывающие аффинных алгебр Каца-Муди. Тогда важной открытой проблемой была задача получения явной формулы для универсальной R-матрицы в этом важном случае. Такая формула была одновременно получена в работах [204] и [78]. В работе [204] автором вместе с С.Левендорским и Я.Сойбельманом была получена мультипликативная формула для универсальной R-матрицы на основе использования квантовой аффинной группы Вейля. Этот более геометричный подход был развит чуть позднее Дж. Беком (см. [88], [89], [90]). Методы, развитые в упомянутых работах, а также в работах Дж.Люстига, Дж. Бека привели к появлению теории кристаллических базисов ([91], [178]) и далеко продвинуты в настоящее время, в частности появились их обобщения для квантовых супералгебр (см., например, [156], [157], [158], [245]). В тоже время в работах [78], [204] был развит общий подход к вычислению универсальной R-матрицы – объекта, играющего фундаментальную роль в приложениях теории квантовых алгебр в математической и теоретической физике. Дело в том, что и квантовые R-матрицы и L-операторы появляются как образы универсальной

R-матрицы под действием тензорного произведения представлений квантовой алгебры. По определению универсальная R-матрица, это такой элемент пополненного тензорного квадрата алгебры Хопфа, который сплетает коумножение и противоположное коумножение. Задача о получении явных формул для универсальных R-матриц была одной из первых фундаментальных задач теории квантовых групп. Аффинные квантованные универсальные обёртывающие алгебры (квантовые аффинные алгебры) тесно связаны с другим важным для приложений примером квантовых алгебр – янгианами.

Отметим, что теория янгианов стала развиваться, примерно, в то же время, что и теория квантованных универсальных обёртывющих алгебр, то есть, началась с первых работ В.Г. Дринфельда (и даже, строго говоря, несколько раньше, с работ В.О. Тарасова, в которых были исследованы неприводимые представления янгиана алгебры $\mathfrak{gl}(2)$). Но в целом, янгианы были в то время гораздо менее изученным объектом по сравнению с квантованными универсальными обёртывющими алгебрами. Следует также отметить, что теория янгианов в то время представлялась более интересной и своеобразной по сравнению не только с теорий алгебр Ли и их универсальных обёртывающих алгебр, но и по сравнению с теорией квантованных универсальных обёртывающих алгебр. Необычной выглядела теория представлений янгианов. В последнее время, правда, были обнаружены глубокие связи между квантовыми аффинными алгебрами и янгианами, позволяющая сводить некоторые задачи относящиеся к теории янгианов, к соответствующим задачам теории квантовых аффинных алгебр. Особенно сложной тогда представлялась задача нахождения формулы для универсальной R-матрицы янгиана, определённой В.Г. Дринфельдом ([120]). Попытки найти такую формулу, используя метод М.Джимбо, использованный им для нахождения квантовых R-матриц квантованных универсальных обёртывающих аффинных алгебр, приводил к мало обозримой бесконечной системе уравнений. Первые общие фундаментальные результаты в теории янгианов были получены В.Г. Дринфельдом (но важные результаты для янгианов общей линейной алгебры были получены ещё раньше, как отмечно выше, В.О. Тарасовым). В.Г. Дринфельд описал янгиан в терминах нескольких эквивалентных систем образующих и порождающих соотношений и объяснил их связь с квантовыми аффинными алгебрами. Он также получил первые фундаментальные результаты в теории представлений янгианов: им был доказан критерий конечномерности неприводимого представления, а также получено обобщение двойственности Шура-Вейля на представления янгианов и вырожденных аффинных алгебр Гекке. Но как отмечено выше, первые результаты по теории представлений янгианов были получены всё-таки В.О. Тарасовым в середине 80-х годов прошлого века (см. [75], [76]) ещё до появления самого термина янгиан, который вскоре после этого был введён В.Г. Дринфельдом. В.О. Тарасов получил описание всех конечномерных неприводимых представлений янгиана общей линейной алгебры $\mathfrak{gl}(2)$. Правда В.О. Тарасов использовал другое, чем В.Г. Дринфельд, определение янгиана, эквивалентность которого определению Дринфельда, нетривиальная задача, решённая В.Г. Дринфельдом, которым был явно построен изоморфизм между этими двумя реализациями янгиана полной линейной алгебры Ли. Позднее теория янгианов в рамках подхода В.Г. Дринфельда развивалась в работах А. Прессли и В. Чари (см. [106], [107], [108]), в которых помимо прочего были заложены основы теории характеров представлений янгиана $Y(\mathfrak{sl}(2))$. Следует сказать, что чуть позднее альтернативный подход к теории янгианов (так называемая централизаторная конструкция янгиана) стал развиваться в работах Г.И. Ольшанского, М.Л. Назарова и А.И. Молева. В последние годы в работах А.И. Молева этот подход был далеко развит.

В середине 90-х годов автор описал янгиан супералгебры Ли $A(m,n)$ как деформацию бисупералгебры Ли полиномиальных токов со значениями в этой супералгебре Ли и со структурой бисупералгебры Ли, задаваемой матрицей Янга ([54]). Вероятно, это была первая работа, в которой определялся янгиан супералгебры Ли в духе подхода В.Г. Дринфельда. Главным результатом той работы было описание янгиана в терминах токовой системы образующих и соотношений, которую сам В.Г. Дринфельд в применении к янгианам простых алгебр Ли, называл новой системой образующих. Не менее важной была и сформулированная там же теорема о существовании и единственности универсальной R-матрицы для янгиана $A(m, n)$. Теория представлений янгианов супералгебр Ли начала развиваться относительно недавно в работах М. Назарова, А. Сергеева, А.Молева, Э. Рагусси, Д.Арнаудона, П. Сорба, Л. Фраппата, Р. Жанга, автора и других (см. [80], [228], [230], [274], [275], [250], [69]).

Как ни странно, более понятным по отношению к его структуре, объектом по сравнению с янгианом, оказался квантовый дубль янгиана (янгианный дубль), исследованный подробно С.М. Хорошкиным, В.Н. Толстым (см. [187]). Идея использовать квантовый дубль, вероятно, восходит к В.Г. Дринфельду, как и первые вычисления в этом направлении (см. [26]. Но первые законченные результаты для квантового дубля янгиана, как и формула универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана были впервые получены С.М. Хорошкиным и В.Н. Толстым (см. [187]). Они заметили, что при вычислении универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана можно использовать конструкции, применявшиеся при вычислении универсальной R-матрицы квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры. Структура квантового дубля рассматривалась и для янгианов супералгебр Ли (см. [276], [59], [61], [60], [253]).

Тут следует отметить, что теория янгианов простых алгебр Ли к настоящему времени является достаточно продвинутой. Развита теория представлений янгианов (см. [107], [108], [216], [14]). Следует сказать также, что наиболее развитой частью теории представлений янгианов является теория представлений янгиана полной линейной алгебры Ли, а также скрученных янгианов, введённых Г.И. Ольшанским и интенсивно исследовавшихся М.Л. Назаровым и А.И. Молевым. Достаточно полное представление о развитии этой теории на современном этапе даёт монография [14]. Значительное развитие эта теория получила в работах М.Л. Назарова, С.М. Хорошкина, Э.Б. Винберга (см. [182], [183], [184], [185], [186], [39]). В этих работах намечены подходы к решению важнейшей задачи теории представлений янгианов – построению теории характеров. Теория янгианов простых алгебр Ли начала развиваться начиная с классических работ В.Г. Дринфельда [120], [25], [30]. Существует связь между представлениями янгиана специальной линейной алгебры и представлениями вырожденной аффинной алгебры Гекке, обобщающая двойственность Шура-Вейля (см. [84], [85]). Эта связь впоследствии обобщалась и развивалась многими авторами: T. Arakawa, М. Назаровым, В. Гинзбургом, E. Vasserot'ом и многими другими (см., например, [180], [177], [179]). В настоящее время эта двойственность перенесена и на другие янгианы, введённые В.Г. Дринфельдом и отличные от янгиана специальной линейной алгебры Ли. Следует отметить, что существует также глубокая связь между представлениями янгианов и квантовых аффинных алгебр, а также между представлениями последних и представлениями аффинных алгебр Гекке. Эти связи были отчасти прояснены в работах [103], [104], [105]. В этих работах был определён, так называемый, "сдвинутый"(shifted) янгиан и объяснена связь между янгианами и W-алгебрами, важным объектом современной физики (конформной теории поля). Аналоги таких результатов должны иметь место и для янгианов базисных супералгебр Ли.

Следует отметить, что наряду с янгианами стали исследоваться также квантовые дубли янгианов (янгианные дубли), а также их центральные расширения (см. [231], [187], [181], [166], [276]).

С середины 90-х годов прошлого века наряду с янгианами простых алгебр Ли стали изучаться янгианы классических супералгебр Ли (см. [227], [228], [54]). Следует сказать, что само понятие супералгебры Ли появилось в работах Ф.А. Березина в середине 60-х годов XX века и являлось важным примером общего подхода, состоявшего в рассмотрении наряду с функциями от коммутирующих переменных функций от антикоммутирующих (или грассмановых) переменных. Ф.А. Березин пытался при помощи этого подхода обобщать всевозможные алгебраические и геометрические конструкции в математики. Сам он этот подход называл "суперматематикой". Наиболее удачно этот замысел был реализован при обобщении понятия алгебр и групп Ли. В 70-е годы в физике появились теории, называемые теориями суперсимметрии, объединяющие в единую теорию бозоны и фермионы. Была достаточно очевидна возможность использовать при описании таких теорий математические методы суперматематики, развитые ранее Ф.А. Березиным, впрочем и вдохновлённые уже тогда предпринимаемыми попытками объединения бозонов и фермионов в единую теорию поля. Несколько позднее теория супералгебр Ли стал развиваться усилиями как физиков, так и математиков. Поэтому после появления квантовых групп было естественно попытаться построить их обобщения на случай супералгебр Ли. В 90-е годы такие попытки были осуществлены, как было отмечено выше, в работах [227], [228], [54].

В первых двух работах янгианы супералгебр Ли стали изучаться на основе подхода Решетихина-Тахтаджяна-Фаддеева (см. [42]), а в работе автора [54] янгианы супералгебр ли стали исследоваться с использованием подхода В.Г. Дринфельда (см. [120], [24], [25]). В этой работе янгиан определялся как деформация бисупералгебры Ли токов, для него определялись системы образующих и соотношений, аналогичные тем, что В.Г. Дринфельд ввёл для янгианов простых алгебр Ли. Как отмечен выше, в работе [54] был определён янгиан супералгебры Ли типа $A(m, n)$ в рамках подхода В.Г.Дринфельда и там были сформулированы для него теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта (PBW-теорема) и теорема о существовании псевдотреугольной структуры, то есть о существовании универсальной R-матрицы.

После этих работ янгианы супералгебр Ли стали исследоваться всё более расширяющейся группой математиков из разных стран. В работах [274], [275] была развита теория представлений янгиана полной линейной супералгебры Ли. Был установлен критерий конечномерности неприводимого представления янгиана. Исследование основывалось на R-матричных соотношениях для янгиана, то есть использовался подход Фаддева-Решетихина-Тахтаджяна, а в работе [276] развивалась конструкция квантового дубля янгиана в духе работы [187]. Примерно в это же время в работах Д. Бернарда, Ф. Смирнова (см. [100], [246], [197]) была показана возможность использования янгианов при исследовании массивных моделей квантовой теории поля. Потом в пионерских работах Э.Виттена с соавторами янгиан супералгебр Ли стал использоваться как рабочий аппарат квантовой теории суперструн (см. [118], [117]). После этого появилось большое количество работ посвящённых янгианам супералгебр Ли. Следует отметить работы французских и итальянских математиков: Ж. Авана , Е. Рагусси, Н. Крампе, Д. Арнаудона, П. Сорба, Л. Фраппата, австралийского математика Р. Жанга и многих других (см. [80], [81]. [274], [275], [276]), а также работы А.И. Молева (см. [217], [218], [219], [221]). Рассматривались и общие вопросы квантования бисупералгебр Ли, а также построения функтора квантования для супералгебр Ли ([142], [143]).

В последние годы интерес к янгианам супералгебр Ли усилился в связи с приложениями в теории суперструн, суперсимметричных теориях полей Янга-Миллса и суперконформной теории поля (см. [118], [117], [213], [112], [235], [265]). Наиболее важные и интересные приложения янгианов в этой области фундаментальной физики связан с так называемой AdS-гипотезой – гипотезой, выдвинутой Х. Мальдасеной и связывающей теорию замкнутых суперструн на Анти-де-Ситтеровском пространстве и теорию четырёхмерного поля Янга-Миллса (см. [209], [92], [93], [97], [119], [152], [152], [214], [265], [277], [278]). AdS-гипотеза утверждает, что существует точная эквивалентность между четырёхмерной суперсимметричной теорией (полей) Янга-Миллса и теорией суперструн типа IIB на пространстве $AdS_5 \times S^5$, где AdS_5 – пятимерное пространство Анти де Ситтера (аналог гиперболического пространства с метрикой Минковского), а S^5 – пятимерная сфера. Такая связь замечательна тем, что при значениях параметров теории когда одна из этих теорий трудно вычислима, то к другой применимы методы теории возмущений и наоборот. Ещё одна замечательная особенность этой связи состоит в том, что в асимптотическом пределе обе эти эквивалентные теории становятся интегрируемыми. Янгианы специальной супералгебры Ли типа $A(n,n)$ появляются здесь в связи с упомянутой выше интегрируемостью в асимптотическом пределе обеих этих теорий. Исследование членов ряда возмущений S-матрицы, а также корреляционных функций в этом случае сводится, по существу, к исследованию спиновой цепочки в определённых секторах теории. Это исследование может проведено средствами алгебраического анзатца Бёте или средствами теории представлений квантовых алгебр, именно, янгианов. Отметим также, что AdS-гипотеза предполагает наличие двух двойственных симметрий, задаваемых суперконформными группами, которые задаются янгианной симметрией, именно янгианом вещественной формы $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. Именно это, последнее выше упомянутое приложение теории янгианов супералгебр Ли и делает эту теорию столь важной не только для математики, но и для фундаментальной физики. В связи с упомянутыми задачами фундаментальной физики большой интерес представляют точные формул для универсальной R-матрицы янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{psl}(4|4) = A(3,3)$. Важным является также исследование представлений янгианов $Y(\mathfrak{psl}(4|4))$ и $Y(\mathfrak{su}(2,2|4))$, особенно важно в рамках AdS-гипотезы исследование представлений унитарных бесконечномерных представлений упомянутых выше янгианов.

Следует также отметить, что другой стороны в конце 90-х годов появились работы в которых стали изучаться квантования двойных алгебр токов: работы М.Варагноло, Э. Вассерота, В. Гинзбурга, Б. Фейгина и многих других (см. [148], [149], [134], [135]). В этом случае появляется квантовая алгебра, которую можно назвать по аналогии аффинными алгебрами Каца-Муди, аффинным янгианом. Развитая в этом случае теория связывают янгианы, как с алгебраической K-теорией с одной стороны, так и с геометрической двойственностью Ленглендса с другой ([149], см., также, [137], [133]).

Как отмечено выше, понятие янгиана простой алгебры Ли было введено В.Г. Дринфельдом, как квантование биалгебры Ли полиномиальных токов (со значениями в этой простой алгебре Ли) и со структурой коалгебры Ли, задаваемой рациональной r-матрицей (r-матрицей Янга). Но, двойственный к янгиану объект (для полной линейной алгебры Ли $gl(n)$), начал изучаться ранее в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния. В.Г. Дринфельд показал, что он изоморфен янгиану. Во многих работах используется именно такое задание янгиана в терминах образующих, являющихся матричными элементами неприводимых представлений янгиана в смысле В.Г. Дринфельда. Как отмечено выше, эти два языка по существу эквивалентны в случае специальной линейной супералгебры Ли, и их использование диктуется решаемыми задачами. Мы используем подход В.Г. Дринфельда, ввиду его большей общности. Мы также описываем изоморфизм между объектами вводимыми в рамках этих двух подходов в случае янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$.

Целью данной диссертационной работы является построение общей теории янгианов классических супералгебр Ли. В работе вводятся и изучаются как янгианы базисных супералгебр Ли, так и янгианы странной супералгебры Ли типа Q_n. Развивается их структурная теория, исследуются их представления. Также в работе вводятся, так называемые скрученные янгианы ("в смысле Дринфельда"), которые, вообще говоря, не являются супералгебрами Хопфа и обобщают введённые до этого янгианы супералгебр Ли. Опишем главные полученные результаты. Центральные результаты относятся к вычислению универсальной R-матрицы для янгианов супералгебр Ли, а также для квантовой аффинной алгебры. Эти результаты являются решением проблем, поставленных В.Г. Дринфельдом. Следует отметить, что формула для универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры были использованы М. Джимбо и Т. Мива при строгом вычислении корреляционных функций XXZ модели квантового магнетика Гейзенберга и шестивершинных моделях статистической механики.Эти работы признаны выдающимися результатами в области математической физики. Формула для универсальной R-матрицы янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ использовалась рядом авторов (F.Spill, A. Torrielli, N. Beisert, Van de Leew, J. Plefka, J. Polchinsky (Дж. Полчински)) при изучении моделей квантовых теорий суперструн в связи с AdS-гипотезой (см. [235], [92], [94], [152], [153], [277], [278], [265]). В этих работах используется связь между четырёхмерными калибровочными теориями полей Янга-Миллса, квантовой теорией суперструн типа IIB и моделью суперсимметричной спиновой цепочки (см., например, [97], [119], [214], [265]). Точнее существование отображения, переводящего гамильтониан оператора дилатации четырёхмерной теории Янга-Миллса в гамильтониан спиновой цепочки (см. обзор [214] и приведённую там литературу).

Второй цикл результатов относится к классификации конечномерных неприводимых представлений супералгебры Ли типа $A(m,n)$ (случай $m=n$ не исключается). Эти результаты с одной стороны обобщают теорему В.Г. Дринфельда о классификации конечномерных неприводимых представлений янгианов простых алгебр Ли (см. [26]), а с другой стороны являются аналогами для янгианов результатов В.Г. Каца о классификации неприводимых представлений классических супералгебр Ли ([175]). Эти результаты также имеют большое значение для математической и теоретической физики и также могут иметь применение при решении задач в этих областях.

Автору также представляются важными результаты, относящиеся к построению янгианов специальной линейной алгебры Ли, странной супералгебры Ли, а также общая конструкция янгиана базисной супералгебры Ли на основе подхода В.Г. Дринфельда. Это элементы общей теории янгианов супералгебр Ли. Доказанные здесь результаты, такие как конструкции различных систем образующих и соотношений, ПБВ - теоремы позволяют развивать эту теорию дальше. Эти результаты также важны для приложений, особенно в фундаментальной физике.

Возможно найдут применения и скрученные янгианы в смысле В.Г. Дринфельда, определённые и исследованные в диссертационной работе. Результаты, относящиеся к ним также представляются важными (теоремы о существовании и единственности квантования, ПБВ-теорема).

Отметим, что результаты М. Джимбо и Т. Мива по вычислению корреляционных функций получили широкую известность и признание, равно как и работы Х. Мальдасены, Дж. Полчински, Н. Бейсерта по AdS-гипотезе. Следует отметить, что упомянутые физические теории существенным образом используют математический аппарат, развиваемый в данной работе. В этой связи также следует упомянуть ещё таких выдающихся физиков и математических физиков как Э. Виттен и Л.Д. Фаддеев, чьи работы показали возможность использования квантовых алгебр и, в частности янгианов и янгианов супералгебр Ли в современной фундаментальной физике.

Опишем более подробно содержание диссертации. Диссертация состоит из 6 глав и приложения. Первые 5 глав и приложение посвящены янгианам, а последняя 6 глава содержит результаты относящиеся к квантованным аффинным алгебрам. Следует сказать, что многие задачи относящиеся к теории янгианов, сначала рассматривались в теории квантовых аффинных алгебр и исторически были решены именно как задачи теории квантовых аффинных алгебр. Помимо глубокой связи методов, используемых в теории янгианов и в теории квантовых аффинных алгебр существует и глубокая связь между этими объектами, частично отражённая в последнем параграфе данной работы. На наш взгляд совместное рассмотрение этих двух объектов проясняет существо результатов относящихся отдельно к каждому из этих двух классов объектов. В силу этого в данную работу и включена последняя глава, посвящённая квантовым аффинным алгебрам. На наш взгляд, это помимо того, что показывает возможность перенесения результатов с одного класса объектов на другой, позволяет лучше и в большей общности понимать и природу самих результатов. Опишем кратко содержание глав диссертации. Первая глава вводная, в ней собраны вместе общие факты, относящиеся к супералгебрам Хопфа, топологическим супералгебрам, комодульным супералгебрам, квантовым дублям и общим принципам квантования супералгебр Хопфа и комодульных супералгебр. Среди собранных в этой главе результатов есть и оригинальные. Но большая часть определений и результатов приведены здесь для удобства читателя, по той лишь причине, что многие из них не являются на взгляд автора широко известными или для полноты изложения материала. Приведены, в частности, и важные для дальнейшего результаты, полученные другими авторами (например, результаты работ [142], [143], посвящённые построению функтора квантования). Следует отметить, что некоторые из результатов, приведённых в первой главе являются перенесением, иногда несложным, на суперслучай (случай Z_2-градуированных алгебр) известных результатов для обычных ассоциативных алгебр. Такого рода результаты, вообще говоря, могут быть достаточно нетривиальными, и в тех случаях, когда они не были найдены автором в доступной литературе, их формулировки и доказательства приводятся в этой вводной главе. То же относится и к определениям. Во второй главе вместе собраны результаты автора, относящиеся к янгианам супералгебр типа $A(m,n)$, а также $A(n,n)$, полученные автором в разное время. Результаты главы опубликованы в работах [54], [250], [56], [58], [57], [252], [59], [61]). Центральное место здесь занимают теоремы относящиеся к конструкции квантового дубля янгиана, а также результаты о точных мультипликативных формулах для универсальных R-матриц квантового дубля янгиана и самого янгиана.Эти формулы весьма важны для приложений в квантовой теории суперструн. Особенно формула для универсальной R-матрицы квантового дубля. Формула для универсальной R-матрицы янгиана супералгебры Ли $A(m,n)$ относительно просто выводится из соответствующей формулы для квантового дубля янгиана. Отметим, что явных формул для универсальной R-матрицы янгиана в известной автору литературе не было, хотя эта задача достаточно давно была сформулирована В.Г. Дринфельдом. Как следствие, мы также получаем такую формулу и для частного случая янгиана алгебры Ли sl_2. Даже этот частный результат является новым. Результаты, относящиеся к представлениям янгианов вынесены в отдельную главу с таким же названием. Здесь приведены результаты о классификации конечномерных неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли типов $A(m,n), m \neq n$ и $A(n,n)$, полученные автором в работах [250], [65], [66], [67], [69], [71], [256], [258]. Общие результаты о существовании и единственности квантования вынесены во вводную главу. В техническом плане важным является переход к токовой (или по терминологии В.Г. Дринфельда, новой системе образующих и соотношений. Этот переход описан детально, со всеми доказательствами. Приведено также доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта, которая используется при получении формулы для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана, а также при описании представлений янгиана. Развитые в главе методы позволяют получать оценки для размерностей конечномерных неприводимых представлений, а в некоторых частных случаях и значения самих размерностей. В отдельный параграф вынесены результаты о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли типа $A(n,n)$, особенно важные для приложений в квантовой теории суперструн и AdS-гипотезе. В главе 4 рассмотрены результаты, относящиеся к базисным супералгебрам Ли других серий. Основной результат главы – это мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля. В общем случае квантового дубля янгиана базисной супералгебры Ли получена менее детальная формула, чем в главе 2 для квантового дубля янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. План этой главы аналогичен плану предыдущей. Результаты главы опубликованы в работах [250], [60]. В главе 5 рассмотрен янгиан странной супералгебры Ли типа Q_{n-1}. Здесь также описывается токовая система образующих и соотношений. Сформулирована и доказана теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана странной супералгебры Ли. Получено описание квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли. Эта глава, в которой рассмотрен важнейший случай скрученного янгиана (и единственный, когда скрученный янгиан является супералгеброй Хопфа), естественно предваряет общую конструкцию скрученного янгиана, которая рассматривается в приложении. Результаты данной главы опубликованы в следующих работах: [251], [60], [253], [254], [64], [68], [70]. В приложении рассмотрены скрученные янгианы базисных супералгебр Ли – объекта весьма общей природы, которые должны быть связаны с точно решаемыми моделями с граничными условиями. Следует отметить, что скрученные янгианы, вообще говоря, не являются супералгебрами Хопфа, но обладают структурой комодульной супералгебры. Следует сказать, что данные объекты, вероятно обобщают скрученные янгианы введённые ранее Г.И. Ольшанским. Результаты приложения опубликованы в работах [63], [64], [255]. В главе 6 приведены результаты, относящиеся к вычислению универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры, а также описана связь между квантовыми аффинными алгебрами и янгианами, рассмотренными ранее. Центральный результат этой главы – применение квантовой аффинной группы Вейля для получения мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы. Этот результат получен автором диссертации в соавторстве (см. [204]) и принадлежит соавторам в равной мере. В конце главы рассмотрена связь между янгианами и квантовыми аффинными алгебрами. Наличие глубокой аналогии между этими двумя классами квантовых алгебр была известна уже В.Г. Дринфельду, но до уровня строгих теорем об эквивалентности категорий этот интуитивно ясный факт был доведен лишь в самое последнее время. Мы приводим здесь известные результаты и некоторые их уточнения на случай квантовых супералгебр, вероятно понятные специалистам, но формулировки которых в доступной литературе автор не обнаружил.

Перечислим теперь по главам основные полученные результаты. Как отмечено выше, основным результатом второй главы является получение точной формулы для универсальных R-матриц для янгиана и его квантового дубля супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Собственно, решение именно этой задачи имеет важное значение для квантовой теории суперструн (как отмечено выше, особенно, в случае $m = n = 3$) и, вероятно, для теории калибровочных полей Янга-Миллса, в силу AdS-гипотезы. Помимо этого результата во второй главе доказана также теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта, играющую важную роль при построении квантового дубля и вычислении явных формул спаривания между элементами ПБВ базиса квантового дубля янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Там также подробно проведено построение токовой системы образующих, которая играет важнейшую роль во всех последующих главах. Основной результат третьей главы – теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Особенно важен для приложений в квантовой теории суперструн отдельно рассмотренный случай классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана суперאлебры Ли типа $A(n,n)$. При доказательстве этой теоремы проведено, по существу, также построение полиномов Дринфельда, которые и классифицируют конечномерные неприводимые представления янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. В этой главе мы также приводим небольшой список важных,нерешённых задач теории представлений янгианов супералгебр Ли. В четвёртой главе вводится и исследуется янгиан базисной супералгебры Ли, как квантование супералгебры Ли токов со значениями в базисной супералгебре Ли. Основной результат 4 главы – конструкция квантового дубля янгиана базисной супералгебры Ли и структурная формула для универсальной R-матрицы. В 5 главе мы начинаем исследование янгианов странной супералгебры Ли. Основной результат 5 главы – явное описание квантового дубля и формула для универсальной R-матрицы янгиана странной супералгебры Ли. Здесь же мы приводим явное построение янгиана странной супералгебры Ли как квантования скрученной алгебры полиномиальных токов со значениями в супералгебре Ли $A(n,n)$. Мы также явно строим токовую систему образующих и определяющих соотношений. Основной результат 6 главы – мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры. Также в главе 6 описана связь между янгианами супералгебр Ли квантовыми аффинными супералгебрами, точнее получено явное описание изоморфизма между пополнениями квантового дубля янгиана и квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Ли-Каца-Муди. В приложении введены скрученные янгианы базисных супералгебр Ли. Основной результат – теорема о существовании и единственности квантования и явное описание скрученного янгиана в терминах образующих в частных случаях. Главный общий результат диссертации – построение начал теории янгианов супералгебр Ли классического типа в смысле В.Г. Дринфельда. Следует подчеркнуть, что в работе построены основы теории янгианов базисных супералгебр Ли, а окончательное построение такой теории дело будущего, возможно, не столь отдалённого.

Результаты диссертации докладывались на многочисленных семинарах, в том числе неоднократно на заседаниях семинара Э.Б. Винберга в МГУ, семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, семинаре С.П. Новикова (МИАН им. Стеклова и МГУ), в теоретическом отделе ИТЭФ, семинаре лаборатории Боголюбова в ОИЯИ (Дубна), на семинарах отдела "Математический анализ"ЮМИ, семинаре кафедры ТФ и ФА (ЮФУ), заседаниях Ростовского математического общества, на семинарах отдела функционального анализа математического отделения CINVESTAV (Мехико, Мексика). Результаты диссертации также докладывались на многочисленных конференциях и школах по алгебре, интегрируемым системам, квантовым группам, теории представлений, математической физике, алгебраическим группам, функциональному анализу (Черноголовке, Дубне, Праге, Лидсе, Гамбурге, Москве, Санкт-Петербурге, Киеве, Харькове, Владикавказе, Ростове-на-Дону, Воронеже, Самаре, Тамбове, Тольяти). Именно, на международной конференции "Алгебра и анализ"в честь Н.Г. Чеботарёва (Казань, 1994), на школе по интегрируемым системам в 1996 году, проводимой институтом теоретической физики им. Л.Д. Ландау (Черноголовка), конгрессе по прикладной математике в Гамбурге (1995г.), международной конференции "Асимптотическая комбинаторика и её приложения в математической физике"(Санкт-Петербург, институт Эйлера, 2001 год), школе-конференции по интегрируемым системам (г. Лидс, 2002), международной конференции "Симметрия в математической физике"(2003,институт математики НАН, Киев), международной конференции по алгебре (Москва, МГУ, 2004г.), международной конференции имени Петровского (Москва, МГУ, 2006 г.), международной конференции "Алгебра и анализ"в честь 70-летия В.И. Арнольда (Москва, МИАН, 2007 г.), международной конференции "Transformations Groups"(Москва, НМУ, 2007), на школах-конференциях "Алгебраические группы и теория инвариантов"(2009, 2011, 2012, 2014, 2015 годах в Самаре, Москве, Тольятти, Москве и Самаре, соответственно), на международной конференции "Дифференциальные уравнения"(Москва, 2011г.), конференциях "Порядковый, функциональный анализ и дифференциальные уравнения"(Владикавказ, 2008, 2010; Волгодонск, 2011, Владикавказ, 2013), международной конференции "Симметрии в математической физике"(Институт математики НАН, Киев, 2011 год), конференции "Теория групп и её приложения"в честь юбилея З.И. Боревича (Владикавказ, 2012), международной конференции "Классические и квантовые интегрируемые системы"(Дубна, 2012), "Integrable systems and quantum symmetries"(Прага, 2012), на международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"памяти Н.К. Карапетянца (Ростов-на-Дону, 2012, 2013), международной конференции в честь юбилея профессора М.М. Драгилева (Ростов-на-Дону, 2012г.).

Эти результаты опубликованы в следующих работах: [204], [54] –[72], [250], [251], [252], [253], [254], [255], [256], [257], [258]. Из них в ваковский список входят работы: [204], [54], [57], [59], [60], [61], [62], [66], [67], [69], [70], [256], [257], [258].

Работа над задачами, решения которых составляют данную диссертационную работу была поддержана в разное время грантами РФФИ (проекты No 00-01-00868-а Янгианы супералгебр и аффинных алгебр Ли, No 09-01-00671-а Скрученные янгианы супералгебр Ли), ИНТАС (проект INTAS-4-4720), грантом фонда Дж. Сороса, ФЦП "Научные и педагогические кадры России"(в рамках мероприятия 1.2.2 проект № П116 Янгианы супералгебр Ли; в рамках мероприятия 1.1 соглашение № 14.A18.21.0356 Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них).

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность людям, без которых эта работа не была бы написана: Я.С. Сойбельману, Л. Л. Ваксману и В.Г. Дринфельду, учившим меня квантовым группам, а также С.З. Левендорскому, С.М. Хорошкину, Э.Б. Винбергу.

В работе мы будем использовать следующие стандартные обозначения.
Через $\mathbb{N}$ мы будем обозначать множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,
$\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, то есть $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ – множество натуральных чисел и 0,
$\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел,
$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел,
$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел,
$\mathbf{k}$ – произвольное алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики,
$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – множество классов вычетов по модулю n,
$\hbar$ – будет всегда обозначать параметр деформации,
$q = e^{\frac{\hbar}{2}}$, если не оговорено противное,
знак $\square$ обозначает конец доказательства.
Мы также обозначаем через $Mat_n(\mathbf{k})$ алгебру квадратных $n \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbf{k}$,
а через R^* – множество обратимых элементов кольца R,
$\mathfrak{S}_n$ будет обозначать группу перестановок n-элементного множества.

Глава 1

Супералгебры, бисупералгебры Ли, супералгебры Хопфа

1.1 Введение

Как было отмечено выше во введении к работе, В.Г. Дринфельд определил квантовые алгебры просто как алгебры Хопфа, обладающие квазитреугольной структурой. Но, на самом деле, квантовые алгебры во всех случаях появляются как формальные деформации биалгебр Ли. В этой главе, носящей вспомогательный характер мы приводим для удобства читателя, в основном результаты, относящиеся к бисупералгебрам Ли, а также супералгебрам Хопфа, аналоги которых в случае биалгебр Ли и алгебр Хопфа хорошо известны. Следует отметить, что случай супералгебр Хопфа привносит существенные особенности по сравнению со случаем алгебр Хопфа, например, при описании деформаций коммутативных (кокоммутативных) супералгебр Хопфа. Мы ниже опишем некоторые общие приемы описания таких деформаций на примере бисупералгебр Ли, подробно рассматриваемых далее в работе. Отметим, что структуры рассматриваемых ниже бисупералгебр Ли определяются на токовых супералгебрах Ли со значениями в супералгебрах Ли классического типа. Кроме того мы опишем и общие принципы построения формальных деформаций комодулей, которые будут использованы в дальнейших главах. Многие результаты, приводимые в этой главе не являются оригинальными и приведены здесь для удобства читателя.

1.2 Супералгебры Ли классического типа

Для удобства читателя напомним основные факты, относящиеся к теории супералгебр Ли (см. [180], [140]). Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Можно, для простоты (и удобства читателя) ограничиться случаем $\Bbbk = \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, хотя все сформулированные ниже результаты справедливы и для случая произвольного алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ нулевой характеристики.

Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ – векторное суперпространство размерности $(m|n)$ над полем $\Bbbk$, то есть такое $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство, что $dim V_0 = m, dim V_1 = n$. Мы говорим, что степень элемента $a \in V$ равна $i (\in \mathbb{Z}_2)$ (и пишем $p(a) = i$) если $a \in V_i$. Супералгеброй называется произвольная $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра $A = A_0 \oplus A_1$, то есть такая алгебра, что из того, что $a \in A_k, \quad b \in A_l, \qquad k, l \in \mathbb{Z}_2$ вытекает, что $a \cdot b \in A_{k+l}$.

Отметим, что множество линейных операторов $End(V)$, действующих в V превращается в ассоциативную $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру (или, что то-же самое, в супералгебру), если $\mathbb{Z}_2$-градуировку ввести формулой: $(End(V))_k = \{g \in End(V) : gV_i \subset V_{i+k}\}$. Супералгебра (не обязательно ассоциативная) $G = G_0 \oplus G_1$ над полем $\Bbbk$ (или, в частности, над полем $\mathbb{C}$) с произведением $[\cdot,\cdot]$ называется супералгеброй Ли, если произведение удовлетворяет следующим аксиомам:

$$
\begin{aligned}
[\lambda a + b, c] = \lambda[a,c] + [b,c], \quad \forall \lambda \in \Bbbk, \quad \forall a,b,c \in G, \qquad (1.2.1)\\
[a,b] = -(-1)^{kl}[b,a], \qquad (1.2.2)\\
[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{kl}[b,[a,c]], \qquad (1.2.3)\\
a \in G_k, b \in G_l.
\end{aligned}
$$

Произведение в супералгебре Ли обычно называют скобкой или суперкоммутатором.

Произвольная ассоциативная супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ (с произведением – "$\cdot$") может быть превращена в супералгебру Ли, если скобку задать формулой: $[a,b] = a \cdot b - (-1)^{p(a)p(b)} b \cdot a$ на однородных элементах и продолжить по линейности на всю супералгебру. Выберем в суперпространстве $V = V_0 \oplus V_1$ базис $\{e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_{m+n}\}$ так, что векторы $\{e_1, \cdots, e_{m-1}, e_m\}$ образуют базис в V_0, а векторы $\{e_{m+1}, \cdots, e_{m+n}\}$ образуют базис в V_1. Выбор базиса в суперпространстве V задает изоморфизм супералгебры $End(V)$ на супералгебру $\mathfrak{gl}(m,n)$ всех матриц размера $(m+n) \times (m+n)$. Отметим, что это изоморфизм, как в категории ассоциативных супералгебр, так и в категории супералгебр Ли. Супералгебру Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$ называют линейной супералгеброй Ли. Любую матрицу $A \in \mathfrak{gl}(m,n)$ удобно представлять в блочно-диагональном виде: $A = (A_{ij})_{i,j \in Z_2}$, где A_{ij} действует из V_i в V_j. Отметим, что блоки A_{ij} являются однородными элементами, причём чётность блоков определяется формулой: $p(A_{ij}) = i + j$. Таким образом, разложение супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$ на чётную и нечётную части имеет следующий вид:

$$\mathfrak{gl}(m,n) = \mathfrak{gl}(m,n)_0 \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_1,$$

где $\mathfrak{gl}(m,n)_0 = \{A \in \mathfrak{gl}(m,n) : A_{0,1} = A_{1,0} = 0\}$, $\mathfrak{gl}(m,n)_1 = \{A \in \mathfrak{gl}(m,n) : A_{0,0} = A_{1,1} = 0\}$.

В данной работе мы будем иметь дело с классическими супералгебрами Ли (или супералгебрами Ли классического типа). Супералгебра Ли $G = G_0 \oplus G_1$ называется классической, если представление G_0 в G_1 является вполне приводимым. Классические супералгебры Ли делятся на два класса – базисные и странные. Отметим здесь, что базисные супералгебры Ли в большей степени похожи на простые алгебры Ли, поскольку обладают невырожденной инвариантной билинейной формой. Ниже мы опишем примеры таких супералгебр, как базисных, так и странных. После чего приведём их классификацию, впервые полученную в работах [180], [175]. Определим суперслед $str(A)$ матрицы A формулой: $str(A) = tr(A_{00}) - tr(A_{11})$. Пусть $\mathfrak{sl}(m,n) = \{g \in \mathfrak{gl}(m,n) : str(g) = 0\}$ – множество матриц с нулевым суперследом. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{sl}(m,n)$ подсупералгебра Ли супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$. В случае, когда $m \neq n$ $\mathfrak{sl}(m,n)$ является простой супералгеброй Ли, то есть не содержит нетривиальных собственных идеалов. В случае $m = n$ супералгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,n)$ содержит одномерный центр Z, состоящий из скалярных матриц. В этом случае супералгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,n)/Z$ также является простой. Полученные простые супералгебры Ли обозначают через $A(m-1, n-1)$. Пусть $G = G_0 \oplus G_1$ – Z_2-градуированное векторное пространство. Билинейная форма f на G называется суперсимметричной, если $f(a,b) = (-1)^{p(a)p(b)} f(b,a)$ для однородных элементов a, b. Билинейная форма f называется согласованной, если $f(a,b) = 0$ для произвольных $a \in G_0, b \in G_1$. Если G вдобавок наделена структурой супералгебры Ли то билинейная форма f называется инвариантной, если $f([a,b],c) = f(a,[b,c])$. Отметим, что $f(a,b) = str(ab)$ является суперсимметричной, инвариантной, согласованной билинейной формой на $\mathfrak{gl}(m,n)$ (см. [180]). Напомним определение ортосимплектической супералгебры

Ли $\mathfrak{osp}(m,n)$. Рассмотрим матрицу B порядка $m+2n$, определяемую формулой:

$$B=\begin{pmatrix} iE_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $\mathfrak{osp}(m,n)_\alpha = \{g\in\mathfrak{gl}(m,2n) : gB + i^\alpha Bg^T = 0\}, \alpha\in\mathbb{Z}_2$. Тогда $\mathfrak{osp}(m,n) = \mathfrak{osp}(m,n)_0 \oplus \mathfrak{osp}(m,n)_1$ подсуперaлгебра Ли линейной супералгебры Ли. Отметим, что $\mathfrak{osp}(m,n)_0$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & C \\ 0 & D & -B^T \end{pmatrix},$$

где A – кососимметрическая матрица, $C, \quad D$ – симметрические матрицы и B – произвольная матрица. Подсупералгебра $\mathfrak{osp}(m,n)_1$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & X & Y \\ -Y^T & 0 & 0 \\ X^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $X, \quad Y$ произвольные матрицы размера $m\times n$. Положим

$$B(m,n) = \mathfrak{osp}(2m+1,2n), \quad m\geq 0, \quad n>0,$$

$$D(m,n) = \mathfrak{osp}(2m,2n), \quad m\geq 2, \quad n>0, \qquad C(n+1) = \mathfrak{osp}(2,2n), \quad n>0.$$

Отметим, что имеет место и другая реализация $\mathfrak{osp}(m,n)$. Именно, пусть V_0 – m-мерное векторное пространство с симметрической формой $(\cdot,\cdot)_0$ и V_1 – n-мерное векторное пространство с кососимметрической формой $(\cdot,\cdot)_1$, причем обе эти формы билинейны и невырождены (что влечет чётномерность V_1, $n=2k$). Тогда

$$\mathfrak{osp}(m,k)_0 = (\wedge^2 V_0)\oplus(S^2V_1), \quad \mathfrak{osp}(m,k)_1 = V_0\otimes V_1.$$

Все введённые выше супералгебры Ли являются простыми. Это аналоги простых классических алгебр Ли. Помимо них есть еще аналоги исключительных простых алгебр Ли – это супералгебры Ли $F(4)$ и $G(3)$. Есть еще бесконечная серия $D(2,1,\alpha), \alpha\in C\setminus\{0,1\}$. Все описанные выше супералгебры Ли образуют класс так называемых базисных супералгебр Ли, которые выделяются из класса классических супералгебр Ли условием: на них существует невырожденная инвариантная билинейная форма. Выше отмечено, что супералгебра Ли $G=G_0\oplus G_1$ называется классической супералгеброй Ли (или супералгеброй Ли классического типа), если представление G_0 в G_1 вполне приводимо. Известно, что супералгебра Ли является супералгеброй Ли классического типа в том и только том случае когда G_0 – редуктивная алгебра Ли (см. [140]). Классические супералгебры Ли, которые не являются базисными называются странными. Они образуют две серии: P_n, Q_n. Мы чуть позже отдельно рассмотрим супералгебру Ли типа Q_n. Сейчас я напомню определение контрагредиентной супералгебры Ли. Пусть $A=(a_{ij})_{i,j=1}^r$ матрица порядка r с элементами из $\mathbf{k}$, и τ подмножество множества $I=\{1,2,\cdots,r\}$. Обозначим через $\tilde{G}(A,\tau)$ супералгебру Ли с образующими $x_i^+, x_i^-, h_i, i\in I$ и следующими определяющими соотношениями:

$$[h_i,h_j]=0, \tag{1.2.4}$$

$$[h_i,x_j^{\pm}] = \pm a_{ij}x_j^{\pm}, \tag{1.2.5}$$

$$[x_i^+,x_j^-]=\delta_{ij}h_i, \tag{1.2.6}$$

$$p(h_i)=0, \quad p(x_j^{\pm})=0, i\notin\tau; \quad p(x_j^{\pm})=1, i\in\tau.$$

Контрагредиентная супералгебра Ли может быть наделена $\mathbb{Z}-$градуировкой, задаваемой формулами $deg(x_i^+) = -deg(x_i^-) = 1, \quad deg(h_i) = 0, \quad i \in \tau$. Пусть J – максимальный (единственный) $\mathbb{Z}-$градуированный идеал, удовлетворяющий условию

$$J \cap (\tilde{G}(A,\tau)_{-1} \oplus \tilde{G}(A,\tau)_0 \oplus \tilde{G}(A,\tau)_1) = 0.$$

Тогда $\mathbb{Z}-$градуированная супералгебра Ли $G(A,\tau) = (\tilde{G}(A,\tau))/J$ называется контрагредиентной супералгеброй Ли, матрица A называется матрицей Картана супералгебры Ли $G(A,\tau)$, а число r называется рангом $G(A,\tau)$.

Отметим, что все базисные супералгебры Ли являются либо контрагредиентными супералгебрами Ли, либо факторами контрагредиентных супералгебр Ли по их центру.

Предложение 1.2.1. *(см. [180]).*
1) Центр супералгебры Ли $G(A,\tau)$ состоит из элементов $\sum a_i h_i$, где a_i определяется из условия $\sum_i a_{ij} a_i = 0$.
2) Пусть $G(A,\tau)$ конечномерная контрагредиентная супералгебра Ли с центром C. Тогда супералгебра Ли $G(A,\tau)/C$ проста тогда и только тогда когда для произвольных $i,j \in I$ найдется такая последовательность $i_1,\ldots,i_r \in I$, что $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rj} \neq 0$.
3)Пусть $G(A,\tau)$ удовлетворяет условиям пункта 2). Тогда простая супералгебра Ли $G(A,\tau)/C$ является базисной супералгеброй Ли, то есть одной из супералгебр Ли вида:

$$A(m,n), \quad B(m,n), \quad C(n), \quad D(m,n), \quad D(2,1,\alpha), \quad F(4), \quad G(3).$$

Напомним, что матрица Картана, задающая порождающие соотношения, эквивалентна так называемой диаграмме Дынкина. Каждая вершина диаграммы Дынкина соответствует простому корню супералгебры Ли, причем чётным корням соответствуют белые вершины, нечётным простым корням нулевой длины соответствуют серые вершины, а нечётным простым корням ненулевой длины соответствуют черные вершины. Пусть $A^s = (a'_{ij})_{i,j=1}^r, a'_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ – соответствующая симметрическая матрица Картана. Тогда две вершины диаграммы Дынкина соединяются n_{ij} линиями. При этом число линий определяется следующими условиями: $n_{ij} = \dfrac{2|a'_{ij}|}{min(|a'_{ii}|,|a'_{jj}|)}$, если $a'_{ii}a'_{jj} \neq 0$, $n_{ij} = \dfrac{2|a'_{ij}|}{min_{a'_{kk}\neq 0}(|a'_{kk}|)}$, если $a'_{ii} \neq 0, a'_{jj} = 0$, $n_{ij} = a'_{ij}$, если $a'_{ii} = a'_{jj} = 0$. Следует также отметить, что диаграмма Дынкина (как и матрица Картана) супералгебры Ли не определяется однозначно супералгеброй Ли (в отличии от алгебры Ли). Данный факт связан с неоднозначностью выделения системы простых корней. Правда, если потребовать, чтобы нечётный простой корень был единственным, то это требование однозначно фиксирует систему простых корней, а также матрицу Картана и диаграмму Дынкина базисной супералгебры Ли. (Отметим, что система простых корней с билинейной формой, заданной на них, эквивалентна матрице Картана, а следовательно, диаграмме Дынкина). Такую систему простых корней (а также матрицу Картана и диаграмму Дынкина) называют *выделенной.* Если не оговорено противное, мы будем иметь дело с выделенной системой простых корней (а также выделенными матрицей Картана и диаграммой Дынкина). Базисные супералгебры Ли часто бывает удобно описывать в терминах простой и удобной системы образующих и определяющих соотношений (соотношений Картана-Серра). Важными в системе определяющих соотношений являются, так называемые соотношения Серра, имеющие довольно сложный вид, которые мы опишем ниже. Мы опишем порождающую систему для определённого выше максимального идеала J, определяемого условием: $J \cap (\tilde{G}(A,\tau)_{-1} \oplus \tilde{G}(A,\tau)_0 \oplus \tilde{G}(A,\tau)_1) = 0$. Эта порождающая система и задаёт соотношения Серра в контрагредиентной супералгебре Ли.

В.Г. Кац получил классификацию супералгебр Ли классического типа ([180], [175]), которые включают в себя в качестве составной части и базисные супералгебры Ли. Коротко изложим эту классификацию, ограничиваясь базисными супералгебрами Ли(см. также

[180], [175], [140]). Ниже, нам из теории базисных супералгебр Ли помимо фактов о специальной линейной супералгебре Ли $A(m,n)$ потребуются также факты о введённой выше ортосимплектической супералгебре Ли. Как отмечено ранее, ортосимплектические супералгебры Ли образуют три бесконечных семейства базисных супералгебр Ли. Супералгебра Ли $B(m,n)$ или $\mathfrak{osp}(2m+1,2n)$ для $m \geq 0, n \geq 1$ обладает чётной частью изоморфной $\mathfrak{so}(2m+1)\bigoplus\mathfrak{sp}(2n)$, а её нечётная часть является $(2m+1;2n)$ представлением её чётной части. Её ранг равен $m+n$, а её размерность $2(m+n)^2+m+3n$. Супералгебра Ли $C(n)$ $\mathfrak{osp}(2,2n)$, где $n \geq 1$ имеет в качестве чётной части алгебру Ли $\mathfrak{so}(2n)\oplus\mathfrak{sp}(2n)$ и её нечётная часть это дважды фундаментальное представление $(2n)$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n)$. Её ранг равен $n+1$, а размерность $2n^2+5n+1$. Супералгебра Ли $D(m,n)$ или $\mathfrak{osp}(2m,2n)$ определена для $m \geq 2, n \geq 1$. Её чётная часть совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2m)\oplus\mathfrak{sp}(2n)$, а её нечётная часть – это $(2m,2n)$ представление её чётной части. Её ранг равен $m+n$, а размерность $2(m+n)^2-m+n$. Корневые системы могут быть выражены в терминах ортогональных векторов $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m,\delta_1,\ldots,\delta_n$ следующим образом.
Для $B(m,n)$, $m \neq 0$:

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm\epsilon_i, \pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i\}, \quad \Delta_{\bar{1}} = \{\pm\epsilon_i \pm \delta_j, \pm\delta_j\}.$$

Для $B(0,n)$:

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i\}, \quad \Delta_{\bar{1}} = \{\pm\delta_j\}.$$

Для $C(n+1)$:

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i\}, \quad \Delta_{\bar{1}} = \{\pm\epsilon \pm \delta_j\}.$$

Для $D(m,n)$:

$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm\epsilon_i, \pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i\}, \quad \Delta_{\bar{1}} = \{\pm\epsilon_i \pm \delta_j\}.$$

Для $D(2,1;\alpha)$:

$$\Delta = \{\pm 2\epsilon_1, \pm 2\epsilon_2, \pm 2\epsilon_3, \pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\},$$
$$\Delta_{\bar{0}} = \{\pm 2\epsilon_1, \pm 2\epsilon_2, \pm 2\epsilon_3\}, \quad \Delta_{\bar{1}} = \{\pm 2\epsilon_1 \pm 2\epsilon_2 \pm 2\epsilon_3\}.$$

Заметим, что чётная часть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$ изоморфна прямой сумме трёх экземпляров простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Все базисные супералгебры Ли являются контрагредиентными и, следовательно, допускают описание в терминах образующих и определяющих соотношений Картана-Серра. Теперь мы можем выписать часть определяющих соотношений Картана-Серра произвольной базисной супералгебры Ли, определяемой своей матрицей Картана $A = (a_{ij})_{i,j}^r$:

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{1.2.7}$$
$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, \tag{1.2.8}$$
$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \tag{1.2.9}$$
$$[[x_m^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}], [x_{m+1}^{\pm}, x_{m+2}^{\pm}]] = 0, \tag{1.2.10}$$
$$ad^{1-\tilde{a}_{ij}}(x_i^{\pm})x_j^{\pm} = 0. \tag{1.2.11}$$

Здесь $\tilde{a}_{ij} = -max\{|a_{ij}|, |a_{ji}|\}$, где a_{ij} – матричный элемент матрицы Картана A, а $ad(x)y := [x,y]$. Мы здесь не выписали часть определяющих соотношений (соотношений Картана-Серра), имеющих разный вид для разных базисных супералгебр Ли (эти соотношения иногда называют, просто, соотношениями Серра). Приведём такое полное описание системы определяющих соотношений сначала в случае супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Также на этом примере будет наглядно видна структура соотношений Картана-Серра, гарантирующих конечномерность базисной супералгебры Ли.

Супералгебра Ли $A(m,n)$ определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1}$. Её ненулевые элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i < m+1;$$

$$a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1, \quad a_{i,i} = -2, \quad m+1 < i, \quad i \in I = \{1, \dots, m+n+1\}.$$

Данная матрица Картана является симметризуемой и часто удобнее бывает использовать симметрическую матрицу Картана. Правда в соответствующей симметрической матрице диагональные элементы, начиная с $m+1$-го отрицательны и равны -2, а элементы на рядом расположенных верхней и нижней диагоналях, начиная с $m+1$-го, равны 1. Остальные элементы точно такие же, как и у выделенной матрицы Картана. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается образующими: $h_i, x_i^{\pm}, i \in I$. Причём образующие $x_{m+1}^{\pm}$ – нечётные, а остальные образующие чётные, то есть функция чётности принимает на них следующие значения: $p(h_i) = 0, i \in I, p(x_j^{\pm}) = 0, j \neq m+1, p(x_{m+1}^{\pm}) = 1$. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{1.2.12}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, \tag{1.2.13}$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \tag{1.2.14}$$

$$[[x_m^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}], [x_{m+1}^{\pm}, x_{m+2}^{\pm}]] = 0, \tag{1.2.15}$$

$$ad^{1-\tilde{a}_{ij}}(x_i^{\pm}) x_j^{\pm} = [x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0. \tag{1.2.16}$$

Отметим, что последние два соотношения и называются соотношениями Серра. Опишем теперь соотношения Серра и для других базисных супералгебр Ли.

Пусть теперь базисная супералгебра Ли $\mathfrak{g} = D(m,n) = \mathfrak{osp}(2m,2n)$.

Тогда соотношения Серра имеют следующий вид в этом случае:

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \tag{1.2.17}$$

$$[x_{m+n-2}^{\pm}, [x_{m+n-2}^{\pm}, x_{m+n}^{\pm}]] = [x_{m+n}^{\pm}, [x_{m+n}^{\pm}, x_{m+n-2}^{\pm}]] = 0, \tag{1.2.18}$$

$$[[x_{m-1}^{\pm}, x_m^{\pm}], [x_m^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}]] = 0. \tag{1.2.19}$$

Часто бывает удобным выписать саму матрицу Картана.

В случае, когда базисная супералгебра Ли $\mathfrak{g} = C(n)$ соотношения Серра принимают следующий вид:

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad 1 \leq i, j < m+n, \tag{1.2.20}$$

$$[x_{m+n-1}^{\pm}, [x_{m+n-1}^{\pm}, [x_{m+n-1}^{\pm}, x_{m+n}^{\pm}]]] = [x_{m+n}^{\pm}, [x_{m+n}^{\pm}, [x_{m+n}^{\pm}, x_{m+n-1}^{\pm}]]] = 0. \tag{1.2.21}$$

В случае, когда базисная супералгебра Ли $\mathfrak{g} = B(m,n)$, $m \neq 0$, соотношения Серра принимают следующий вид:

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i < m+n-1, \tag{1.2.22}$$

$$[x_{m+n-1}^{\pm}, [x_{m+n-1}^{\pm}, [x_{m+n-1}^{\pm}, x_{m+n}^{\pm}]]] = 0, \tag{1.2.23}$$

$$[[x_{m-1}^{\pm}, x_m^{\pm}], [x_m^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}]] = 0. \tag{1.2.24}$$

Если же базисная супералгебра Ли $\mathfrak{g} = B(0, n)$, то соотношения Серра принимают такой вид:

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0, \quad |i - j| = 1, \tag{1.2.25}$$

$$[[x_1^{\pm}, x_1^{\mp}], [x_1^{\pm}, x_1^{\mp}]] = 0. \tag{1.2.26}$$

Отметим, что также есть ещё семейство супералгебр Ли $D(2, 1; \alpha)$, зависящее от непрерывного параметра α. Каждая такая супералгебра Ли имеет ранг 3, а её размерность равна 17. Отметим, что чётная часть этой супералгебры Ли изоморфна прямой сумме трёх экземпляров простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, а размерность нечётной части равна 8. Система простых корней $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, где $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3$, $\alpha_2 = 2\epsilon_2$, $\alpha_3 = 2\epsilon_3$. Отметим также, что корни $\alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ – чётные, а корни $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ – нечётные. Выделенная матрица Картана имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.1 Странная супералгебра Ли Q_n

Супералгебры Ли классического типа включают в себя помимо базисных супералгебр Ли ещё и странные супералгебры Ли. Опишем сначала странную супералгебру Ли типа Q_{n-1}. Пусть $(Q_{n-1})_0$ и $(Q_{n-1})_1$ будут экземплярами $\mathfrak{sl}_n, n \geq 2$. Структура супералгебры Ли на Q_{n-1} определяется формулами:

$$[a_1, a_2] = a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1,$$
$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a,$$
$$[b_1, b_2] = b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_1 - \tfrac{2}{n} \cdot tr(b_1 \cdot b_2) \cdot E_n,$$

где $a, a_1, a_2 \in (Q_{n-1})_0, b, b_1; b_2 \in (Q_{n-1})_1$. Ниже мы дадим определение этой странной супералгебры Ли очень похожее на определение контрагредиентных супералгебр Ли. Следует отметить, что хотя странная супералгебра Ли Q_{n-1} сама не является контрагредиентной, тем не менее, к ней могут быть применены многие приемы исследования и описания контрагредиентных супералгебр Ли. С супералгеброй Ли $\mathfrak{g}$ можно связать группу автоморфизмов этой супералгебры Ли. Эти автоморфизмы обязаны сохранять её градуировку. Автоморфизмы образуют группу, обозначаемую через $Aut(\mathfrak{g})$.

Далее мы опишем странную супералгебру Ли типа Q_n в терминах системы образующих и определяющих соотношений. Это описание будет похоже на описание контрагредиентных супералгебр Ли. Здесь мы дадим такое относительно краткое описание, отложив более подробное описание до пятой главы, в которой мы исследуем янгиан странной супералгебры Ли.

Супералгебра Ли Q_n не является контрагредиентной, как отмечено выше, но, тем не менее может быть описана при помощи системы её корней. Система корней Δ супералгебры Ли Q_n совпадает с корневой системой алгебры Ли $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n)$, но ненулевые корни Q_n одновременно являются и чётными и нечётными. Мы будем использовать следующие обозначения: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ – матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$, $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$ для простых корней α_i, α_j $(i, j \in \{1, \cdots n-1\})$. Определим образующие алгебры Ли Q_n

$x_i^{\pm}, \hat{x}_i^{\pm}, h_i, k_i, i = 1, \cdots, n-1$ и элементы $x^{\pm,i}, \hat{x}^{\pm,i}, h^i, k^i$ of $\mathfrak{g}^1$ формулой

$$\begin{aligned}
h_i &= \pi((E_{i,i} - E_{i+1,i+1}) + (E_{i,i} - E_{-i-1,-i-1})),\\
h^i &= \pi((E_{i,i} - E_{i+1,i+1}) - (E_{i,i} - E_{-i-1,-i-1})),\\
x_i^+ &= \pi(E_{i,i+1} + E_{-i,-i-1}), \quad x^{+i} = \pi(E_{i,i+1} - E_{-i,-i-1}),\\
x_i^- &= \pi(E_{i+1,i} + E_{-i-1,-i}), \quad x^{-i} = \pi(E_{i+1,i} - E_{-i-1,-i}),\\
k_i &= \pi((E_{i,-i} - E_{i+1,-i-1}) + (E_{-i,i} - E_{-i-1,i+1})),\\
k^i &= \pi((E_{i,-i} - E_{i+1,-i-1}) - (E_{-i,i} - E_{-i-1,i+1})),\\
\hat{x}_i^+ &= \pi(E_{i,-i-1} + E_{-i,i+1}), \quad \hat{x}^{+i} = \pi(E_{i,-i-1} - E_{-i,i+1}),\\
\hat{x}_i^- &= \pi(E_{i+1,-i} + E_{-i-1,i}), \quad \hat{x}^{-i} = \pi(E_{i+1,-i} - E_{-i-1,i}).
\end{aligned}$$

Супералгебра Ли Q_n может быть определена также как супералгебра Ли, порождённая образующими $h_i, k_i, x_i^{\pm}, \hat{x}_i^{\pm}, i \in \{1, \ldots, n-1\}$, удовлетворяющими соотношениям типа соотношений Картана-Вейля (см. [140]). Мы будем использовать обозначения $x_{\pm\alpha_i} = x_i^{\pm}, \hat{x}_{\pm\alpha_i} = \hat{x}_i^{\pm}, x^{\pm\alpha_i} = x^{\pm,i}, \hat{x}^{\pm\alpha_i} = \hat{x}^{\pm,i}$.

Ниже мы также будем использовать следующую, отличную от введённой выше, систему обозначений. Именно,

$$x_{i,0}^{\pm} = x_i^{\pm}, \quad x_{i,1}^{\pm} = \hat{x}_i^{\pm}, \tag{1.2.27}$$

$$x^{\pm,i,0} = x^{\pm,i}, \quad x^{\pm,i,1} = \hat{x}^{\pm,i}, \tag{1.2.28}$$

$$h_{i,0} = h_i, \quad h_{i,1} = k_i, \tag{1.2.29}$$

$$h^{i,0} = h^i, \quad h^{i,1} = k^i. \tag{1.2.30}$$

Эта система образующих и определяющих соотношений похожа на систему образующих и определяющих соотношений для контрагредиентной супералгебры Ли. Так же как и для последней система образующих и определяющих соотношений странной супералгебры Ли определяется системой корней. Но, в отличии от контрагредиентной супералгебры Ли, как будет показано ниже, корни странной супералгебры Ли не делятся на чётные и нечётные, а одновременно являются и чётными и нечётными. Ещё одно отличие странной супералгебры состоит в том, что её картановская подалгебра не коммутативна.

1.3 Бисупералгебры Ли

Понятие бисупералгебры Ли является естественным обобщением понятия биалгебры Ли (см.[120]). Вообще говоря, обобщение понятия биалгебры Ли на суперслучай является не вполне тривиальной задачей. Ниже мы рассмотрим эту задачу в наиболее простой постановке, ограничившись, в основном, лишь базисными супералгебрами Ли. Для удобства читателя мы приведём здесь аналоги основных понятий из теорий биалгебр Ли, сформулированных для их суперaналогов.

1.3.1 Бисупералгебры Ли и тройки Манина

Определение 1.3.1. *Супералгебра Ли $\mathfrak{A}$ называется бисупералгеброй Ли, если $\mathfrak{A}^*$ также супералгебра Ли и коскобка $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \bigwedge \mathfrak{A}$ является 1-коциклом (со значениями в чётных когомологиях).*

Предполагается, что $\mathfrak{A}$ действует на $\bigwedge^2 \mathfrak{A}$ посредством присоединённого представления:

$$g \cdot a \otimes b = [g, a] \otimes b + (-1)^{deg(g)deg(a)} a \otimes [g, b]). \tag{1.3.1}$$

Мы будем предполагать, что бисупералгебра Ли вложена в некоторую ассоциативную супералгебру с единицей, например, в свою универсальную обёртывающую супералгебру. Тогда, с учётом этого замечания формулу (1.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$g \cdot a \otimes b = [g \otimes 1 + 1 \otimes g, a \otimes b] = [g, a] \otimes b + (-1)^{deg(g)deg(a)} a \otimes [g, b]). \tag{1.3.2}$$

Объясним чуть подробнее смысл средней части формулы (1.3.2). Здесь и ниже, мы предполагаем, что супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ вложена в некоторую ассоциативную супералгебру с единицей A, например, в универсальную обёртывающую супералгебру $U(\mathfrak{g})$. При этом определение не зависит от вида этой ассоциативной унитальной супералгебры A, как в случае формулы (1.3.2) показывает её правая часть. Как будет видно и все дальнейшие определения и результаты, относящиеся к бисупералгебре Ли, не будут зависеть от вида этого вложения.

Утверждение о том, что δ является 1-коциклом можно расшифровать следующей формулой:

$$\delta([x, y]) = x \cdot \delta(y) - y \cdot \delta(x) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \delta(y)] - [y \otimes 1 + 1 \otimes y, \delta(x)]. \tag{1.3.3}$$

Утверждение, что $\mathfrak{A}$ – косупералгебра Ли, или, что тоже самое, что $\mathfrak{A}^*$ – супералгебра Ли, означает, что:
1)$\delta(\mathfrak{A}) \subset \bigwedge^2 \mathfrak{A}$;
2) $Alt(\delta \otimes id)\delta = 0$,
где Alt – операция альтернирования (антисуперсимметризации).

Отметим, что если $\mathfrak{A}$ – бисупералгебра Ли, то на $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^*$ также существует структура бисупералгебры Ли, индуцирующая на $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ заданные структуры супералгебр Ли. Эту структуру супералгебры Ли можно определить для $x \in \mathfrak{A}, \quad l \in \mathfrak{A}^*$ следующей формулой:

$$[x, l] = (ad^* x)l - (1 \otimes l)(\delta(x)), \tag{1.3.4}$$

где ad^* – коприсоединённое действие. В координатной форме формулу (1.3.4) можно переписать в следующем виде:

$$[e_i, e^j] = f_i^{jk} e_k + c_{ki}^j e^k, \tag{1.3.5}$$

где $\{e_i\}, \{e^j\}$ двойственные относительно формы Q базисы в $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$, соответственно, а $f_i^{jk} + c_{ki}^j$ структурные константы, соответственно, для коумножения и умножения в $\mathfrak{A}$ (или умножения и коумножения в $\mathfrak{A}^*$).

Кроме того на $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^*$ определена билинейная форма Q:

$$Q((x_1, l_1), (x_2, l_2)) = l_1(x_1) + l_2(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{A}, \quad l_1, l_2 \in \mathfrak{A}^*.$$

Легко проверяется, что билинейная форма Q является инвариантной, подалгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ изотропны относительно этой формы. Верно и обратное, пусть $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^*$ супералгебра Ли с невырожденным инвариантным скалярным произведением, относительно которого $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ изотропные подсупералгебры Ли. Тогда на $\mathfrak{A}$ существует структура бисупералгебры Ли. Действительно, определим кокоммутатор $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ как отображение двойственное коммутатору $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{A}^* \otimes \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$, то есть, если $[e^i, e^j] = f_k^{ij} e^k$ то $\delta(e_k) = f_k^{ij} e_i \otimes e_j$. Из тождества Якоби и формулы, определяющей коммутатор $[x, l], x \in \mathfrak{A}, l \in \mathfrak{A}^*$ (см. (1.3.4)) следует, что δ является 1-коциклом. Отметим также, что если $\mathfrak{A}$ – бисупералгебра Ли, то и $G = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^*$ также является бисупералгеброй Ли с кокоммутатором $\delta_G(x) = \delta_{\mathfrak{A}} \oplus (-\delta_{\mathfrak{A}^*})$. Более того, 1-коцикл δ_G является кограницей некоторого элемента $r \in G \otimes G$. Именно, если $r \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^* \subset G \otimes G^*$ является каноническим элементом, соответствующим тождественному оператору $id : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, то есть $r = \sum e_i \otimes e^i$, где $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$, соответственно, то $\delta_G = dr$ (где r понимается как 0-коцепь со значениями в $G \otimes G$) и

$$\delta_G(x) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, r]. \tag{1.3.6}$$

Бисуперглгебра Ли $(G = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^*, r)$ называется классическим дублем бисуперглгебры Ли $\mathfrak{A}$. Можно проверить, что в этом случае r удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE):

$$\langle r, r \rangle = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0, \tag{1.3.7}$$

где $r_{12} = r \otimes 1, r_{23} = 1 \otimes r, r_{13} = \sum a_i' \otimes 1 \otimes a_i"$, если $r = \sum a_i' \otimes a_i"$. Пара (G, r) является квазитреугольной бисуперглгеброй Ли (см. [24]).

Часто удобно бывает использовать язык троек Манина (см. [24]), определение которых на случай супералгебр Ли переносится без изменений.

Определение 1.3.2. *Тройкой Манина называется тройка $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$, где $\mathfrak{P}$ – супералгебра Ли с фиксированной билинейной невырожденной инвариантной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ такие ее инвариантные изотропные подсупералгебры Ли, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2$.*

Существует биективное соответствие между тройками Манина и бисупералгебрами Ли. Выше мы по бисупералгебре Ли $\mathfrak{g}$ построили ее классический дубль $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, который является ее тройкой Манина. Пусть теперь задана тройка Манина $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$. Построим по ней бисупералгебру Ли. Ясно, что $\mathfrak{P}_2 \simeq \mathfrak{P}_1^*$ и $\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_1^*$. Положим $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1$ и определим δ формулой:

$$\langle \delta(a), l_1 \otimes l_2 \rangle = \langle a, [l_1, l_2] \rangle,$$

как отображение, двойственное коммутатору в $\mathfrak{P}_2$ относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Можно проверить, что δ является 1-коциклом.

Напомним, что бисупералгебра Ли $(\mathfrak{g}, \varphi)$ называется **квазитреугольной**, если существует такой элемент $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, что $\partial(r) = \varphi$ и r удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE):

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Здесь $r_{12} = r \otimes 1, r_{23} = 1 \otimes r, r_{13} = \sum_i r_i^1 \otimes 1 \otimes r_i^2$, где $r = \sum_i r_i^1 \otimes r_i^2$.

Ниже нас будут интересовать следующие два примера бисупералгебр Ли, а точнее определяющих их троек Манина. Пусть $\mathfrak{g}$ базисная супералгебра Ли. Рассмотрим следующую тройку Манина $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$: $(\mathfrak{P} = \mathfrak{g}((u^{-1})), \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u], \mathfrak{P}_2 = (u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])$.

Определим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{P}$ по формуле:

$$\langle f, g \rangle = res_\infty(f(u), g(u))du, \tag{1.3.8}$$

где $res_\infty(\sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot u^k)du := a_{-1}$ – вычет в бесконечно удалённой точке, $(\cdot, \cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$. (Как выше было отмечено, такая форма существует на любой базисной супералгебре Ли.) Ясно, что $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ – изотропные подсупералгебры относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Опишем структуры бисупералгебры Ли на $\mathfrak{g}[u]$. Пусть $\{e_i\}$ базис в $\mathfrak{g}$ а $\{e^i\}$ двойственный ему относительно формы $(\cdot, \cdot)$ базис в $\mathfrak{g}$. Пусть $t = \sum e_i \otimes e^i$. Давайте рассмотрим также базис $\{e_{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_1$ и двойственный ему относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базис $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$ которые определяются следующими формулами:

$$e_{i,k} = e_i \cdot u^k, k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.3.9}$$

$$e^{i,k} = e^i \cdot u^{-k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.3.10}$$

Вычислим канонический элемент r, определяющий кокоммутатор в $\mathfrak{P}$.

$$r = \sum e_{i,k} \otimes e^{i,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_i (e_i \cdot v^k \otimes e^i \cdot u^{-k-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\sum e_i \otimes e^i \right) \cdot u^{-1} \left(\frac{v}{u} \right)^k \right) = t \frac{u^{-1}}{1 - (v/u)} = \frac{t}{u - v}.$$

Обозначим $r(u, v) := r$. Тогда формула для кокоммутатора δ примет следующий вид:

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r(u, v)].$$

Предложение 1.3.1. *Элемент $r(u, v)$ обладает следующими свойствами:*
1) $r(u, v) = -r_{21}(v, u)$;
2)

$$[r_{12}(u, v), r_{13}(u, w)] + [r_{12}(u, v), r_{23}(v, w)] + [r_{13}(u, w), r_{23}(v, w)] = 0. \tag{1.3.11}$$

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{t}_{21} = \mathfrak{t}$. Тогда $r_{21}(v, u) = r(v, u) = -r(u, v)$.

Пункт 2) следует из того факта, что канонический элемент r удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE) $\langle r, r \rangle = 0$. ☐

Отметим, что уравнение Янга-Бакстера естественно появляется как равенство нулю скобки Схоутена классической r-матрицы с собой. Известно, что на внешней алгебре $\bigwedge \mathfrak{g}$ алгебры Ли (супералгебры Ли) $\mathfrak{g}$ однозначно задаётся структура супералгебры Ли. Эта структура определяется, так называемой скобкой Схоутена. Именно, когда $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, пусть

$$[a_1 \wedge \cdots \wedge a_k, b_1 \wedge \cdots \wedge b_l] = (-1)^{(k+1)(l+1)} \sum (-1)^{i+j} [a_i, b_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \hat{a}_i \cdots \wedge a_k \wedge b_1 \wedge \cdots \hat{b}_j \cdots \wedge b_l.$$

В случае, когда $\mathfrak{g}$ – супералгебра Ли, знак в выражении зависит только от числа переставляемых чётных членов, то есть

$$[a_1 \wedge \cdots \wedge a_k, b_1 \wedge \cdots \wedge b_l] = (-1)^{(k_1+1)(l_2+1)} \sum (-1)^{i_1+j_2} [a_i, b_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \hat{a}_i \cdots \wedge a_k \wedge b_1 \wedge \cdots \hat{b}_j \cdots \wedge b_l,$$

где s_1 – число чётных членов среди элементов $a_1, \ldots, a_s$, а s_2 – число чётных членов среди элементов $b_1, \ldots, b_s$. Это выражение и называется (супер)скобкой Схоутена двух внешних форм. Можно проверить, что для скобки Схоутена выполняется тождество Якоби (для супералгебр Ли). Тогда уравнение Янга-Бакстера переписывается в форме

$$yb(r) = \frac{1}{2}[r, r] = 0.$$

Я напомню, что бисупералгебра Ли называется **кограничной**, если коскобка δ имеет вид $\delta(x) = [x, r]$ для некоторого $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, такого, что $yb(r) \subset (\mathfrak{g}^{\otimes 3})^{\mathfrak{g}}$, то есть $yb(r)$ – $\mathfrak{g}$-инвариантно.

Следует отметить, что имеет следующее утверждение, которое будет доказано несколько позже.

Предложение 1.3.2. *Для произвольной базисной супералгебры Ли всякий 1-коцикл (относительно чётных коцепей) является кограницей.*

Аналогичный факт имеет также место для простых алгебр Ли. Это следует из тривиальности первой группы когомологий простой алгебры Ли.

Рассмотрим еще один пример. Пусть K – центральный элемент, $d := \dfrac{d}{du}$,

$$\tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}} \oplus CK \oplus Cd; \quad \tilde{\mathfrak{P}}_1 = \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} \oplus CK; \quad \tilde{\mathfrak{P}}_2 = \mathfrak{g}[[u^{-1}]]^{\tilde{\sigma}} \oplus Cd.$$

Структуру супералгебры Ли на $\tilde{\mathfrak{P}}$ определим формулами:

$$\begin{aligned}
[x \cdot u^m, y \cdot u^n] &= [x,y] \cdot u^{m+n} + \delta_{m,-n} \cdot (x|y) \cdot K;\\
[K, x \cdot u^m] &= [K,d] = [K,K] = 0;\\
[d, x \cdot u^m] &= m \cdot x \cdot u^{m-1}.
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Определим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\tilde{\mathfrak{P}}$ формулами:

$$\begin{gathered}
\langle x \cdot u^m, y \cdot u^n \rangle = res((x|y)u^{m+n}du) = (x|y) \cdot \delta_{m,-n-1};\\
\langle d, K \rangle = 1,\\
\langle d, x \cdot u^m \rangle = \langle K, x \cdot u^m \rangle = \langle d, d \rangle = \langle K, K \rangle = 0.
\end{gathered} \tag{1.3.13}$$

Предложение 1.3.3. *Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определяемая формулами (A.2.17) – инвариантная.*

Доказательство. Нетривиальной является лишь проверка равенства:

$$\langle [d, x \cdot u^m], y \cdot u^n \rangle = \langle d, [x \cdot u^m, y \cdot u^n] \rangle$$

для $m = -n$.

Имеют место равенства

$$\langle [d, x \cdot u^m], y \cdot u^n \rangle = \langle n \cdot x \cdot u^{n-1}, y \cdot u^{-n} \rangle = n(x|y).$$

С другой стороны

$$\langle d, [x \cdot u^m, y \cdot u^n] \rangle = \langle d, [x,y] + n \cdot (x|y) \cdot K \rangle = n \cdot (x|y).$$

Инвариантность формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ проверена. □

Можно проверить, что и в этом случае подсупералгебры $\tilde{\mathfrak{P}}_1, \tilde{\mathfrak{P}}_2$ являются изотропными подсупералгебрами . Поэтому $\tilde{\mathfrak{P}}$ является классическим дублем бисупералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{P}}_1$. Более того $\tilde{\mathfrak{P}}$ является квазитреугольной бисупералгеброй Ли. Также как и выше опишем структуру бисупералгебр Ли на $\tilde{\mathfrak{P}}$ и $\tilde{\mathfrak{P}}_1$. Опишем канонический элемент r^c_σ.

Также как и в предыдущем примере выберем базис $\{e_{i,k}\}$ и дополним его элементом K. Получим базис в $\tilde{\mathfrak{P}}_1$. Двойственный базис в $\tilde{\mathfrak{P}}_2$ получается прибавлением элемента d к базису $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$. Тогда канонический элемент r^c будет иметь следующий вид:

$$r^c(u,v) = \sum e_{i,k} \otimes e^{i,k} + K \otimes d = r(u,v) + K \otimes d = \frac{t}{u-v} + K \otimes d.$$

В этом случае формула для кокоммутатора будет следующей:

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r^c(u,v)].$$

Из свойств классического дубля (см. [125]) следует, что $r^c(u,v)$ удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE) (то есть пункту 2 предложения A.2.1, но не удовлетворяет условию антисуперкоммутативности (то есть пункту 1 предложения A.2.1). Это все и означает, что $\tilde{\mathfrak{P}}$ – квазитреугольная бисупералгебра Ли.

1.3.2 Двойственные бисуперaлгебры и классический дубль

Заметим, что понятие тройки Манина, по существу, является самодвойственным, если разумным образом ограничить класс рассматриваемых супералгебр Ли. Действительно, если $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ является тройкой Манина, то и $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1)$ – также является тройкой Манина. Отсюда вытекает, что если $\mathfrak{g}$ – бисупералгебра Ли, то и $\mathfrak{g}^*$ – также бисупералгебра Ли и $\mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$ как бисупералгебры Ли. Нетрудно понять, что отсюда следует, что если $\mathfrak{g}$ – бисупералгебра Ли, то структуру бисупералгебры Ли можно ввести и на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. На самом деле имеет место более сильное утверждение.

Предложение 1.3.4. *На $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ существует такая каноническая структура бисупералгебры Ли, что канонические вложения $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ являются гомоморфизмами бисупералгебр Ли.*

Доказательство. Обозначим через $D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. Рассмотрим элемент $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \subset D(\mathfrak{g}) \otimes D(\mathfrak{g}^*)$ соответствующий тождественному оператору $id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Определим в $D(\mathfrak{g})$ кокоммутатор δ_D формулой

$$\delta_D(u) = (ad_u \otimes 1 + 1 \otimes ad_u)(r)$$

для всех $u \in D(\mathfrak{g})$. Покажем, что определённая таким образом структура бисупералгебры на $D(\mathfrak{g})$ такова, что выполняется условие теоремы. Покажем, что $\delta_D(u) = \delta_{\mathfrak{g}}(u), \forall u \in \mathfrak{g}$ и $\delta_D(u) = \delta_{\mathfrak{g}^*}(u), \forall u \in \mathfrak{g}^*$. Проверим первое из этих равенств, второе проверяется аналогично. Действительно, пусть $r = \sum_i a_i \otimes b_i$, тогда

$$\delta_D(u) = (ad_u \otimes 1 + 1 \otimes ad_u)(r) = \sum_i [u, a_i] \otimes b_i + (-1)^{p(u)p(a_i)} \sum_i a_i \otimes [u, b_i] =$$

$$[u \otimes 1 + 1 \otimes u, r] = \delta_{\mathfrak{g}}(u).$$

Предложение доказано.

□

Таким образом $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ становится бисупералгеброй Ли, более того, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ – треугольная (или квазитреугольная) бисупералгебра Ли. Часто $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ называют классическим дублем бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим подробнее случай когда $\mathfrak{a}$ – базисная супералгебра Ли, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[t]$ – супералгебра Ли полиномиальных токов со структурой бисупералгебры Ли, задаваемой r-матрицей Янга:

$$r(u) = \sum_{\alpha} \frac{e_\alpha \otimes e_\alpha^*}{u}, \tag{1.3.14}$$

где $\{e_\alpha\}$ – базис в $\mathfrak{a}$, а $\{e_\alpha^*\}$ – дуальный базис в двойственной косупералгебре Ли $\mathfrak{a}^*$.

Мы подробно рассмотрим структуры бисупералгебры, приводящие при их квантовании к янгиану и двойственной ей супералгебре Хопфа. Мы рассмотрим сразу несколько более общий случай – супералгебры Ли функций на кривой Γ с конечным числом отмеченных точек $\{z_1, \ldots, z_n\}$ – $\Gamma \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, принимающих значения в базисной супералгебре Ли $\mathfrak{a}$, то есть случай супералгебры Ли $\mathfrak{a}(\Gamma \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}))$. Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{g}_1 = t^{-1}\mathfrak{a}[t^{-1}]$. Пусть также

$$\tau(u) = \sum_{\alpha} \sum_{m \geq 1} (e_\alpha \otimes e_\alpha^* t^{-m}) u^{m-1} \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{g}_1[[u]].$$

Определим структуру бисуперaлгебры Ли на $\mathfrak{g}_1$ формулами:

$$[\tau_{13}(u), \tau_{23}(v)] = [r_{12}(u-v), \tau_{13}(u) + \tau_{23}(v)], \tag{1.3.15}$$

$$\delta(\tau(u)) = [\tau_{12}(u), \tau_{13}(v)]. \tag{1.3.16}$$

Здесь удобно думать о классической r-матрице как о билинейной форме $\beta(x, y)$ со значениями в поле рациональных функций $k(u)$ со значениями в алгебраически замкнутом поле k, определяемой формулой:

$$\beta(x, y)(u) = -Res_{v=0,w=0}\langle x(v) \otimes y(w), r(v-w+u)\rangle, \tag{1.3.17}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная билинейная форма на базисной суперaлгебре Ли $\mathfrak{a}$, $r(v-w+u)$ понимается как элемент $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}((u))[[v, w]]$. Естественно рассматривать $\beta(x, y)$ как элемент $\mathfrak{g}_1^* \otimes \mathfrak{g}_1^*((u))$, где тензорное произведение понимается как топологическое тензорное произведение, то есть в пополненном смысле. Легко проверить, что β удовлетворяет системе аксиом двойственным аксиомам псевдотреугольной структуры бисуперaлгебры. Другими словами, β задаёт копсевдотреугольную структуру.

Остановимся коротко на описании бисуперaлгебр Ли, соответствующим алгебраическим кривым с конечным множеством отмеченных точек. Далее будем предполагать, что Γ – одномерная алгебраическая группа, а множество $\{z_1, \ldots, z_n\} \in \Gamma$ таково, что $z_i - z_j$ не принадлежит множеству полюсов функции $r(u, v)$ для $i \neq j$. Пусть $\mathfrak{b}_z = \mathfrak{b}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{b}_n$, а $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b} = \mathfrak{a}[u]$ с коммутационными соотношениями между $\mathfrak{b}_i$ и $\mathfrak{b}_j$ определяемыми следующими формулами:

$$[\tau^i_{13}(u), \tau^j_{23}(v)] = [r_{12}(u-v+z_i-z_j), \tau^i_{13}(u) + \tau^j_{23}(v)], \tag{1.3.18}$$

где τ^i – образ τ при отождествлении $\mathfrak{b}_i$ с $\mathfrak{b}$. Для наших дальнейших целей достаточно ограничиться случаем, когда $\Gamma = G_a$, а

$$r(u) = \sum \frac{e_\alpha \otimes e^*_\alpha}{u}$$

– матрица Янга. В этом случае изучаемая бисуперaлгебра Ли – это бисуперaлгебра Ли рациональных функций, не имеющих полюсов за исключением множества отмеченных точек. Данная бисуперaлгебра Ли обладает хорошими свойствами, упрощающими её изучение, на которых мы остановимся чуть позже. Но одно важное для дальнейшего свойство локальности отметим сейчас:

$$[\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j] \subset \mathfrak{b}_i \oplus \mathfrak{b}_j.$$

Наша ближайшая цель рассмотреть квантование введённой бисуперaлгебры Ли $\mathfrak{b}_z$, а также копсевдотреугольной бисуперaлгебры Ли $(\mathfrak{b}, \beta)$. В следующем параграфе мы опишем квантование данных бисуперaлгебр Ли. Более точно, мы копсевдотреугольную суперaлгебру Хопфа (A, B), квазиклассический предел которой копсевдотреугольная бисуперaлгебра Ли $(\mathfrak{b}, \beta)$, а также суперaлгебру Хопфа A_z, квазиклассический предел которой суперaлгебра Ли $\mathfrak{b}_z$. В данной работе мы будем рассматривать квантование лишь в двух частных случаях, когда множество выделенных точек либо одноточечно, либо двухточечно, $\Gamma = G_a$, где G_a – одномерная коммутативная алгебраическая группа совпадающая с аддитивной группой алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$.

Когда множество выделенных точек совпадет с одной бесконечно удалённой точкой мы получаем бисуперaлгебру Ли, двойственную бисуперaлгебре Ли, деформацией которой и является янгиан – основной объект изучения данной работы. Точнее, описанное выше квантование будет совпадать с $(Y(\mathfrak{b})^*, R^{-1})$, где $Y(\mathfrak{b})^*$ – суперaлгебра Хопфа двойственная янгиану, а $R \in Y(\mathfrak{b}) \otimes Y(\mathfrak{b})((u))$ – универсальная R-матрица янгиана. Отметим, что в случае когда $\mathfrak{b}$ – простая алгебра Ли, мы получаем псевдотреугольную структуру, совпадающую с псевдотреугольной структурой введённой впервые В.Г. Дринфельдом (см. [120]).

1.4 Квазитреугольные и коквазитреугольные супералгебры Хопфа

1.4.1 Квазитреугольные супералгебры Хопфа. Основные понятия и результаты

Для удобства читателя мы ниже приводим основные факты и результаты из теории супералгебр Хопфа, явно не отраженные в известной автору литературе.

Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ – ассоциативная супералгебра с единицей (над некоторым алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики $\Bbbk$), на которой определена операция коумножения Δ, заданы антипод S и косой антипод S', (то есть антипод для противоположного коумножения Δ^{op}, а также коединица ϵ. Отметим, что $S^{-1} = S'$. Мы предполагаем, что коумножение является гомоморфизмом ассоциативных супералгебр с единицей, антипод и косой антипод являются антигомоморфизмами, а коумножение – коассоциативно (см. [120], [11]):

$$(id \otimes \Delta)(\Delta(a)) = (\Delta \otimes id)(\Delta(a)),$$

для произвольного элемента $a \in A$. В этом случае A называется супералгеброй Хопфа. Пусть R некоторый обратимый элемент принадлежащий $A \otimes A$ в случае когда супералгебра A конечномерна и некоторому пополнению $A \tilde{\otimes} A$, в случае когда A – бесконечномерная топологическая супералгебра.

Определение 1.4.1. *Пара (A, R) называется почти кокоммутативной супералгеброй Хопфа, если*

$$\Delta^{op}(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \tag{1.4.1}$$

для произвольного $a \in A$. Здесь $\Delta^{op} = \sigma \circ \Delta$, а σ – оператор перестановки тензорных сомножителей: $\sigma(a \otimes b) = (-1)^{p(a)p(b)} b \otimes a$.

Почти кокоммутативная супералгебра Хопфа (A, R) называется кограничной супералгеброй Хопфа, если

$$R^{12}R^{21} = 1 \tag{1.4.2}$$

$$R^{12} \cdot (\Delta \otimes id)(R) = R^{23} \cdot (id \otimes \Delta)(R), \tag{1.4.3}$$

$$(\epsilon \otimes \epsilon)(R) = 1. \tag{1.4.4}$$

Здесь, $\Delta^{op} = \sigma \circ \Delta, \sigma(a \otimes b) = (-1)^{p(a) \cdot p(b)} b \otimes a$.

Определение 1.4.2. *Почти кокоммутативная супералгебра Хопфа (A, R) называется* **квазитреугольной** *(говорят ещё,* **сплетённой***) супералгеброй Хопфа, если R удовлетворяет (1.4.1) и уравнениям*

$$(\Delta \otimes id)(R) = R^{13} \cdot R^{23}, \tag{1.4.5}$$

$$(id \otimes \Delta)(R) = R^{13} \cdot R^{12}. \tag{1.4.6}$$

Квазитреугольная супералгебра Хопфа называется **треугольной**, если кроме того выполняется условие (1.4.2).

Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения из общей теории (супер)алгебр Хопфа.

Предложение 1.4.1. *Если (A, R) квазитреугольная супералгебра Хопфа, то R удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера (QYBE):*

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12},$$

а также следующим соотношениям:

$$(S \otimes id)(R) = (id \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}, \tag{1.4.7}$$

$$(\epsilon \otimes id)(R) = (id \otimes \epsilon)(R) = 1, \tag{1.4.8}$$

$$(S' \otimes id)(R^{-1}) = (id \otimes S'^{-1})(R^{-1}) = R. \tag{1.4.9}$$

Доказательство. $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{12}\cdot(\Delta \otimes id)(R) = (\Delta^{op} \otimes id)(R)\cdot R^{12} = R^{23}R^{13}R^{12}$. Применим $\epsilon \otimes id \otimes id$ к (1.4.5), получим $(\epsilon \otimes id)(R) = 1$. Применив $id \otimes id \otimes \epsilon$ к (1.4.6) получим $(id \otimes \epsilon)(R) = 1$. Пусть теперь $m : A \otimes A \to A$ – операция умножения (то есть такое линейное отображение, что $m(x \otimes y) = x \cdot y$). Тогда $R \cdot (S \otimes id)(R) = (m \otimes id)(id \otimes S \otimes id)(R^{13}R^{23}) = (m \otimes id)(id \otimes S \otimes id)(\Delta \otimes id)(R) = (\epsilon \otimes id)(R) = 1$. Другими словами $(S \otimes id)(R) = R^{-1}$. Если A^{op} – алгебра A с противоположным коумножением, то (A^{op}, R^{21}) – квазитреугольная алгебра Хопфа с антиподом $S' = S^{-1}$. Поэтому $(S' \otimes id)R^{21} = (R^{21})^{-1}$, то есть $(id \otimes S')(R) = R^{-1}$. Так как $(id \otimes S')(R) = (S \otimes id)(R)$, то $(S \otimes S)(R) = R$. Теорема доказана. □

Основные приложения теории супералгебр Хопфа в нашей работе будут связаны с рассмотрением градуированных супералгебр Хопфа, а ещё более конкретно с супералгебрами Хопфа над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\hbar]]$. В общей градуированной алгебре $A = \oplus_{k=0}^{\infty} A_k$ над произвольным полем k можно определить $\mathfrak{a}$-адическую топологию, где $\mathfrak{a}$ – идеал в A (см. [1]). Отметим, что градуировка порождает фильтрацию и наоборот. Мы будем использовать также определение $\mathfrak{a}$-адического пополнения A относительно заданной фильтрации (в этом случае используется также термин топология обратного предела) (см. также [1]).

Далее мы ограничимся случаем супералгебры (а также, модуля над супералгеброй) над локальным кольцом $K = \mathbb{C}[[\hbar]]$ комплекснозначных формальных степенных рядов. Отметим, что в супералгебре A над кольцом $K = \mathbb{C}[[\hbar]]$ определено отображение

$$|\cdot| : \mathbb{C}[[\hbar]] \to R_+,$$

определяемое формулой:

$$|f| = 2^{-w(f)},$$

где $w(f)$ для $f = \sum_{n \geq 0} a_n \hbar^n$ таково, что $a_{w(f)} \neq 0$, а $a_k = 0$ при $k < w(f)$. Если M – модуль над $K = \mathbb{C}[[\hbar]]$, то определены проекции

$$p_n : M_n = M/\hbar^n M \to M_{n-1} = M/\hbar^{n-1}M.$$

Они образуют обратную систему K-модулей и можно рассмотреть её обратный предел

$$\tilde{M} = lim_{\leftarrow} M_n,$$

который также является K-модулем. Отметим, что $\tilde{M}$ естественно наделяется топологией – топологией обратного предела, для которой семейство подмодулей $(\hbar^n \tilde{M})_n$ является базой открытых окрестностей точки $0 \in \tilde{M}$. Модуль $\tilde{M}$ называют $\hbar$-адическим пополнением модуля M. Напомним, что проекции $i_n : M \to M_n$ индуцируют корректно определённое K-линейное отображение $i : M \to \tilde{M}$ такое, что $\pi_n \circ i = i_n$ для всех n. Заметим, что ядро отображения i совпадает с пересечением $\hbar^n M$:

$$Ker(i) = \bigcap_{n > 0} \hbar^n M.$$

Напомним, что K-модуль M называется отделимым, если отображение i инъективно, то есть $Ker(i) = \{0\}$, и полным, если отображение i – сюръективно. Нетрудно проверить, что для любого модуля M модуль $M/(\bigcap_{n>0} \hbar^n M)$ отделимый, а пополнение $\tilde{M}$ полный модуль. Мы будем предполагать, что каждый полный отделимый модуль M наделён топологией, происходящей из топологии обратного предела на $\tilde{M}$, ввиду изоморфизма $M \cong \tilde{M}$. Именно эту топологию называют $\hbar$-адической. Важную роль будут играть модули вида $V[[\hbar]]$ над K, где V – модуль над $\mathbb{C}$. Модули такого вида (или изоморфные им) называются **топологически свободными**. Любой такой модуль является отделимым и полным. Имеет место следующее

Предложение 1.4.2. *1) Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ – базис векторного пространства V. Тогда K-подмодуль, порождённый множеством $\{e_i\}_{i\in I}$, всюду плотен в $V[[\hbar]]$ в $\hbar$-адической топологии.*
2) Для любого отделимого K-модуля M имеет место естественная биекция

$$Hom_K(V[[\hbar]], M) \cong Hom_{\mathbb{C}}(V, M).$$

Далее мы будем использовать понятие топологического тензорного произведения K-модулей M и N, которое будем обозначать через $M\hat{\otimes}N$ и которое является $\hbar$-адическим пополнением пространства $M \otimes_K N$:

$$M\hat{\otimes}N = \widetilde{M \otimes_K N} = lim_{\leftarrow}(M \otimes_K N)/\hbar^n(M \otimes_K N).$$

Отметим, что топологическое тензорное произведение по определению всегда полно. Легко проверяется, что взятие топологического тензорного произведения является функтором, действующим в категорию полных топологических модулей.

Легко видеть, что понятие супералгебры Хопфа естественно обобщается до понятия топологической супералгебры Хопфа заменой тензорного произведения на топологическое тензорное произведение. В дальнейшем мы будем иметь дело, в основном, с топологическими супералгебрами Хопфа. Ниже, мы ещё раз и подробнее обсудим понятие топологической супералгебры Хопфа, когда будем рассматривать квантование бисупералгебр Ли.

1.4.2 Квантовый дубль супералгебры Хопфа

Важным примером треугольной супералгебры Хопфа является квантовый дубль (топологической) супералгебры Хопфа, который может быть построен по произвольной (топологической) супералгебре Хопфа. Отметим, что квантовый дубль является квантованием классического дубля, описанного в предыдущем параграфе. Опишем теперь конструкцию квантового дубля супералгебры Хопфа.

Пусть A – супералгебра Хопфа. Будем обозначать через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Пусть $\{e_i\}$ – базис в A, как векторном суперпространстве, а $\{e^i\}$ – двойственный базис в A^*. Пусть также $\{c_{ij}^k\}$ – структурные константы, задающие в A умножение, как в ассоциативной супералгебре, $\{\mu_k^{ij}\}$ – структурные константы, задающие в A коумножение Δ, а $\{\sigma_t^p\}$ – структурные константы косого антипода S', то есть

$$[e_i, e_j] = \textstyle\sum_k c_{ij}^k e_k = c_{ij}^k e_k, \tag{1.4.10}$$

$$\Delta(e_k) = \textstyle\sum_{i,j} \mu_k^{ij} e_i \otimes e_j = \mu_k^{ij} e_i \otimes e_j, \tag{1.4.11}$$

$$S'(e_i) = \textstyle\sum_p \sigma_i^p e_p. \tag{1.4.12}$$

Отметим, что эти же структурные константы задают умножение, коумножение и антипод S в двойственной суперaлгебре A^0 с противоположным коумножением

$$[e^i, e^j] = \textstyle\sum_k \mu_k^{ij} e^k = \mu_k^{ij} e^k, \tag{1.4.13}$$

$$\Delta(e^k) = \textstyle\sum_{i,j} c_{ji}^k e^i \otimes e^j = c_{ji}^k e^i \otimes e^j, \tag{1.4.14}$$

$$S(e^i) = \textstyle\sum_p \sigma_p^i e^p. \tag{1.4.15}$$

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее предложение, описывающее структуры левой и, соответственно, правой A-модульной косупералгебры на двойственной супералгебре Хопфа A^0 с противоположным коумножением.

Предложение 1.4.3. *На A^0 существует единственная структура левой (правой) A-модульной косупералгебры, задаваемой для любых $a, x \in A$ и произвольного $f \in A^0$ следующими формулами для левого $L : A \otimes A^0 \to A^0$ и правого $R : A^0 \otimes A \to A^0$ действий:*

$$\langle a, L(x)f \rangle = \sum_x \langle S^{-1}(x^{(2)}) a x^{(1)}, f \rangle, \tag{1.4.16}$$

$$\langle a, R(x)f \rangle = \sum_x \langle (x^{(2)}) a S^{-1}(x^{(1)}), f \rangle. \tag{1.4.17}$$

Мы будем также использовать обозначения:

$$L(x)f = x \cdot f, \quad R(x)f = f^x.$$

Доказательство. Предложение доказывается прямыми вычислениями с использованием аксиом супералгебры Хопфа (которые с точностью до правил выбора знаков совпадают с аксиомами, определяющими алгебру Хопфа).

□

Теперь перейдём к описанию важнейшей в дальнейшем конструкции квантового дубля супералгебры Хопфа.

Определение 1.4.3. Квантовым дублем $(D(A), R)$ *супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа $D(A)$, что*

1) $D(A)$ содержит A и A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа;

2) R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$ при вложении $A \otimes A^0 \hookrightarrow D(A) \otimes D(A)$, то есть

$$R = \sum_i e_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes e^i.$$

3) Как векторное пространство $D(A)$ можно отождествить с $A \otimes A^0$.

Следующее предложение является несложным обобщением на случай супералгебр Хопфа аналогичного утверждения в случае алгебр Хопфа из работы [120]. Мы приводим его доказательство в более полной форме для удобства читателя.

Предложение 1.4.4. *Структура супералгебры Хопфа в $D(A)$ определяется следующими коммутационными соотношениями:*

$$e_s \cdot e^t = \mu_s^{kjn} c_{plk}^t \sigma_n^p e^l \cdot e_j, \tag{1.4.18}$$

$$e^t \cdot e_s = \mu_s^{njk} c_{klp}^t \sigma_n^p e_j \cdot e^l. \tag{1.4.19}$$

Отметим, что в приведённой выше формуле знаки суммы опущены, а суммирование производится по повторяющимся индексам. Кроме того здесь структурные константы умножения и коумножения $\{c^t_{klp}\}, \{\mu^{njk}_s\}$ определяются из соотношений

$$e_k \cdot e_l \cdot e_p = c^t_{klp} e_t, \quad (\Delta \otimes id)(\Delta(e_s)) = \mu^{njk}_s e_n \otimes e_j \otimes e_k.$$

Доказательство. Докажем формулу (1.4.18). Доказательство формулы(1.4.19) аналогично. Основную роль в доказательстве будет играть тот факт, что квантовый дубль супералгебры Хопфа является квазитреугольной супералгеброй Хопфа, то есть, что

$$\Delta^{op}(a) = R\Delta(a)R^{-1}.$$

Полагая $a = e_i$ получим, что

$$\Delta^{op}(e_i)R = R\Delta(e_i). \tag{1.4.20}$$

Для удобства введём следующие два оператора

$$G = (m \otimes id) \circ (S \otimes id \otimes id) \circ (\Delta \otimes id), \tag{1.4.21}$$

$$G' = (m \otimes id) \circ (S' \otimes id \otimes id) \circ (\Delta^{op} \otimes id). \tag{1.4.22}$$

Здесь, как и выше, мы через $m, S, S', \Delta, \Delta^{op} = \sigma \circ \Delta$ обозначили операции умножения, антипода, косого антипода, коумножения и противоположного коумножения (σ как обычно обозначает оператор суперперестановки тензорных сомножителей).

Отметим следующие непосредственно проверяемые равенства

$$G \circ \Delta(a) = (m \otimes id) \circ (S \otimes id \otimes id) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta(a) = a, \tag{1.4.23}$$

$$G' \circ \Delta^{op}(a) = (m \otimes id) \circ (S' \otimes id \otimes id) \circ (\Delta^{op} \otimes id) \circ \Delta^{op}(a) = a, \tag{1.4.24}$$

$$G(R) = (m \otimes id) \circ (S \otimes id \otimes id) \circ (\Delta \otimes id)(R) = \textstyle\sum_i \varepsilon(e_i)e^i \tag{1.4.25}$$

$$G' \circ \Delta^{op}(a) = (m \otimes id) \circ (S' \otimes id \otimes id) \circ (\Delta^{op} \otimes id)(R) = \textstyle\sum_i \varepsilon(e_i)e^i. \tag{1.4.26}$$

Применим, сначала к левой и правой частям равенства (1.4.20) оператор G', получим после несложных преобразований равенство (1.4.18). Действительно, поскольку G и G' являются композициями гомоморфизмов супералгебр, а следовательно и сами являются гомоморфизмами супералгебр, получаем следующее равенство

$$G'(\Delta^{op}(e_i))G'(R) = G'(R)G'(\Delta(e_i)).$$

Аналогично, применяя к левой и правой частям равенства (1.4.20) оператор G, получим после несложных преобразований равенство (1.4.19).

Отметим, что из аксиом супералгебры Хопфа вытекает, что

$$\mu^{kn}_s \sigma^p_n c^t_{pk} = \varepsilon(e_s)E^t, \tag{1.4.27}$$

где E^t – соответствующая координата единичного оператора. Перепишем в координатной форме равенство (1.4.20) и воспользуемся соотношением (1.4.27). Отметим, что эквивалентным образом соотношение (1.4.19) может быть описано в следующей инвариантной форме:

$$\varphi f = \sum_i \langle \varphi^{(1)}_i, f^{(3)}_i \rangle \langle S^{-1}\varphi^{(3)}_i, f^{(1)}_i \rangle f^{(2)}_i \varphi^{(2)}_i, \tag{1.4.28}$$

где $(\Delta \otimes id)\Delta(f) = \sum_i f^{(1)}_i \otimes f^{(2)}_i \otimes f^{(3)}_i$, $(\Delta \otimes id)\Delta(\varphi) = \sum_i \varphi^{(1)}_i \otimes \varphi^{(2)}_i \otimes \varphi^{(3)}_i$. □

Таким образом, мы показали, что приведённые в определении квантового дубля условия, действительно однозначно определяют структуру квазитреугольной супералгебры Хопфа на тензорном произведении супералгебры Хопфа и двойственной к ней супералгебры Хопфа функционалов с противоположным коумножением. Аналогичный результат справедлив и для топологических супералгебр Хопфа.

Предложение 1.4.5. *Пусть A – топологическая градуированная супералгебра Хопфа с h-адической топологией, индуцированной градуировкой, A^0 – двойственная к A супералгебра Хопфа непрерывных линейных функционалов на A с противоположным к коумножению на A^*, индуцированному умножением в A. Тогда на $A\hat{\otimes}A^0$ существует единственным образом определяемая следующими условиями структура квазитреугольной супералгебры Хопфа $D(A)$:*
1) $D(A)$ содержит A и A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа;
2)Универсальная R-матрица $R \in D(A)\hat{\otimes}D(A)$ является образом канонического элемента $A\hat{\otimes}A^0$ при вложении $A\hat{\otimes}A^0 \hookrightarrow D(A)\hat{\otimes}D(A)$, то есть

$$R = \sum_i e_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes e^i.$$

При этом структура операции умножения в $D(A)$ определяется следующими коммутационными соотношениями (1.4.18), (1.4.19), то есть:

$$e_s \cdot e^t = \textstyle\sum_{n,p,k=1}^{\infty} \mu_s^{kjn} c_{plk}^t \sigma_n^p e^l \cdot e_j, \tag{1.4.29}$$

$$e^t \cdot e_s = \textstyle\sum_{n,k,p,=1}^{\infty} \mu_s^{njk} c_{klp}^t \sigma_n^p e_j \cdot e^l. \tag{1.4.30}$$

$$\tag{1.4.31}$$

Здесь, как и выше $\{c_{lk}^i\}$, $\{\mu_j^{pr}\}$ – структурные константы умножения и коумножения в супералгебре Хопфа A или, что тоже самое, коумножения и умножения в двойственной супералгебре A^*. Другими словами, если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – базис в A, а $\{e^i\}_{i=1}^{\infty}$ – двойственный базис в A^*, то умножение и коумножение в A определяются следующими формулами:

$$e_i \cdot e_j = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^k e_k, \tag{1.4.32}$$

$$\Delta(e_j) = \textstyle\sum_{k,l=1}^{\infty} \mu_j^{kl} e_k \otimes e_l. \tag{1.4.33}$$

Отметим, что в формулах (1.4.29), (1.4.30), (1.4.32), (1.4.33) правые части представлены абсолютно сходящимися в h-адической топологии рядами.

Доказательство. Доказательство данного предложения в целом повторяет доказательство предыдущего. Следует только проследить за корректностью определения и сходимостью в $\hbar$-адической топологии, получающихся в процессе доказательства, формул.

□

1.4.3 Категории представлений. Тензорные и квазитензорные категории

В этом параграфе мы опишем моноидальные категории для перечисленных выше супералгебр Хопфа (см. [6], [211]). Я напомню, что категория называется моноидальной, если она наделена произведением (например, обозначаемым как тензорное произведение объектов), которое ассоциативно, а также имеет двусторонний единичный объект. Нас будут интересовать категории левых модулей над супералгеброй Хопфа и комодульной супералгеброй.

Существует тесная связь между свойствами супералгебры Хопфа (комодульной супералгебры) и свойствами категории её представлений, которая является моноидальной категорией. Отметим, что если M, N – модули над почти кокоммутативной алгеброй (супералгеброй) Хопфа A, то определён изоморфизм A-модулей: $c_{M,N} : M \otimes N \to^{\cong} \ N \otimes M$, где $c_{M,N} = \sigma \circ R_{M,N}$, где $\sigma(m \otimes n) = (-1)^{p(m)p(n)} n \otimes m$ – перестановка тензорных сомножителей, $R_{M,N}$ – образ универсальной R-матрицы R в тензорном произведении $EndM \tilde{\otimes} EndN = End(M \otimes N)$.

Пусть C – некоторая категория и определён функтор из $C \times C$ в C. Это означает, что i) для каждой пары (V, W) объектов категории C дан ассоциированный с ними объект $V \otimes W$,
ii) имеется морфизм $f \otimes g$, ассоциированный с каждой парой (f, g) морфизмов в C такой, что

$$s(f \otimes g) = s(f) \otimes s(g) \quad b(f \otimes g) = b(f) \otimes b(g),$$

iii) если f' и g' – морфизмы такие, что $s(f') = b(f)$ и $s(g') = b(g)$, то

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g \circ g'), \tag{1.4.34}$$

iv)

$$id_{V \otimes W} = id_V \otimes id_W \tag{1.4.35}$$

Отметим, что из соотношения (1.4.34) следует, что

$$f \otimes g = (f \otimes id_{b(g)}) \circ (id_{s(f)} \otimes g) = (id_{b(f)} \otimes g) \circ (f \otimes id_{s(g)}).$$

Произвольный функтор $\otimes : C \times C \to C$ называют тензорным произведением. Пусть C – категория с тензорным произведением $\otimes$. Условием ассоциативности для $\otimes$ называется естественный изоморфизм

$$\alpha : \otimes(\otimes \times id) \to \otimes(id \times \otimes).$$

Это означает, что для любой тройки (U, V, W) объектов категории C имеется изоморфизм

$$\alpha_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W), \tag{1.4.36}$$

такой, что квадрат

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "\alpha_{U,V,W}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\
(U' \otimes V') \otimes W' \arrow[r, "\alpha_{U',V',W'}"] & U' \otimes (V' \otimes W')
\end{tikzcd}$$

коммутативен для произвольных морфизмов f, g, h категории C.

Отметим, что язык тензорных категорий эквивалентен языку алгебр (супералгебр) Хопфа. В некоторых случаях бывает им удобнее пользоваться.

1.5 Квантование. Основные принципы

1.5.1 Квантование топологических супералгебр

В этом параграфе мы обсудим основные принципы квантования, рассматриваемого как формальная деформация (см. также [143]). Понятие квантования возникло в физике с появлением квантовой механики. В математике существует несколько интерпретаций этого понятия. На наш взгляд простой, естественный и общий подход был предложен В.Г. Дринфельдом (см. [120]). Этот подход в дальнейшем был обобщён в работах М. Концевича (см. [192], [193]), Гира и других авторов (см., например, цитированную выше работу [143]).

Начиная с Н. Бора под квантованием понимали деформацию с параметром деформации $\hbar$ алгебры $C^\infty(M)$ функций (наблюдаемых) на гладком многообразии M, наделённой скобкой Пуассона. Более точно, квантование – это семейство алгебр операторов $A_\hbar$, параметризованное параметром $\hbar$. Причём в ситуации общего положения (для всех значений параметра деформации $\hbar$, отличного от нуля) это алгебра $A_\hbar$ (самосопряжённых) операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, а при $\hbar = 0$ эта алгебра совпадает с алгеброй операторов умножения на функции из исходной пуассоновой алгебры функций на заданном многообразии M, которую называют алгеброй классических наблюдаемых, то есть $A_0 = C^\infty(M)$. При этом, если на многообразии M, действовала группа симметрий G (пуассонова группа с пуассоновским действием), то это действие сохранялось и на всех алгебрах семейства деформации $A_\hbar$. При более общем подходе к квантованию В.Г. Дринфельда стала деформироваться и группа симметрий G, точнее алгебра функций $C^\infty(G)$, деформирующаяся в классе алгебр Хопфа, а её действие деформируется в классе действий алгебр Хопфа, которое при $\hbar = 0$ превращается в пуассоново действие. Собственно описанные выше соображения и привели В.Г. Дринфельда к необходимости введения квантовых групп.

Определение 1.5.1. *Квантованием бисуперагебры Ли* $\mathfrak{a}$ *называется супералгебра Хопфа* $A_\hbar$ *над кольцом формальных степенных рядов* $\mathbb{C}[[\hbar]]$*, которая удовлетворяет следующим условиям:*
1)
$$A_\hbar/\hbar A_\hbar \cong U(\mathfrak{a}),$$
где $U(\mathfrak{a})$ *– универсальная обёртывающая супералгебра супералгебры Ли* $\mathfrak{a}$*;*
2) Супералгебра $A_\hbar$ *изоморфна* $U(\mathfrak{a})[[\hbar]]$*, как векторное пространство;*
3) выполняется следующий принцип соответствия
$$\hbar^{-1}(\Delta(x) - \Delta^{op}(x)) \mathrm{mod}\, \hbar = \varphi(x (\mathrm{mod}\, \hbar)),$$
где Δ*– коумножение,* $\Delta^{op} = \sigma \circ \Delta$ *– противоположное коумножение (*$\sigma(a \otimes b) = (-1)^{p(a)p(b)} b \otimes a$*).*

Коротко остановимся на общих принципах квантования, на которые будет опираться дальнейшее изложение, а также на их когомологической интерпретации.

Мы рассмотрим последовательно формальные деформации топологических супералгебр, топологических бисупералгебр Ли (копуассоновых супералгебр) и комодульных супералгебр. Мы также рассмотрим деформации (квантования), как квазитреугольных, так и псевдотреугольных и копсевдотреугольных структур на бисупералгебрах Хопфа. Мы сформулируем в когомологических терминах условия существования и единственности таких деформаций и докажем в определённых случаях существование и единственность таких формальных деформаций. Нам потребуются некоторые понятия теории когомологий супералгебр Ли и ассоциативных супералгебр, а также основные понятия теории топологических супералгебр. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ – супералгебра Ли над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики, $M = M_0 \oplus M_1$ – левый $\mathfrak{g}$-модуль, то есть M – градуированное векторное пространство вместе с билинейным отображением $\mathfrak{g} \times M \to M$ таким, что $[x, y] \cdot m = x \cdot (y \cdot m) - (-1)^{p(x)p(y)} y \cdot (x \cdot m)$, для всех однородных элементов $x, y \in \mathfrak{g}, m \in M$. Сразу из определения вытекает, что M является левым $\mathfrak{g}$-модулем в том и только в том случае, когда он является левым $U(\mathfrak{g})$-модулем. Для $n > 0$ пусть

$$C^n(\mathfrak{g}, M) = Hom(\oplus_{m+p=n} \bigwedge^m \mathfrak{g}_0 \otimes S^p\mathfrak{g}_1, M),$$

а

$$C^n_p(\mathfrak{g}, M) = Hom(\oplus_{m+p=n, p+r\equiv p(mod2)} \bigwedge^m \mathfrak{g}_0 \otimes S^p\mathfrak{g}_1, M_r).$$

Определим дифференциал $d : C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ формулой:

$$\begin{gathered}\delta^{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_m, h_1, \ldots, h_p) = \\ \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq m}(-1)^{i+j-1} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots \hat{x}_j, \ldots, x_m, h_1, \ldots, h_p) + \\ \textstyle\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^p (-1)^{s-1} f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots \hat{x}_j, \ldots, x_m, [x_i, h_j], h_1, \ldots, \hat{h}_j, \ldots, h_p) + \\ \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq m} f([h_i, h_j], x_1, \ldots, x_m, h_1, \ldots, \hat{h}_i, \ldots \hat{h}_j, \ldots, h_p) + \\ \textstyle\sum_{s=1}^m (-1)^s x_s \cdot f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_m, h_1, \cdots, h_p) + \\ (-1)^{m-1} \textstyle\sum_{s=1}^m h_s \cdot f(x_1, \ldots, x_m, h_1, \ldots, \hat{h}_i, \cdots, h_p)\end{gathered}$$

для $\forall x_1, \cdots, x_m \in \mathfrak{g}_0, h_1, \cdots, h_p \in \mathfrak{g}_1, f \in C^n(\mathfrak{g}, M)$. Легко проверить, что $d\circ d = 0, d(C^n_p(\mathfrak{g}, M)) \subset C^{n+1}_p(\mathfrak{g}, M)$ так, что возникают когомологии $H^n_p(\mathfrak{g}, M), n = 0, 1, 2, \cdots; p = 0, 1$.

Отметим, что в случае когда супералгебра Ли является алгеброй Ли, а модуль M – модуль над алгеброй Ли, формула для дифференциала упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\delta^{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}) + \\ \textstyle\sum_{1\leq i\leq n+1}(-1)^{i+1} x_i \cdot f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}),\end{gathered}$$

для $\forall x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathfrak{g}$.

Получаем коцепной комплекс, когомологии которого и называются когомологиями супералгебры (алгебры) Ли с коэффициентами в модуле M и обозначаются через

$$H^i(\mathfrak{g}, M) = Ker\delta^i / Im\delta^{i-1}.$$

Ниже нам потребуется интерпретация классов одномерных и двумерных когомологий. Отметим, что естественную интерпретацию получают только однородные когомологии – чётные или нечётные. Сначала опишем одномерные коциклы и одномерные кограницы. Заметим, что одномерный коцикл f имеет следующий вид: $df(x, y) = f([x, y]) + \epsilon_1 x \cdot f(y) + \epsilon_2 y \cdot f(x) = 0$, где знаки ϵ_1, ϵ_2 выбираются в зависимости от чётности элементов x, y, именно $\epsilon_i = -1$ $(i = 1, 2)$, если оба элемента x, y – нечётные, а в остальных случаях $\epsilon_i = 1, i = 1, 2$. Элемент f является 1-кограницей, если найдётся такой элемент u, что $f(x) = x \cdot u$. Отметим, что элементы пространства $H^1_0(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ интерпретируются как классы одномерных правых расширений:

$$0 \to \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to k(0) \to 0,$$

где $k(p)$ – одномерная супералгебра с нулевым суперкоммутатором размерности $(1|0)$ при $p = 0$ и размерности $(0|1)$ при $p = 1$, то есть $k(p)_p \simeq \Bbbk$. Если супералгебра Ли не имеет центра, либо её центр не содержит чётных элементов, то классы расширений вида:

$$0 \to \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to k(1) \to 0,$$

где $\widetilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0$, а $\widetilde{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g} \oplus k$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы когомологий $H^1_1(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ квадрат и куб Масси которых равны 0. Отметим, что элемент центра является образующей одномерной группы когомологий и связь между классами когомологий и расширениями может быть получена, по существу, из тождества Якоби между элементами, представляющими коциклы.

Опишем теперь 2-мерные коциклы и кограницы. Двумерный коцикл f определяется формулой:

$$\epsilon_1 x \cdot f(y,z) + \epsilon_2 y \cdot f(z,x) + \epsilon_3 z \cdot f(x,y) - \eta_1 f([x,y],z) - \eta_2 f([y,z],x) - \eta_1 f([z,x],y) = 0.$$

Это отображение является кограницей в том и только в том случае, когда найдётся такое отображение α, что

$$f(x,y) = x \cdot \alpha(y) - \epsilon y \cdot \alpha(x) - \eta\alpha([x,y]).$$

Знаки ϵ_i, η_j в приведённых выше формулах выбираются в зависимости от чётности элементов x, y и равны 1, если x или y – является чётным элементом, и знак выбирается равным -1, если оба элемента x, y – нечётные. Отметим, что элементы пространства когомологий $H^2_p(\mathfrak{g})$, $p = 0, 1$ интерпретируются как классы центральных расширений

$$0 \to k(p) \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0.$$

Элементы пространства $H^2_0(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ интерпретируются как инфинитезимальные деформации супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, при этом, при инфинитиземальной деформации деформируется суперкоммутатор (но не структура суперпространства). Элементы же пространства $H^2_1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ интерпретируются как нечётные инфинитезимальные деформации. Следует сказать, что естественных нечётных деформаций нет, а степени Масси элементов пространства $H^2_1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ все тривиальны. (Отметим также, что для когомологий супералгебр Ли имеет место спектральная последовательность Серра-Хохшильда, которая расщепляется в прямую сумму чётной и нечётной частей.)

Напомним кратко данное выше определение алгебры над кольцом формальных степенных рядов $\Bbbk[[\hbar]]$. Рассмотрим алгебру $\Bbbk[[\hbar]]$ формальных степенных рядов от одной переменной $\hbar$ с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ (нулевой характеристики). Элементы алгебры имеют вид $\sum_{n\geq 0} a_n\hbar^n$, где $a_n \in k, n \geq 0$. Рассмотрим кольцо усечённых многочленов $\Bbbk[\hbar]/\langle\hbar^n\rangle$ – факторкольцо кольца многочленов от $\hbar$ по идеалу, порождённому $\hbar^n$. Легко проверить, что существует изоморфизм $\Bbbk[[\hbar]] \to lim_{\infty\leftarrow n}\Bbbk[\hbar]/\langle\hbar^n\rangle$. В силу этого изоморфизма будем считать алгебру $\Bbbk[[\hbar]]$ наделённой топологией обратного предела, то есть $\hbar$-адической топологией, введённой выше. Ниже мы будем пользоваться определением *топологической супералгебры.* Оно является очевидной модификацией приведённого выше определения топологической алгебры и на этом мы не будем останавливаться.

Теорема 1.5.1. *Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ – супералгебры Ли. Пусть также заданы два гомоморфизма $\alpha, \alpha' : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}')$ такие, что $\alpha = \alpha' mod\hbar = \alpha_0$. Если $H^1(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}')) = 0$, то существует обратимый элемент $F \in U(\mathfrak{g}')[[\hbar]], f = 1 mod\hbar$ такой, что $\alpha'(x) = F\alpha(x)F^{-1}, \forall x \in U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$.*

Доказательство. Заметим, что $U(\mathfrak{g}')$ может быть наделена естественной структурой левого $\mathfrak{g}$-модуля: для произвольного $x \in \mathfrak{g}$ $x \cdot u = [\alpha_0(x), u], \forall u \in U(\mathfrak{g}')$. Здесь $\alpha(x) = \sum_{n\geq 0}\alpha_n(x), \forall x \in U(\mathfrak{g})$, $\alpha_0 : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}')$. Нужно доказать, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g})[[\hbar]] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id"] & U(\mathfrak{g}')[[\hbar]] \arrow[d, "f"] \\
U(\mathfrak{g})[[\hbar]] \arrow[r, "\alpha'"] & U(\mathfrak{g}')[[\hbar]]
\end{tikzcd}$$

Здесь вертикальные стрелки означают изоморфизмы. Опишем свойства гомоморфизма α. Из определения гомоморфизма вытекает следующее равенство $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$, которое переписывается в следующем виде:

$$(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(x)\hbar^m) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x)\hbar^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x \cdot y)\hbar^m.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha_n(x \cdot y) = \textstyle\sum_{m=0}^{n} \alpha_m(x)\alpha_{n-m}(y), \quad n > 0,$$
$$\alpha_0(x \cdot y) = \alpha_0(x) \cdot \alpha_0(y),$$
$$\alpha_n(x + y) = \alpha_n(x) + \alpha_n(y), \quad n \geq 0.$$

Для $n = 1$ равенство переписывается в следующей форме $\alpha_1(x \cdot y) = \alpha_0(x) \cdot \alpha_1(y) + \alpha_1(x) \cdot \alpha_0(y)$. Поэтому

$$\alpha_1([x, y]) = [\alpha_0(x), \alpha_1(y)] + [\alpha_1(x), \alpha_0(y)].$$

Следует напомнить, что по определению отображение f называется 1-коциклом, если имеет место равенство:

$$f([x, y]) = x \cdot f(y) - (-1)^{p(x)p(y)} y \cdot f(x). \tag{1.5.1}$$

Таким образом, мы получаем, что α_1 является 1-коциклом. Но, по условию теоремы, $H^1(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}')) = 0$, следовательно, α_1 является кограницей, то есть существует такой элемент $u_1 \in U(\mathfrak{g}')$, что $\alpha_1 = du_1$, или

$$\alpha_1(x) = x \cdot u_1 = [\alpha_0(x), u_1], \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Пусть теперь

$$\alpha^{(1)}(x) = (1 + u_1\hbar)\alpha(x)(1 + u_1\hbar)^{-1}.$$

Найдём теперь $\alpha^{(1)} mod \hbar^2$:

$$\alpha^{(1)}(x) \equiv \alpha_0(x) + (u_1\alpha_0(x) - \alpha_0(x)u_1 + \alpha_1(x))\hbar mod \hbar^2 \equiv \alpha_0(x).$$

Заметим, что

$$(1 + u_1\hbar)^{-1} = 1 - u_1\hbar + u_1^2\hbar^2 - \cdots.$$

Положим

$$\alpha(1) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n^{(1)} \hbar^n.$$

Предыдущие вычисления показывают, что $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0, \alpha_1^{(1)} = 0$. Теперь можно применить такие же рассуждения к $\alpha_2^{(1)}$. Так же как и выше показывается, что ограничение $\alpha_2^{(1)}$ на $\mathfrak{g}$ снова является 1-коциклом и, следовательно. в силу условия теоремы, является кограницей. По тем же причинам, что и выше, существует элемент $u_2 \in U(\mathfrak{g}')$ такой, что $\alpha_2^{(1)}(x) = x \cdot u_2 = [\alpha_0(x), u_2], \forall x \in \mathfrak{g}$. Положим

$$\alpha^{(2)}(x) = (1 + u_2\hbar^2)\alpha(x)(1 + u_2\hbar^2)^{-1}.$$

Так же получаем, что $\alpha^{(2)} \equiv \alpha_0 mod \hbar^3$. Продолжая рассуждения по индукции построим последовательность элементов $u_1, u_2, u_3, \cdots$ в $U(\mathfrak{g}')$ таких, что

$$U_n\alpha(x)U_n^{-1} \equiv \alpha_0(x) mod \hbar^{n+1}$$

для всех $n > 0$ и $x \in U(\mathfrak{g})$, где

$$U_n = (1 + u_n\hbar^n)(1 + u_{n-1}\hbar^{n-1}) \cdots (1 + u_1\hbar).$$

Переходя к обратному пределу, получаем, что семейство операторов $(U_n)_{n>0}$ задаёт обратимый элемент $U \in U(\mathfrak{g}')[[\hbar]]$ такой, что $U \equiv 1 mod \hbar$ и $\alpha(x) = U^{-1}\alpha_0(x)U$ для всех $x \in U(\mathfrak{g})$. Для того, чтобы закончить доказательство теоремы осталось заметить, что такими же рассуждениями можно построить и обратимый элемент $U \in U(\mathfrak{g}')[[\hbar]]$ для гомоморфизма α', то есть такой элемент, что $\alpha'(x) = U'^{-1}\alpha'_0(x)U'$ для всех $x \in U(\mathfrak{g})$. Но так как $\alpha_0 = \alpha'_0$ получаем, что $\alpha'(x) = U'^{-1}\alpha_0(x)U'$ для всех $x \in U(\mathfrak{g})$. Для завершения доказательства осталось положить $F = U'^{-1}U$ и получаем утверждение доказываемой теоремы. □

Теперь попробуем ответить на вопрос о существовании квантования для универсальной обёртывающей суперагебры, точнее о существовании плоских деформаций универсальных обёртывающих суперагебр Ли, рассматриваемых как топологические суперагебры.

Теорема 1.5.2. *Пусть A – топологическая суперагебра, удовлетворяющая следующим условиям:*
1) суперагебра $A/\hbar A$ совпадает с обёртывающей суперагеброй некоторой суперагебры Ли (комплексной) $\mathfrak{g}$: $A/\hbar A = U(\mathfrak{g})$,
2) как $C[[\hbar]]$-модуль алгебра A топологически свободна, то есть $A = U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$;
3) единица суперагебры A является постоянным степенным рядом совпадающим с 1 при отождествлении A с $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$.
Если группа $H^2(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}')) = 0$ то существует изоморфизм $\alpha : A \to U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ топологических суперагебр, индуцирующий по модулю $\hbar$ отображение $A/\hbar A \to U(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Заметим, что мы предполагаем, что $U(\mathfrak{g})$ является $\mathfrak{g}$-модулем относительно присоединённого действия суперагебры Ли на $U(\mathfrak{g})$. Отождествим сперва $C[[\hbar]]$-модуль A с $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ и будем рассматривать операцию умножения как $C[[\hbar]]$-линейное отображение

$$\mu : A\tilde{\otimes}A = (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))[[\hbar]] \to A = U(\mathfrak{g})[[\hbar]],$$

$\mu = \sum_{n\geq 0} \mu_n\hbar^n$. Нетрудно понять, что μ совпадает с умножением в обёртывающей суперагебре $U(\mathfrak{g})$. Ассоциативность умножения может быть переписана в виде: $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z)), \forall x, y, z \in U(\mathfrak{g})$. Это условие равносильно следующей бесконечной системе соотношений

$$\sum_{p+q=n} \mu_p(\mu_q(x, y), z) = \sum_{p+q=n} \mu_p(x, \mu_q(y, z)) \tag{1.5.2}$$

для всех $x, y, z \in U(\mathfrak{g}), n \geq 0$. Пусть N – наименьшее натуральное число n такое, что $\mu_n \neq 0$ (если такое число существует). Если такого числа не существует, то $\mu = \mu_0$, что означает совпадение A с $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$, как топологических суперагебр, что и требовалось доказать. Если N существует, то перепишем (1.5.2) для $n - N$. Обозначая обычным образом произведение элементов в $U(\mathfrak{g})$, получим

$$\mu_N(xy, z) + \mu_N(x, y)z = \mu_p(x, \mu_N(x, yz)) + x\mu_N(y, z) \tag{1.5.3}$$

для всех $x, y, z \in U(\mathfrak{g}), n \geq 0$. Таким образом, мы получаем, что μ_n – 2-коцикл. Так как $H^2(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}')) = 0$ то мы получаем, что μ_n является кограницей и, следовательно, существует линейный оператор α_N на $U(\mathfrak{g})$, удовлетворяющий условиям $\alpha_N(1) = 0$ и

$$\mu_N(x, y) = x\alpha_N(y) - \alpha_N(xy) + \alpha_N(x)y \tag{1.5.4}$$

для всех $x, y, z \in U(\mathfrak{g})$. Зададим $C[[\hbar]]$-линейный автоморфизм супералгебры $U(\mathfrak{g}))[[\hbar]]$ формулой: $\alpha = id + \alpha_n \hbar^N$. Обратный к нему автоморфизм будет иметь вид: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_N^n \hbar n N$. Заметим, что $\alpha(1) = 1$. Зададим на A новое умножение μ' формулой:

$$\mu'(x, y) = \alpha(\mu(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))). \tag{1.5.5}$$

Так как $\alpha \equiv id(mod \hbar^N)$ то мы имеем $\mu' = \mu(mod \hbar^N)$. Вычислим μ' с точностью до $\hbar^{N+1}$. Соотношение (1.5.4) влечёт
$\mu'(x, y) \equiv xy + \mu'_N(x, y)\hbar^N = (id + \alpha_N \hbar^N)((\mu_0 + \mu_N \hbar^N)(x - \alpha_N(x)\hbar^N, y - \alpha_N(y)\hbar^N)) \equiv xy + (\alpha_N(xy) + \mu_N(xy) - \alpha_N(x)y - x\alpha_N(y))\hbar^N \equiv xy(mod \hbar^{N+1})$.
Следовательно, $\mu' = \mu_0$ есть умножение в $U(\mathfrak{g})$, в то время как $\mu'_1 = \cdots = \mu'_N = 0$. используем эту процедуру для построения изоморфизма алгебр A и $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. В результате применения рассуждения, приведённого выше к случаю $N = 1$, мы получаем изоморфизм вида $id + \alpha_1 \hbar$ между алгеброй A с исходным умножением и алгеброй A, снабжённой таким новым умножением $\mu^{(1)}$, что $\mu_1^{(1)} = 0$. Применяя теперь это же рассуждение к умножению $\mu^{(1)}$ и $N = 2$, мы получаем изоморфизм $id + \alpha_2 \hbar^2$ между $(A, \mu^{(1)})$ и $(A, \mu^{(2)})$, где $\mu^{(2)}$ – такое умножение, что $\mu_1^{(2)} = \mu_2^{(2)} = 0$. Повторяя эту процедуру бесконечное число раз мы получим изоморфизм α между супералгеброй A с исходным умножением и супералгеброй A, снабжённой таким умножениемη,что $\eta_n = 0, n \geq 0$, то есть с обычным умножением в $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Теорема доказана. □

Мы видим, что операция умножения при плоских деформациях не деформируется. Рассмотрим теперь вопрос о деформации операции коумножения. Другими словами, мы рассмотрим вопрос о деформациях косупералгебр. Рассмотрим следующий коцепной комплекс (сравни с [28]):

$$0 \to k \to^{d_0} \; U(\mathfrak{g}) \to^{d_1} \; U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \to^{d_2} \cdots , \tag{1.5.6}$$

где

$$U(\mathfrak{g})^{\otimes n} = \oplus_{k+l=n} \, U(\mathfrak{g}_0)^{\otimes k} \otimes U(\mathfrak{g}_1)^{\otimes l},$$

$$d_n = \sum_{k+l=n} \tilde{d}_k \oplus \delta_l,$$

$$\tilde{d}_k = d_k^0 - d_k^1 + \cdots + (-1)^{k+1} d_k^{k+1}, d_k^i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_k,$$

$$\delta_l = \delta_l^0 + \cdots + \delta_l^{l+1}, \delta_l^i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_l) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_{i-1} \otimes \Delta(b_i) \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_l,$$

при $1 \leq i \leq n$, $d_n^0(x) = \delta_n^0(x) = 1 \otimes x, d_n^{n+1}(x) = \delta_n^{n+1}(x) = x \otimes 1$.

Когомологии этого комплекса H^n и будут играть важную роль при изучении вопроса о существовании и единственности деформации структуры коалгебры. Нетрудно видеть, что эти когомологии H^n являются также когомологиями следующего комплекса (что является, в частности, следствием расщепимости в прямую сумму чётной и нечётной частей и вырожденности, упомянутой выше спектральной последовательности Серра-Хохшильда):

$$0 \to B^0 \to^{d_0} \; B^1 \to^{d_1} \; B^2 \to^{d_2} B^3 \to^{d_3} \cdots , \tag{1.5.7}$$

где $B^n = Kers_n^1 \cap \cdots \cap Kers_n^n, s_n^i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \epsilon(a_i) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$. Для того, чтобы обосновать этот факт можно заметить, что k-модули $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ образуют косимплициальный k-модуль, в котором операторы d_n^i являются операторами граней, а операторы s_n^i – операторы вырождения. Как видно, в суперслучае наличие дополнительной градуировки приводит к небольшим изменениям по сравнению со случаем, рассмотренным в [28]. Вычисления когомологий этого комплекса проводятся, по существу также, как и в неградуированном случае. Вычисления показывают, что вторые когомологии нулевые, а первые часто бывают ненулевыми. Отметим, силу отмеченного выше факта расщепимости спектральной последовательности, вычисление когомологий в случае супералгебр можно часто свести к вычислениям для чётной части. В неградуированном случае такие вычисления проведены в работе [28]. Мы подробно остановимся на вычислении когомологий в следующем пункте работы.

1.5.2 Вычисление когомологий базисных супералгебр Ли

Мы хотим вычислить группы когомологий $H^i(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$ при $i = 1, 2$ для базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы хотим показать в конечном счёте, что коцикл, задаваемый классической r-матрицей Янга задаёт тривиальную деформацию универсальной обёртывающей супералгебры токов со значениями в базисной супералгебре Ли. Наши рассуждения будут обосновывать существование такой плоской деформации. Отметим, что когомологии супералгебр Ли с коэффициентами в модуле были вычислены в некоторых конкретных случаях, например, в работе [259]. Отметим, что наличие атипичных неприводимых представлений приводит к тому, что когомологии базисных супералгебр Ли с коэффициентами в неприводимом модуле могут быть нетривиальны, что несколько усложняет доказательства теорем о существовании квантования.

Предложение 1.5.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли, а M – конечномерный нетривиальный простой (неприводимый) левый $\mathfrak{g}$-модуль действие оператора Казимира в котором ненулевое. Тогда $H^k(\mathfrak{g}, M) = 0$ для всех $k \geq 0$.*

Доказательство. Важную роль в доказательстве играет элемент Казимира. Такой элемент существует всегда в универсальной обёртывающей супералгебре базисной супералгебры Ли. Напомним его определение. Пусть $(\cdot, \cdot)$ – невырожденная инвариантная билинейная форма (инвариантное скалярное произведение) на $\mathfrak{g}$. Отметим, что на базисной супералгебре Ли всегда существует инвариантное невырожденное скалярное произведение. Пусть также $(e_i)_{i=1}^n$, $(e^j)_{j=1}^n$ – двойственные относительно этого скалярного произведения базисы, $(e_i, e^j) = \delta_{ij}$, $n = dim(\mathfrak{g})$. Тогда элемент Казимира (оператор Казимира) C определяется формулой:

$$C = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i. \tag{1.5.8}$$

Нетрудно понять, что оператор Казимира действует на любом конечномерном нетривиальном простом модуле как умножение на скаляр. Построим отображение

$$\gamma : C^k(\mathfrak{g}, M) \to C^{k-1}(\mathfrak{g}, M),$$

удовлетворяющее правилу:

$$Cf = \delta\gamma f + \gamma\delta f \tag{1.5.9}$$

для всех $f \in C^k(\mathfrak{g}, M)$. Построим по данному $f \in C^k(\mathfrak{g}, M)$ кососимметрическое полилинейное отображение ($n-1$-линейное) γf со значениями в M по формуле:

$$\gamma f(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{p(e_j)} e_j \cdot f(e^j, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

для всех $y_1, y_2, \ldots y_{n-1} \in \mathfrak{g}$. Если $f \in C^0(\mathfrak{g}, M)$ то положим $\gamma f = 0$. Напомним, что кограничное отображение δ определяется формулой:

$\delta : C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ формулой:

$$\begin{gathered}
\delta^{n+1}(f)(x_1, \dots, x_m, h_1, \dots, h_p) = \\
\textstyle\sum_{1 \le i < j \le m} (-1)^{i+j-1} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots \hat{x}_j, \dots, x_m, h_1, \dots, h_p) + \\
\textstyle\sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{p} (-1)^{s-1} f(x_1, \dots, \hat{x}_s, \dots x_j, \dots, x_m, [x_s, h_t], h_1, \dots, \hat{h}_t, \dots, h_p) + \\
\textstyle\sum_{1 \le i < j \le m} f([h_i, h_j], x_1, \dots, x_m, h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots \hat{h}_j, \dots, h_p) + \\
\textstyle\sum_{s=1}^{m} (-1)^s x_s \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m, h_1, \dots, h_p) + \\
(-1)^{m-1} \textstyle\sum_{s+1}^{m} h_s \cdot f(x_1, \cdot, x_m, h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_p)
\end{gathered}$$

для $\forall x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{g}_0, h_1, \dots, h_p \in \mathfrak{g}_1, f \in C^n(\mathfrak{g}, M)$.

Поэтому

$$(\delta\gamma(f) + \gamma\delta(f))(y_1, \dots, y_n)) = Cf(y_1, \dots, y_n) + \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i + p(e_k \cdot y_i)} Z_i. \tag{1.5.10}$$

Здесь Z_i вычисляется по формуле:

$$Z_i = \sum_k ([e_k, y_i] \cdot f(e^k, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) + e_k \cdot f([e^k, y_i], y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)).$$

Используя введённые раньше функции $\alpha_{kl}, \beta_{k,l}$ мы можем переписать формулу для Z_i в следующей форме:

$$Z_i = \sum_{k,l} ((-1)^{p(x_k y_i)} \alpha_{k,l}(y_i)(e_k \cdot f(e^k, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)) + (-1)^{p(x_l y_i)} \beta_{k,l}(y_i) e_k \cdot f(e^l, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)).$$

Пусть теперь f является n-коциклом со значениями в M, то есть $\delta f = 0$. Тогда из определения γ (см. 1.5.9) мы получаем, что $Cf = \delta(\gamma f)$, откуда следует, что f является кограницей. Так как C действует в M умножением на ненулевую константу, то мы видим, что f также является кограницей. Это доказывает тривиальность групп $H^k(\mathfrak{g}, M)$. ☐

Предложение 1.5.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли, а M – произвольный конечномерный полупростой левый $\mathfrak{g}$-модуль.*

1)

$$H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$$

в том и только в том случае когда модуль M не содержит, подмножество, изоморфное $\mathfrak{g}_0$-модулю $\mathfrak{g}_{\pm 1}$.
В противном случае

$$H^1(\mathfrak{g}, M) = \mathbb{C}.$$

2)

$$H^2(\mathfrak{g}, M) = 0.$$

Доказательство. Так как произвольный полупростой модуль над базисной супералгеброй Ли является прямой суммой простых модулей $M = \oplus_i M_i$, то комплекс $C^*(\mathfrak{g}, M)$ является прямой суммой подкомплексов $C^*(\mathfrak{g}, M_i)$. Отсюда сразу следует, что

$$H^k(\mathfrak{g}, M) \oplus \oplus_i H^k(\mathfrak{g}, M_i).$$

Поэтому, в силу предыдущего предложения, достаточно доказать данное предложение в случае одномерного тривиального $\mathfrak{g}$-модуля C. Покажем сначала тривиальность $H^1(\mathfrak{g},)$. Пусть f – некоторый 1-коцикл со значениями в тривиальном модуле C. В этом случае условие задающее 1-коцикл

$$f([x,y]) = x \cdot f(y) - (-1)^{p(x)p(y)} y \cdot f(x)$$

превращается в условие: $f([x,y]) = 0$. Заметим, что из соотношений Серра (для базисной суперагебры Ли) следует, что элементы вида $[x,y]$ аддитивно порождают супералгебру Ли (как векторное пространство). Отсюда следует, что $f = 0$ на всём векторном суперпространстве $\mathfrak{g}$.Таким образом, получаем, что $H^1(\mathfrak{g},C) = 0$. Покажем теперь, что $H^2(\mathfrak{g},C) = 0$. Этот случай доказывается несколько сложнее предыдущего. Покажем сначала, что если f – 2-коцикл со значениями в C, то линейное отображение $\tilde{f}$ определяемое формулой: $\tilde{f}(x)(y) = f(x,y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$ есть 1-коцикл со значениями в двойственном векторном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Здесь мы предполагаем, что задано левое действие $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$ при помощи коприсоединённого представления. Этот факт проверяется непосредственно. Действительно, если f – 2-коцикл со значениями в C, то из определения 2-коцикла получаем, что в этом случае, каждый коцикл является кограницей.

Теперь рассмотрим случай, когда модуль M не содержит подмодули, изоморфные $\mathfrak{g}_0$-модулям $\mathfrak{g}_{\pm 1}$.

□

Докажем следующий важный результат.

Предложение 1.5.3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли, действующая на $U(\mathfrak{g})$ при помощи присоединённого представления. Тогда*
1)

$$H^1(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) = \mathbb{C}$$

2)

$$H^2(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) = 0.$$

Доказательство. Сведём рассматриваемый случай к случаю конечномерного модуля. Рассмотрим отображение суперсимметризации

$$\eta : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}), \tag{1.5.11}$$

определённое формулой:

$$\eta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

где $\tau : S_n \to \{0,1\}$ – отображение чётности перестановки, а $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. Отметим здесь, что чётность перестановки мы здесь понимаем в следующем смысле. Учитываются только нечётные переставляемые элементы.

Отметим, что η является изоморфизмом векторных пространств (например, в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта). Зададим на $S(\mathfrak{g})$ структуру левого $\mathfrak{g}$-модуля, определяемую формулой:

$$y \cdot (x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{p(y)p(x_i)} x_1 \ldots x_{i-1} [y, x_i] x_{i+1} \ldots x_n, \tag{1.5.12}$$

где $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$. Из вида (1.5.12) и определения структуры $\mathfrak{g}$-модуля на $U(\mathfrak{g})$ следует, что отображение η является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей. Теперь из вида (1.5.12) следует, что действие $\mathfrak{g}$ сохраняет разложение $S(\mathfrak{g})$ в сумму однородных компонент $S^m(\mathfrak{g})$. Таким образом, получаем изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей:

$$U(\mathfrak{g}) \cong \bigoplus_{m\geq 0} S^m(\mathfrak{g}).$$

Следовательно, в силу предыдущего утверждения, мы имеем для $i = 1, 2$:

$$H^i(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{m\geq 0} H^i(\mathfrak{g}, S^m(\mathfrak{g})).$$

Теперь возможны два случая действия оператора Казимира на неприводимых конечномерных компонентах: ненулевое действие и нулевое действие в одной из компонент. Используя точную последовательность получаем, что первая группа когомологий расщепляется в прямую сумму групп, с коэффициентами в неприводимых компонентах. В первом случае, когда действие оператора Казимира получаем, что компонента нулевая, в случае нулевого действия (в одной неприводимой компоненте, являющейся коэффициентом) получаем, что соответствующее слагаемое группы когомологий одномерно.

Таким образом, доказываемое утверждение следует из предыдущего предложения 1.5.3, если симметрические степени суперaлгебры Ли являются полупростыми конечномерными модулями.

□

Вычислим теперь вторые когомологии для конкретных примеров базисных суперaлгебр Ли с коэффициентами в присоединённом модуле. Начнём с суперaлгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m, n)$, $m \neq n$. Наши вычисления будут основываться на использовании длинной точной последовательности, получаемой из последовательности пары, а также на использовании спектральной последовательности Серра-Хохшильда. Отметим, что для некоторых частных случаев вычисления когомологий, например когомологий суперaлгебры Ли $\mathfrak{sl}(m, n)$ со значениями в её универсальной обёртывающей суперaлгебре, такие вычисления проведены в работе [259].

1.5.3 Квантование на языке тензорных категорий

В этом пункте мы опишем квантование бисуперaлгебры Ли на языке тензорных (моноидальных) категорий. Напомним, что категория представлений суперaлгебры Хопфа является тензорной (моноидальной) категорией. Определение тензорной категории дано в работах [125]. Важную роль в этой конструкции играет понятие ассоциатора Дринфельда (см. [28]). Мы покажем, что квантование эквивалентно существованию функтора из тензорной категории $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$-модулей в тензорную категорию, с тензорной структурой задаваемой ассоциатором Дринфельда. Этот язык был использован Д. Кажданом и П. Этингофом при доказательстве гипотез Дринфельда о существовании и единственности квантования биалгебры Ли (см. [126] – [129]). Также, с использованием этого языка, доказывается существование и единственность квантования бисуперaлгебр Ли. Мы используем небольшую модификацию этого языка, удобную для случая категорий модулей над суперaлгеброй, использованную в работе [142], на результаты которой мы будем опираться. Для того, чтобы яснее показать отличительные черты конструкции квантования мы сначала рассмотрим случай квантования конечномерной бисуперaлгебры Ли. Конструкция квантования естественно делится на следующие три шага.

1) Для данной конечномерной бисупералгебры Ли $\mathfrak{a}$ строится её классический дубль $\mathfrak{g}$. Далее рассматривается категория M, объектами которой являются $\mathfrak{g}$-модули и морфизмы имеют следующий вид: $Hom_M(U,W) = Hom_{\mathfrak{g}}(U,W)[[h]]$. Для произвольного ассоциатора Дринфельда Φ (см. [28], [29]) определяется структура тензорной (косовой) моноидальной категории на M (см. [28]).
2)Далее конструируются модули Верма V_+, V_- над $\mathfrak{g}$, и используя их конструируется послойный функтор из M в тензорную категорию топологически свободных $k[[\hbar]]$-модулей: $F(U) = Hom_M(V_+ \otimes V_-, U))$. В соответствии с идеологией теории категорий существование такого функтора влечёт существование супералгебры Хопфа, изоморфной $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ и такой, что тензорная категория M эквивалентна категории представлений H. Можно показать, что H изоморфна как топологическая супералгебра супералгебре Ли $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$, где $U(\mathfrak{g})$ – универсальная обёртывающая супералгебра супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.
3) Далее конструируются подсупералгебры Хопфа $H_\pm$ супералгебры Хопфа H и показывается, что супералгебра Хопфа H является квантовым дублем супералгебры Хопфа H_+. Отметим, что в качестве следствия приведённых выше рассуждений получается следующий результат: любая классическая r-матрица над ассоциативной супералгеброй A ($r \in A\hat{\otimes}A$) может быть проквантована. Другими словами, существует такая квантовая R-матрица $R \in (A\hat{\otimes}A)[[\hbar]]$, что $R = 1 + \hbar r$, которая может быть выбрана унитарной: $R^{21}R = 1$, если r – унитарна: $r^{21} = -r$. Также в качестве следствия получается, что на квантованной универсальной обёртывающей супералгебре квазитреугольная структура, изоморфна таковой на $U(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ (в смысле топологических супералгебр).

Перейдём к более систематическому описанию конструкции квантования. Напомним сначала определение ассоциатора Дринфельда. Пусть T_n – супералгебра над полем k, порождённая элементами $t_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n, i \neq j$, удовлетворяющие следующей системе определяющих соотношений:

$$t_{i,j} = t_{j,i}, \quad [t_{i,j}, t_{l,m}] = 0,$$

для различных i, j, l, m, а также

$$[t_{i,j}, t_{i,k} + t_{j,k}] = 0.$$

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ – непересекающиеся подмножества $\{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда существует единственный гомоморфизм: $\rho_{P_1,\ldots,P_n} : T_m \to T_m$, определяемый формулой:

$$\rho_{P_1,\ldots,P_n}(t_{i,j}) = \sum_{p \in P_i, q \in P_j} t_{p,q}. \tag{1.5.13}$$

Для произвольного $X \in T_n$ будем обозначать $\rho_{P_1,\ldots,P_n}(X)$ через $X_{P_1,\ldots,P_n}$. Пусть $\Phi \in T_3$. Рассмотрим следующее соотношение, называемое соотношением пятиугольника (см. [28], [176]):

$$\Phi_{1,2,34}\Phi_{12,3,4} = \Phi_{2,3,4}\Phi_{1,23,4}\Phi_{1,2,3} \tag{1.5.14}$$

в $T_4[[\hbar]]$.
Пусть $B = \exp(\hbar t_{12}/2) \in T_2[[\hbar]]$. Тогда следующие соотношения в $T_3[[\hbar]]$ называются соотношениями шестиугольника:

$$B_{12,3} = \Phi_{3,1,2} B_{1,2} \Phi^{-1}_{3,1,2} B_{2,3} \Phi_{1,2,3}, \tag{1.5.15}$$

$$B_{1,23} = \Phi^{-1}_{2,3,1} B_{1,3} \Phi_{2,1,3} B_{1,2} \Phi^{-1}_{1,2,3}. \tag{1.5.16}$$

Напомним, что элемент Φ (см. [28], [29]) называется ассоциатором, если он удовлетворяет аксиомам пятиугольника и шестиугольника. Следующее предложение доказано В.Г. Дринфельдом в работе [29]

Предложение 1.5.4. *Существует ассоциатор над Q.*

Из этого утверждения сразу следует существование ассоциатора над любым алгебраически замкнутым поле k нулевой характеристики. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли (супералгебра Ли) над полем k и $\Omega \in S^2\mathfrak{g}$ – $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент. Пусть для простоты $\mathfrak{g}$ конечно, как векторное пространство. Рассмотрим тройку Манина $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-$ и $\Omega = \sum_i g_i \otimes g^i$, где $\{g_i\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, а $\{g^i\}$ – двойственный базис, относительно инвариантного скалярного произведения $\mathfrak{g}$ (мы будем предполагать также, что $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли). В этом случае, напомним, что элемент Ω называется элементом Казимира. Пусть также $\mathfrak{M}$ обозначает категорию, объекты которой $\mathfrak{g}$-модули, а $Hom_{\mathfrak{M}}(U, W) = Hom_{\mathfrak{g}}(U, W)[[h]]$. Это k-линейная аддитивная категория. В.Г. Дринфельд определил структуру косовой (квазитреугольной) моноидальной категории на $\mathfrak{M}$. Пусть $V_1, V_2, V_3 \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим гомоморфизм $\theta : T_3[[\hbar]] \to End(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$, определяемый формулой $\theta(t_{ij} = \Omega_{ij})$, и определим $\Phi_{V_1V_2V_3} = \theta(\Phi)$. Для произвольных $V_1, V_2 \in \mathfrak{M}$ определим $V_1 \otimes V_2$ как обычное тензорное произведение, а в качестве морфизма ассоциативности будем рассматривать $\Phi_{V_1V_2V_3}$, рассматривая его как элемент $Hom_{\mathfrak{M}}((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3, V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3))$. Для произвольных $V_1, V_2 \in \mathfrak{M}$ определим также скручивание $\beta_{V_1V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ формулой $\beta_{V_1V_2} = s \circ e^{\hbar\Omega/2}$, где s – перестановка. Легко проверить, что морфизмы $\Phi_{V_1V_2V_3}, \beta_{V_1V_2}$ определяют на $\mathfrak{M}$ структуру косовой моноидальной категории.

Отметим, что язык тензорных категорий эквивалентен языку алгебр (супералгебр) Хопфа. В некоторых случаях бывает им удобнее пользоваться. Действительно, каждая супералгебра Хопфа, по существу, эквивалентна категории (тензорной категории представлений этой супералгебры Хопфа или модулей над ней). Собственно, на замене супералгебры Хопфа категорией её представлений и основывается переформулировка многих утверждений с языка супералгебр Хопфа на язык теории категорий. При этом часто доказательства становятся проще, поскольку используют ясные и хорошо известные принципы теории категорий.

1.6 Квантование комодулей

В этом параграфе мы рассмотрим деформации (квантования) комодульных супералгебр (которые эквивалентны, по существу, деформациям модульных косупералгебр). Результаты данного параграфа будут использованы ниже в главе 6.

1.6.1 Квантование комодулей. Общие принципы

Напомним сначала определение комодуля.

Определение 1.6.1. *Пусть (C, Δ, ϵ) – коалгебра. C-комодулем называется пара (H, Δ_H), где H – векторное пространство, а $\Delta_H : H \to C \otimes H$ – такое линейное отображение, называемое кодействием, что выполнены следующие аксиомы:*
i)аксима коассоциативности: $(id \otimes \Delta_H) \circ \Delta_H(x) = (\Delta_H \otimes id) \circ \Delta_H(x), \forall x \in H$;

На языке коммутативных диаграмм эта аксиома переписывается в следующем виде.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta_H"] \arrow[d, "\Delta_H"] & C \otimes H \arrow[d, "id\otimes\Delta_H"] \\
C \otimes H \arrow[r, "\Delta_H\otimes id"] & C \otimes C \otimes H
\end{tikzcd}$$

ii) аксиома коединицы: $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta_H(x) \cong x$.

Напомним также определение **морфизма комодулей**, которое также будет использоваться в дальнейшем.

Определение 1.6.2. *Пусть* $(H, \Delta_H), (H', \Delta_{H'})$ *– два* C*-комодуля. Линейное отображение* $f : H \to H'$ *называется морфизмом* C*-комодулей, если*

$$(id \otimes f) \circ \Delta_H = \Delta_{H'} \circ f. \tag{1.6.1}$$

Подпространство H' некоторого C-комодуля (H, Δ_H) называется **подкомодулем**, если $\Delta_H(H') \subset C \otimes H'$.

Определение 1.6.3. *Если вдобавок комодуль* H *является алгеброй (супералгеброй) и отображения умножения* $H \otimes H \to H$ *и единицы* $\eta : k \to H$ *являются гомоморфизмами комодулей, то будем называть* H **комодульной алгеброй**.

Комодули, которые мы определили выше обычно называют **левыми комодулями**. Аналогично, используя отображение $H \to H \otimes C$, можно определить правый комодуль, который будет определяться соотношением приведённым выше для левого комодуля, но с перестановкой тензорных сомножителей.

Ниже нам будет интересен случай, когда комодуль является одновременно подалгеброй некоторой алгебры Хопфа и, как следствие, комодульной алгеброй. Легко проверяется следующее

Предложение 1.6.1. *Пусть* H *– комодуль над супералгеброй Хопфа* A*. Тогда* H *является комодульной супералгеброй в том и только в том случае, когда отображение* $\Delta_H : H \to A \otimes H$ *является гомоморфизмом супералгебр.*

Доказательство. Доказательство получается применением аксиом из определения комодульной супералгебры. Тот факт, что отображение умножения есть морфизм A-комодулей выражается равенством:

$$\Delta_H \circ \mu_H = (id \otimes \mu_H) \circ (\mu_A \otimes id \otimes id) \circ (id \otimes \sigma_{H,A} \otimes id) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H).$$

Утверждение, что η_H является морфизмом A-комодулей равносильно равенству:

$$\Delta_H \circ \eta_H = \eta_A \otimes \eta_H.$$

Отметим, что написанные выше равенства эквивалентны следующим равенствам, которые уже выражают тот факт, что Δ_H является гомоморфизмом супералгебр:

$$\Delta_H \circ \mu_H = (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (id \otimes \sigma_{H,A} \otimes id) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H), \tag{1.6.2}$$
$$\Delta_H \circ \eta_H = \eta_A \otimes \eta_H. \tag{1.6.3}$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned}(id \otimes \mu_H) \circ (\mu_A \otimes id \otimes id) \circ (id \otimes \sigma_{H,A} \otimes id) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H) = \\ (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (id \otimes \sigma_{H,A} \otimes id) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H).\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

□

Отметим сначала, что на комодулях над бисупералгеброй Хопфа естественно определено тензорное произведение результатом которого является также комодуль над бисупералгеброй Хопфа. Пусть $(C, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ – алгебра Хопфа, M, N – C-комодули. Определим на их тензорном произведении $M \otimes N$ структуру комодуля, задав отображение $\Delta_{M\otimes N} : C \otimes M \otimes N$ формулой

$$\Delta_{M\otimes N} = (\mu \otimes id_{M\otimes N})(id_C \otimes \sigma_{M,C} \otimes id_N)(\Delta_M \otimes \Delta_N).$$

Легко проверяется следующее

Предложение 1.6.2. *Пусть H – супералгебра Хопфа, M, N, P – H-комодули. Имеют место следующие канонические изоморфизмы*

$$(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P), \tag{1.6.5}$$

$$k \otimes M \cong M \cong M \otimes k. \tag{1.6.6}$$

Здесь поле k наделено структурой тривиального H-комодуля. Если вдобавок супералгебра Хопфа H почти кокоммутативна, то имеет место изоморфизм

$$c_{M,N} : M \otimes N \cong N \otimes M, \tag{1.6.7}$$

являющийся изоморфизмом H-комодулей. Здесь $c_{M,N} = \sigma \circ R_{M,N}$, где $\sigma(m \otimes n) = (-1)^{p(m)p(n)} n \otimes m$ – перестановка тензорных сомножителей, $R_{M,N}$ – образ универсальной R-матрицы R в тензорном произведении $EndM \tilde{\otimes} EndN = End(M \otimes N)$.

Для комодулей будем использовать обозначения Редфорда. Если H – косупералгебра, N – H-комодуль, то будем писать

$$\Delta_N(x) = \sum_{(x)} x_H \otimes x_N \tag{1.6.8}$$

для всех $x \in N$.

Нам потребуются когомологии комодульной алгебры со значениями в модуле являющемся тензорным произведением алгебры Хопфа и комодуля, а также обобщение этой конструкции на случай супералгебры Хопфа и комодуля над супералгеброй Хопфа. Пусть $H = H_0 \oplus H_1$ – супералгебра Хопфа, $N = N_0 \oplus N_1$ – H-комодуль. Рассмотрим следующий комплекс

$$0 \to k \to^{d_0} \ N \to^{d_1} \ N \otimes H \to^{d_2} \ N \otimes H \otimes H \to^{d_3} \cdots , \tag{1.6.9}$$

где

$$d_n = \sum_{k+l=n} c_k \circ \tilde{d}_k \oplus c_l \circ \delta_l,$$

$$\tilde{d}_k = d_k^0 - d_k^1 + \cdots + (-1)^{k+1} d_k^{k+1}, d_k^i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta_N(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_k,$$

$$\delta_l = \delta_l^0 + \cdots + \delta_l^{l+1}, \delta_l^i(b_1 \otimes \cdots \otimes b_l) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_{i-1} \otimes \Delta_N(b_i) \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_l,$$

при $1 \leq i \leq n$, $d_n^0(x) = \delta_n^0(x) = 1 \otimes x, d_n^{n+1}(x) = \delta_n^{n+1}(x) = x \otimes 1$. Операторы c_i – операторы перестановки, определённые выше.

1.6.2 Теоремы существования и единственности для комодульных супералгебр

В этом пункте мы докажем теоремы о существовании и единственности квантования комодульных супералгебр. Данные результаты мы будем использовать в главе 6, в которой рассматриваются квантования скрученных супералгебр токов – так называемые "скрученные янгианы". В данном параграфе мы будем использовать результаты предыдущего параграфа. Но помимо структуры комодуля над супералгеброй Хопфа на заданном векторном пространстве мы будем предполагать наличие так же структуры ассоциативной супералгебры. Используя когомологическую технику мы покажем при некоторых естественных ограничениях существование и единственность деформации в данного объекта. Как правило, деформируемый объект либо является суперкоммутативной супералгеброй, либо обладает структурой комодуля над суперкокоммутативной коалгеброй. Так же как и выше, мы будем исследовать структуру комодульной супералгебры при помощи категории модулей над комодульной супералгеброй. Мы опишем структуру этой категории. После чего на категорном языке опишем деформацию этой структуры.

Сформулируем теперь основной результат данного параграфа.

Теорема 1.6.1. *Пусть H_0 – комодульная супералгебра, являющаяся комодулем над универсальной обёртывающей супералгеброй A_0 бисупералгебры Ли $\mathfrak{a}$. Тогда существует такая комодульная топологическая супералгебра $H_\hbar$ над топологической супералгеброй Хопфа $A_\hbar$, что*

1) выполняется принцип соответствия:

$$A_\hbar/\hbar A_\hbar \simeq A_0, \tag{1.6.10}$$

$$H_\hbar/\hbar H_\hbar \simeq H_0. \tag{1.6.11}$$

2) Выполняется условие соответствия градуировок.

3) Описанная деформация единственна при выполнении условия 2).

Доказательство. Доказательство теоремы 1.6.1 основывается с одной стороны на некоторых когомологических результатах, доказательства которых будут даны ниже, а с другой стороны использует доказанные выше результаты о существовании и единственности в классе супералгебр Хопфа деформации универсальной обёртывающей супералгебры бисупералгебры Ли. Опишем схему доказательства сформулированной теоремы. Мы будем опираться на результаты Гира (см. [142]). По существу мы сведём доказательство теоремы 1.6.1 к доказательству доказанной ранее теоремы 1.5.2.

□

1.7 Квантование бисупералгебры Ли полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t]$

В данном параграфе мы относительно подробно рассмотрим случай квантования бисупералгебры Ли полиномиальных токов, принимающих значения в базисной супералгебре Ли. Это частный случай общей теории, рассмотренной в предыдущих параграфах. Здесь мы опишем упомянутую выше деформацию при помощи явных формул. Эти формулу будут играть существенную роль в дальнейшем. Напомним, что квантование биалгебры Ли было определено В.Г. Дринфельдом в [120] как некоммутативная деформация в классе алгебр Хопфа универсальной обертывающей алгебры биалгебры Ли. Выше мы описали квантование бисупералгебр токов рациональных функций, определённых на рациональной кривой и имеющих полюса только в конечном множестве отмеченных точек. Здесь мы предполагаем, что отмеченная точка одна и это бесконечно удалённая точка. А токи принимают значения в базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Таким образом, пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли. Мы подробно получим систему определяющих соотношений для деформации бисупералгебры Ли полиномиальных токов в частном случае $\mathfrak{g} = A(m,n)$, рассмотрением которого мы и ограничимся в следующей главе. Общий случай базисной супералгебры Ли мы рассмотрим в главе 4.

Определение 1.7.1. *Квантованием бисупералгебры Ли $B(= \mathfrak{g}[t])$ называется супералгебра Хопфа $A = A_\hbar$ над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) $A_\hbar/\hbar A_\hbar \cong U(B)$, *где* $U(B)$ *– универсальная обертывающая супералгебра супералгебры Ли* B*;*
2) Супералгебра $A_\hbar$ *изоморфна* $U(B)[[\hbar]]$, *как векторное пространство;*
3) выполняется следующий принцип соответствия $\hbar^{-1}(\Delta(x)-\Delta^{op}(x))\mathrm{mod}\,\hbar = \varphi(x)\mathrm{mod}\,\hbar$, *где* Δ*- коумножение,* Δ^{op}*– противоположное коумножение (то есть, если* $\Delta(x)=\sum x'_i\otimes x"_i$*, то* $\Delta^{op}(x)=\sum(-1)^{p(x'_i)p(x"_i)}x"_i\otimes x'_i$*), Коскобка* $\varphi : B \to B\bigwedge B$ *является коциклом в* B.

Опишем теперь квантование бисупералгебры Ли $(\mathfrak{g}[u],\delta)$. Я напомню (см. также [12]), что

$$\mathfrak{g}[u]=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathfrak{g}\cdot u^k$$

– градуированная степенями u супералгебра Ли,

$$\delta \ : \ a(u) \ \to \ [a(u)\otimes 1 + 1\otimes a(v), \frac{t}{u-v}], \quad \text{где} \quad \mathfrak{t} \ \text{– оператор Казимира} \qquad (1.7.1)$$

и δ – однородно степени -1.

Наложим на квантование дополнительные условия.
1) Пусть A – градуированная супералгебра над градуированным кольцом $C[[\hbar]]$, $\quad deg(\hbar)=1$;
2) Градуировка A и градуировка $\mathfrak{g}[u]$ индуцируют одну и ту же градуировку $U(\mathfrak{g}[u])$, то есть,

$$A/\hbar A = U(\mathfrak{g}[u])$$

как градуированные супералгебры над C.

Я напомню, что супералгебру Хопфа A над $C[[\hbar]]$ обладающую тем свойством, что $A/\hbar A\cong B$, где B супералгебра Хопфа над C, называют формальной деформацией B. Пусть $p : A\to A/\hbar A\cong B$ – каноническая проекция. Если $p(a)=x$, то элемент a называют деформацией элемента x. Из доказанных выше теорем следует существование и единственность формальной деформации (квантования) и в рассматриваемом случае бисупералгебры Ли полиномиальных токов. Но сейчас мы явно построим такую деформацию. Из конструкции будет видна её единственность (при выполнении условия однородности). Следует также отметить, что есть и более общие теоремы из которых, в частности, вытекает существование и единственность квантования (или формальной деформации) и в более общих ситуациях([126], [128]), чем рассматриваемая в данной работе.

Будем обозначать через $m_{i,k}$, где $m_i\in\{h_i, x_i^{\pm}\}$ – образующие супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, деформации образующих $m_i\cdot u^k$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}[u]$. Так как образующие $m_i, m_i\cdot u^k$ порождают $U(\mathfrak{g}[u])$, то их деформации $m_{i,0}, m_{i,1}$ порождают супералгебру Хопфа A. Нам надо описать систему порождающих соотношений между этими образующими. Эту систему порождающих соотношений мы получим как условие совместимости структур супералгебры и косупералгебры на A. Но прежде мы опишем коумножение на образующих $m_{i,1}$. В силу условия однородности квантования 2), коумножение будет однозначно определяться на образующих $m_{i,1}$. Из вида коумножения на образующих $\{m_{i,1}\}$, определяющих соотношений между образующими $\{m_{i,0}\}$ и того факта, что коумножение гомоморфизм ассоциативных супералгебр, мы выведем систему определяющих соотношений между образующими $\{m_{i,1}, m_{i,0} : i\in I\}$. Сначала опишем коумножение на образующих $h_{i,1}$. Прежде заметим, что из условий однородности квантования вытекает, что $U(\mathfrak{g})$ вкладывается в A как супералгебра Хопфа. Это значит, что образующие $m_{i,0}$ мы можем отождествить с образующими супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Вычислим значение коцикла δ на образующих $h_i \cdot u$. Нам потребуется следующее простое предложение.

Предложение 1.7.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ – супералгебра Ли с инвариантным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$; $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные относительно этого скалярного произведения, базисы. Тогда для произвольного элемента $g \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство:*

$$[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i] = -[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i] \tag{1.7.2}$$

Доказательство. Отметим, что по определению билинейной инвариантной формы имеет место равенство: $([g,a],b) = -(-1)^{p(g)p(a)}([a,g],b) = -(-1)^{p(g)p(a)}(a,[g,b])$ для $\forall a,b \in \mathfrak{A}$. Поэтому

$$([g,e_i],e^i) = -(-1)^{p(g)p(a)}([e_i,g],e^i) = -(-1)^{p(g)p(a)}(e_i,[g,e^i]) \tag{1.7.3}$$

Скалярное произведение, определённое на векторном пространстве V задаёт изоморфизм между V и V^*, и, следовательно, между $V \otimes V$ и $V \otimes V^*$. Суммируя по i равенство A.3.8 получаем

$$\sum_i([g,e_i],e^i) = \sum_i -(-1)^{p(g)p(a)}(e_i,[g,e^i])$$

Отметим, что из равенства значений функционалов на элементах базиса вытекает равенство функционалов, и в силу отмеченного выше изоморфизма, получаем равенство:

$$\sum_i [g,e_i] \otimes e^i = \sum_i -(-1)^{p(g)p(a)} e_i \otimes [g,e^i]$$

или

$$[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i] = -[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i].$$

Что и требовалось доказать. □

Предложение 1.7.2. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1$ супералгебра Ли с таким невырожденным скалярным инвариантным произведением, что $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$ ортогональны. $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$ спарены невырожденно, $\mathfrak{A}^0$ – подсупералгебра, а $\mathfrak{A}^1$ - модуль над $\mathfrak{A}^0$.*

Пусть также $\{e_i\}, \{e^i\}$ - двойственные базисы в $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$. Тогда для произвольных $a \in \mathfrak{A}$ имеет место следующее равенство:

$$[a \otimes 1, \mathfrak{t}] = -[1 \otimes a, \mathfrak{t}].$$

Доказательство. Пусть c_{ki}^m – структурные константы супералгебры Ли $\mathfrak{A}$, то есть $[e_k,e_i] = c_{ki}^m e_m$. Тогда

$$[e^k, e_i] = c_{ki}^m e^m.$$

Действительно,

$$([e_k,e_i],e^m) = (e_k,[e_i,e^m])$$

Но $[\Delta(a),\mathfrak{t}] = 0$, поскольку оператор Казимира лежит в центре, в силу отмеченных выше соотношений. Следовательно,

$$[\Delta(a),\mathfrak{t}] = [a \otimes 1 + 1 \otimes a, \mathfrak{t}] = 0$$

или

$$[[a \otimes 1, \mathfrak{t}] = -[1 \otimes a, \mathfrak{t}].$$

□

Теперь мы можем вычислить значение δ на $h_i \cdot u$.

$$\delta(h_i \cdot u) = [h_i \cdot v \otimes 1 + 1 \otimes h_i \cdot u, \frac{\mathfrak{t}}{u-v}] = [h_i \cdot v \otimes 1 - h_i \cdot u \otimes 1, \frac{\mathfrak{t}}{u-v}] = [h_i \otimes 1, \mathfrak{t}]$$

Аналогично вычисляются значения коцикла на остальных образующих.

$$\delta(x_i^{\pm} \cdot u) = -[x_i^{\pm} \otimes 1, \mathfrak{t}] = [1 \otimes x_i^{\pm}, \mathfrak{t}]$$

Из условий однородности квантования следует, что

$$\Delta(h_{i,1}) = \Delta_0(h_{i,1}) + \hbar F(x_\alpha \otimes x_{-\alpha}, \hat{x}_\alpha \otimes \hat{x}_{-\alpha} + h_i \otimes h_j + k_i \otimes k_j)$$

Из принципа соответствия (пункт 3) определения квантования вытекает, что

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,1}) - \Delta^{op}(h_{i,1}) = F - \tau F = [1 \otimes h^i, \mathfrak{t}_0].$$

Пусть $\bar{t} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha \otimes x^{-\alpha}$, Δ_+– множество положительных корней алгебры Ли типа $A(m,n)$. Тогда, как нетрудно проверить, $F = [1 \otimes h^i, \bar{t}]$. Проверим, что и в этом случае выполняется принцип соответствия:

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,1}) - \Delta^{op}(h_{i,1}) = [1 \otimes h_i, \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha \otimes x^{-\alpha}]$$

и равенство

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,1}) - \Delta^{op}(h_{i,1}) = [1 \otimes h_i, \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha \otimes x^{-\alpha}] - [h_i \otimes 1, \sum_{\alpha \in \Delta_+} x^{-\alpha} \otimes x_\alpha]$$

доказано.

Точно таким же способом можно определить операцию коумножения на остальных образующих. Получаем, что

$$\Delta(x_{i,1}^{+}) = \Delta_0(x_{i,1}^{+}) + \hbar[1 \otimes x_i^{+}, \bar{\mathfrak{t}}],$$

$$\Delta(x_{i,1}^{-}) = \Delta_0(x_{i,1}^{-}) + \hbar[x_i^{-} \otimes 1, \bar{\mathfrak{t}}].$$

Имеют место следующие соотношения, которые сохраняет операция коумножения.

$$[h_{i,1}, x_{j,0}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,1}^{\pm},$$

Проверим, что операция коумножения действительно сохраняет эти соотношения. Достаточно проверить одно из них. Проверим первое из этих соотношений. Покажем, что

$$[\Delta(h_{i,1}), \Delta(x_{j,0}^{\pm})] = \pm \tilde{a}_{ij} \Delta(x_{j,1}^{\pm}).$$

Действительно,

$$[\Delta(h_{i,1}), \Delta(x_{j,0}^{\pm})] = ([\Delta_0(h_{i,1}) + \hbar[1 \otimes h_i, \bar{\mathfrak{t}}_0], x_{j,0}^{\pm} \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^{\pm}] =$$

$$[h_{i,1}, x_{j,0}^{\pm}] \otimes 1 + 1 \otimes [h_{i,1}, x_{j,0}^{\pm}] + \hbar[[1 \otimes h_i, \bar{\mathfrak{t}}_0], x_{j,0}^{\pm} \otimes 1] + \hbar[[1 \otimes h_i, \bar{\mathfrak{t}}_0], 1 \otimes x_{j,0}^{\pm}].$$

Напомним, что в супералгебре Ли выполняется тождество:

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{p(a)p(b)}[b, [a, c]]$$

Поэтому, окончательно получаем, что

$$[\Delta(h_{i,1}), \Delta(x_{j,0}^{\pm})] = \pm\Delta(x_{j,1}^{\pm}).$$

Так как отображение коумножения – гомоморфизм, то мы получаем следующее соотношение

$$[h_{i,1}, x_{j,0}^{\pm}] = \pm x_{j,1}^{\pm}.$$

Остальные определяющие соотношения получаются аналогично.

Проверим теперь соотношение

$$[x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] = [x_{i,0}^{+}, x_{j,1}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,1}. \tag{1.7.4}$$

Вычислим сначала

$$[\Delta(x_{i,1}^{+}), \Delta(x_{j,0}^{-})] = [x_{i,1}^{+} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^{+} + [1 \otimes x_{i,0}^{+}, \mathfrak{t}], x_{j,0}^{-} \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^{-}] =$$

$$[x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] \otimes 1 + 1 \otimes [x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] + [1 \otimes [x_{i,0}^{+}, x_{j,0}^{-}], \mathfrak{t}] =$$

$$[x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] \otimes 1 + 1 \otimes [x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] + \delta_{ij}[1 \otimes h_{i,0}, \mathfrak{t}]. \tag{1.7.5}$$

Ясно, что приведённые выше вычисления показывают, что тот факт, что отображение коумножения является гомоморфизмом и соотношение (1.7.4) влекут написанное выше равенство (1.7.5). Верно и обратное, написанное выше равенство (1.7.5) и тот факт, что коумножение – гомоморфизм, влекут первое из равенств соотношения (1.7.4). Второе равенство соотношения (1.7.4) доказывается аналогично. Таким образом соотношения (1.7.4) проверены.

Соотношения Серра

$$[x_{i,1}^{\pm}, [x_{i,0}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}]] + [x_{i,0}^{\pm}, [x_{i,1}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}]] = 0, \quad i \neq j \tag{1.7.6}$$

могут быть проверены, в сущности, аналогичными вычислениями. Более простой способ проверки состоит в действии правую и левую части соотношения

$$[x_{i,0}^{\pm}, [x_{i,0}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}]] = 0$$

присоединённого действия (коммутирования) сначала элемента $h_{i,1}$, а затем $h_{j,1}$. Решая полученную однородную систему уравнений получаем соотношение (1.7.6). Остальные соотношения находятся аналогично.

Теперь мы можем описать суперcharacterалгебру Хопфа $A = A_h$, являющуюся деформацией (квантованием) бисупералгебры Ли $(\mathfrak{g}, \delta)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.7.1. *Супералгебра Хопфа $A = A_h$ над $C[[\hbar]]$, порождается образующими $h_{i,0}, x_{i,0}^{\pm}, h_{i,1}, x_{i,1}^{\pm}, \quad 1 \leq i \leq n$. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:*

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{i,0}, h'_{j,1}] = [h'_{i,1}, h'_{j,1}] = 0, \tag{1.7.7}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,0}, \quad [h'_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1}, \tag{1.7.8}$$

$$[x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,0}, \quad [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,1} := \delta_{ij}(h'_{i,1} + \tfrac{1}{2} h^2_{i,0}) \tag{1.7.9}$$

$$[x^{\pm}_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] \pm (a_{ij}/2)(x^{\pm}_{i,0} x^{\pm}_{j,0} + x^{\pm}_{j,0} x^{\pm}_{i,0}), \tag{1.7.10}$$

$$[x^{\pm}_{m,1}, x^{\pm}_{m,0}] = 0, \tag{1.7.11}$$

$$[x^{\pm}_{i,0}, [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}]] = 0, \quad i \neq j, \tag{1.7.12}$$

$$[x^{\pm}_{i,1}, [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}]] + [x^{\pm}_{i,0}, [x^{\pm}_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}]] = 0, \quad i \neq j, \tag{1.7.13}$$

$$[[x^{\pm}_{m-1,1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m,0}]] = 0, \tag{1.7.14}$$

$$[[h'_{i,1}, x^{+}_{i,1}], x^{-}_{j,1}] + [x^{+}_{i,1}, [h'_{i,1}, x^{-}_{j,1}]] = 0, \quad i \neq m, \tag{1.7.15}$$

$$[[h'_{m-1,1}, x^{+}_{m,1}], x^{-}_{m,1}] + [x^{+}_{m,1}, [h'_{m-1,1}, x^{-}_{m,1}]] = 0. \tag{1.7.16}$$

Коумножение Δ *определяется на* $\bar{Y}(G)$ *следующими формулами:*

$$\Delta(h_{i,0}) = h_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0}, \tag{1.7.17}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,0}) = x^{\pm}_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\pm}_{i,0}, \tag{1.7.18}$$

$$\Delta(h'_{i,1}) = h'_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h'_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \Omega'_2], \tag{1.7.19}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,1}) = a^{-1}_{i,i} [\Delta(h'_{i,1}), \Delta(x^{\pm}_{i,0})], \quad i \neq m, \tag{1.7.20}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{m,1}) = a^{-1}_{m-1,m} [\Delta(h'_{m-1,1}), \Delta(x^{\pm}_{m,0})]. \tag{1.7.21}$$

Здесь $\Omega'_2 = \sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{p(\alpha)} x^{-}_{\alpha} \otimes x^{+}_{\alpha}$, $p(\alpha) := p(x^{\pm}_{\alpha})-$ *функция чётности.*

Глава 2

Янгиан супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Универсальная R-матрица

2.1 Введение

Основным результатом данной главы является получение точной формулы для универсальных R-матриц янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ и его квантового дубля. Отметим, что в момент написания работ автора [251], [252], [59], [61], относящихся к вычислению универсальной R-матрицы янгиана супералгебры Ли и его квантового дубля, явных формул для универсальной R-матрицы янгиана даже простых алгебр Ли в известной автору литературе не было, хотя эта задача достаточно давно была сформулирована В.Г. Дринфельдом. Как следствие формулы универсальной R-матрицы янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$, мы также получаем такую формулу и для частного случая янгиана простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}(2,0)$. Я напомню, что универсальная R-матрица янгиана $Y(\mathfrak{g})$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ была введена В.Г. Дринфельдом (см. [120], [25]) как формальный ряд $R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k\lambda^{-k-1}$ с коэффициентами $R_k \in Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, который сплетает коумножение Δ и противоположное коумножение $\Delta' = \tau\circ\Delta, \tau(x\otimes y = y\otimes x)$. $(\tau(x\otimes y = (-1)^{deg(x)deg(y)}y\otimes x)$ для супералгебр Ли. Точнее говоря, $R(\lambda)$ сплетает образы Δ и Δ' под действием оператора $id\otimes T_\lambda$, где T_λ – квантовый аналог оператора сдвига, а id – тождественный оператор. $R(\lambda)$ ведет себя так как будто она является образом под действием $id\otimes T_\lambda$ некоторой гипотетической R-матрицы R, сплетающей Δ и Δ' (и, более того, которая не существует). Наличие такого ряда В.Г. Дринфельд назвал псевдотреугольной структурой и доказал ее существование для $Y(\mathfrak{g})$, когда $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли. Но точные формулы для $R(\lambda)$ до сих пор получены не были. Если посмотреть на классические аналоги понятий $R(\lambda)$ и R, именно на классические r-матрицы $r(\lambda)$ и r, то r является элементом топологического тензорного квадрата классического дубля, а $r(\lambda) = (id\otimes T_\lambda)r$, где $T_\lambda f(u) = f(u+\lambda)$ – оператор сдвига. Поэтому естественно ожидать, что и в квантовом случае $R(\lambda)$ будет образом под действием квантового оператора сдвига $id\otimes T_\lambda$ универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана R. Когда В.Г. Дринфельд вводил понятие псевдотреугольной структуры не было хорошего описания квантового дубля янгиана в терминах образующих и соотношений. Но в середине 90-х годов С.М. Хорошкин и В.Н. Толстой получили описание дубля в терминах образующих и соотношений и вычислили мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы дубля янгиана (см. [187]). В этой главе мы описываем квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана для супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$ в терминах образующих и соотношений. Мы также вычисляем универсальную R-матрицу янгианного дубля следуя схеме работы [187]. Основной результат данной главы для случая $\mathfrak{g} = A(m,n)$ – такая формула для универсальной R-матрицы, представленная в факторизованной форме в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых является бесконечным произведением. Как отмечено выше, в данной главе такая формула получена для частного случая – янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$, а в главе 4 – в случае янгиана базисной супералгебры Ли. Здесь следует отметить, что вычисление этой формулы основано, по существу, на тех же идеях, что и вычисление универсальной R-матрицы квантованной универсальной обертывающей аффинной алгебры Ли (см. [204], [78]). В работе [204] при получении мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы использовалась квантовая группа Вейля. В случае янгианного дубля и тем более янгианного дубля супералгебры Ли нет полного аналога группы Вейля. Тем не менее частичные аналоги и наводящие соображения используются в полной мере. (Именно оператор t^{∞} можно рассматривать как некий аналог бесконечного старшего элемента аффинной группы Вейля, в терминах аналогов элементов группы Вейля может быть проинтерпретирован твист F который используется при построении универсальной R-матрицы.) После того как формула для универсальной R-матрицы дубля янгиана получена мы вычисляем универсальную R-матрицу янгиана просто применяя к полученной формуле оператор $id \otimes T_{\lambda}$. Существенным при этом оказывается вычисление действия оператора T_{λ} на образующих двойственной к янгиану супералгебры Хопфа. В этой главе, как отмечено выше, мы рассматриваем частный случай янгиана $\mathfrak{g} = A(m, n)$ и в этом случае получаем основные результаты. В следующем параграфе мы описываем изоморфизм между двумя реализациями янгиана.

Я напомню, что универсальная R-матрица янгиана $Y(\mathfrak{g})$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ была введена В.Г. Дринфельдом (см. [120], [25]) как формальный ряд $R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^{-k-1}$ с коэффициентами $R_k \in Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, который сплетает коумножение Δ и противоположное коумножение $\Delta' = \tau \circ \Delta$, где $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ в случае янгиана простой алгебры Ли и $\tau(x \otimes y) = (-1)^{deg(x)deg(y)} y \otimes x$ для янгианов супералгебр Ли. Точнее говоря, $R(\lambda)$ сплетает образы Δ и Δ' под действием оператора $id \otimes T_{\lambda}$, где T_{λ} – квантовый аналог оператора сдвига, а id – тождественный оператор. $R(\lambda)$ ведет себя так как будто она является образом под действием $id \otimes T_{\lambda}$ некоторой гипотетической R-матрицы R, сплетающей Δ и Δ' . Такой ряд В.Г. Дринфельд назвал псевдотреугольной структурой и доказал ее существование для $Y(\mathfrak{g})$, когда $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли. Получить явные формулы для такого ряда было одной из задач, поставленных тогда В.Г. Дринфельдом. Если посмотреть на классические аналоги понятий $R(\lambda)$ и R, именно на классические r-матрицы $r(\lambda)$ и r, то r является элементом топологического тензорного квадрата классического дубля, а $r(\lambda) = (id \otimes T_{\lambda})r$, где $T_{\lambda} f(u) = f(u+\lambda)$ – оператор сдвига. Поэтому естественно ожидать, что и в квантовом случае $R(\lambda)$ будет образом под действием квантового оператора сдвига $id \otimes T_{\lambda}$ универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана R. Когда В.Г. Дринфельд вводил понятие псевдотреугольной структуры не было хорошего описания квантового дубля янгиана в терминах образующих и соотношений, хотя сам В.Г. Дринфельд первым предложил подход к его описанию, а также метод вычисления универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана. В середине 90-х годов С.М. Хорошкин и В.Н. Толстой получили описание дубля в терминах образующих и соотношений и вычислили мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы дубля янгиана (см. [187]), тем самым реализовав подход предложенный Дринфельдом и решив одну из задач, поставленных им. В этой главе мы описываем квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана для супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в терминах образующих и соотношений. Мы также вычисляем универсальную R-матрицу янгианного дубля, распространив упомянутый выше и реализованный в работе [187], подход на случай янгианов супералгебр Ли (или суперянгианов). Общий случай базисной супералгебры Ли будет рассмотрен в следующей главе.

Отметим, что основные результаты главы получены в работах [54], [56], [58], [57], [252],

[59], [61].

В данной главе мы, по существу, начинаем изучать янгианы базисных супералгебр Ли и их квантовые дубли, рассматривая частный, но наиболее важный для приложений случай янгиана специальной линейной супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Следует отметить, что в данной главе мы получаем в частном случае $Y(A(m,n))$ решение задачи, поставленной В.Г. Дринфельдом, о нахождении явной формулы для универсальной R-матрицы янгиана. Эту формулу, как отмечено выше, мы выводим из мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана. В этом частном случае янгиана супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$ хорошо видны все основные идеи доказательств, которые в дальнейшем обобщаются на случай янгиана произвольной базисной супералгебры Ли и его квантового дубля. Кроме того в этом важном частном случае янгиана супералгебры Ли $A(m,n)$ некоторые вычисления удаётся провести более детально, до получения явных формул для коэффициентов в мультипликативной формуле, что и позволяет получить явную формулу для универсальной R-матрицы янгиана.

2.2 Янгиан супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Токовая система образующих

2.2.1 Определение токовой системы образующих

В первом параграфе мы вводим так называемую токовую систему образующих янгиана, аналогичную той которую В.Г. Дринфельд назвал "новой"системой образующих. Я напомню, что в конце первой главы мы определили деформацию универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ полиномиальных токов универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ полиномиальных токов (см. параграф 1.8). Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ получается если положить равным единице значение параметра деформации $\hbar = 1$. Напомним, что при этом структура бисупералгебры Ли определяется коциклом

$$\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \bigwedge \mathfrak{g},$$

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r(u,v)], \tag{2.2.1}$$

где

$$r(u,v) = \frac{\mathfrak{t}}{u-v},$$

а $\mathfrak{t}$ – оператор Казимира, определяемый невырожденным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ на базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ (которое существует на базисной супералгебре Ли (см. [140] и параграф 1.8)). Другими словами, пусть $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные относительно этого скалярного произведения базисы в $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$. Ниже, пусть $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ как и всякая базисная супералгебра Ли определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1}$. Далее мы будем предполагать, что A симметризованная матрица Картана. Её ненулевые элементы имеют следующий вид: $a_{i,i} = 2, a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, i < m+1; a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1, a_{i,i} = -2, m+1 < i, i \in I = \{1, \cdots, m+n+1\}$. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается образующими: $h_i, x_i^{\pm}, i \in I$. Причём образующие $x_{m+1}^{\pm}$ -нечётные, а остальные образующие чётные, то есть функция чётности принимает на них следующие значения: $p(h_i) = 0, i \in I, p(x_j^{\pm}) = 0, j \neq m+1, p(x_{m+1}^{\pm}) = 1$. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \qquad , \tag{2.2.2}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, \tag{2.2.3}$$

$$[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_i, \tag{2.2.4}$$

$$[[x_{m+1}^{\pm}, x_{m+2}^{\pm}], [x_{m+2}^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}]] = 0, \tag{2.2.5}$$

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0. \tag{2.2.6}$$

Как обычно, $[\cdot, \cdot]$ обозначает суперкоммутатор: $[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba$. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n+1}\}$ – множество простых корней, $\Delta(\Delta_+)$ – множество всех корней (положительных корней). Пусть также $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}, \alpha \in \Delta_+$ – базис Картана-Вейля, нормализованный условием $(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1$. Отметим, что $a_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$.

Ниже, если не оговорено противное, мы в пределах этого параграфа будем использовать обозначение $\mathfrak{g} := A(m, n)$.

В силу теоремы 4.4.1, мы можем дать следующее

Определение 2.2.1. *Янгиан $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ это супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}$ порождённая образующими: $x_{i,0}^{\pm}$, $h_{i,0}$, $x_{i,1}^{\pm}$, $h'_{i,1}$, $i \in I = \Gamma = \{1, 2, \ldots, m+n+1\}$, которые удовлетворяют соотношениям:*

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{i,0}, h'_{j,1}] = [h'_{i,1}, h'_{j,1}] = 0, \tag{2.2.7}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,0}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,0}^{\pm}, \quad [h'_{i,1}, x_{j,0}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,1}^{\pm}, \tag{2.2.8}$$

$$[x_{i,0}^{+}, x_{j,0}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,0}, \quad [x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,1} := \delta_{ij}(h'_{i,1} + \tfrac{1}{2} h_{i,0}^2) \tag{2.2.9}$$

$$[x_{i,1}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}] = [x_{i,0}^{\pm}, x_{j,1}^{\pm}] \pm (a_{ij}/2)(x_{i,0}^{\pm} x_{j,0}^{\pm} + x_{j,0}^{\pm} x_{i,0}^{\pm}) \tag{2.2.10}$$

$$[x_{m+1,1}^{\pm}, x_{m+1,0}^{\pm}] = 0 \tag{2.2.11}$$

$$[x_{i,0}^{\pm}, [x_{i,0}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}]] = 0, \quad i \neq j, \tag{2.2.12}$$

$$[[x_{m,0}^{\pm}, x_{m+1,0}^{\pm}], [x_{m+2,0}^{\pm}, x_{m+1,0}^{\pm}]] = 0, \tag{2.2.13}$$

$$[[x_{m,1}^{\pm}, x_{m+1,0}^{\pm}], [x_{m+2,0}^{\pm}, x_{m+1,0}^{\pm}]] = 0, \tag{2.2.14}$$

$$[[h'_{i,1}, x_{i,1}^{+}], x_{j,1}^{-}] + [x_{i,1}^{+}, [h'_{i,1}, x_{j,1}^{-}]] = 0, \quad i \neq m+1, \tag{2.2.15}$$

$$[[h'_{m,1}, x_{m+1,1}^{+}], x_{m+1,1}^{-}] + [x_{m+1,1}^{+}, [h'_{m,1}, x_{m+1,1}^{-}]] = 0. \tag{2.2.16}$$

Коумножение Δ определяется на $\bar{Y}(G)$ следующими формулами:

$$\Delta(h_{i,0}) = h_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0}, \tag{2.2.17}$$

$$\Delta(x_{i,0}^{\pm}) = x_{i,0}^{\pm} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,0}^{\pm}, \tag{2.2.18}$$

$$\Delta(h'_{i,1}) = h'_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h'_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \Omega'_2], \tag{2.2.19}$$

$$\Delta(x_{i,1}^{\pm}) = a_{i,i}^{-1}[\Delta(h'_{i,1}), \Delta(x_{i,0}^{\pm})], \quad i \neq m+1, \tag{2.2.20}$$

$$\Delta(x_{m+1,1}^{\pm}) = a_{m,m+1}^{-1}[\Delta(h'_{m,1}), \Delta(x_{m+1,0}^{\pm})]. \tag{2.2.21}$$

Здесь $\Omega'_2 = \sum\limits_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{p(\alpha)} x_\alpha^{-} \otimes x_\alpha^{+}$, $p(\alpha) := p(x_\alpha^{\pm})$ – функция чётности.

Введём новую систему образующих и соотношений для янгиана. Эта система аналогична той, которая была введена В.Г. Дринфельдом для янгианов (см. [120], [27]). Эта система образующих особенно удобна при доказательстве теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта

(ПБВ-теоремы) и основанных на ней утверждений. Формально, мы введем новую ассоциативную супералгебру и покажем, что она изоморфна янгиану супералгебры Ли $A(m,n)$. Следует отметить, что как показано Л. Гоу (L. Gow)([159], [160]), эта система эквивалентна по существу, системе образующих и определяющих соотношений, которая была введена первоначально для янгиана полной линейной супералгебры М. Назаровым и в неявном виде для янгиана специальной линейной супералгебры. Таким образом, Л. Гоу показана эквивалентность двух систем образующих и соотношений янгиана специальной линейной супералгебры Ли, введённых первоначально М. Назаровым, с одной стороны, и автором с другой, основываясь на различных подходах: подходе Решетихина-Фаддеева-Тахтаджяна и подходе Дринфельда. Отметим также, что в переписке с Л. Гоу было уточнено последнее соотношение в приводимой ниже системе определяющих соотношений, которое и приводится в этой уточнённой редакции.

Напомним, что в этой главе $I = \{1, 2, \ldots, m+1, \ldots, m+n+1\}$, $\tau = \{m+1\}$.

Определение 2.2.2. *Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ это супералгебра Хопфа на $\mathbb{C}$, порождённая как ассоциативная супералгебра, образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}, x^{\pm}_{i,k} := x^{\pm}_{\alpha_i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad \delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x^{+}_{i,k}, x^{-}_{j,l}], \tag{2.2.22}$$

$$[h_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [h_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + b_{ij}(h_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}h_{i,k}), \quad i \text{ или } j \neq m+1, \tag{2.2.23}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,l}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,l}, \tag{2.2.24}$$

$$[h_{m+1,k+1}, x^{\pm}_{m+1,l}] = 0, \tag{2.2.25}$$

$$[x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + b_{ij}(x^{\pm}_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}x^{\pm}_{i,k}), \quad i \neq m \text{ или } j \neq m+1, \tag{2.2.26}$$

$$[x^{\pm}_{m+1,k+1}, x^{\pm}_{m+1,l}] = 0 \tag{2.2.27}$$

$$[x^{\pm}_{i,k}, [x^{\pm}_{i,s}, x^{\pm}_{j,l}]] + [x^{\pm}_{i,s}, [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}]] = 0, \quad i \neq j, \tag{2.2.28}$$

$$[[x^{\pm}_{m,k}, x^{\pm}_{m+1,0}], [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m+2,t}]] = 0, \tag{2.2.29}$$

для произвольных целых m, r, l, t. Здесь $b_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}/2$.

Коумножение на образующих $h_{i,k}, x^{\pm}_{i,k}, i \in I, k = 0, 1$ определяется следующими формулами:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, x \in \mathfrak{g} \tag{2.2.30}$$

$$\begin{gathered}\Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] + h_{i,0} \otimes h_{i,0} = \\ h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} (\alpha_i, \alpha) x_{-\alpha} \otimes x_\alpha;\end{gathered} \tag{2.2.31}$$

$$\begin{gathered}\Delta(x^{-}_{i,1}) = x^{-}_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{i,1} + [1 \otimes x^{-}_{i,0}, \mathfrak{t}_0] = \\ x^{-}_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{i,1} + \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} [x_{-\alpha_i}, x_{-\alpha}] \otimes x_\alpha;\end{gathered} \tag{2.2.32}$$

$$\begin{gathered}\Delta(x^{+}_{i,1}) = x^{+}_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{i,1} + [x^{+}_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = \\ x^{+}_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{i,1} - \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} x_{-\alpha} \otimes [x_{\alpha_i}, x_\alpha];\end{gathered} \tag{2.2.33}$$

Сумма берется по всем перестановкам σ множества $\{1, \ldots, r\}$. Функция четности принимает следующие значения на образующих: $p(x^{\pm}_{j,k}) = 0$, для $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \backslash \tau \quad p(h_{i,k}) = 0$, для $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^{\pm}_{i,k}) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i \in \tau$.

Отметим, что универсальная обёртывающая супералгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно вложена в $Y(\mathfrak{g})$, причём вложение задаётся формулами $h_i \mapsto h_{i,0}, x^{\pm}_i \mapsto x^{\pm}_{i,0}$. Мы иногда будем отождествлять универсальную обёртывающую супералгебру $U(\mathfrak{g})$ с её образом в янгиане $Y(\mathfrak{g})$.

Покажем, что приведенные выше два определения янгиана эквивалентны. Отталкиваясь от определения 2.2.1, введём новую систему образующих для янгиана $\bar{Y}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g} = A(m,n)$ и покажем, что полученный объект изоморфен $Y(\mathfrak{g})$ (см. определение 2.2.1).

Введём образующие $\tilde{x}^{\pm}_{i,k}$, $\tilde{h}_{i,k}$ $(\in \bar{Y}(\mathfrak{g}))$, $i \in \Gamma$, $k \in \mathbb{Z}_+$ формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{\pm}_{i,k+1} &= \pm(\alpha_i,\alpha_i)[h'_{i,1}, \tilde{x}^{\pm}_{i,k}], \quad i \neq m, \\ \tilde{x}^{\pm}_{m,k+1} &= \pm(\alpha_{m-1},\alpha_m)[h'_{m-1,1}, \tilde{x}^{\pm}_{m,k}], \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{i,k} &= [\tilde{x}^{+}_{i,k}, x^{-}_{i,0}], \\ \tilde{x}^{\pm}_{i,0} &= x^{\pm}_{i,0}, \quad \tilde{h}_{i,0} = h_{i,0}. \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Отметим, что функция чётности принимает следующие значения на образующих: $p(x^{\pm}_{i,k}) = 0$, для $i \in I \setminus \tau$, $(i \neq m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $p(h_{i,k}) = 0$, для $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^{\pm}_{m,k}) = 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

2.2.2 Эквивалентность двух определений янгиана

Основной результат данного параграфа следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Соответствие*

$$\tilde{x}^{\pm}_{i,k}(\in \bar{Y}(A(m,n)) \to x^{\pm}_{i,k}(\in Y(A(m,n)),$$

$$\tilde{h}_{i,k}(\in \bar{Y}(A(m,n)) \to h_{i,k}(\in Y(A(m,n))$$

определяет изоморфизм супералгебр

$$\bar{Y}(A(m,n)) \to Y(A(m,n)).$$

Доказательству этой теоремы будет посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

Доказательство. Схема доказательства теоремы 2.2.1 следующая. Надо показать, что определённое выше отображение – изоморфизм. Другими словами, отображение задающее биективное отображение между образующими супералгебр, переводит биективно идеал, порождённый определяющими соотношениями в идеал, порождённый определяющими соотношениями. Схема доказательства изоморфности идеалов, порождённых определяющими соотношениями – следующая. Можно считать, что $\bar{Y}(A(m,n))$ порождается образующими $\tilde{x}^{\pm}_{i,k}$, $\tilde{h}_{i,k}$, удовлетворяющими порождающим соотношениям (2.2.7)–(2.2.16), (2.2.34), (2.2.35). В этом случае достаточно доказать совпадение идеалов, порождённых определяющими соотношениями. То есть, что каждый элемент первого идеала принадлежит второму идеалу и наоборот, каждый элемент второго идеала принадлежит первому. Другими словами, для доказательства теоремы достаточно показать, что соотношения (2.2.22)–(2.2.29) вытекают из соотношений (2.2.7)–(2.2.16), (2.2.34), (2.2.35), и наоборот, соотношения (2.2.7)–(2.2.16), (2.2.34), (2.2.35) вытекают из соотношений (2.2.22)–(2.2.29). Последнее, впрочем, почти очевидно. Действительно, соотношения (2.2.7)–(2.2.16) просто содержатся среди соотношений (2.2.22)–(2.2.29). Что же касается соотношений (2.2.34), то они сразу следуют из (2.2.23) и определения $\tilde{h}_{i,1}$. Соотношение (2.2.25) следует из соотношения (2.2.8).

Существенную роль ниже будут играть соотношения в терминах производящих функций и новые, "логарифмические"образующие $\bar{h}_{i,k}$. Пусть

$$h_i(t) = \sum_{k\geq -1} h_{i,k}t^{-k-1}, \quad x_i^{\pm}(t) = \sum_{k\geq 0} x_{i,k}^{\pm}t^{-k-1}, h_{i,-1} = 1. \tag{2.2.36}$$

Определим образующие $\bar{h}_{i,k}$ формулой:

$$\bar{h}_i(t) = \sum_{k\geq 0} \bar{h}_{i,k}t^{-k-1} = \ln(h_i(t)) \tag{2.2.37}$$

Пусть A — алгебра с единицей (унитальная алгебра) с образующими h_j, x_j, $j \in \mathbb{Z}_+$ и определяющими соотношениями:

$$[h_k, h_l] = 0, \tag{2.2.38}$$

$$[h_k, x_l] = [h_{k-1}, x_{l+1}] + \gamma(h_{k-1}x_l + x_l h_{k-1}), \tag{2.2.39}$$

где $h_{-1} = 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть как и выше: $h(t) = \sum\limits_{k\geq -1} h_k t^{-k-1}$, $x(t) = \sum\limits_{k\geq 0} x_k t^{-k-1}$ и определим $\bar{h}_k \in A \ \ (k \in \mathbb{Z}_+)$ равенством:

$$\bar{h}(t) = \sum_{k\geq 0} \bar{h}_k t^{-k-1} = \ln(h(t)). \tag{2.2.40}$$

Рассуждениями по индукции доказывается следующая

Лемма 2.2.1. *Пусть (2.2.38) выполняется для $k \leq p$, $l \leq p$ и пусть (2.2.39) имеет место для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_+$ имеет место соотношение:*

$$[\bar{h}_k, x_l] = 2\gamma \cdot x_{k+l} + 2 \cdot \sum_{\substack{0\leq s\leq k-2 \\ s\in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{\gamma^{k+l-s}}{k+1} C_{k+1}^s x_{l+s}. \tag{2.2.41}$$

Следствие 2.2.1. В $Y(\mathfrak{g})$ имеют место следующие соотношения:

$$[\bar{h}_{i,k}, x_{j,l}^{\pm}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) \cdot x_{j,k+l}^{\pm} \pm \sum_{\substack{0\leq s\leq k-2 \\ s\in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{2^{s-k} \cdot (\alpha_i, \alpha_j)^{k+l-s}}{k+1} C_{k+1}^s x_{l+s}^{\pm}. \tag{2.2.42}$$

Доказательство. Приступим к доказательству теоремы 2.2.1. В силу сделанного выше замечания достаточно показать, что соотношения (2.2.22)– (2.2.29) вытекают из соотношений (2.2.7)–(2.2.16). Покажем это. Вначале мы проверим соотношения (2.2.22)–(2.2.29) для малых значений второго индекса (≤ 2), подготовив таким образом базу индукции (A). После чего последовательно докажем по индукции соотношения (2.2.22)–(2.2.28), (2.2.29) для $i = j$ (B), потом соотношения (2.2.29)(C), после соотношения (2.2.22)–(2.4.5), (2.2.26) для $i \neq j$ и соотношения (2.2.28), (2.2.29)(D).

A). Из (2.2.7) – (2.2.9), (2.2.12) и определения $x_{j,1}^{\pm}$, $h_{i,k}$ следуют соотношения (2.2.24), (2.2.26), (2.2.28) для $k = 0$. Коммутируя обе части равенства

$$h_{i,1} = [x_{i,1}^+, x_{i,0}^-] = [x_{i,0}^+, x_{i,1}^-]$$

с $\bar{h}_{i,1}$ при $i \neq m$ и с $\bar{h}_{m+1,1}$ при $i = m$, получим, что

$$h_{i,2} := [x^{+}_{i,2}, x^{-}_{i,0}] = [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{i,1}] = [x^{+}_{i,0}, x^{-}_{i,2}]. \tag{2.2.43}$$

Из (2.2.8) и определения $h_{i,1} = \bar{h}_{i,1} + \dfrac{1}{2} h^2_{i,0}$ вытекает, что

$$[h_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] + b_{ij}(h_{i,0} x^{\pm}_{j,0} + x^{\pm}_{j,0} h_{i,0}) \tag{2.2.44}$$

Из (2.2.2) следует также, что (2.2.17) эквивалентно равенству

$$[h_{i,2}, h_{i,1}] = 0.$$

Лемма 2.2.2. *Пусть* $s, p \in \mathbb{Z}_+$, *и*

$$[h_{i,l}, h_{i,k}] = 0 \quad \textit{для} \quad k + l \leq s, \tag{2.2.45}$$

пусть также $\bar{h}_{i,0}, \bar{h}_{i,1}, \ldots, \bar{h}_{i,s}$ *определяются формулой (2.2.42), а (2.2.26) и (2.2.29) имеют место для* $k \leq s$ *и* $l \in \mathbb{Z}_+$ *и имеет место следующее равенство*

$$[x^{\pm}_{i,p+1}, x^{\pm}_{i,p}] = \pm b_{ii} x^{\pm 2}_{i,p} \tag{2.2.46}$$

тогда (2.2.26) и (2.2.29) имеют место для $k = p + s$ *и* $l = p$*:*

$$[x^{\pm}_{i,p+s+1}, x^{\pm}_{i,p}] = [x^{\pm}_{i,p+s}, x^{\pm}_{i,p+1}] \pm b_{ii}(x^{\pm}_{i,p+s} x^{\pm}_{i,p} + x^{\pm}_{i,p} x^{\pm}_{i,p+s}),$$

$$\textit{если} \quad i \neq m \quad \textit{и} \quad [x^{\pm}_{m,p+s+1}, x^{\pm}_{m,p}] = 0. \tag{2.2.47}$$

Доказательство. Пусть $d^i_{kr} = \dfrac{2^{s-k} \cdot (\alpha_i, \alpha_j)^{k+l-s}}{k+1}$. Заметим, что () для $i = j \neq m$ можно переписать в виде :

$$[\bar{h}_{i,k}, x^{\pm}_{i,l}] = \pm 2 \cdot x^{\pm}_{i,k+l} \pm \sum_{0 \leq r \leq k-2} d^i_{kr} C^s_{k+1} x^{\pm}_{i,l+s}. \tag{2.2.48}$$

Пусть $\tilde{h}'_{i,0} = h_{i,0}$, и определим по индукции:

$$\tilde{h}'_{i,k} = h_{i,k} - (1/2) \sum_{0 \leq s \leq k-2} d_{k,s} \tilde{h}'_{2,s}, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Ясно, что

$$[\tilde{h}'_{i,k}, x^{\pm}_{i,l}] = \pm 2 x^{\pm}_{i,k+l}, \quad k = 0, 1, \ldots, s, \quad l \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.2.49}$$

Окончательно получаем, что в случае $i \neq m$

$$[x^{\pm}_{i,p+s+1}, x^{\pm}_{i,p}] = \pm(1/2)[[\tilde{h}'_{i,k}, x^{\pm}_{i,p+1}], x^{\pm}_{i,p}] = [x^{\pm}_{i,p+s}, x^{\pm}_{i,p+1}] \pm$$

$$\pm(1/2)[\tilde{h}'_{i,k}, [x^{\pm}_{i,p+1}, x^{\pm}_{i,p}]] = [x^{\pm}_{i,p+s}, x^{\pm}_{i,p+1}] + (1/2)[\tilde{h}'_{i,k}, \pm x^{\pm 2}_{i,p}] =$$

$$= [x^{\pm}_{i,p+s}, x^{\pm}_{i,p+1}] \pm (x^{\pm}_{i,p+s} x^{\pm}_{i,p} + x^{\pm}_{i,p} x^{\pm}_{i,p+s}).$$

А для $i = m$

$$[x^{\pm}_{m,p+s+1}, x^{\pm}_{m,p}] = [\tilde{h}'_{m+1,s}, [x^{\pm}_{m,p+1}, x^{\pm}_{m,p}]] = \mp([[x^{\pm}_{m,p}, \tilde{h}'_{m+1,s}], x^{\pm}_{m,p+1}] +$$

$$+ [\tilde{h}'_{m+1,s}, [x^{\pm}_{m,p}, x^{\pm}_{m,p+1}]] = \mp [x^{\pm}_{m,p+1}, x^{\pm}_{m,p+1}] = \ldots = \mp [x^{\pm}_{m,p+[s/2]}, x^{\pm}_{m,p+[s/2]}].$$

Отметим, что условия предыдущей леммы выполняются для $s \leq 1$, $p = 0$. Поэтому из этой леммы следует, что

$$[x^{\pm}_{i,2}, x^{\pm}_{i,0}] = \pm b_{ii}(x^{\pm}_{i,1}x^{\pm}_{i,0} + x^{\pm}_{i,0}x^{\pm}_{i,1}), \quad i \neq m, \quad [x^{\pm}_{m,2}, x^{\pm}_{m,0}] = 2(x^{\pm}_{m,1})^2 = 0.$$

Поэтому

$$[[x^{+}_{i,2}, x^{+}_{i,0}], x^{-}_{i,0}] = [h_{i,2}, x^{+}_{i,0}] + (-1)^{p(i)p(i)}[x^{+}_{i,2}, h_{i,2}].$$

Отсюда следует, что

$$[h_{i,2}, x^{+}_{i,0}] + [x^{+}_{i,2}, h_{i,0}] = (h_{i,1}x^{+}_{i,0} + x^{+}_{i,0}h_{i,1} + x^{+}_{i,1}h_{i,0} + h_{i,0}x^{+}_{i,1}) =$$

$$= [h_{i,1}, x^{+}_{i,1}] - [h_{i,0}, x^{+}_{i,2}] + (h_{i,1}x^{+}_{i,0} + x^{+}_{i,0}h_{i,1});$$

$$[h_{m,1}, x^{+}_{m,1}] - [x^{+}_{m,2}, h_{m,0}] = 0 \quad \text{или} \quad [h_{m,1}, x^{+}_{m,1}] = -[h_{m,0}, x^{+}_{m,2}].$$

Выбирая в этих формулах вначале знак + и коммутируя с $x^{-}_{i,0}$, получаем:

$$[h_{i,2}, x^{+}_{i,0}] = [h_{i,1}, x^{+}_{i,1}] + (h_{i,1}x^{+}_{i,0} + x^{+}_{i,0}h_{i,1}).$$

Аналогично,

$$[h_{i,2}, x^{-}_{i,0}] = [h_{i,1}, x^{-}_{i,1}] + (h_{i,1}x^{-}_{i,0} - x^{-}_{i,0}h_{i,1}).$$

Так как

$$[\tilde{h}'_{i,1}, h_{i,2}] = 0, \quad \text{то} \quad [h_{i,2}, x^{\pm}_{i,l}] = [h_{i,1}, x^{\pm}_{i,l+1}] \pm (h_{i,1}x^{\pm}_{i,l} - x^{\pm}_{i,l}h_{i,1}),$$

$$[h_{m,2}, x^{\pm}_{m,0}] = -[h_{m,0}, [\tilde{h}'_{m,2}, x^{\pm}_{m,1}]] = 0. \tag{2.2.50}$$

Коммутируя это равенство с $\tilde{h}'_{m+1,1}$ получим, что

$$[h_{m,2}, x^{\pm}_{m,l}] = 0. \tag{2.2.51}$$

□

B)

Лемма 2.2.3. *Формулы (2.2.29), (2.2.36) имеют место при* $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $i = j$.

Доказательство. Пусть

$$x^{\pm}(i,k,l) := [x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{i,l}] - [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{i,l+1}] \mp b_{ii}(x^{\pm}_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}x^{\pm}_{i,k}),$$

$i \neq m$;

$$x^{\pm}(m,k,l) := [x^{\pm}_{m,k+1}, x^{\pm}_{m,l}].$$

Отметим, что $x^{\pm}(i,k,l) = 0$ для $0 \leq l < k \leq 2$. Прокоммутируем $x^{\pm}(m,k,l)$ с $\tilde{h}'_{m+1,1}$ и получим

$$[\tilde{h}'_{m+1,1}, x^{\pm}(m,k,l)] = \mp x^{\pm}(m,k+1,l) \mp x^{\pm}(m,k,l+1) = 0.$$

Ещё раз прокоммутировав с $\tilde{h}'_{m+1,1}$ получим:

$$x^{\pm}(m,k+2,l) + 2x^{\pm}(m,k+1,l+1) + x^{\pm}(m,k,l+2) = 0.$$

С другой стороны, после коммутации с $\tilde{h}'_{m+1,2}$ получим:

$$x^{\pm}(m,k+2,l) + x^{\pm}(m,k,l+2) = 0.$$

Решая эту систему, получим, что: $x^{\pm}(m, k+1, l+1) = 0$. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $x^{\pm}(i, p, l) = 0$. $\Rightarrow$ Докажем обратное.

$$x^{\pm}(m, k+2, l) + 2x^{\pm}(m, k+1, l+1) + x^{\pm}(m, k, l+2) = 0. \tag{2.2.52}$$

$$x^{\pm}(m, k+2, l) + x^{\pm}(m, k, l+2) = 0. \tag{2.2.53}$$

Получаем, что

$$x^{\pm}(j, p, l) = 0 \ \rightarrow \ x^{\pm}(j, p+2, l) + x^{\pm}(j, p, l+2) = 0, \tag{2.2.54}$$

$$x^{\pm}(j, p, l) = 0 \ \rightarrow \ x^{\pm}(j, p+1, l+1). \tag{2.2.55}$$

Из (2.2.54), (2.2.55) и предыдущих рассуждений получаем, что $x^{\pm}(j, p, l) = 0$ для $0 \leq l \leq p \leq 2$. Пусть равенство $x^{\pm}(j, p, l) = 0$ имеет место для $0 \leq l \leq p \leq s$, где $s \geq 2$. Применяя предыдущие рассуждения получаем, что $x^{\pm}(j, p, l) = 0$ для $0 \leq l \leq p \leq s+1$. Лемма доказана. □

C) Сейчас мы докажем формулы

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad k+l \leq s, \quad k \geq l. \tag{2.2.56}$$

$$[x_{i,s}^{+}, x_{i,0}^{-}] = [x_{i,s-1}^{+}, x_{i,1}^{-}] = \ldots = [x_{i,0}^{+}, x_{i,s}^{-}]; \tag{2.2.57}$$

$$[h_{m,k}, x_{m,l}^{\pm}] = [h_{m,k-1}, x_{m,l+1}^{\pm}] = 0; \tag{2.2.58}$$

$$[h_{i,k}, x_{j,l}^{\pm}] = [h_{i,k-1}, x_{j,l+1}^{\pm}] \pm b_{ij}(h_{i,k}x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm}h_{i,k}), \tag{2.2.59}$$

$(i \neq m \quad$ или $\quad j \neq m)$.

Мы будем предполагать, что $i \neq j$, $i \neq m$ и отдельно рассмотрим случаи $j \neq m$ и $j = m$. При этом мы будем использовать индукцию по s. Для $s = 3$ эти формулы уже доказаны ранее. Предположим, что они выполняются для $s = r$ и пусть $r = 2p-1$ — нечётно вначале. Так как $[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0$ для $l \leq p$, то коммутируя (4.33), (4.34) с $\tilde{h}'_{m+1,m}$, $\tilde{h}'_{i,i}$, соответственно, получим, что эти формулы справедливы для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_{+}$. С другой стороны:

$$0 = [h_{i,p}, h_{i,p}] = [h_{i,p}, \tilde{h}'_{i,p}] = [[x_{i,p}^{+}, x_{i,0}^{-}], \tilde{h}'_{i,p}] =$$

$$= -2[x_{i,2p}^{+}, x_{i,0}^{-}] - [x_{i,p}^{+}, x_{i,p}^{-}]. \tag{2.2.60}$$

Коммутируя $\tilde{h}'_{i,1}$ с обеими частями (2.2.59), а $\tilde{h}'_{m+1,1}$ с обеими частями (2.2.60) при $s = 2p-1$, получим:

$$[x_{i,2p}^{+}, x_{i,0}^{-}] - [x_{i,2p}^{+}, x_{i,1}^{-}] = [x_{i,2p}^{+}, x_{i,0}^{-}] -$$

$$- [x_{i,2p-1}^{+}, x_{i,1}^{-}] = \ldots = [x_{i,1}^{+}, x_{i,2p-1}^{-}] - [x_{i,0}^{+}, x_{i,2p}^{-}]. \tag{2.2.61}$$

Аналогично (2.2.61) имеем

$$0 = [h_{i,p}, h_{j,p}] = [h_{i,p}, \tilde{h}'_{j,p}] = [[x_{i,p}^{+}, x_{i,0}^{-}], \tilde{h}'_{j,p}] = [x_{i,2p}^{+}, x_{i,0}^{-}] -$$

$$[x_{i,p}^{+}, x_{i,p}^{-}]. \tag{2.2.62}$$

Сравнивая (2.2.60) – (2.2.62), получаем, что (2.2.62) выполняется для $s = 2p = r+1$.

Для $q < p$ имеют место следующие равенства:

$$[h_{i,r-q}, h_{j,q+1}] = [[x_{i,r-q}^{+}, x_{i,0}^{-}], \tilde{h}'_{j,q+1}] = [x_{i,r+1}^{+}, x_{i,0}^{-}]$$

$$-[x_{i,r-q}^{+}, x_{i,q+1}^{-}] = 0.$$

Отсюда следует, что (2.2.56) выполняется для $s = r+1$. Для доказательства индукционного шага, относящегося к формулам (2.2.59), (2.2.58) достаточно прокоммутировать $\tilde{h}'_{i,1}$, $\tilde{h}'_{m+1,m}$ с этими формулами при $s \leq r+1$, получим (2.2.59), (2.2.58) с $s = r+1$. Таким образом, индукционный шаг в случае нечётного $r = 2p-1$ обоснован.

Пусть теперь $r = 2p$ — чётно. Коммутируя $\tilde{h}'_{i,1}$, $\tilde{h}'_{m+1,m}$ с (2.2.61) при $s = 2p$, получим:

$$[x^+_{i,2p+1}, x^-_{i,0}] - [x^+_{i,2p}, x^-_{i,1}] = [x^+_{i,2p}, x^-_{i,0}] -$$

$$- [x^+_{i,2p-1}, x^-_{i,2}] = \ldots = [x^+_{i,1}, x^-_{i,2p}] - [x^+_{i,0}, x^-_{i,2p+1}]. \qquad (2.2.63)$$

Из (2.2.61) следует, что $[h_{i,p}, h_{j,l}] = 0$, $l \leq p$, следовательно, можно определить $\tilde{h}'_{i,p}$. Нетрудно видеть, что:

$$[h_{i,p+1}, h_{i,p}] = [h_{i,p+1}, \tilde{h}'_{i,p}] = [[x^+_{i,p+1-q}, x^-_{i,q}], \tilde{h}'_{i,p}]$$

$$= -(\alpha_i, \alpha_i)([x^+_{i,2p+1-q}, x^-_{i,q}] - [x^+_{i,p+1-q}, x^-_{i,p+q}]). \qquad (2.2.64)$$

С другой стороны:

$$[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = [h_{i,p+1}, [x^+_{j,p-1}, x^-_{j,1}]]$$

$$= [[h_{i,p+1}, x^+_{j,p-1}], x^-_{j,1}] + [x^+_{j,p-1}, [h_{i,p+1}, x^-_{j,1}]].$$

Применяя (2.2.64), (2.2.63) несколько раз, получим, что последнее равенство совпадает с

$$[h_{i,0}, x^+_{j,2p}], x^-_{j,1}]] + (\alpha_i, \alpha_j)/2 \left[\sum_{0 \leq l \leq p} (h_{i,p-l} x^+_{j,p+l-1} + x^+_{j,p+l-1} h_{i,p-l}), x^-_{j,1} \right]$$

$$+[x^+_{j,p-1}[h_{i,0}, x^-_{j,p+2}]] = \left[x^+_{j,p-1}, \sum_{0 \leq l \leq p} (h_{i,p-l} x^-_{j,p+l-1} + x^-_{j,p+l-1} h_{i,p-l}) \right] =$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)([x^+_{j,2p}, x^-_{j,1}] - [x^+_{j,p-1}, x^-_{j,p+2}])$$

$$+ \sum_{0 \leq t \leq p} ([h_{i,p-t} x^+_{j,p+t-1} + x^-_{j,p+t-1} h_{i,p-t}, x^-_{i,1}]$$

$$+[x^+_{j,p-1}, h_{i,p-t} x^-_{j,t+1} + x^-_{j,t+1} h_{i,p-t}]).$$

В $Y(\mathfrak{g})$ левая часть последнего равенства равна 0, равно как и первый член правой части. Значит равна нулю и сумма, стоящая в правой части. С другой стороны в $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ равна 0, так как у элементов этой суммы, суммы вторых индексов мономов этой суммы меньше $2p$ и по индукционной гипотезе такие элементы в $Y(\mathfrak{g})$ и в $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ совпадают. Последнее равенство в $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ может быть переписано в виде:

$$[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = (\alpha_i, \alpha_j)([x^+_{i,2p}, x^-_{i,1}] - [x^+_{i,p-1}, x^-_{j,p+2}]).$$

Сравнивая с (2.2.64), получаем, что

$$[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = -[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = 0.$$

Таким образом, индукционный шаг $s = 2p+1 = r+1$ для формулы (2.2.61) совершён. Отсюда следует и доказательство индукционного шага для формулы (2.2.61). Из формул (2.2.61), (2.2.62) следуют формулы (2.2.63), (2.2.64).

D) Нам осталось доказать формулы (2.2.26), (2.2.24) при $i \neq j$, а также (2.2.28), (2.2.29). Их доказательства аналогичны. Докажем, например, (2.2.26). Пусть

$$x^{\pm}(i,j;k,l) = [x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] - [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] \mp b_{ij}(x^{\pm}_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}x^{\pm}_{i,k}).$$

Прокоммутировав это равенство с $\tilde{h}'_{i,1}$, а потом, независимо, с $\tilde{h}'_{j,p}$, мы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{ii}x^{\pm}(i,j;k+1,l) - a_{ij}x^{\pm}(i,j;k,l+1) = 0, \\ a_{ji}x^{\pm}(i,j;k+1,l) - a_{jj}x^{\pm}(i,j;k,l+1) = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то отсюда следует, что $x^{\pm}(i,j;k+1,l) = 0$, $x^{\pm}(i,j;k,l+1) = 0$. Так как $x^{\pm}(i,j;0,0) = 0$ то отсюда следует справедливость (2.2.26) для всех k, l, при $i \neq j$.

Докажем теперь соотношения Серра (2.2.28) — (2.2.29). Обозначим через

$$x_1(i,j;k,s,l) := [x^{\pm}_{i,k}, [x^{\pm}_{i,s}, x^{\pm}_{j,l}]] + [x^{\pm}_{i,s}, [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}]], \tag{2.2.65}$$

$$x_2(m;k,t) := [[x^{\pm}_{m-1,k}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,t}]]. \tag{2.2.66}$$

Выведем сначала соотношение (2.2.28) из соотношения (2.2.12). Отметим, что этот вывод ничем не отличается от аналогичного вывода для янгиана простой алгебры Ли, поскольку в упомянутых выше соотношениях фигурируют лишь корневые образующие, соответствующие простым белым корням. Но для удобства читателя мы воспроизводим вывод этих соотношений.

Прокоммутируем сначала $h'_{i,1}$ с соотношением (2.2.12):

$$[h'_{i,1}, x_1(i,j;0,0,0)] = 2x_1(i,j;1,0,0) + 2x_1(i,j;0,1,0) + a_{i,j}x_1(i,j;0,0,1) = 0.$$

Пусть $i < j$. Прокоммутируем теперь $h'_{i-1,1}$ с соотношением (2.2.12). Получим, что $x_1(i,j;0,0,1) = 0$. Таким образом,

$$x_1(i,j;1,0,0) + x_1(i,j;0,1,0) = 0.$$

Далее рассуждения проводятся по индукции. Пусть соотношение

$$x_1(i,j;k,s,l) = 0 \tag{2.2.67}$$

справедливо при $k \leq n_1$, $s \leq n_2$, $l \leq n_3$. Докажем его справедливость при $k = n_1 + 1$, $s = n_2 + 1$, $l = n_3 + 1$. Прокоммутируем $h'_{i-1,1}$ с соотношением $x_1(i,j;n_1,n_2-1,n_3) = 0$. Получим:

$$[h'_{i-1,1}, x_1(i,j;n_1,n_2-1,n_3)] = a_{i-1,i}(x_1(i,j;n_1+1,n_2-1,n_3) + x_1(i,j;n_1,n_2,n_3)) = 0.$$

Поскольку, по индукционному предположению $x_1(i,j;n_1,n_2,n_3) = 0$, получаем, что $x_1(i,j;n_1+1,n_2-1,n_3) = 0$. Таким образом, мы получили, что соотношение (2.2.67) выполняется при всех $k, l < n_2$, $s \leq n_3$. Коммутируя это соотношение с $h'_{i-1,1}$ убеждаемся, что оно справедливо также и при всех l. Коммутируя с $h'_{j+1,1}$ аналогично получаем, что соотношение (2.2.67) справедливо и при всех s. Случай когда $i > j$ рассматривается аналогично с заменой $h'_{i-1,1}$ на $h'_{i+1,1}$, а $h'_{j+1,1}$ на $h'_{j-1,1}$.

Выведем соотношение (2.2.29) из соотношений (2.2.13), (2.2.14). Соотношение

$$x_2(m;1,0) = 0$$

совпадает с соотношением (2.2.14). Прокоммутируем $h'_{m,1}$ с (2.2.14):

$$[h'_{m,1}, x_2(m;1,0)] = x_2(m;2,0) + x_2(m;1,1) = 0. \tag{2.2.68}$$

Прокоммутировав $h'_{m,1}$ с (2.2.13) получим

$$[h'_{m,1}, x_2(m;0,0)] = x_2(m;1,0) + x_2(m;0,1) = 0. \tag{2.2.69}$$

Вычитая из (2.2.68) соотношение (2.2.69) мы получим соотношение

$$x_2(m;2,0) + x_2(m;0,0) = 0.$$

Так как $x_2(m;0,0) = 0$ в силу (2.2.13), получаем, что $x_2(m;2,0) = 0$. Учитывая (2.2.68) получаем, что $x_2(m;1,1) = 0$. Аналогично доказываем и равенство $x_2(m;0,2) = 0$. Пусть теперь соотношения

$$x_2(m;t_1,t_2) = 0$$

справедливы при $t_1, t_2 \leq n$. Докажем его справедливость и при $t_1 = n+1$. Прокоммутируем $h'_{m,1}$ с $x_2(m;n,t_2-1) = 0$. Получим

$$[h'_{m,1}, x_2(m;n,t_2-1)] = x_2(m;n+1,t_2-1) + x_2(m;n,t_2) = 0.$$

Поскольку по индукционному предположению $x_2(m;n,t_2) = 0$, получаем, что

$$x_2(m;n+1,t_2-1) = 0.$$

Таким образом,

$$x_2(m;t_1,t_2) = 0 \tag{2.2.70}$$

при всех t_1 и $t_2 < n$.

Теперь коммутируем $h'_{m,1}$ с $x_2(m;t_1,n-1) = 0$. Получаем, что

$$[h'_{m,1}, x_2(m;t_1,n-1)] = x_2(m;t_1+1,n-1) + x_2(m;t_1-1,n) = 0.$$

Учитывая, что по индукционному предположению $x_2(m;t_1+1,n-1) = 0$ получаем, что

$$x_2(m;t_1-1,n) = 0$$

и соотношение (2.2.14) доказано. □

□

2.3 Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана $Y(A(m,n))$

В этом параграфе мы сформулируем и докажем теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта о существовании в янгиане, как в векторном пространстве специального базиса, называемого базисом Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Этот результат имеет фундаментальное значение и будет много раз использован в дальнейшем. В данной работе мы приведём две различные формулировки этого результата и дадим два доказательства, основанные на одних и тех же идеях, но слегка отличающиеся в деталях. Это объясняется тем, что два основных приложения этой теоремы связаны: одно с нахождением формулы для универсальной R-матрицы квантового дубля $DY(A(m,n))$ янгиана, а второе с описанием неприводимых представлений $Y(A(m,n))$. В этих случаях нам будет удобно использовать несколько отличающиеся по форме базисы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Перейдём к изложению первого варианта теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

2.3.1 Базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта

Будем называть степенью образующих $x^{\pm}_{i,k}$, $h_{i,k}$ их второй индекс. Степенью монома от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. Степенью многочлена от образующих будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Степенью тензорного произведения мономов будем называть сумму степеней тензорных сомножителей. Степенью тензорного полинома будем как и выше называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином.

Пусть $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g})$ степени не выше чем k через $Y(\mathfrak{g})$. Получаем на $Y(\mathfrak{g})$ фильтрацию:

$$0 = Y(\mathfrak{g})_{-1} \subset Y(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{g}) \subset Y(\mathfrak{g})_1 \subset \ldots \subset Y(\mathfrak{g})_k \subset Y(\mathfrak{g})_{k+1} \subset \ldots .$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{g})$. Пусть $\alpha = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_p}$ — разложение положительного корня в сумму таких корней, что

$$x^{\pm}_{\alpha} = [x^{\pm}_{i_1}, [x^{\pm}_{i_2}, \ldots [x^{\pm}_{i_{p-1}}, x^{\pm}_{i_p}] \ldots]]$$

является ненулевым корневым вектором из $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$. Пусть $k = k_1 + \ldots + k_p$, $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}_+ \times \ldots \times \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}^p_+$. Определим корневые векторы формулами

$$x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}} = [x^{\pm}_{i_1,k_1}, [x^{\pm}_{i_2,k_2}, \ldots [x^{\pm}_{i_{p-1},k_{p-1}}, x^{\pm}_{i_p,k_p}] \ldots]],$$

$$x_{\pm\alpha,\bar{k}} = x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}}, \; h_{\alpha,\bar{k}} = [x^{+}_{\alpha,0}, x^{-}_{\alpha,\bar{k}}], \; h_{i,\bar{k}} = h_{\alpha_i,\bar{k}}. \tag{2.3.1}$$

Нетрудно проверить, что если $k = k'_1 + \ldots , k'_p$ — другое разложение числа k, $\bar{k}' = (k'_1, \ldots, k'_p)$ то

$$x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}} - x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}} \in Y(\mathfrak{g})_{k-1}, \quad h_{\alpha,\bar{k}} - h_{\alpha,\bar{k}} = Y(\mathfrak{g})_{k-1}. \tag{2.3.2}$$

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (то есть по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k+l-1}$) коммутационные соотношения в $Y(\mathfrak{g})$ имеют вид:

$$[h_{\alpha,\bar{k}}, x_{\beta,\bar{l}}] = (\alpha,\beta) x_{\beta,\bar{k}+\bar{l}}; \quad [h_{\alpha,\bar{k}}, h_{\beta,\bar{l}}] = 0; \tag{2.3.3}$$

$$[x_{\alpha,\bar{k}}, x_{\beta,\bar{l}}] = \begin{cases} 0, & \alpha + \beta \notin \Delta U\{0\}, \\ h_{\alpha,\bar{k}+\bar{l}}, & \beta = -\alpha, \\ N(\alpha,\beta) x_{\alpha+\beta,\bar{k}+\bar{l}}, & \alpha + \beta \in \Delta \end{cases} \tag{2.3.4}$$

где $N(\alpha,\beta)$ определяется из следующего соотношения в $U(\mathfrak{g})$ $[x_\alpha, x_\beta] = N(\alpha,\beta) x_{\alpha+\beta}$, для $\alpha + \beta \in \Delta$.

Для каждого числа k зафиксируем вектор $\bar{k}$, определяющий разбиение этого числа.

Пусть теперь Δ, Δ_+ обозначает множество корней, множество положительных корней, соответственно, суперaлгебры Ли $A(m,n)$. Рассмотрим также $\hat{\Delta}^{re}$ множество вещественных корней соответствующей аффинной (нескрученной) супералгебры Ли $A(m,n)^{(1)}$ (см. [140]). Для образующих $DY(\mathfrak{g})$ $x^{\pm}_{i,k}$ будем использовать следующие обозначения:
$x_{\alpha_i + k\delta} := x^{+}_{i,k}$,
$x_{-\alpha_i + k\delta} := x^{-}_{i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \Delta_+$.

В этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{re}$. Пусть $\Xi \subset \hat{\Delta}^{re}$. Линейный порядок $\gneqq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$ и таких, что $\gamma = \alpha + \beta$ имеет место одно из следующих двух отношений порядка:

$$\alpha \gneqq \gamma \gneqq \beta$$

или

$$\beta \precneqq \gamma \precneqq \alpha$$

Введем подмножества Ξ_+, Ξ_- множества $\hat{\Delta}^{re}$:

$$\Xi_\pm := \{\pm\gamma + k\delta : \gamma \in \hat{\Delta}^{re}_+\}.$$

Введем на Ξ_+, Ξ_- выпуклые порядки $\precneqq_+, \precneqq_-$, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma + k\delta \precneqq_+ \gamma + l\delta \qquad \text{и} \quad -\gamma + l\delta \precneqq_- -\gamma + k\delta, \qquad \text{если} \quad k, l, \quad \text{для} \quad \forall\gamma \in \Delta_+$$

Определим теперь корневые векторы

$$x_{\pm\beta}, \beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$$

по индукции следующим образом. Пусть векторы

$$x_{\beta_1}, x_{\beta_2}$$

уже построены. Если корень x_{β_3} таков, что: $x_{\beta_1} \precneqq x_{\beta_3} \precneqq x_{\beta_2}$ и в интервале $(x_{\beta_1}, x_{\beta_2})$ нет корней для которых уже построены корневые векторы. то определим корневые векторы $x_{\pm\beta_3}$ формулами:

$$x_{\beta_3} = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}], x_{-\beta_3} = [x_{-\beta_2}, x_{-\beta_1}].$$

Заметим теперь, что данный выбранный нормальный порядок фиксирует однозначно разбиение $\bar{k}$ натурального числа k и, таким образом, элемент $x^\pm_{\alpha,\bar{k}} := x_{\pm\alpha+k\delta}$ определён однозначно.

Отметим, что выпуклый (нормальный) порядок связан с естественным упорядочиванием элементов аффинной группы Вейля. Этот факт позволяет дать геометрическую интерпретацию рассматриваемым ниже конструкциям. Нам потребуется следующее описание $Y(A(m,n))$, являющееся аналогом описания квантованной аффинной супералгебры. Сначала зафиксируем следующий нормальный порядок на $\mathfrak{g} = A(m,n)$:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+2}), (\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_4, \ldots, \epsilon_2 - \epsilon_{m+n+2}), \ldots (\epsilon_{m+n+1} - \epsilon_{m+n+2}).$$

Здесь $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$.

К простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n+1}$ добавим еще аффинный корень $\alpha_0 = \delta - \theta, \theta := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m+n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+1}$ – старший корень, δ – минимальный мнимый корень. Рассмотрим следующий нормальный порядок на множестве $\hat{\Delta}^{re}$ аффинных вещественных корней:
$(\alpha_1, \alpha_1 + \delta, \alpha_1 + 2\delta, \ldots, \alpha_1 + n\delta, \cdots), (\cdots \alpha_1 + \alpha_2 + n\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2), (\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + n\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ldots, (\ldots \alpha_{n+m+1} + n\delta, \ldots, \alpha_{n+m+1} + \delta, \alpha_{n+m+1})$.

Сейчас мы введём линейный порядок $<$ на множестве $\{x^+_{\alpha,\bar{k}} = x_{\alpha+k\delta}, x^-_{\beta,\bar{l}} = x_{-beta+l\delta}, h_{j,m} = h_{\alpha_j+m\delta}\}$, $\alpha, \beta \in \Delta$, $j \in I$, $k, l, m \in \mathbb{Z}_+$ и обозначим через $\Omega(<)$ множество упорядоченных мономов от $x^+_{\alpha,\bar{k}} = x_{\alpha+k\delta}$, $x^-_{\beta,\bar{l}} = x_{\beta+l\delta}$, $h_{j,m} = h_{\alpha_j+m\delta}$. Наша задача показать, что $\Omega(<)$ — линейный базис янгиана $Y(A(m,n))$ (то есть базис в $Y(A(m,n))$, как в векторном пространстве).

Линейный порядок выберем следующим образом. Зафиксируем сначала нормальный порядок на отмеченном выше множестве вещественных аффинных корней. Если $\alpha + k\delta < \beta + l\delta$, то потребуем, чтобы

$$x_{\alpha+k\delta} < x_{\beta+l\delta}.$$

Кроме того, пусть

$$x^{+}_{\alpha,\bar{k}} < h_{j,\bar{l}} < x^{-}_{\beta,\bar{s}}, \quad \text{для} \quad \forall \alpha, \beta, j, k, l, s;$$

если $i < j$ то $x^{\pm}_{\beta(i),\bar{k}} < x^{\pm}_{\beta(j),\bar{l}}$ и $h_{i,\bar{k}} < h_{j,\bar{l}}$ для $\forall k, l$;
если $k < l$ тогда $x^{\pm}_{\beta(i),\bar{k}} < x^{\pm}_{\beta(i),\bar{l}}$ и $h_{j,\bar{k}} < h_{j,\bar{l}}$, для всех $i, j \in I$.

Теорема 2.3.1. *$\Omega(<)$ — базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта янгиана $Y(A(m,n))$.*

2.3.2 Доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта

Весь данный пункт посвящён доказательству теоремы 5.8.1 Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана специальной линейной супералгебры.

Доказательство. Докажем полноту $\Omega(<)$. Для монома M из $\Omega(<)$ определим его длину $l(M)$ как число множителей — образующих входящих в M. При переупорядочивании сомножителей в силу (2.3.3), (2.3.4) мы будем получать дополнительные слагаемые либо меньшей степени, либо той же степени и меньшей длины. Используя индукцию получаем, что $Y(A(m,n))$ совпадает с линейной оболочкой $\Omega(<)$.

Докажем теперь линейную независимость мономов из $\Omega(<)$. Это доказательство основано на существовании представления ρ янгиана $Y(G)$, которое обладает тем свойством, что $\rho(x^{+}_{i,0})$, $\rho(x^{-}_{i,0})$, $\rho(h_{i,0})$ линейно независимы. Легко строится исходя из вида определяющих соотношений янгиана представление ρ, обладающее тем свойством, что $\rho\Big|_{U(A(m,n))}$ — фундаментальное представление. Более того, можно показать, что существует гомоморфизм $\varphi : U(A(m,n)) \to Y(A(m,n))$, обладающий тем свойством, что $\varphi\Big|_{U(A(m,n))}$ — тождественное отображение. Если ρ_0 — представление $U(A(m,n))$, обладающее отмеченным выше свойством, то этим же свойством будет обладать и представление $\rho = \rho_0 \circ \varphi$ янгиана $Y(A(m,n))$.

Дальнейшие рассуждения проводятся по следующей схеме, основанной на существовании точного представления янгиана.

Предположим, что мономы из $\Omega(<)$ не являются линейно независимыми. Тогда найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_s \in C \setminus \{0\}$ и мономы $M_1, \ldots, M_s \in \Omega(<)$, что

$$\sum_{1 \le j \le s} c_j M_j = 0. \tag{2.3.5}$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию. При дальнейшем изложении нам потребуются автоморфизмы τ_α, $\alpha \in \mathbb{C}$, (см. [120]). На образующих они определяются формулами:

$$\tau_\alpha(h_{i,k}) = \sum_{0 \le r \le k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} a^{k-r} h_{i,r};$$

$$\tau_\alpha(x^{\pm}_{i,k}) = \sum_{0 \le r \le k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} a^{k-r} x^{\pm}_{i,r}.$$

Нетрудно показать что τ_α корректно определены. Пусть

$$\rho_0 = \rho \circ \varphi : Y(\mathfrak{g}) \to End\, V$$

такое представление $Y(A(m,n))$, что $\rho_0(x^{+}_{\alpha,0})$, $\rho_0(x^{-}_{\alpha,0})$, $\rho_0(h_{i,0})$ — линейно независимы. Пусть L — максимальная из длин мономов $M_1, \ldots, M_s$. Перемножая тензорно ρ_0 мы можем сконструировать представление

$$\rho : \; Y(A(m,n)) \to End(V)$$

такое, что все мономы от $\rho(x^{\pm}_{\alpha,0})$, $\rho(h_i,0)$ с $l(M) \leq L$ линейно независимы. Определим представление

$$\tilde{\rho}:\ Y(A(m,n)) \to End(\tilde{V}) := End(V) \otimes \mathbb{C}[a]$$

формулой

$$\tilde{\rho}(x)(a) = (\rho \circ \tau_\alpha)(x),$$

$x \in Y(A(m,n))$. Применяя $\tilde{\rho}$ к обеим частям (2.3.5) и выбирая в (2.3.5) члены старшей степени, соответствующей a, видим, что (2.3.5) должно иметь место для некоторых одночленов такой же степени $d = d(M_j)$. Если

$$M_j = \prod_{\alpha\in\Delta_+} M^{+}_{j,\alpha} \cdot \prod_{r=1}^{n} M^{0}_{j,r} \cdot \prod_{\alpha\in\Delta_+} M^{-}_{j,\alpha},$$

где

$$M^{\pm}_{j,\alpha} = \prod_{k\in\mathbb{Z}_+} x^{\pm^{m^{\pm}(\alpha,k,j)}}_{\alpha,k},$$

$$M^{0}_{j,r} = \prod_{k\in\mathbb{Z}_+} h^{m^0(r,k,j)}_{r,k}$$

с конечным множеством ненулевых показателей. Легко проверить, что множества

$$m^{\pm}(i,j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m^{\pm}(\alpha,k,j), \quad m^0(i,j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)$$

не зависят от j. Поэтому можно считать, что множества $I^{\pm}_j = \{i \big| m^{\pm}(i,j) > 0\}$, $I^0_j = \{i \big| m^0(i,j) > 0\}$ не зависят от j. Обозначим их через $I^{\pm}$, I^0, соответственно. Пусть $p = \operatorname{card} I^+ + \operatorname{card} I^- + \operatorname{card} I^0$. Используя индукцию по p покажем, что это предположение приводит к противоречию. Пусть $p = 1$. Тогда либо $M_j = M^0_{j,i}$, $M_j = M^+_{j,i}$ либо $M_j = M^-_{j,i}$. Пусть

$$M_j = \prod_{k\in\mathbb{Z}_+} h^{m^0(r,k,j)}_{r,k}$$

с $d = d(M_j) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)k$ и $m = m^0(i,j) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)$ не зависят от j. Рассмотрим действие $Y(\mathfrak{g})$ на $(V \otimes \mathbb{C}[a_1]) \otimes (V \otimes \mathbb{C}[a_2]) \otimes \ldots \otimes (V \otimes \mathbb{C}[a_m])$. Используя определение коумножения, автоморфизмов τ_α и выбирая члены старшей степени, получаем, что

$$\sum_{1\leq j\ leqs} c_j \prod_{k\in\mathbb{Z}_+} (ha_1^k \otimes 1^{\otimes(m-1)} + 1 \otimes ha_2^k \otimes 1^{\otimes(m-2)} + \ldots + 1^{\otimes(m-1)} \otimes ha_m^k)^{m_{kj}} = 0,$$

где $h = \rho(h_{i0})$, $m_{kj} = m^0(i,k,j)$. Переставляя круглые скобки соберём члены в форме $f(a_1,\ldots,a_m)h^{\otimes m}$, где f — моном от $a_1,\ldots,a_m$. Из этих членов выберем члены с наибольшей a_1-степенью; из отобранных членов выберем члены с наибольшей a_2-степенью и так далее. В конце концов получим член в котором степени $\{m(i,k,j) \big| k \in \mathbb{Z}_+\}$, $1 \leq j \leq s$, взаимно различны. Следовательно, равенство (2.3.5) с которого мы начали рассуждения, не может иметь места.

Предположим теперь, что линейная независимость доказана для всех мономов с $p \leq l$, где $l \geq 1$ и имеет место равенство (2.3.5) с $c_j \neq 0$ и $p(M_j) = l + 1$. Применяя Δ к (2.3.5), переставим круглые скобки и выберем члены старшей степени. После чего, предполагая, что нашлось такое i, что $M^+_{ji} = I$ (другие случаи рассматриваются аналогично), мы выберем все члены в форме

$$\sum_{1\leq j\leq s} c_j M^+_{ji} \otimes \prod_{\substack{r\neq i\\ 1\leq r\leq N}} M^+_{jr} \prod_{1\leq q\leq N} M^0_{qr} \prod_{1\leq r\leq N} M^-_{jr}.$$

Обозначая правые тензорные сомножители через N_{ji} получим

$$\sum_{1\leq j\leq s} c_j M^+_{ji} \otimes N_{ji} = 0. \tag{2.3.6}$$

Так как $M_1, \ldots, M_s$ взаимно различны, то таковы либо $M^+_{1i}, \ldots, M^+_{si}$ либо $N_{1i}, \ldots, N_{si}$. Но $p(M^+_{1i}) = \ldots = p(M^+_{si}) = 1 \leq p$ и $p(N_{1i}) = \ldots = p(N_{si}) = p$, следовательно, согласно индукционному предположению, из (2.3.6) следует, что $c_1 = \ldots = c_s = 0$. Теорема доказана.

□

2.4 Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$

В этом параграфе мы определяем квантовый дубль янгиана $Y(A(m, n))$ супералгебры Ли типа $A(m, n)$ (специальной линейной супералгебры Ли).

2.4.1 Определение квантового дубля $DY(A(m, n))$

Определение янгиана $Y(A(m, n))$ дано выше (см. определения 2.2.22, 2.2.23). Нам потребуется реализация янгиана при помощи токовой системы образующих и определяющих соотношений (см. определение 2.2.23). Именно его будет удобно использовать в дальнейшем.

Янгиан $Y(A(m, n))$ это супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}$, порождённая как ассоциативная супералгебра, образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}, x^\pm_{i,k} := x^\pm_{\alpha_i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \tag{2.4.1}$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x^+_{i,k}, x^-_{j,l}], \tag{2.4.2}$$

$$[h_{i,k+1}, x^\pm_{j,l}] = [h_{i,k}, x^\pm_{j,l+1}] + (b_{ij}/2)(h_{i,k} x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l} h_{i,k}), \tag{2.4.3}$$

$$[h_{i,0}, x^\pm_{j,l}] = \pm b_{ij} x^\pm_{j,l}, \tag{2.4.4}$$

$$[x^\pm_{i,k+1}, x^\pm_{j,l}] = [x^\pm_{i,k}, x^\pm_{j,l+1}] + (b_{ij}/2)(x^\pm_{i,k} x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l} x^\pm_{i,k}), \tag{2.4.5}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [x^\pm_{i,k_{\sigma(1)}}, \cdots [x^\pm_{i,k_{\sigma(r)}}, x^\pm_{j,l}]...] = 0, i \neq j, r = n_{ij} = 2 \tag{2.4.6}$$

$$[[x^\pm_{m,k}, x^\pm_{m+1,0}], [x^\pm_{m+2,r}, x^\pm_{m+1,0}]] = 0 \tag{2.4.7}$$

Здесь $k, r \in \mathbb{Z}_+$. Функция чётности принимает следующие значения на образующих: $p(x^\pm_{j,k}) = 0$, для $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \setminus \tau$ $p(h_{i,k}) = 0$, для $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^\pm_{i,k}) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i \in \tau$.

В этом параграфе мы также будем использовать следующие формулы для коумножения на образующих нулевого и первого порядков:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, x \in \mathfrak{g} \tag{2.4.8}$$

$$\Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] + h_{i,0} \otimes h_{i,0} =$$
$$h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} (\alpha_i, \alpha) x_{-\alpha} \otimes x_\alpha; \tag{2.4.9}$$

$$\Delta(x_{i,1}^-) = x_{i,1}^- \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^- + [1 \otimes x_{i,0}^-, \mathfrak{t}_0] =$$
$$x_{i,1}^- \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^- + \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} [x_{-\alpha_i}, x_{-\alpha}] \otimes x_\alpha; \tag{2.4.10}$$

$$\Delta(x_{i,1}^+) = x_{i,1}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ + [x_{i,0}^+ \otimes 1, \mathfrak{t}_0] =$$
$$x_{i,1}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} x_{-\alpha} \otimes [x_{\alpha_i}, x_\alpha]. \tag{2.4.11}$$

Введем теперь квантовый дубль $DY(A(m,n))$ янгиана $Y(A(m,n))$. Я напомню определение квантового дубля (см. главу 1). Пусть A – произвольная супералгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда квантовым дублем DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа; R является образом канонического элемента в $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении $A \otimes A^0$ в $DA \otimes DA$. Линейное отображение

$$A \otimes A^0 \to DA, a \otimes b \to ab$$

является биекцией. Напомним также, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{a}$, то квантовый дубль DA является квантованием квантованием классического дубля $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{a}$.

Пусть теперь в этом параграфе, как и выше, $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Введём следующую супералгебру Хопфа $C(\mathfrak{g})$, которая, как мы убедимся ниже, изоморфна квантовому дублю янгиана $DY(\mathfrak{g})$.

Пусть $\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ супералгебра,порождённая образующими $h_{i,k}, x_{i,k}^{\pm}, i \in I, k \in \mathbb{Z}$, которые удовлетворяют вышеприведенным соотношениям в янгиане: (2.2.22 – 2.2.29) или (2.4.1 – 2.4.7). Другими словами, имеет место следующее определение.

Определение 2.4.1. *Пусть $C(\mathfrak{g})$ это ассоциативная супералгебра над $\mathbb{C}$, порождённая образующими*

$$h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}, x_{i,k}^{\pm} := x_{\alpha_i,k}^{\pm}, i \in I, k \in \mathbb{Z},$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad \delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x_{i,k}^+, x_{j,l}^-], \tag{2.4.12}$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^{\pm}] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^{\pm}] + b_{ij}(h_{i,k} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} h_{i,k}), \quad i \text{ или } j \neq m, \tag{2.4.13}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,l}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,l}^{\pm}, \tag{2.4.14}$$

$$[h_{m,k+1}, x_{m,l}^{\pm}] = 0, \tag{2.4.15}$$

$$[x_{i,k+1}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}] = [x_{i,k}^{\pm}, x_{j,l+1}^{\pm}] + b_{ij}(x_{i,k}^{\pm} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} x_{i,k}^{\pm}), \quad i \neq m \text{ или } j \neq m, \tag{2.4.16}$$

$$[x_{m,k+1}^{\pm}, x_{m,l}^{\pm}] = 0 \tag{2.4.17}$$

$$[x_{i,k}^{\pm}, [x_{i,s}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}]] + [x_{i,s}^{\pm}, [x_{i,k}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}]] = 0, \quad i \neq j, \tag{2.4.18}$$

$$[[x_{m-1,k}^{\pm}, x_{m,0}^{\pm}], [x_{m,0}^{\pm}, x_{m+1,t}^{\pm}]] = 0, \tag{2.4.19}$$

для произвольных целых m, r, l, t. Здесь $b_{ij} = a_{ij}/2$, а $(a_{ij})_{i,j=1}^{m+n+1}$ – симметризованная матрица Картана супералгебры Ли $A(m,n)$. Функция четности принимает следующие *значения на образующих:* $p(x^{\pm}_{j,k}) = 0$, *для* $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \setminus \tau$ $p(h_{i,k}) = 0$, *для* $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^{\pm}_{i,k}) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i \in \tau$.

Если определить степень элементов в $C(\mathfrak{g})$ формулой: $deg(h_{i,k}) = deg(x^{\pm}_{i,k}) = k$, то получаем фильтрацию на $C(\mathfrak{g})$:

$$\ldots C_{-n} \subset \ldots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset \ldots \subset C_m \subset \ldots C(\mathfrak{g}), \tag{2.4.20}$$

где $C_k = \{x \in C(\mathfrak{g}) : deg(x) \leq k\}$.

Пусть $\bar{C}(\mathfrak{g})$ формальное пополнение $C(\mathfrak{g})$ относительно этой фильтрации. Образующие $x^{\pm}_{i,k}, h_{i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$ порождают подсупералгебру Хопфа $Y^+(\mathfrak{g})$ в $\bar{C}(\mathfrak{g})$, изоморфную $Y(\mathfrak{g})$. Пусть $Y^-(\mathfrak{g})$ замкнутая подсупералгебра в $\bar{C}(\mathfrak{g})$, порожденная образующими $x^{\pm}_{i,k}, h_{i,k}, i \in I, k < 0$.

Теорема 2.4.1. *Супералгебра Хопфа* $Y^0(\mathfrak{g})$ *изоморфна* $Y^-(\mathfrak{g})$.

Эта теорема будет вытекать из формулируемых ниже результатов. Из теоремы 2.4.1 вытекает, что супералгебра Хопфа $Y^-(\mathfrak{g})$ является квантованием бисупералгебры Ли $t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$ (с коциклом (A.4.1)).

Мы будем также в дальнейшем использовать следующие обозначения

$$e_{i,k} := x^+_{i,k}, \quad f_{i,k} := x^-_{i,k}. \tag{2.4.21}$$

Для описания $DY(\mathfrak{g})$ удобно ввести порождающие функции

$$e^+_i(u) := \sum_{k\geq 0} x^+_{i,k} u^{-k-1} = \sum_{k\geq 0} e_{i,k} u^{-k-1},$$

$$e^-_i(u) := -\sum_{k<0} x^+_{i,k} u^{-k-1} = -\sum_{k<0} e_{i,k} u^{-k-1},$$

$$f^+_i(u) := \sum_{k\geq 0} x^-_{i,k} u^{-k-1} = \sum_{k\geq 0} f_{i,k} u^{-k-1},$$

$$f^-_i(u) := -\sum_{k<0} x^-_{i,k} u^{-k-1} = f^-_i(u) := -\sum_{k<0} f_{i,k} u^{-k-1},$$

$$h^+_i(u) := 1 + \sum_{k\geq 0} h_{i,k} u^{-k-1}, \quad h_i(u) := 1 - \sum_{k<0} h_{i,k} u^{-k-1}.$$

Предложение 2.4.1. *Определяющие соотношения (2.4.12 – 2.4.19) в супералгебре* $\bar{C}(\mathfrak{g})$ *эквивалентны следующим соотношениям для порождающих функций*

$$[h_i^{\pm}(u), h_j^{\pm}(v)] = 0, [h_i^{+}(u), h_j^{-}(u)] = 0, \tag{2.4.22}$$

$$[e_i^{\pm}(u), f_j^{\pm}(v)] = -\delta_{i,j}\frac{h_i^{\pm}(u) - h_i^{\pm}(v)]}{u-v}, \tag{2.4.23}$$

$$[e_i^{\pm}(u), f_j^{\mp}(v)] = -\delta_{i,j}\frac{h_i^{\mp}(u) - h_i^{\pm}(v)]}{u-v}, \tag{2.4.24}$$

$$[h_i^{\pm}(u), e_j^{\pm}(v)] = -\tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{h_i^{\pm}(u), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.25}$$

$$[h_i^{\pm}(u), e_j^{\mp}(v)] = -\tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{h_i^{\pm}(u), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\mp}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.26}$$

$$[h_i^{\pm}(u), f_j^{\pm}(v)] = \tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{h_i^{\pm}(u), (f_j^{\pm}(u) - f_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.27}$$

$$[h_i^{\pm}(u), f_j^{\mp}(v)] = \tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{h_i^{\pm}(u), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\mp}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.28}$$

$$[e_i^{\pm}(u), e_j^{\pm}(v)] + [e_j^{\pm}(u), e_i^{\pm}(v)] = -\tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{(e_i^{\pm}(u) - e_i^{\pm}(v)), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.29}$$

$$[e_i^{+}(u), e_j^{-}(v)] + [e_j^{+}(u), e_i^{-}(v)] = -\tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{(e_i^{+}(u) - e_i^{-}(v)), (e_j^{+}(u) - e_j^{-}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.30}$$

$$[f_i^{\pm}(u), f_j^{\pm}(v)] + [f_j^{\pm}(u), f_i^{\pm}(v)] = -\tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{(f_i^{\pm}(u) - f_i^{\pm}(v)), (f_j^{\pm}(u) - f_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.31}$$

$$[f_i^{+}(u), f_j^{-}(v)] + [f_j^{+}(u), f_i^{-}(v)] = -\tfrac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{\{(f_i^{+}(u) - f_i^{-}(v)), (f_j^{+}(u) - f_j^{-}(v))\}}{u-v}, \tag{2.4.32}$$

$$[e_i^{\epsilon_1}(u_1), [e_i^{\epsilon_2}(u_2), e_j^{\epsilon_3}(u_3)]] + [e_i^{\epsilon_2}(u_2), [e_i^{\epsilon_1}(u_1), e_j^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0, \tag{2.4.33}$$

$$[f_i^{\epsilon_1}(u_1), [f_i^{\epsilon_2}(u_2), f_j^{\epsilon_3}(u_3)]] + [f_i^{\epsilon_2}(u_2), [f_i^{\epsilon_1}(u_1), f_j^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0, \tag{2.4.34}$$

$$[[e_m^{\epsilon_1}(u_1), e_{m+1}^{\epsilon_2}(u_2)], [e_{m+2}^{\epsilon_3}(u_3), e_{m+1}^{\epsilon_4}(u_4)]] = 0, \tag{2.4.35}$$

$$[[f_m^{\epsilon_1}(u_1), f_{m+1}^{\epsilon_2}(u_2)], [f_{m+2}^{\epsilon_3}(u_3), f_{m+1}^{\epsilon_4}(u_4)]] = 0. \tag{2.4.36}$$

2.4.2 Треугольное разложение и формулы спаривания

Пусть Y'_+, Y'_0, Y'_- – подсуперапгебры (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порожденные элементами $x^+_{ik}, h_{ik}, x^-_{ik}, (i \in I, k \in \mathbb{Z}_+)$, соответственно. Пусть Y_+, Y_0, Y_- – тоже подсуперапгебры Y'_+, Y'_0, Y'_- с единичным элементом.

Предложение 2.4.2. *Умножение в $Y(\mathfrak{g})$ индуцирует изоморфизм векторных суперпространств*

$$Y_+ \otimes Y_0 \otimes Y_- \to Y(\mathfrak{g}). \tag{2.4.1}$$

Это предложение частный случай доказанной выше теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта (см. также теорему 3 работы [54]). Обобщим это предложение на $DY(\mathfrak{g})$. Для этого нам потребуются некоторые простые свойства операции коумножения на $Y(\mathfrak{g})$, доказываемые по индукции, опираясь на формулы (2.2.30 – 2.2.33) и соотношения (2.2.22 – 2.2.29) (см. также приведённые выше формулы (2.4.8 – 2.4.11)), а также тот факт, что операция коумножения является гомоморфизмом, то есть, что

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b).$$

Предложение 2.4.3. *1)*
$$\Delta(x) = x \otimes 1(\mod Y \otimes Y'_+),$$
для произвольного $x \in Y'_+$;
2)
$$\Delta(y) = 1 \otimes y(\mod Y'_- \otimes Y),$$
для произвольного $y \in Y'_-$.

Доказательство. Формулы доказываются по индукции, на основе соотношений (2.4.8 – 2.4.11). □

Следствие. 1)
$$\Delta(Y_+) \subset Y \otimes Y_+;$$
2)
$$\Delta(Y_-) \subset Y_- \otimes Y.$$

Таким образом, мы получаем, что $Y_+(Y_-)$ – является правым (левым) коидеалом в $Y = Y(\mathfrak{g})$.

Пусть также $BY'_\pm$ – подсуперaлгебра (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порожденная элементами $x^{\pm}_{ik}, h_{jr}, (i, j \in I, k, r \in \mathbb{Z}_+)$.

Предложение 2.4.4. *1)*
$$\Delta(e) = e \otimes 1(\mod Y \otimes BY'_+),$$
для произвольного $e \in BY'_+$;
2)
$$\Delta(f) = 1 \otimes f(\mod BY'_- \otimes Y),$$
для произвольного $f \in BY'_-$.
3)
$$\Delta(h) = h \otimes 1(\mod Y \otimes BY'_+) = 1 \otimes h(modBY'_- \otimes Y),$$
для произвольного $f \in Y'_0$.

Свойства 1), 2) доказываются также как и аналогичные свойства в предыдущем предложении, а свойство 3) вытекает из свойств 1), 2).

Пусть
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : Y(\mathfrak{g}) \otimes Y^0(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$$
каноническое билинейное спаривание $Y(\mathfrak{g})$ и его двойственной суперaлгебры Хопфа $Y^*(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением. (Мы обозначаем через $Y^0(\mathfrak{g})$ суперaлгебру Хопфа $Y^*(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением.) Из определения вытекают следующие свойства этого спаривания.

$$\langle xy, x'y' \rangle = \langle \Delta(xy), x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle y \otimes x, \Delta(x'y') \rangle,$$
$$\langle x \otimes y \rangle \langle x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle,$$
для $\forall x, y \in Y(\mathfrak{g}), \forall x', y' \in Y^0(\mathfrak{g})$.

Пусть A, B – подсуперaлгебры в $Y(\mathfrak{g})$. Пусть также
$$(AB)_\perp := \{x' \in Y^0(\mathfrak{g}) : \langle ab, x' \rangle = 0, \forall a \in A, b \in B\}$$

. Легко проверить, что

$$(Y \cdot BY'_{-})_{\perp}, (BY'_{+} \cdot Y)_{\perp}, (Y \cdot Y'_{-})_{\perp}, (Y'_{+} \cdot Y)_{\perp}$$

являются подсуперaлгебрами в $Y^0(\mathfrak{g})$. Пусть

$$Y^*_+ := (Y \cdot BY'_{-})_{\perp}, \quad BY^*_+ := (Y \cdot Y'_{-})_{\perp}, Y^*_- := (BY'_{+} \cdot Y)_{\perp},$$

$$(BY)^*_- := (Y'_{+} \cdot Y)_{\perp}, Y^*_0 := BY^*_+ \bigcap BY^*_-.$$

Предложение 2.4.5. *1) Для любых* $x \in Y_+, h \in Y_0, y \in Y_-, x' \in Y^*_+, h' \in Y^*_0, y' \in Y^*_-$ *каноническое спаривание факторизуется*

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)} \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

2) Умножение в $Y^0(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных пространств:*

$$Y^*_+ \otimes Y^*_0 \otimes Y^*_- \to Y^0(\mathfrak{g}).$$

3) Имеет место ПБВ теорема для $Y^0(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Докажем 1).

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = \langle \Delta(xh) \cdot \Delta(y), x'h' \otimes y' \rangle = \langle \Delta(x)\Delta(h)\Delta(y), x'h' \otimes y' \rangle =$$

$$\langle (x \otimes 1 + \sum a_n \otimes x_n)(h \otimes 1 + \sum \tilde{a}_s \otimes \tilde{x}_s)(1 \otimes y + \sum y_m \otimes a'_m), x'h' \otimes y' \rangle =$$

$$\langle xh \otimes y, x'h' \otimes y' \rangle + \langle \sum c_r \otimes d_r, x'h' \otimes y' \rangle =$$

$$(-1)^{deg(x')deg(y)} \langle xh, x'h' \rangle \langle y, y' \rangle$$

Отметим, что

$$\langle \sum c_r \otimes d_r, x'h' \otimes y' \rangle = \sum_r (-1)^{deg(x')deg(d_r)} \langle c_r, x'h' \rangle \langle d_r, y' \rangle = 0.$$

Так как $\langle d_r, y' \rangle = 0$ в силу того, что

$$d_r \in Y'_+ Y, y' \in (BY'_+ Y)_{\perp}.$$

С другой стороны

$$\langle xh, x'h' \rangle = \langle (x \otimes 1 + \sum a_n \otimes x_n)(1 \otimes h + \sum y_m \otimes b_m), x' \otimes h' \rangle =$$

$$\langle x \otimes h, x' \otimes h' \rangle + 0 = \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle.$$

Отсюда и вытекает доказываемое утверждение пункта 1).

Отметим, что 2) вытекает из 3). Докажем 3). Выберем ПБВ базис в $Y(\mathfrak{g})$. Каждый вектор этого базиса имеет вид: xhy, где $x \in Y_+, h \in H, y \in Y_-$. Тогда биортогональные векторы, в соответствии с 1), будут иметь вид: $x'h'y'$, где $x' \in Y^*_+, h \in H^*, y \in Y^*_-$. Эти векторы также образуют базис в $Y^0(\mathfrak{g})$. Это и доказывает 3). □

Изучим это спаривание более детально. Сначала напомним описание базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана $Y(\mathfrak{g})$ (см. также приведённое в предыдущем параграфе более подробное описание базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта). Пусть как и выше Δ, Δ_+ обозначает множество корней, множество положительных корней, супер922алгебры Ли $A(m,n)$. Рассмотрим также $\hat{\Delta}^{re}$ множество вещественных корней соответствующей аффинной (нескрученной) супералгебры Ли $A(m,n)^{(1)}$ (см. [140]). Для образующих $DY(\mathfrak{g})$ $x_{i,k}^{\pm}$ будем использовать следующие обозначения:

$$x_{\alpha_i+k\delta} := x_{i,k}^{+},$$
$$x_{-\alpha_i+k\delta} := x_{i,k}^{-}, \quad i \in I, k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in \Delta_+.$$

В этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{re}$. Пусть

$$\Xi \subset \hat{\Delta}^{re}.$$

Линейный порядок $\gneqq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$ и таких, что $\gamma = \alpha + \beta$ имеет место одно из следующих двух отношений порядка:

$$\alpha \gneqq \gamma \gneqq \beta$$

или

$$\beta \gneqq \gamma \gneqq \alpha$$

Введем подмножества Ξ_+, Ξ_- множества $\hat{\Delta}^{re}$:

$$\Xi_{\pm} := \{\pm\gamma + k\delta : \gamma \in \hat{\Delta}_+^{re}\}.$$

Введем на Ξ_+, Ξ_- выпуклые порядки $\gneqq_+, \gneqq_-$, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma + k\delta \gneqq_+ \gamma + l\delta \qquad \text{и} - \gamma + l\delta \gneqq_- -\gamma + k\delta, \qquad \text{если} k, l, \text{для} \forall\gamma \in \Delta_+$$

Определим теперь корневые векторы

$$x_{\pm\beta}, \beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$$

по индукции следующим образом. Пусть векторы

$$x_{\beta_1}, x_{\beta_2}$$

уже построены. Если корень x_{β_3} таков, что:

$$x_{\beta_1} \gneqq x_{\beta_3} \gneqq x_{\beta_2}$$

и в интервале $(x_{\beta_1}, x_{\beta_2})$ нет корней для которых уже построены корневые векторы, то определим корневые векторы $x_{\pm\beta_3}$ формулами:

$$x_{\beta_3} = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}], x_{-\beta_3} = [x_{-\beta_2}, x_{-\beta_1}].$$

Отметим, что выпуклый (нормальный) порядок связан с естественным упорядочиванием элементов аффинной группы Вейля. Нам потребуется следующее описание $Y(\mathfrak{g})$, являющееся аналогом описания квантованной аффинной супералгебры. Сначала зафиксируем следующий нормальный порядок на $\mathfrak{g} = A(m,n)$:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+2}), (\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_4, \ldots, \epsilon_2 - \epsilon_{m+n+2}), \ldots$$

$$(\epsilon_{m+n+1} - \epsilon_{m+n+2}).$$

Здесь $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$.

К простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n+1}$ добавим еще аффинный корень $\alpha_0 = \delta - \theta$, где $\theta := \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m+n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+1}$ – старший корень, а δ – минимальный мнимый корень. Рассмотрим следующий нормальный порядок на множестве $\hat{\Delta}^{re}$ аффинных вещественных корней:

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \delta, \alpha_1 + 2\delta, \ldots, \alpha_1 + n\delta, \ldots), (\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + n\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2),$$
$$(\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + n\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ldots,$$
$$(\ldots \alpha_{n+m+1} + n\delta, \ldots, \alpha_{n+m+1} + \delta, \alpha_{n+m+1}).$$

Вычислим формулы спаривания для корневых векторов. Пусть

$$h^*_{i,k}, e^*_{i,k}, f^*_{i,k}$$

образующие $Y^* = Y_-$. Пусть также

$$e_{i,k} := x^+_{i,k}, f_{i,k} := x^-_{i,k}.$$

Предложение 2.4.6. *Следующие два условия равносильны.*
1)

$$\langle e_{i,k}, e^*_{j,-l-1} \rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l};$$
$$\langle f_{i,k}, f^*_{j,-l-1} \rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l};$$
$$\langle h_{i,k}, h^*_{j,-l-1} \rangle = -\frac{a_{ij}k!}{l!(k-l)!} \qquad k \geq l \geq 0.$$

2)

$$[h^*_{i,-k}, h^*_{j,-l}] = 0, \tag{2.4.2}$$
$$\delta_{i,j} h^*_{i,-k-l} = [e_{i,-k}, f_{j,-l}], \tag{2.4.3}$$
$$[h^*_{i,-k-1}, e^*_{j,-l}] = [h^*_{i,-k}, e^*_{j,-l-1}] + (b_{ij}/2)(h^*_{i,-k} e_{j,-l} + e^*_{j,-l} h^*_{i,-k}), \tag{2.4.4}$$
$$[h^*_{i,-k-1}, f^*_{j,-l}] = [h^*_{i,-k}, f^*_{j,-l-1}] - (b_{ij}/2)(h^*_{i,-k} f_{j,-l} + f^*_{j,-l} h^*_{i,-k}), \tag{2.4.5}$$
$$[h^*_{i,0}, e^*_{j,l}] = b_{ij} e^*_{j,l}, \tag{2.4.6}$$
$$[h^*_{i,0}, f^*_{j,l}] = -b_{ij} f^*_{j,l} \tag{2.4.7}$$
$$\tag{2.4.8}$$

$$[e^*_{i,-k+1}, e^*_{j,-l}] = [e^*_{i,-k}, e^*_{j,-l+1}] + (b_{ij}/2)\{e^*_{i,-k}, e^*_{j,-l}\}, \tag{2.4.9}$$
$$[f^*_{i,-k+1}, f^*_{j,-l}] = [f^*_{i,-k}, f^*_{j,-l+1}] - (b_{ij}/2)\{f^*_{i,-k}, f^*_{j,-l}\}, \tag{2.4.10}$$
$$\textstyle\sum_\sigma [e^*_{i,-k_{\sigma(1)}}, \ldots [e^*_{i,-k_{\sigma(r)}}, e^*_{j,-l}] \ldots] = 0, i \neq j, r = n_{ij} = 2 \tag{2.4.11}$$
$$\textstyle\sum_\sigma [f^*_{i,-k_{\sigma(1)}}, \ldots [f^*_{i,-k_{\sigma(r)}}, f^*_{j,-l}] \ldots] = 0, i \neq j, r = n_{ij} = 2 \tag{2.4.12}$$
$$[[e^*_{m,-k_1}, e^*_{m+1,-k_2}], [e^*_{m+2,-k_3}, e^*_{m+1,-k_4}]] = 0, \tag{2.4.13}$$
$$[[f^*_{m,-k_1}, f^*_{m+1,-k_2}], [f^*_{m+2,-k_3}, f^*_{m+1,-k_4}]] = 0. \tag{2.4.14}$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения довольно громоздко и мы, отметив основные моменты доказательства, опустим некоторые технические детали. Доказательство будет вестись по индукции, по значениям индексов k, l. Прежде всего несложно доказываются следующие формулы.

$$\Delta(e_{i,k}) = e_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes e_{i,k-r} (\mod YY_- \otimes Y'_+);$$

$$\Delta(f_{i,k}) = f_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes e_{i,k-r} (\mod Y'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(h_{i,k}) = h_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes h_{i,k-r} (\mod YY'_- \otimes Y'_+ Y).$$

Из этих формул вытекают следующие равенства:

$$\begin{gathered}\Delta(e_{i,k}e_{j,l}) = e_{i,k}e_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,k}e_{j,l} + e_{i,k} \otimes e_{j,l} + \\ (-1)^{deg(e_{i,k})deg(e_{j,l})} e_{j,l} \otimes e_{i,k} (\mod YY'_- \otimes Y'_+); \\ \Delta(f_{i,k}f_{j,l}) = f_{i,k}f_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,k}f_{j,l} + f_{i,k} \otimes f_{j,l} + \\ (-1)^{deg(f_{i,k})deg(f_{j,l})} f_{j,l} \otimes f_{i,k} (\mod Y'_- \otimes Y'_+ Y); \\ \Delta(h_{i,k}h_{j,l}) = h_{i,k}h_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,k}h_{j,l} + h_{i,k} \otimes h_{j,l} + h_{j,l} \otimes h_{i,k} (\mod YY'_- \otimes Y'_+ Y).\end{gathered}$$

Используя эти формулы и определение спаривания в дубле можно по индукции доказать инвариантность этого спаривания на образующих дубля.

$$\langle [a, b], c \rangle = \langle a, [b, c] \rangle \tag{2.4.15}$$

Доказательство этого факта мы опускаем, сознавая, что доказательство столь простого фундаментального факта должно быть коротким и идейным. Мы располагаем доказательством, основанном на индукции с привлечением написанных выше формул и следующего определения хопфова спаривания

$$\langle a \cdot b, c \cdot d \rangle = \langle \Delta(a \cdot b), c \otimes d \rangle = (-1)^{deg(a)deg(b)} \langle b \otimes a, \Delta(c \cdot d) \rangle \tag{2.4.16}$$

$$\langle a, 1 \rangle = \epsilon(a), \quad \langle 1, b \rangle = \epsilon(b) \tag{2.4.17}$$

Формула (2.4.2) легко проверяется на образующих $a_{i,0}$ нулевого порядка янгианного дубля. Дальнейшее доказательство проводится по индукции по порядку образующей.

Теперь мы можем показать как условие 1) следует из условия 2). Покажем, например, как по индукции выводится формула спаривания на картановских образующих дубля из коммутационных соотношений с использование формулы . При $m = n = 0$, доказываемые формулы совпадают с их квазиклассическим пределом при котором они, очевидно, справедливы. Пусть эти формулы верны при $m \geq k, \quad n < l + 1$. Покажем их справедливость при $n = l + 1$.

$$\begin{gathered}\langle h_{i,k}, h_{j,l} \rangle = -\langle e_{i,0}, [f_{i,k}, h_{j,l}] \rangle = \langle e_{i,0}, [h_{j,0}, f_{i,k-l-1}] + \\ \frac{1}{2} a_{ij} \sum_{s=0}^{l} \{h_{j,s-l-1}, f_{i,k-s-1}\} \rangle = -\frac{1}{2} a_{ij} (\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l} ([h_{j,s-l-1}, f_{i,k-s-1}] +\end{gathered}$$

$$2f_{i,k-s-1}h_{j,s-l-1})\rangle) = -\frac{1}{2}a_{ij}(\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}[h_{j,s-l-1}, f_{i,k-s-1}]\rangle$$

$$+2\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}[f_{i,k-s-1}, h_{j,s-l-1}]\rangle).$$

Второе слагаемое равно нулю в силу индукционного предположения. Преобразуем первое слагаемое. Используя определяющие соотношения в янгиане, понизим степень правой части в формуле спаривания.

$$\langle h_{i,k}, h_{j,l}\rangle = a_{ij}\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}(l+s-1)[h_{j,-s}, f_{i,k-l+s-2}]a_{ij}/2\rangle =$$

$$-(\frac{1}{2}a_{ij})^2\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}(l+s-1)[h_{j,-s}, f_{i,k-l+s-2}]\rangle = \dots$$

$$= -(\frac{1}{2}a_{ij})^{k-l}(\langle e_{i,0}, [h_{j,0}, f_{i,-1}]\rangle C_{k-l-1}^{k-l-1} + C_{k-l}^{k-l-1} + \dots C_{k-l+l-1}^{k-l-1}) =$$

$$-(\frac{1}{2}a_{ij})^{k-l}C_k^{k-l}a_{ij}.$$

Первая формула спаривания доказана. Вторая доказывается проще аналогичными рассуждениями.

Доказательство достаточности довольно громоздко и мы его здесь полностью не приводим. Отметим лишь, что по существу, оно также проводится по индукции и основано на формулах (2.4.16), (2.4.17). Покажем схематично как получаются доказываемые соотношения из формул спаривания. Эти вычисления, по существу, основаны на формуле хопфова спаривания:

$$\langle ab, cd\rangle = \langle \Delta(a)\Delta(b), c\otimes d\rangle$$

Покажем на простом примере как выводятся определяющие соотношения в двойственной к янгиану суперанлгебре (в квантовом дубле янгиана).

$$\langle [e^*_{i,-k+1}, e^*_{j,-l}], [e_{i,k-2}, e_{j,l-1}]\rangle =$$

$$\langle [e^*_{i,-k+1}, e^*_{j,-l}], [e_{i,k-3}, e_{j,l} + b_{ij}/2\{e_{i,k-3}, e_{l-1}\}]\rangle =$$

$$\langle [e^*_{i,-k+1}, e^*_{j,-l}], \Delta(e_{i,k-3})\Delta(e_{j,l-1})\rangle$$

Заметим теперь, что для любого $e \in Y_+$

$$\Delta(e) = e\otimes 1 \mod (Y(\mathfrak{g})\otimes Y_+).$$

Аналогично, для любого $f \in Y_-$

$$\Delta(f) = 1\otimes f \mod (Y_-\otimes Y(\mathfrak{g})).$$

Используя эти формулы можно прямыми вычислениями получить доказываемые формулы. Но более простой путь получения доказываемых формул состоит в использовании порождающих функций образующих.

□

Теорема 2.4.2. *1) Подсуперальгебры Y_+^*, H^*, Y_-^* суперальгебры Y_- порождаются полями*

$$e_i^-(u), h_i^-(u), f_i^-(u);$$

2) Спаривание образующих подсуперальгебр Y_+, Y_- суперальгебры $DY(\mathfrak{g})$ задается следующими соотношениями для $|v| << 1 << |u|$:

$$\langle e_i^+(u), f_j^-(v)\rangle = \langle f_i^+(u), e_j^-(v)\rangle = \frac{\delta_{i,j}}{u-v};$$

$$\langle h_i^+(u), h_j^-(v)\rangle = \frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}.$$

Доказательство. Теорема вытекает из предложения 2.4.6. Следует просто переписать полученные выше формулы спаривания для образующих в терминах введённых выше производящих функций образующих: $e_i^\pm(u), f_i^\pm(u), h_i^\pm(u)$. ☐

2.5 Вычисление универсальной R- матрицы

В этом параграфе мы получаем основной результат данной главы – мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана $DY(A(m,n))$.

2.5.1 Вычисление универсальной R- матрицы квантового дубля янгиана $DY(\mathfrak{g})$

Получим мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана базисной суперальгебры Ли $A(m,n)$. Напомним определение универсальной R-матрицы для квазитреугольной топологической суперальгебры Хопфа, приведённое в первой главе данной работы, которое естественным образом обобщает понятия универсальной R-матрицы для квазитреугольной алгебры Хопфа (см. также главу 1 данной работы) и универсальной R-матрицы для квазитреугольной топологической алгебры Хопфа.

Универсальной R-матрицей для квазитреугольной суперальгебры Хопфа A называется обратимый элемент R, лежащий в некотором расширении тензорного произведения $A\hat{\otimes}A$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}, \qquad \forall x \in A;$$

$$(\Delta \otimes id)R = R^{13}R^{23}, (id \otimes \Delta)R = R^{13}R^{12},$$

где $\Delta^{op} = \sigma \circ \Delta, \sigma(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x$.

Если A является квантовым дублем суперальгебры Хопфа A^+, то есть $A \cong A^+ \otimes A^-$, $A^- := A^0$ двойственная к A суперальгебра Хопфа с противоположным коумножением, то A квазитреугольная суперальгебра Хопфа и универсальная R- матрица в A допускает следующее каноническое представление:

$$R = \sum e_i \otimes e^i,$$

где $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные базисы в A^+, A^-, соответственно. Пусть $Y_+^\pm, Y_0^\pm, Y_-^\pm$ – подсуперальгебры в $DY(\mathfrak{g})$, порожденные полями $e_i^\pm(u), h_i^\pm(u), f_i^\pm(u), i \in I$, соответственно.

Теорема 2.5.1. *1) Универсальная R-матрица дубля может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где

$$R_+ \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes Y_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes Y_+^-.$$

2)Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:

$$\begin{gathered}\langle e_{\beta_0}^{n_0} e_{\beta_1}^{n_1} \dots e_{\beta_k}^{n_k}, \quad f_{-\beta_0-\delta}^{m_0} f_{-\beta_1-\delta}^{m_1} \cdots f_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \rangle = \\ (-1)^{n_0+\dots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \dots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0} \dots \alpha(\gamma_k)^{n_k} (-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)};\end{gathered} \tag{2.5.1}$$

$$\begin{gathered}\langle f_{\beta_k}^{n_k} \dots f_{\beta_1}^{n_1} f_{\beta_0}^{n_0}, \quad e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \cdots e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} \rangle = \\ (-1)^{n_0+\dots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \dots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0} \dots \alpha(\gamma_k)^{n_k} (-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)}.\end{gathered} \tag{2.5.2}$$

Здесь $\beta_k = \gamma_k + n_k \delta$, а коэффициенты $\alpha(\gamma)$ вычисляются из условия $[e_\gamma, f_\gamma] = \alpha(\gamma) h_\gamma$.

Из теоремы 2.5.1 вытекает

Лемма 2.5.1. *Элементы R_+, R_- в разложении универсальной R- матрицы для $DY(\mathfrak{g})$ могут быть представлены в следующей форме*

$$R_+ = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \tag{2.5.3}$$

$$R_- = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \tag{2.5.4}$$

где произведения берутся в соответствии с нормальными порядками $\precneqq_+, \precneqq_-$. Нормализующие константы $a(\beta)$ находятся из следующего условия:

$$\begin{aligned}[] [e_\beta, e_{-\beta}] &= (a(\beta))^{-1} h_\gamma \quad \text{если} \quad \beta = \gamma + n\delta \in \Xi_+, \gamma \in \Delta_+(\mathfrak{g}), \\ [e_\beta, e_{-\beta}] &= (a(\beta))^{-1} h_\gamma \quad \text{если} \quad \beta = \gamma + n\delta \in \Xi_+, \gamma \in \Delta_+(\mathfrak{g}),\end{aligned}$$

а $\theta(\beta) = deg(e_\beta) = deg(e_{-\beta})$ – означает четность элемента $e_{\pm\beta}$.

Для описания члена R_0 нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

Прежде всего, также как и выше, введем "логарифмические"образующие $\phi_i^\pm(u), i = 1, \dots, r$ формулами

$$\phi_i^+(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,k} u^{-k-1} = \ln h_i^+(u); \phi_i^-(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,-k-1} u^k = \ln h_i^-(u) \tag{2.5.5}$$

Введем также вектор функции

$$\phi^\pm(u) = \begin{pmatrix} \phi_1^\pm(u) \\ \phi_2^\pm(u) \\ \dots \\ \phi_r^\pm(u) \end{pmatrix} h^\pm(u) = \begin{pmatrix} h_1^\pm(u) \\ h_2^\pm(u) \\ \dots \\ h_r^\pm(u) \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает формула спаривания в терминах производящих вектор-функций

$$\langle(((h^+(u))^T, h^-(v)))\rangle = \left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right)_{i,j=1}^{r}. \qquad (2.5.6)$$

Следовательно, для производящих функций $\phi_i^+(u), \phi_j^-(u)$ формула спаривания следующая

$$\langle\phi_i^+(u), \phi_j^-(v)\rangle = \ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right). \qquad (2.5.7)$$

В матричной форме эти формулы мы можем переписать следующим образом

$$\langle(\phi^+(u))^T, \phi^-(v)\rangle = \left(\ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right)\right)_{i,j=1}^{r}. \qquad (2.5.8)$$

$$\langle(\phi^+(u))^T, \phi^-(v)\rangle = \left(\ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}\right)\right)_{i,j=1}^{r}. \qquad (2.5.9)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить по схеме, рассмотренной в работе [54].

Наряду с дублем янгиана $DY(\mathfrak{g})$ рассмотрим суперадгебру Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, изоморфную как суперадгебра $DY(\mathfrak{g})$, но с другим коумножением, определяемым следующими формулами.

$$\tilde{\Delta}(h_i^{\pm}(u)) = h_i^{\pm}(u) \otimes h_i^{\pm}(u) \qquad (2.5.10)$$

$$\tilde{\Delta}(e_i(u)) = e_i(u) \otimes 1 + h_i^-(u) \otimes e_i(u) \qquad (2.5.11)$$

$$\tilde{\Delta}(f_i(u)) = 1 \otimes f_i(u) + f_i(u) \otimes h_i^+(u). \qquad (2.5.12)$$

Здесь

$$e_i(u) := e_i^+(u) - e_i^-(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{i,k}u^{-k-1},$$

$$f_i(u) := f_i^+(u) - f_i^-(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{i,k}u^{-k-1}.$$

Как отмечено ранее, такое коумножение впервые было введено В.Г.Дринфельдом ([26]) для янгианов простых супералгебр Ли и удобно тем, что формулы спаривания относительно этого коумножения имеют простой вид. Можно проверить (также как и в главе 1), что коумножения Δ и $\tilde{\Delta}$ сплетаются предельным оператором

$$\hat{t}^{\infty} := lim_{n\to\infty}\hat{t}^n,$$

$$\hat{t}(e_{i,k}) = e_{k+1}, \hat{t}(f_{i,k}) = f_{k-1}, \hat{t}(h_{i,k}) = h_k.$$

Другими словами,

$$\tilde{\Delta}(x) = lim_{n\to\infty}(\hat{t}^n \otimes \hat{t}^n)\Delta(\hat{t}^{-n}(x)), \qquad (2.5.13)$$

для $\forall x \in DY(\mathfrak{g})$. (Сходимость подразумевается в подходящей топологии $DY(\mathfrak{g}) \otimes DY(\mathfrak{g})$.)

Пусть $\widehat{DY}^+(\mathfrak{g})$ $(\widehat{DY}^-(\mathfrak{g}))$ подсуперадгебра Хопфа суперадгебры Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, порожденная элементами $e_{i,k}, k \in Z, h_{i,m}, m \in \mathbb{Z}_+$ $(f_{i,k}, k \in \mathbb{Z}, h_{i,m}, m < 0)$. Тогда $\widehat{DY}^-(\mathfrak{g})$ изоморфна двойственной суперадгебре Хопфа $(\widehat{DY}^-(\mathfrak{g}))^*$. Из формулы для коумножения 5.10.19 вытекает, что элементы $\phi_{i,k}^{\pm}$ являются примитивными элементами в $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$.

Пусть

$$\Phi^+ = \langle \phi^+_{i,k} : i \in I = \{1, \ldots, r\}, k \in \mathbb{Z}_+\rangle, \quad \Phi^- = \langle \phi^-_{i,-k-1} : i \in I = \{1, \ldots, r\}, k \in \mathbb{Z}_+\rangle$$

линейные пространства, (порожденные указанными в скобках множествами векторов). Пусть также $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}, \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ двойственные относительно формы 2.5.7

базисы в пространствах Φ^+, Φ^-, соответственно. Имеет место следующее

Предложение 2.5.1. *Элемент R_0 из предложения 2.5.1 имеет следующий вид*

$$R_0 = \exp(\sum_{i,m} (-1)^{deg(\tilde{\phi}_{i,m})} \tilde{\phi}_{i,m} \otimes \tilde{\phi}^{i,m}). \tag{2.5.14}$$

Доказательство. Пусть $B_+ = \mathbb{C}[\Phi^+], B_- = \mathbb{C}[\Phi^-]$ – коммутативные алгебры функций на Φ^+, Φ^-, соответственно, а $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}, \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ – упомянутые выше двойственные базисы. Зафиксируем некоторый линейный порядок базисных векторов и ниже будем писать $\{\tilde{\phi}_a\}, \{\tilde{\phi}^a\}, a \in \mathbb{N}$. Докажем по индукции следующую формулу

$$\langle \tilde{\phi}^{n_1}_{i_1} \ldots \tilde{\phi}^{n_k}_{i_k}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{m_1} \ldots (\tilde{\phi}^{i_k})^{m_k}\rangle = \delta_{n_1,m_1} \ldots \delta_{n_k,m_k} n_1! \ldots n_k! \tag{2.5.15}$$

Легко проверяется база индукции при $k = 1, n_1 = 1$

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}, \tilde{\phi}^{i_1}\rangle = 1, \quad \langle \tilde{\phi}_{i_1}, 1\rangle = 0.$$

Далее, пусть

$$\langle \tilde{\phi}^n_{i_1}, (\tilde{\phi}^{i_1})^n\rangle = n!.$$

Покажем, что

$$\langle \tilde{\phi}^{n+1}_{i_1}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{n+1}\rangle = (n+1)!.$$

Действительно,

$$\langle \tilde{\phi}^{n+1}_i, (\tilde{\phi}^i)^{n+1}\rangle =$$

$$\langle \Delta(\tilde{\phi}_i)\Delta((\tilde{\phi}_i)^n), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}_i)^n\rangle =$$

$$\langle (\tilde{\phi}_i \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\phi}_i)(\sum_{k=0}^{n} C^k_n (\tilde{\phi}_i)^k (\tilde{\phi}_i)^{n-k}), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}_i)^n\rangle =$$

$$(n+1)\langle \tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}^i\rangle\langle (\tilde{\phi}_i)^n, (\tilde{\phi}^i)^n\rangle = (n+1)!.$$

Используя доказанную формулу аналогично, индукцией по k доказывается утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Пусть теперь $(f(u))' = \frac{d}{du}(f(u))$. Продифференцируем равенство 2.5.7 по параметру u. Получим

$$\frac{d}{du}\langle \phi^+_i(u), \phi^-_j(u)\rangle = \langle (\phi^+_i(u))', \phi^-_j(u)\rangle = \frac{1}{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} - \frac{1}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}.$$

Пусть $\tilde{\phi}^+_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,k} u^{-k-1}$, $\tilde{\phi}^-_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,-k-1} u^k$. Тогда в терминах производящих функций спаривание

$$\langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}_{j,l}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}$$

переписывается следующим образом:

$$\langle \tilde{\phi}^+_i(u), \tilde{\phi}^-_j(v)\rangle = \sum_{k,l} \langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}^{j,l}\rangle u^{-k-1} v^l =$$

$$(v < 1 < u) = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} u^{-1} (\frac{v}{u})^k = \frac{\delta_{ij}}{u - v}.$$

Таким образом получили, что

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{u - v}. \tag{2.5.16}$$

Введем теперь производящие вектор-функции

$$\tilde{\phi}^{\pm}(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1^{\pm}(u) \\ \tilde{\phi}_2^{\pm}(u) \\ \dots \\ \tilde{\phi}_r^{\pm}(u) \end{pmatrix}.$$

Тогда спаривание (2.5.16) можно переписать в виде следующего матричного равенства:

$$\langle (\tilde{\phi}^+(u))^T, \tilde{\phi}^-(u) \rangle = \frac{E_r}{u - v}, \tag{2.5.17}$$

где E_r – единичная $r \times r$-матрица.

Пусть $T : f(v) \to f(v-1)$ – оператор сдвига. Ясно, что

$$\langle (\phi_i^-(v))', \phi_j^+(v) \rangle = \frac{1}{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} - \frac{1}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} =$$

$$(id \otimes (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}})) \frac{\delta_{ij}}{u - v} = \langle \tilde{\phi}_i^-(v), (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}}) \tilde{\phi}_j^+(u) \rangle.$$

Здесь $b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)$.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^r$ – симметризованная матрица Картана супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то есть $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$. Пусть также $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^r$ – q-аналог матрицы Картана, где $a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = [(\alpha_i, \alpha_j)]_q = \dfrac{q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}}}{q - q^{-1}}$. Пусть также $D(q)$ – матрица обратная к матрице $A(q)$, а A^T – означает операцию транспонирования матрицы A. Тогда предыдущее равенство можно переписать следующим образом в матричной форме

$$\langle (\phi^+(v))^T, \phi^-(u) \rangle = \langle (\tilde{\phi}^+(u))^T, A(T^{-\frac{1}{2}})(T - T^{-1}) \tilde{\phi}^-(v) \rangle.$$

Поэтому

$$\langle (\tilde{\phi}^-(v))^T, \tilde{\phi}^+(u) \rangle =$$
$$\langle ((T - T^{-1})^{-1} D(T^{-\frac{1}{2}}) (\phi^-(v))^T, (\phi^+(u))' \rangle. \tag{2.5.18}$$

Таким образом получаем следующее равенство

$$\frac{E_r}{u - v} = \langle ((T - T^{-1})^{-1} D(T^{-\frac{1}{2}}) (\phi^-(v)), ((\phi^+(u))')^T \rangle. \tag{2.5.19}$$

Итак мы диагонализовали спаривание. Представим матрицу $D(q)$ в виде $D(q) = \dfrac{1}{[l(\mathfrak{g})]} C(q)$, где $C(q)$ – матрица с коэффициентами, являющимися полиномами от q, q^{-1} с целыми коэффициентами, то есть $c_{ij} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, а $l(\mathfrak{g}) = \check{h}(\hat{\mathfrak{g}})$ – дуальное число Кокстера. Тогда предыдущая формула перепишется в следующем виде

$$\frac{E_r}{u-v} = \\ \langle ((T^{l(\mathfrak{g})} - T^{-l(\mathfrak{g})})^{-1} C(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^-(v)), ((\phi^+(u))')^T\rangle. \tag{2.5.20}$$

Из этого равенства и вытекает формула для члена R_0 в факторизованной формуле для универсальной R-матрицы.

Теорема 2.5.2.

$$R_0 = \\ \textstyle\prod_{n\geq 0} \exp \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{k\geq 0} ((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi_j^-(v + (n+\frac{1}{2})l(\mathfrak{g})))_{-k-1}. \tag{2.5.21}$$

2.5.2 Вычисление универсальной R- матрицы янгиана $Y(A(m,n)))$

Пусть $\mathfrak{g}$, как и выше, базисная супералгебра Ли $A(m,n)$. Прежде всего рассмотрим классический аналог проводимых ниже рассуждений. Классическая $r-$матрица $r(u,v)$ классического дубля

$$(\mathfrak{g}((u^{-1}))), u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]], \mathfrak{g}[u])$$

алгебры токов $\mathfrak{g}[u]$ имеет следующий вид:

$$r(u,v) = \sum_{i,k} e_{i,k} \otimes e^{i,k},$$

где $\{e_{i,k} = e_i u^k\}, \{e^{i,k} = e^i u^{-k-1}\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{g}[u]), u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]]$, соответственно, относительно спаривания

$$\langle f, g\rangle = res(f(u), g(u)),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$, а $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные относительно этой формы базисы в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что

$$r = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot v^{-k-1} = \sum_{k+0}^{\infty} \sum_i e_i \otimes e^i \cdot v^{-1} (\frac{u}{v})^k = (u < 1 < v) =$$

$$\sum_i e_i \otimes e^i \frac{v^{-1}}{1-u/v} = \frac{\mathfrak{t}}{v-u},$$

где $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$ оператор Казимира универсальной обертывающей супералгебры $U(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Таким образом получили, что

$$r = \frac{\mathfrak{t}}{v-u}. \tag{2.5.22}$$

Отметим, что полученная классическая r-матрица не принадлежит $\mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$. Введем следующий оператор сдвига $T_\lambda : f(u) \to f(u+\lambda)$. Подействуем оператором $id \otimes T_\lambda$ на r. Получим

$$(id \otimes T_\lambda) r(u,v) = \frac{\mathfrak{t}}{\lambda - (u-v)} = \frac{\mathfrak{t}}{\lambda(1 - \lambda^{-1}(u-v))} = \\ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{t}(u-v)^k \lambda^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \lambda^{-k-1},$$

где $r_k \in \mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$.

Для того, чтобы сделать аналогию с квантовым случаем более прозрачной, проведем эти же рассуждения другим эквивалентным способом.

$$(id \otimes T_\lambda)r(u,v) = \sum_i \sum_{k=0}^\infty e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot (v+\lambda)^{-k-1} =$$
$$\sum_i \sum_{k=0}^\infty e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot \frac{1}{(\lambda(1-(-v/\lambda)))^{k+1}} =$$
$$\sum_i \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot (-1)^m C_{m+k}^k v^m \lambda^{-m-k-1} =$$
$$(n = m+k) =$$
$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty \sum_i (-1)^{n-k} C_n^k e_i u^k \otimes e^i v^{n-k} \lambda^{-n-1} =$$
$$\sum_{k=0}^\infty \sum_i e_i \otimes e^i (u-v)^n \lambda^{-n-1}.$$

Проведенные выше рассуждения попробуем повторить и в квантовом случае, имея в виду, что янгиан является квантованием бисуперадгебры полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t]$, его дубль – квантование классического дубля $\mathfrak{g}((t))$, универсальная R-матрица дубля является квантовым аналогом классической r-матрицы r, а рассмотренная выше r-матрица $(id \otimes T_\lambda)r(u,v)$ и есть тот классический объект, аналогом которого и является универсальная R-матрица янгиана, которую мы и будем ниже вычислять.

Определим гомоморфизм T_λ в квантовом случае. Пусть гомоморфизм

$$T_\lambda : Y(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$$

задаётся формулами:
$T_\lambda(x) = x$, для $x \in \mathfrak{g}$,

$$T_\lambda(a_{i,1}) = a_{i,1} + \lambda a_{i,0},$$

для $a \in \{e, f, h\}$.

Предложение 2.5.2. *Действие T_λ на образующих $a_{i,n}, a \in \{e,f,h\}, n \in \mathbb{Z}$, дубля янгиана $DY(\mathfrak{g})$ определяется формулами:*

$$T_\lambda a_{i,n} = \sum_{k=0}^n C_n^k a_{i,k} \lambda^{n-k}, n \in \mathbb{Z}_+ \qquad (2.5.23)$$
$$T_\lambda a_{i,-n} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} a_{i,k} \lambda^{-n-k-1}, n \in \mathbb{N}. \qquad (2.5.24)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что такими же формулами действие T_λ определяется и в классическом случае. Пусть $\tilde{h}_{i,1} = h_{i,1} - \frac{1}{2}h_{i,0}^2$. Тогда, как нетрудно видеть, выполняются следующие соотношения в дубле янгиана $DY(\mathfrak{g})$.

$$[\tilde{h}_{i,1}, e_{j,n}] = a_{ij} e_{i,n+1}, [\tilde{h}_{i,1}, f_{j,n}] = -a_{ij} f_{i,n+1}, \qquad (2.5.25)$$
$$[e_{i,k}, f_{j,m}] = \delta_{ij} h_{j,k+m}. \qquad (2.5.26)$$

Достаточно проверить формулы для образующих $e_{j,n}, f_{j,n}$. Так как справедливость формул (2.5.24), (2.5.25) для образующих $h_{j,n}$ вытекает из их справедливости для образующих $e_{j,n}, f_{j,n}$ и формулы (2.5.26). Докажем справедливость формул (2.5.24), (2.5.25) для образующих $e_{j,n}$. Для образующих $f_{j,n}$ рассуждения точно такие же. Докажем формулу (2.5.24). При $n = 0$ формула (2.5.24) справедлива по определению. Пусть она справедлива при всех $k \leq n$. Докажем её справедливость при $k = n+1$. Пусть j таково, что $a_{j,i} \neq 0$. Отметим, что T_λ – гомоморфизм. Тогда

$$T_\lambda(e_{i,n+1}) = T_\lambda(a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,n}]) = a_{ji}^{-1}[T_\lambda \tilde{h}_{j,1}, T_\lambda e_{j,n+1}] =$$
$$a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1} + \tfrac{1}{2}h_{j,0}, \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k e_{i,k}\lambda^{n-k}] = a_{ji}^{-1}(\textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k [\tilde{h}_{j,1}, e_{i,k}]\lambda^{n-k} +$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k [h_{j,0}, e_{i,k}]\lambda^{n+1-k}) = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k e_{i,k}\lambda^{n+1-k}.$$

Формула (2.5.24) доказана. Докажем формулу (2.5.25). Пусть $n = 1$. Тогда $a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,-1}] = e_{i,0}$. Подействуем на левую и правую части этой формулы оператором T_λ. Сначала подействуем на левую часть. Получим

$$a_{ji}^{-1}[T_\lambda(\tilde{h}_{j,1}), T_\lambda(e_{i,-1})] = a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1} + \tfrac{1}{2}h_{j,0}, \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^0 e_{i,k}\lambda^{-k-2}] =$$
$$a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1} + \tfrac{1}{2}h_{j,0}, \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} e_{i,k}\lambda^{-k-2}] = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e_{i,k+1}\lambda^{-k-2} +$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e_{i,k}\lambda^{-k-1} = e_{i,0} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k + (-1)^{k+1})e_{i,k+1}\lambda^{-k-2} = e_{i,0}$$

Так как правая часть по определению действия T_λ не меняется, то получили, что левая и правая части совпадают. Формула для $n = 1$ проверена. Пусть формула доказана для всех $k \leq n$. Докажем ее для $k = n + 1$. Подействуем как и выше оператором T_λ на левую и правую части формулы $a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,-n-1}] = e_{i,-n}$. Действуем на левую часть.

$$a_{ji}^{-1}[T_\lambda \tilde{h}_{j,1}, T_\lambda e_{i,-n-1}] =$$
$$a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1} + \tfrac{1}{2}h_{j,0}, \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n}^n e_{i,k}\lambda^{-n-k-2}] =$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n}^n e_{i,k+1}\lambda^{-n-k-2} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n}^n e_{i,k}\lambda^{-n-k-1} =$$
$$e_{i,0} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(-C_{k+n}^n + C_{k+n+1}^n)e_{i,k}\lambda^{-n-k-2} =$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} e_{i,k}\lambda^{-n-k-1} = T_\lambda e_{i,-n}.$$

Получили опять, что левая часть равна правой и, следовательно, формула (2.5.25) доказана по индукции для всех натуральных n. Предложение доказано. □

Замечание Отметим, что ряд, определяющий значение оператора T_λ на образующих $a_{i,-n}$ сходится при достаточно больших значениях λ.

Теперь мы можем вычислить универсальную R-матрицу $R(\lambda)$ янгиана $Y(A(m,n)))$ формулой:

$$R(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R, \tag{2.5.27}$$

где R – универсальная R-матрица в дубле $DY(\mathfrak{g})$. Так как $R = R_+ R_0 R_-$, то действуя оператором $id \otimes T_\lambda$ на R и пользуясь тем, что T_λ – гомоморфизм, а следовательно и $id \otimes T_\lambda$ – гомоморфизм, получаем

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda), \tag{2.5.28}$$

где

$$R_+(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R_+, R_0(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R_0, R_-(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R_-.$$

Отметим, что

$$R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^{-k-1}, \tag{2.5.29}$$

где 1 – единичный элемент в $Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, а $R_k \in Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g})$. Но такая форма не очень удобно, так как коэффициенты R_k имеют трудно обозримый вид. Поэтому окончательный ответ мы представим в другом более обозримом виде. Подействуем оператором $id \otimes T_{-\lambda}$ на правую часть формулы (2.5.3). Получим

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes T_{-\lambda} e_{-\beta}), \tag{2.5.30}$$

Вычислим отдельно элемент $T_{-\lambda} e_{-\beta}$. Так как $\beta = \beta' + n\delta$, то в силу формулы (2.5.24) получаем

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) (\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}). \tag{2.5.31}$$

Аналогично вычисляется элемент $R_-(\lambda)$. Суммируя сказанное выше получаем следующее

Предложение 2.5.3. *Члены $R_+(\lambda), R_-(\lambda)$ универсальной R матрицы янгиана имеют следующий вид*

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\right)\right), \tag{2.5.32}$$
$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\right)\right). \tag{2.5.33}$$

Пример. Рассмотрим пример вычисления членов $R_+(\lambda), R_-(\lambda)$ в случае простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Тогда

$$\begin{gathered} R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{n \geq 0} \exp(-e_n \otimes T_\lambda(f_{-n-1})) = \\ \overrightarrow{\prod}_{n \geq 0} \exp\left((-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n}^n e_n \otimes f_m \lambda^{-n-m-1}\right) = \\ \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n}^n (-1)^n e_n \otimes f_m \lambda^{-n-m-1}\right) = \\ \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n e_n \otimes f_{k-n}\right) \lambda^{-k-1}\right) = \\ \overrightarrow{\prod}_{n \geq 0} \exp\left(\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n e_n \otimes f_{k-n}\right) \lambda^{-k-1}\right). \end{gathered}$$

Аналогично вычисляется и член $R_-(\lambda)$. Таким образом получаем следующие формулы

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{n \geq 0} \exp((\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n e_n \otimes f_{k-n}) \lambda^{-k-1}), \tag{2.5.34}$$
$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{n \geq 0} \exp((\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n f_n \otimes e_{k-n}) \lambda^{-k-1}). \tag{2.5.35}$$

Пусть $ord(\beta) := n$, если $\beta = \beta' + n\delta, \beta' \in \Delta_+(\mathfrak{g})$. Тогда предложение 2.5.3 можно переписать в виде следующих формул

$$\begin{gathered} R_+(\lambda) = \\ \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+ord(\beta)-1}^{ord(\beta)-1} \left(e_\beta \otimes e_{-\beta+(ord(\beta)+k)\delta}\right) \lambda^{-ord(\beta)-k-1}\right)\right), \end{gathered} \tag{2.5.36}$$
$$\begin{gathered} R_-(\lambda) = \\ \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+ord(\beta)-1}^{ord(\beta)-1} \left(e_\beta \otimes e_{-\beta+(ord(\beta)+k)\delta}\right) \lambda^{-ord(\beta)-k-1}\right)\right). \end{gathered} \tag{2.5.37}$$

Вычислим теперь член $R_0(\lambda)$. Для этого нам потребуется вспомогательное

Предложение 2.5.4. *Оператор сдвига действует на производящую функцию картановских образующих по следующей формуле*

$$T_\lambda(h_i^-(u)) = h_i^+(u+\lambda). \tag{2.5.38}$$

Доказательство.

$$T_\lambda(h_i^-(u)) = T_\lambda(1 - \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,-k-1}u^k) =$$

$$1 - \sum_{k=0}^{\infty} T_\lambda(h_{i,-k-1})u^k = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^k h_{i,m})\lambda^{-m-k-1}u^k =$$

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_{i,m}(\lambda^+ u)^{-m-1} = h_i^+(u+\lambda).$$

Предложение доказано. □

Следствие.

$$T_\lambda(\varphi_i^-(u)) = \varphi_i^+(u+\lambda).$$

Доказательство.

$$T_\lambda(\varphi_i^-(u)) = T_\lambda(\ln(h_i^-(u))) =$$

$$\ln(T_\lambda(h_i^-(u))) = \ln(h_i^+(u+\lambda)) = \varphi_i^+(u+\lambda).$$

□

Теперь мы можем вычислить член $R_0(\lambda)$.

Предложение 2.5.5. *Член $R_0(\lambda)$ имеет следующий вид*

$$R_0(\lambda) = \prod_{n\geq 0} \exp\left(\sum_{i,j\in I}\sum_{k\geq 0} \left((\phi_i^+(u))'\right)_k \otimes c_{ji}\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\phi_j^+(v+(n+\frac{1}{2})l(\mathfrak{g})+\lambda)\right)_k\right). \tag{2.5.39}$$

Пример. В случае простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ формула 5.11.12 принимает следующий простой вид

$$R_0(\lambda) = \prod_{n\geq 0} \exp(-\sum_{k\geq 0}((\phi^+(u))')_k \otimes (\phi^+(v-2n-1+\lambda))_k. \tag{2.5.40}$$

Результаты этого пункта можно представить в виде следующей теоремы.

Теорема 2.5.3. *Пусть члены $R_+(\lambda), R_0(\lambda), R_-(\lambda)$ описываются, соответственно, формулами (2.5.36), (2.5.37), (2.5.39). Тогда формула для универсальной R- матрицы янгиана имеет следующий вид*

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda). \tag{2.5.41}$$

2.6 Хопфова структура и конструкция изоморфизма между двумя реализациями янгиана $Y(A(m,n))$

Конструкция янгиана полной линейной алгебры Ли (алгебры Ли квадратных матриц фиксированного размера) $\mathfrak{gl}(n)$ до появления самого термина "янгиан"возникла ранее в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния при применении к моделям обладающим симметриями, связанными с рациональным решением Янга квантового уравнения Янга-Бакстера. В этом случае янгиан, как алгебра, порождается коэффициентами токов, являющихся матричными элементами трансфер-матрицы. При этом, получался объект, отличный от янгиана, определенного В.Г.Дринфельдом и требуется провести некоторые рассуждения (впервые проведенные В.Г.Дринфельдом), чтобы доказать изоморфность получающихся объектов. Один из способов рассуждений, доказывающих изоморфность этих двух реализаций, основан на теореме об единственности квантования (с некоторыми уточнениями) и том факте, что в квазиклассическом пределе при $\hbar \to 0$ трансфер-матрица переходит в матрицу токов, реализующую элемент биалгебры полиномиальных токов. Следует отметить, что теорема о единственности квантования для янгианов впервые была доказана В.Г. Дринфельдом (см. [25]), а в более общей ситуации Д.Кажданом и П.Этингофом (см. [125]). Важно, что существуют и явные конструкции такого изоморфизма, одна из которых впервые указана В.Г. Дринфельдом (см. [24]) и использует конструкцию универсальной R-матрицы, а вторая предложена Иохарой (см., например, [166], [165]) и использует треугольное разложение янгиана. Отметим, что несмотря на существование этих двух конструкций их реализация явными формулами является весьма непростой задачей, которая решена лишь в некоторых частных случаях янгианов алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n)$ (см. [110]). Целью данного раздела является построение такого изоморфизма в случае янгиана простой супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Ввиду этого мы подробнее обсудим идею В.Г. Дринфельда построения такого изоморфизма и связанные с этой идеей понятия. Центральным в этом контексте является понятие универсальной R-матрицы. Следует отметить, что впервые такой изоморфизм был построен Л. Гоу (L.Gow) в работе [159]. Она показала, что определение янгиана специальной линейной супералгебры Ли, впервые данное автором и определение янгиана в духе подхода Фаддеева-Решетихина=Тахтаджяна, как фактора янгиана общей линейной супералгебры Ли по идеалу, порождённому элементами квантового определителя трансфер-матрицы, эквивалентны. Ниже мы приводим эту конструкцию Л.Гоу.

R-матричный подход. Выше были введены автоморфизмы $T_u, u \in C$. Как показано выше образ $R(u) := id \otimes T_u(R)$ универсальной R- матрицы квантового дубля лежит в некотором пополнеии тензорного произведения $Y(\mathfrak{g})[[u^{-1}]] \otimes Y(\mathfrak{g})[[u^{-1}]]$. Далее, пусть $\rho : Y(\mathfrak{g}) \to Mat((n+1)|(m+1), C)$ некоторое неприводимое представление янгиана. (Как правило стандартное векторное представление янгиана, рассмотренное в предыдущем разделе.) Тогда отображение

$$(\rho \otimes id)(R(u)) \to T(u) \tag{2.6.1}$$

задает изоморфизм янгиана в смысле определения Дринфельда на трансфер-матрицу порождающих функций образующих янгиана в смысле R-матричного подхода (аккуратное определение будет дано ниже).

Цель нашей работы состоит в том, чтобы построить явно этот изоморфизм используя вышеуказанную формулу в случае $\mathfrak{g} = A(m,n)$.

Напомним определение янгиана в рамках, так называемого, R-матричного подхода. Пусть

$$R(u) = E + \frac{P}{u}, \tag{2.6.2}$$

где $P \in End(V \otimes V), (dim(V) = (n|m))$ – оператор перестановки тензорных сомножителей $P(a \otimes b) = (-1)^{p(a)p(b)} b \otimes a$. Пусть $E_{ij} \in \mathfrak{gl}(n,m)$ – матрица у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные матричные элементы равны 0. Тогда $P = \sum_{i,j} (-1)^{\bar{j}} E_{ij} \otimes E_{ji}$, где $\bar{i} = p(e_i)$, а $\{e_i\}$ – базис в V. Определим теперь янгиан $Y(n,m)$ – янгиан супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,m)$ как супералгебру Хопфа, порождённую образующими $t_{ij}^k, i,j \in I, k \in N$, удовлетворяющими определяющим соотношениям, которые удобно записать, используя производящие функции. Пусть,

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} t_{ij}^k u^{-k},$$
$$T(u) = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n+m} (-1)^{\bar{i}(\bar{j}+1)} t_{ij}(u) \cdot E_{i,j},$$
$$T_1(u) = T(u) \otimes E, T_2(u) = E \otimes T(u).$$

Тогда систему определяющих соотношений удобно записать в следующей R-матричной форме, то есть с использованием матричного представления образующих и R-матрицы Янга. Именно,

$$R(u-v) \cdot T_1(u) \cdot T_2(v) = T_2(v) \cdot T_1(u) \cdot R(u-v). \tag{2.6.3}$$

Кроме этих соотношений образующие должны удовлетворять еще одному соотношению – квантовый определитель порождающих функций образующих должен равняться 1, то есть

$$q - det(T(u)) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} sgn(\sigma) \cdot t_{1,\sigma(1)}(u) \cdots t_{(n+m,\sigma(n+m))}(u-n-m-1)(-1)^{\varphi(\sigma(\bar{1}), \cdots \sigma(n \bar{+} m))}, \tag{2.6.4}$$

где $\varphi(\sigma(\bar{1}), \cdots \sigma(n \bar{+} m))$ - некоторая функция четности (определение ее будет дано ниже). Структура коалгебры задается на $Y(n,m)$ следующей простой формулой

$$\Delta(t_{ij}(u)) = \sum_{k=1}^{n+m} t_{ik}(u) \otimes t_{kj}(u) (-1)^{(\bar{i}+\bar{k})(\bar{i}+\bar{k})}. \tag{2.6.5}$$

Пусть ρ_{st} – представление супералгебры Ли $A(n-1,m-1) = \mathfrak{sl}(n,m)$ матрицами размера $(n+m) \times (n+m)$, которое однозначно продолжается до гомомрфизма алгебр $\rho_{st} : U(\mathfrak{sl}(n,m)) \to \mathfrak{gl}(n,m)$. Известно, что существует проекция $\pi : Y(\mathfrak{sl}(n,m)) \to U(\mathfrak{sl}(n,m))$ янгиана на универсальную обертывающую алгебру.

Будем обозначать через ρ обратный образ при проекции π стандартного представления ρ_{st}. Опишем теперь образ универсальной R-матрицы $R(u)$ при отображении $\rho \otimes id$, то есть $\rho \otimes id(R(u))$.

Опишем конструкцию изоморфизма. Для начала определим проекцию $\pi : Y(\mathfrak{sl}(n,m)) \to U(\mathfrak{sl}(n,m))$ формулами

$$\pi(x_{i,0}^{\pm}) = x_i^{\pm}, \pi(h_{i,0}) = h_i, \tag{2.6.6}$$
$$\pi(x_{i,1}^{+}) = \tfrac{h_i - 1}{2} x_i^{+}, \pi(x_{i,1}^{-}) = x_i^{-} \tfrac{h_i - 1}{2} x_i^{+},$$
$$\pi(h_{i,1}) = -\tfrac{h_i}{2} - \tfrac{h_i^2}{2} - x_i^{-} x_i^{+}. \tag{2.6.7}$$

Отметим, то отображение, определяемое такими формулами однозначно продолжается на остальные образующие янгиана и его квантового дубля, а также на порождающие функции образующих. Имеет место следующее

Предложение 2.6.1. *Гомоморфизм* π *определяется на порождающих функциях образующих следующими формулами.*
1) $\pi(x_i^+(u)) = (u - \frac{1}{2}(h_i - 1)^{-1})x_i^+$;
2) $\pi(x - -_i(u)) = x_i^-(u - \frac{1}{2}(h_i - 1)^{-1})$;
3) $\pi(h_i(u)) = 1 + (u - \frac{1}{2}(h_i - 1)^{-1})x_i^+ x_i^- - (u - \frac{1}{2}(h_i - 1)^{-1})x_i^- x_i^+, |u| >> 1.$

Доказательство. Отметим, что
$\theta(h_{i,1}) = [\theta(x_{i,1}^+), \theta(x_{i,0}^-)] = [\frac{h_i-1}{2}x_i^+, x_i^-] = \frac{h_i-1}{2}h_i + [\frac{h_i-1}{2}, x_i^-] = \frac{h_i-1}{2}h_i - x_i^+ x_i^-$. Таким образом $\theta(\bar{h}_{i,1}) = \theta(h_{i,1}) - \theta(\frac{h_i^2}{2}) = -\frac{h_i}{2} - x_i^+ x_i^-$.

Дальнейшие рассуждения проведем по индукции

$$\theta(x_{i,2}^+) = \frac{1}{2}[\theta(\bar{h}_{i,1}), \theta(x_{i,1}^+)] = \frac{1}{2}[-\frac{h_i}{2} - x_i^+ x_i^-, \frac{h_i-1}{2}x_i^+] = (\frac{h_i-1}{2})^2 x_i^+.$$

Аналогично,

$$\theta(x_{i,n}^+) = \frac{1}{2}[\theta(\bar{h}_{i,1}), \theta(x_{i,n-1}^+)] = \frac{1}{2}[-\frac{h_i}{2} - x_i^+ x_i^-, (\frac{h_i-1}{2})^{n-1}x_i^+] = (\frac{h_i-1}{2})^n x_i^+.$$

□

Квазидетерминантный подход. В этом пункте мы рассмотрим альтернативный квазидетерминантный подход. Этот подход был реализован впервые в работе [160]. Здесь мы его излагаем с незначительными изменениями, которые удобными для перенесения на случай янгиана странной супералгебры Ли. В основе этого подхода лежит использование гауссовского разложения трансфер-матрицы. Напомним сначала определение квазидетерминанта, отсылая за более полным изложением к работам [144], [14].

Определение 2.6.1. *Пусть* X *– квадратная* $n \times n$ *над кольцом с единицей* R*, такая, что обратная матрица* X^{-1} *существует и такая, что для каждой пары* (i, j), $\quad 1 \le i, j \le n$ *матричный элемент обратим.*

Как показано в работе [144] в этом случае имеет место гауссовское разложение в терминах квазидетерминантов.

$$T(u) = F(u)D(u)E(u),$$

где $D(u)$ – однозначно определённая диагональная матрица

$$D(u) = \begin{pmatrix} d_1(u) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2(u) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{k-1}(u) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_k(u) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n(u) \end{pmatrix}.$$

$$E(u) = \begin{pmatrix} 1 & e_{12}(u) & \dots & 0 & 0 & \dots & e_{1,n-1}(u) & e_{1,n}(u) \\ 0 & 1 & \dots & \dots & e_{2,k}(u) & \dots & e_{2,n-1}(u) & e_{2,n}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & e_{k,k+1}(u) & \dots & e_{k,n-1}(u) & e_{k,n}(u) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & e_{k+1,n-1}(u) & e_{k+1,n}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$F(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ f_{21}(u) & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{k,1}(u) & f_{k,2} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ f_{k+1,1}(u) & f_{k+1,1}(u) & \dots & f_{k+1,k}(u) & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{n,1}(u) & f_{n,2}(u) & \dots & f_{n,k}(u) & f_{n,k+1}(u) & \dots & f_{n,n-1}(u) & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы выписанных выше матриц следующим образом выражаются через квазидетерминанты трансфер-матрицы $T(u)$.

$$d_i(u)=\begin{vmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) & \dots & t_{1,i-1}(u) & t_{1,i}(u)\\ t_{21}(u) & t_{22}(u) & \dots & t_{2,i-1}(u) & t_{2,i}(u)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{i1}(u) & t_{i2}(u) & \dots & t_{i,i-1}(u) & \widehat{t_{i,i}}(u) \end{vmatrix}.$$

$$e_{ij}(u)=d_i^{-1}(u)\begin{vmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) & \dots & t_{1,i-1}(u) & t_{1,j}(u)\\ t_{21}(u) & t_{22}(u) & \dots & t_{2,i-1}(u) & t_{2,j}(u)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{i1}(u) & t_{i2}(u) & \dots & t_{i,i-1}(u) & \widehat{t_{i,j}}(u) \end{vmatrix}.$$

$$f_{ji}(u)=\begin{vmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) & \dots & t_{1,i-1}(u) & t_{1,i}(u)\\ t_{21}(u) & t_{22}(u) & \dots & t_{2,i-1}(u) & t_{2,i}(u)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{j1}(u) & t_{j2}(u) & \dots & t_{j,i-1}(u) & \widehat{t_{j,j}}(u) \end{vmatrix}.$$

Доказательство эквивалентности двух определений янгиана, использующее формулу для универсальной R-матрицы. Мы докажем эквивалентность определения янгиана $Y(A(m,n))$ в смысле В.Г. Дринфельда и янгиана $Y_1(A(m,n))$, в смысле РТФ-подхода (то есть подхода Решетихина-Тахтаджяна-Фаддеева). Пусть $\tau_u : Y(A(m,n)) \to End(V)$ – представление evaluation янгиана в векторном суперпространстве, размерности $(m{+}1|n{+}1)$. Сужение на образующие нулевого порядка, образующих относительно коммутатора супералгебру Ли $A(m,n)$ этого представления совпадает с тождественным отображением $A(m,n) \to \mathfrak{sl}(m+1,n+1)$. Отметим, что отображение

$$T(\lambda) \longrightarrow (id \otimes \tau_u)(R) \tag{2.6.8}$$

задаёт изоморфизм супералгебр Хопфа

$$Y_1(A(m,n)) \longrightarrow Y(A(m,n)). \tag{2.6.9}$$

Получим явные формулы для этого изоморфизма. Построенное отображение будет обратным к изоморфизму, построенному в предыдущем пункте. Мы получим явные формулы, выражающие образующие $t_{i,j}(u)$ через корневые образующие янгиана $Y(A(m,n))$. По необходимости эти формулы будут иметь мало обозримый вид.

Глава 3

Янгиан супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Теория представлений

3.1 Теория представлений янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1, 2)$

Введение

Основным результатом параграфа является теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1, 2)$. Классификация неприводимых представлений янгиана полной линейной алгебры $\mathfrak{gl}(1, 1)$ получена ранее в работах [274]. Следует отметить, что теория представлений супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(m, n)$ отличается от теории представлений простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ наличием наряду с так называемыми типичными представлениями ещё атипичных представлений. Эта патология находит своё отражение и в теории представлений янгианов супералгебр Ли $\mathfrak{sl}(m, n)$. В этом параграфе мы ограничиваемся простейшим случаем супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1, 2)$ наиболее близкой по свойствам к простой алгебре Ли типа $\mathfrak{sl}(2)$.

3.1.1 Определение янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1, 2)$

Мы сначала, для удобства читателя, приведём определение янгиана $A(0, 1)$. Мы сразу дадим определение, основанное на токовой системе образующих. Эта система образующих особенно удобна при рассмотрении представлений янгианов.

Сначала напомним определение супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1, 2) = A(0, 1)$. Это базисная супералгебра Ли, порождённая образующими $h_1, h_2, x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, x_3^{\pm} = [x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]$. Матрица Картана, задающая систему определяющих соотношений имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Сама же система определяющих соотношений выглядит следующим образом:

$$[h_i, h_j] = 0, i = 1, 2; \tag{3.1.1}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, i, j = 1, 2 \tag{3.1.2}$$

$$[h_1, x_1^{\pm}] = 0, \quad [h_1, x_2^{\pm}] = \pm x_2^{\pm}, [h_2, x_1^{\pm}] = \pm x_1^{\pm}, [h_2, x_2^{\pm}] = \mp 2 x_2^{\pm} \tag{3.1.3}$$

$$[h_1, x_3^{\pm}] = \pm x_3^{\pm}, \quad [h_2, x_3^{\pm}] = \mp x_3^{\pm}, \tag{3.1.4}$$

$$[x_1^{\pm}, [x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]] = [x_1^{\pm}, x_3^{\pm}] = [x_2^{\pm}, x_3^{\pm}] = [x_1^{\pm}, [x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]] = 0; \tag{3.1.5}$$

$$[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_j, i = 1, 2, \quad [x_3^{+}, x_3^{-}] = h_1 + h_2. \tag{3.1.6}$$

Отметим, что образующие $x_1^{\pm}$ (и $x_3^{\pm}$) – нечётные, а остальные образующие чётные, то есть $p(x_1^{\pm}) = 1, p(x_2^{\pm}) = p(h_1) = p(h_2) = 0$, где p – функция чётности (см. [180]). Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$. Напомним теперь определение янгиана $Y(\mathfrak{g}) = Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ (см. [54]).

Определение 3.1.1. *Пусть $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ (см. [54]) супералгебра (над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\hbar]]$), порождённая образующими $h_{i,k}, x_{i,k}^{\pm}, \quad i \in I = \{1,2\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$ ($p(x_{1,k}^{\pm}) = 1, \quad p(x_{2,k}^{\pm}) = p(h_{1,k}) = p(h_{2,k}) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+$) следующим соотношениям:*

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \tag{3.1.7}$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x_{i,k}^{+}, x_{j,l}^{-}], \tag{3.1.8}$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^{\pm}] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^{\pm}] + (a_{ij}/2)\hbar(h_{i,k}x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm}h_{i,k}), \tag{3.1.9}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,l}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,l}^{\pm}, \tag{3.1.10}$$

$$[x_{i,k+1}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}] = [x_{i,k}^{\pm}, x_{j,l+1}^{\pm}] + (a_{ij}/2)\hbar(x_{i,k}^{\pm}x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm}x_{i,k}^{\pm}), \tag{3.1.11}$$

$$[x_{1,k_1}^{\pm}, [x_{1,k_2}^{\pm}, x_{2,j}^{\pm}]] + [x_{1,k_2}^{\pm}, [x_{1,k_1}^{\pm}, x_{2,j}^{\pm}]] = [x_{2,k_1}^{\pm}, [x_{2,k_2}^{\pm}, x_{1,j}^{\pm}]] + [x_{2,k_2}^{\pm}, [x_{2,k_1}^{\pm}, x_{1,j}^{\pm}]] = 0. \tag{3.1.12}$$

Отметим, что $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ является также алгеброй Хопфа, в которой закон коумножения задаётся следующими формулами:

$$\begin{gathered}
\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad x \in \{h_{i,0}, x_{i,0}^{\pm}, i = 1,2\}; \\
\Delta(x_{i,1}^{+}) = x_{i,1}^{+} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^{+} + \hbar(h_{i,0} \otimes x_{i,0}^{+} - \textstyle\sum_{\gamma\in\Delta_+} x_\gamma^{-} \otimes [x_{\alpha_i}^{+}, x_\gamma^{+}]), \quad i = 1,2; \\
\Delta(x_{i,1}^{-}) = x_{i,1}^{-} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^{-} + \hbar(x_{i,0}^{-} \otimes h_{i,0} - \textstyle\sum_{\gamma\in\Delta_+} [x_{\alpha_i}^{-}, x_\gamma^{-}] \otimes x_\gamma^{+}), \quad i = 1,2; \\
\Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + \hbar(h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \textstyle\sum_{\gamma\in\Delta_+} (\alpha_i, \gamma) x_\gamma^{-} \otimes x_\gamma^{+}), \quad i = 1,2.
\end{gathered}$$

Легко проверить, что при различных $\hbar$, не равных 0, супералгебры Хопфа $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ изоморфны.

Янгианом $Y(\mathfrak{g})$ будем называть супералгебру Хопфа $Y(\mathfrak{g})_1$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Введём следующие производящие функции образующих янгиана:

$$h_i(u) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k} \cdot u^{-k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} h_{i,k} \cdot u^{-k-1}, i = 1,2; \tag{3.1.13}$$

$$x_i^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^{\pm} \cdot u^{-k-1}, i = 1,2. \tag{3.1.14}$$

Легко проверить, что соотношение (3.1.9) эквивалентно следующему соотношению для производящих функций:

$$[h_i(u), x_j^{\pm}(t)] = \mp \frac{a_{ij}}{2} \frac{(h_i(u)(x_j^{\pm}(t) - x_j^{\pm}(u)) + (x_j^{\pm}(t) - x_j^{\pm}(u))h_i(u))}{(u-t)}. \tag{3.1.15}$$

3.1.2 Корневые образующие. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$

В этом пункте мы сформулируем теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ – теорему) для янгиана супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$. Этот результат – квантовый аналог соответствующей теоремы для универсальных обёртывающих алгебр (см. [8], [106]). В обоих случаях конструируется некий бесконечный линейный базис (то есть базис в векторном пространстве).

Будем называть степенью образующих $a_{i,k}, a_{i,k} \in \{x^+_{i,k}, x^-_{i,k}, h_{i,k}\}$ – их второй индекс. Степенью монома от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. Степенью многочлена от образующих будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Степенью тензорного произведения мономов будем называть сумму степеней тензорных сомножителей. Степенью тензорного полинома будем как и выше называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g})$ степени не выше чем k через $Y_k = Y_k(\mathfrak{g})$. Получаем на $Y(\mathfrak{g})$ фильтрацию:

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots.$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$. Пусть α_1 – нечётный корень и Δ_+ – множество положительных корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. В случае супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$ множество положительных корней $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$. Определим на Δ_+ так называемый выпуклый порядок формулой: $\alpha_1 \prec \alpha_3 \prec \alpha_2$. Зафиксируем монотонное отображение, сохраняющее порядок: $\alpha : [1,2,3] \to \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2\}$, $\alpha(1) = \alpha_1, \alpha(2) = \alpha_3, \alpha(3) = \alpha_2$.

Пусть $\overline{(i,m)} = (i_1, m_1, i_2, m_2, i_3, m_3)$ – вектор, $|\overline{(i,m)}| = \sum_{j=1}^{3}(i_j \cdot m_j)$ – сумма компонент этого вектора. Пусть Y_- – ассоциативная подалгебра янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, порождённая образующими $\{x^-_{1,k} = x^-_{\alpha(1),k}, x^-_{2,l} = x^-_{\alpha(3),l}, x^-_{\alpha_3,m} = x^-_{\alpha(2),m} | k,l,m \in Z_+\}$. Опишем упорядоченный базис в янгиане $Y(\mathfrak{g})$, как в векторном пространстве, то есть базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ – базис).

Пусть $\overline{k} = (k_1, k_2, k_3), k_i \geq 0, \overline{m} = (m_1, m_2, m_3), m_3 \geq 0, m_1, m_2 \in 0,1; \overline{s} = (s_1, s_2), s_1, s_2 \geq 0; \overline{p} = (p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 0; \overline{r} = (r_1, r_2, r_3), r_i \geq 0, \overline{t} = (t_1, t_2, t_3), t_3 \geq 0, t_1, t_2 \in 0,1$ – векторы. Пусть также

$$x(\overline{k}, \overline{m}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t}) = (x^+_{\alpha(1),k_1})^{m_1} \cdot (x^+_{\alpha(2),k_1})^{m_2} \cdot (x^+_{\alpha(3),k_N})^{m_3} \cdot$$
$$(h_{1,s_1})^{p_1} \cdot \cdot (h_{2,s_2})^{p_2} \cdot (x^-_{\alpha(1),r_1})^{t_1} \cdot (x^-_{\alpha(2),r_2})^{t_2} \cdot (x^+_{\alpha(3),r_3})^{t_3}.$$

На множестве векторов $\{x(\overline{k}, \overline{m}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t})\}$ определим лексикографический порядок относительно аргументов.

Пусть, как и выше, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ (α_1, α_2 – простые корни). Пусть $x^{\pm}_{1,k_1}, x^{\pm}_{2,k_2} \in Y(\mathfrak{g})$, $k = k_1 + k_2$. Определим корневые векторы формулами:

$$x^{\pm}_{\alpha_3,k} = [x^{\pm}_{1,k_1}, x^{\pm}_{2,k_2}].$$

Нетрудно проверить, что если (k'_1, k'_2) – другое разложение числа k, то $x^{\pm}_{\alpha_3,k} = [x^{\pm}_{1,k'_1}, x^{\pm}_{2,k'_2}]$ по модулю членов меньшей степени, то есть по модулю Y_{k-1}.

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (то есть по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k-1}$ коммутационные соотношения в $\oplus_{k=1}^{\infty} Y(\mathfrak{g})_k / Y(\mathfrak{g})_{k-1} \oplus Y(\mathfrak{g})_0$ аналогичны коммутационным соотношениям универсальной обёртывающей алгебры Ли токов $U(\mathfrak{g}[t])$.

Будем обозначать через Ω множество упорядоченных мономов от $x_\alpha, h_i, \alpha \in \Delta, i \in I$. Мы используем обозначение $x_\alpha = x^+_\alpha, x_{-\alpha} = x^-_\alpha, \alpha \in \Delta_+$.

Теорема 3.1.1. $(\Omega, \prec)$ – *базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в янгиане* $Y(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Теорема является частным случаем более общей теоремы 5.8.1, доказанной в параграфе 2.3. □

3.1.3 Представления янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1,2)$

Определение 3.1.2. *Пусть V – модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2)$, $\bar{d} = \{d_{i,r}\}, i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$ – набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть весовым подпространством модуля V, подпространство*

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V : h_{i,r}v = d_{i,r}v\}. \tag{3.1.16}$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть весом янгианного модуля.

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

Будем называть вектор $v \in V$ *примитивным*, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x^{\pm}_{i,r} \cdot v = 0$ для всех $i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$.

Будем также называть модуль V *модулем со старшим весом*, если он порождается примитивным вектором, то есть $V = Y(\mathfrak{sl}(1,2)) \cdot v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}$.

Покажем сначала, что каждое конечномерное представление янгиана супералгебры Ли типа $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ обладает старшим вектором.

Отметим, что каждый модуль со старшим весом может быть построен как фактор *модуля Верма.* Модуль же Верма $M(\bar{d})$ может быть сконструирован обычным образом как фактор модуль янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ по идеалу, порождённому векторами $x^{+}_{i,r}$ и векторами $h_{i,k} - d_{i,k} \cdot 1$. Роль старшего вектора играет единица янгиана 1. Ввиду вложения $U(\mathfrak{sl}(1,2)) \subset Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, каждый $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ – модуль можно рассматривать как $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль. Рассмотрим вес $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \cdot h_{i,0}$, где $\lambda_i, i = 1,2$ – фундаментальные веса супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$. Тогда весовое подпространство янгианного модуля Верма с таким весом одномерно. Можно показать, что отсюда вытекает, что модуль Верма имеет единственный неприводимый фактор-модуль, обозначаемый обычно $V(\bar{d}) = M(\bar{d})/N(\bar{d})$, где $N(\bar{d})$ – максимальный подмодуль модуля $M(\bar{d})$.

Мы будем использовать, определённые выше фильтрации.

Предложение 3.1.1. *Каждое конечномерное неприводимое представление янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$ (неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль) V содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) старший вектор v.*

Доказательство этого предложение основано на следующей лемме. Пусть $V_0 = \{v \in V | x^{+}_{i,k}v = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Лемма 3.1.1. *1) $h_{i,k}V_0 \subset V_0$.*
2) $V_0 \neq 0$.

Доказательство. Пусть $v \in V_0$. Тогда

$$x^{+}_{i,k}h_{j,l}v = h_{j,l}x^{+}_{i,k}v + [h_{i,l+1}, x^{+}_{i,k-1}]v + \frac{1}{2}(h_{i,k}x^{+}_{i,l} + x^{+}_{i,l}h_{i,k})v.$$

Переставляя образующие $x^{+}_{i,s}$ и $h_{j,r}$ при помощи коммутационных соотношений (определяющих соотношений янгиана) получим, что $x^{+}_{i,k}h_{j,l}v = 0$. Другими словами, $h_{j,l}v \in V_0$ для $v \in V_0$, то есть $h_{i,l}V_0 \subset V_0$. Пункт 1) доказан.

2) Пусть $v' \in V_0$. Начинаем действовать на вектор v' элементами PBW-базиса. Рассмотрим сначала случай $m = n = 1$, то есть случай $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$, а после общий случай. В случае $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$ обязательно найдётся такое m, что $(x^{+}_{0})^{m}v' \neq 0$, $(x^{+}_{0})^{m+1}v' = 0$ (например, всегда

$x_0^2 \cdot v = 0$, так как $x_0^2 = 0$, а $x_0^0 \cdot v = v \neq 0)$. Пусть $v_2 = (x_0^+)^m v'$. Начинаем действовать элементами PBW базиса в соответствии с выбранным порядком на этом базисе. Ясно, что найдётся такое r, что $v_r = (x_r^+ \cdot ... \cdot x_0^+) \cdot v \neq 0$, но $x_t^+ \cdot v_r = 0$ для $\forall t \in Z_+$. Ясно, что $v_r \in V_0$. Поэтому $V_0 \neq \{0\}$.

Рассмотрим теперь случай $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$. Рассмотрим линейный порядок на векторах PBW базиса, лежащих в Y_+. Обозначим векторы этого базиса через $\{x^+(j)\}_{j=0}^{\infty}$, причём $x^+(j) \prec x^+(l)$ при $j < l$. Найдётся такое натуральное число $m \in Z_+$, что $x^+(m)v' \neq 0$, но $x^+(m+1)v' = 0$ для $v' \in V_0$. □

Лемма 3.1.2. . *V_0 – одномерное подпространство.*

Доказательство. Пусть $v', v" \in V_0, v' \neq v"$. Тогда, действуя на каждый из них янгианом $Y(sl(1,2))$, получаем два подмодуля $Y(sl(1,2))v'$ и $Y(sl(1,2))v"$ модуля V. Последнее противоречит неприводимости модуля V в случае когда векторы $v', v"$ – непропорциональны. Доказательство окончено. □

Легко видеть, что предложение 3.1.1 вытекает из лемм 3.1.1, 3.1.2.

Введём теперь класс модулей со старшим весом – аналоги модулей Верма. Пусть $V_0 = Cv_+^{\Lambda}$ – одномерное векторное пространство, Y_0^+ – подсупералгебра янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$, порождённая образующими

$$x_{i,k}^+, \quad i \in \{1,2\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$

$$Y_0^0 = \langle h_{i,k} | i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \rangle$$

– линейная оболочка образующих $\{h_{i,k} | i \in I = \{1,2\}, k \in \mathbb{Z}_+\}$; $Y^+ = Y_0^+ \cdot Y_0^0$. Пусть также $h_{i,k} v_+^{\Lambda} = d_{i,k} v_+^{\Lambda}, Y_0^+ \cdot v_+^{\Lambda} = 0$. (Наряду с обозначением $\bar{d}$ мы будем также использовать обозначение $\Lambda = \bar{d}$, чтобы подчеркнуть аналогию со старшими весами модулей супералгебр Ли, кроме того, для краткости будем использовать для старшего вектора обозначение $v_+ = v_+^{\Lambda}$.) Тогда V_0 превращается в одномерный $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль. Определим свободный модуль M_{Λ} со старшим весом Λ формулой:

$$M_{\Lambda} = Y(\mathfrak{g}) \otimes_{Y^+} v_+^{\Lambda}. \tag{3.1.17}$$

Очевидно, что как векторное пространство M_{Λ} изоморфно $Y_0^- \otimes v_+^{\Lambda}$: $M_{\Lambda} \cong Y_0^- \otimes v_+^{\Lambda}$. Мы будем для краткости писать $x_{i,k}^- v_+^{\Lambda}$ вместо $x_{i,k}^- \otimes v_+^{\Lambda}$. Ясно, что модуль M_{Λ} бесконечномерен. Стандартные рассуждения показывают, что модуль M_{Λ} содержит максимальный подмодуль N_{Λ}. Тогда модуль $V_{\Lambda} = M_{\Lambda}/N_{\Lambda}$ – неприводимый модуль со старшим весом Λ. Используя стандаратные методы теории представлений можно показать, что любые два модуля с одинаковым старшим весом – изоморфны (сравни, например с [8]).

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.1.2. *Для любого старшего веса $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ существует единственный неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$-модуль $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ.*

Зададим на модуле $M(\bar{d})$ следующие две фильтрации. Так как модуль $M(\bar{d})$ как векторное пространство естественно изоморфен $Y(\mathfrak{g})_-$, зададим сначала эти фильтрации на $Y(\mathfrak{g})_-$, а потом, используя этот естественный изоморфизм перенесём их на $M(\bar{d})$. Эти фильтрации определяются заданием степеней, являющихся сужением степеней d_1, d_2, соответственно. Пусть $(Y(\mathfrak{g})_-)_k$, соответственно, $(Y(\mathfrak{sl}(1,2))_-)^k$, линейная оболочка мономов степени не выше k. Степень монома будем считать равной сумме степеней образующих произведением которых он является. Степень же образующей в первом случае положим равной значению её второго индекса, а во втором случае положим равной на единицу больше значения её второго индекса. Пусть $Y(\mathfrak{sl}(1,2))_k = \{x \in Y(\mathfrak{sl}(1,2)) : d_1(x) \leq k\}$, а $Y(\mathfrak{sl}(1,2))^k = \{x \in Y(\mathfrak{sl}(1,2)) : d_2(x) \leq k\}$. Будем рассматривать сужения этих фильтраций на $Y(\mathfrak{sl}(1,2))_-$. Таким образом, получаем две фильтрации на $(Y(\mathfrak{g}))_-)^k = (Y(\mathfrak{sl}(1,2))_-)^k$:

$$C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_1 \subset \cdots (Y(\mathfrak{g})_-)_k \subset \ldots \tag{3.1.18}$$

$$\{0\} \subset C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^1 \subset \cdots (Y(\mathfrak{g})_-)^k \subset \ldots \tag{3.1.19}$$

Пусть $M(\bar{d})_k = (Y(\mathfrak{g})_-)_k \cdot v^{\bar{d}}$, соответственно, $M(\bar{d})^k = (Y(\mathfrak{g})_-)^k \cdot v^{\bar{d}}$. Так как неприводимый модуль $V(\bar{d})$ является фактор-модулем модуля Верма $M(\bar{d})_k$, то определённые выше фильтрации задают фильтрации и на неприводимом модуле $V(\bar{d})$. Следует отметить, что эти фильтрации различны по своим свойствам. Правда, фильтрующее пространство первой фильтрации с индексом k содержит все фильтрующие пространства второй фильтрации с индексами, по меньшей мере, до порядка $k+1$ включительно.

Опишем теперь условия конечномерности неприводимого модуля со старшим весом.

Обозначим через $\bar{B}_{1,n}, \bar{B}_{2,n}$ линейные оболочки следующих векторов

$$\bar{B}_{1,n} := \langle x^-_{1,k_1} \cdot \ldots \cdot x^-_{1,k_r} \cdot v_+ | (k_1+1) + \ldots + (k_r+1) \leq n \rangle$$
$$\bar{B}_{2,n} := \langle (x^-_{2,k_1})^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^-_{2,k_r})^{y_r} \cdot v_+ | t_1(k_1+1) + \ldots t_r(k_r+1) \leq n \rangle.$$

Лемма 3.1.3. *Если $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+1}$, то и $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+k}$ для произвольного натурального $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \bar{B}_{1,n}$. Покажем сначала, что любой вектор из $\bar{B}_{1,n+k}$ можно представить как образ $\bar{B}_{1,n}$ при действии картановской подалгебры $\mathfrak{h} =< h_{1,k}, h_{2,k} | k \in Z_+ >$, именно $\bar{B}_{1,n+k} \subset \mathfrak{h} \cdot \bar{B}_{1,n}$. При $k=1$ этот факт вытекает из условия леммы. Пусть теперь $k=2$. Нам потребуется следующее соотношение

$$h_{i,1} \cdot x^-_{j,n} \cdot v_+ = x^-_{j,n} \cdot h_{i,1} \cdot v_+ + [h_{i,1}, x^-_{j,n}] \cdot v_+$$
$$= x^-_{j,n} \cdot h_{i,1} \cdot v_+ + [h_{i,0}, x^-_{j,n+1}] \cdot v_+ + a_{i,j}/2(h_{i,0} x^-_{j,n} + x^-_{j,n} h_{i,0}) \cdot v_+$$
$$= d_{i,1} x^-_{j,n} \cdot v_+ + a_{i,j} x^-_{j,n+1} \cdot v_+ + a_{i,j}/2(h_{i,0} x^-_{j,n} + x^-_{j,n} h_{i,0}) \cdot v_+$$
$$= a_{i,j} x^-_{j,n+1} \cdot v_+ + (d_{i,1} + (a_{i,j}/2)(a_{i,j} + 2d_{i,0})) x^-_{j,n} \cdot v_+.$$

Используя это соотношение докажем лемму. Пусть $a \in \bar{B}_{1,n+2}$, тогда $a = \sum_{s=1}^{r} x^-_{i_s,k_s} b_s v_+$. Представим элемент a в виде

$$a = \sum_{s=1}^{r} a^{-1}_{i_s-1,i_s} [h_{i_s-1,1}, x^-_{i_s,k_s-1}] b_s v_+. \tag{3.1.20}$$

Используя несколько раз приведённые выше два коммутационных соотношения, можно представить элемент a в виде суммы элементов из $\bar{B}_{1,n+1}$ и произведения $x^-_{1,1}$ и элемента из $\bar{B}_{1,n+1}$. Так как каждый элемент из $\bar{B}_{1,n+1}$ содержится в $\bar{B}_{1,n}$ последовательно получаем, что $a \in \bar{B}_{1,n+1}$ и, следовательно, в силу условия леммы, $a \in \bar{B}_{1,n}$. Лемма доказана.

□

Пусть теперь $x^-(n) = x^-_{1,k_1} \ldots x^-_{1,k_r}, k_1 + \ldots + k_r = n, k_r < \ldots < k_1$.

Лемма 3.1.4. *1) Если вектор $x^-(n+1)v_+ \in \bar{B}_{1,n}$, то и вектор $x^-(n+k+1)v_+ \in \bar{B}_{1,n}$ для произвольного $k \in \mathbb{Z}_+$.*
2) Если $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+1}$, то и $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+k}$ для произвольного натурального числа k.

Доказательство. Отметим, что пункты 1), 2) эквивалентны. Докажем пункт 1). Доказательство проведём по индукции. В доказательстве мы будем использовать картановские образующие $h_{i,1}, h_{i,2}, i \in \{1, 2\}$. Индукцию проведём по k. При $k = 1$ утверждение является следствием условия. Предположим, что утверждение справедливо при $k = m$, докажем его справедливость при $k = m + 1$. Идея доказательства основана на том, что мы покажем, что: 1) картановские образующие переводят векторное пространство $\bar{B}_{1,n+m}$ в себя; 2) каждый моном ПБВ базиса, указанного в формулировке вида, лежащий в $\bar{B}_{1,n+m+1}$ может быть получен в виде линейной комбинации образов мономов ПБВ базиса, указанного в формулировке теоремы вида, при действии картановских образующих $h_{i,1}, h_{i,2}, i \in \{1, 2\}$, а также элементов ПБВ базиса, уже лежащих в $\bar{B}_{1,n+m}$. Отметим, что из пунктов 1), 2) легко вытекает доказываемое утверждение. Действительно так как каждый моном из $\bar{B}_{1,n+m+1}$, указанного вида, может быть получен действием картановских образующих $h_{i,1}, h_{i,2}$ на мономы из $\bar{B}_{n+m}$, указанного вида, и комбинацией мономов из $\bar{B}_{n+m}$, то, следовательно лежит в $\bar{B}_{1,n+m}$. Но по индукционному предположению мономы из $\bar{B}_{1,n+m}$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций мономов из $\bar{B}_{1,n}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать пункты 1), 2), которые проверяются по индукции с использованием коммутационных соотношений в янгиане.

Пусть сначала $n = 1$. Тогда получаем, что $x^-(1) \in B_{1,1}$. Следовательно, $x^-(1) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{0,k} x_0^-(\bar{k})$. Прокоммутируем левую и правую части с элементом $h_{2,1}$. При этом степени мономов, увеличатся на 1, а число этих мономов также вообще говоря увеличится. Сумма этих мономов является линейной комбинацией мономов меньших степеней (степени $n + k$), каждый из которых по индукционному предположению также является линейной комбинацией мономов степени n. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.5. *. 1) Имеют место строгие вложения*
$B_{i,k} \subset B_{i,k+1}, \quad \forall k < n_i, \quad k \geq 0, \quad i = 1, 2;$
2) $B_{i,n_i} = B_{i,n_i+1} = \ldots$.

Доказательство. Случай $i = 2$ вытекает из результатов, относящихся к представлениям янгиана $Y(\mathfrak{sl}(2))$ (см. [24], [75]). Пункт 1) следует, по существу, из определений. Пункт 2) вытекает из предыдущей леммы в случае $i = 1$. □

Главный результат этого параграфа – следующая теорема.

Теорема 3.1.3. *1) Каждый неприводимый конечномерный* $Y(\mathfrak{sl}(1, 2))$*-модуль* V *является модулем со старшим весом* d *:*$V(d)$.
2) Модуль $V(\Lambda)$ *конечномерен тогда и только тогда когда существуют многочлены* P_2^d, *а также многочлены* P_1^d, Q_1^d, *удовлетворяющие следующим условиям:*
a) все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными 1;
b)

$$\frac{P_2^d(u+1)}{P_2^d(u)} = 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{2,k} \cdot u^{-k-1}, \tag{3.1.21}$$

$$\frac{P_1^d(u)}{Q_1^d(u)} = 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} \cdot u^{-k-1}. \tag{3.1.22}$$

Доказательство. Пункт 1) теоремы уже доказан. Выведем пункт 2) теоремы из доказанных выше лемм. Пусть, как и выше, $x_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^- \cdot u^{-k-1}, i = 1, 2$. Из доказанных выше лемм вытекает, что $x_i^-(u) \cdot v_+ = \sum_{m=0}^{N} \beta_m^i(u) \cdot v_{i,m}$, где $\{v_{i,m}\}$ образуют базис в $\bar{B}_{i,n}, i = 1, 2$. Ниже мы получим явный вид для $\beta_m^i(u)$. Для краткости мы будем писать $\beta_m(u)$ вместо

$\beta^1_m(u)$. Здесь следует отметить, что вид $\beta^2_m(u)$, равно как и все другие результаты, относящиеся к чётным корневым образующим, хорошо известны, они вытекают из результатов, относящихся к описанию неприводимых представлений янгиана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, полученных впервые в [75] (см. также [76], [24], [25], [107]). Поэтому, мы подробно остановимся на доказательстве соотношения (3.3.7), относящегося к нечётной части янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1,2))$.

Нам потребуются соотношения (3.1.15) в следующем частном случае:

$$[h_2(u), x_1^-(t)] = \frac{(h_2(u)(x_1^-(t) - x_1^-(u)) + (x_1^-(t) - x_1^-(u))h_2(u))}{(u-t)}; \tag{3.1.23}$$

$$[h_1(u), x_1^-(t)] = 0. \tag{3.1.24}$$

Пусть $v_{1,k} = x^-_{1,k}v_+$. Тогда, в силу леммы 3.3.4, имеет место следующее представление:

$$x_1^-(u)v_+ = \sum_{i=0}^{N} \beta_i(u)v_{1,i}. \tag{3.1.25}$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^-_{1,k}u^{-k-1}v_+ = \sum_{k=0}^{N} x^-_{1,k}u^{-k-1}v_+ + \sum_{k=N+1}^{\infty} x^-_{1,k}u^{-k-1}v_+$$
$$= \sum_{k=0}^{N} x^-_{1,k}u^{-k-1}v_+ + \sum_{k=0}^{N} u^{-N-1}\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i_k u^{-i-1}v_{1,k}.$$

Обозначим

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i_k u^{-i-1}, \quad \tilde{\varphi}_k(u) = u^{-k-1} + \varphi_k(u).$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\varphi^{i+1}_k - \varphi^i_{k-1} - \varphi^i_N \cdot \varphi^0_k = 0, \quad k \geq 0 \tag{3.1.26}$$

$$\varphi^{i+1}_0 - \varphi^i_N \cdot \varphi^0_0 = d_{1,n+k+1} - \textstyle\sum_{j=0}^N \varphi^i_j \cdot d_{1,j}. \tag{3.1.27}$$

Докажем эти соотношения.

Введём следующие обозначения. Пусть

$$\varphi_i(u) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k_i \cdot u^{-k-1}, \tag{3.1.28}$$

$$\delta_i(u) = 1 + u^{i-N}\varphi_i(u). \tag{3.1.29}$$

Тогда соотношения (3.3.20) – (3.3.17) можно следующим образом переписать в терминах производящих функций:

$$u\varphi_i(u) - \varphi_i(u) = \varphi_N(u)\cdot\varphi^0_i, \quad k \geq 0 \tag{3.1.30}$$

$$u\varphi_0(u) - \varphi_N(u)\cdot\varphi^0_0 = u^N \cdot d_1(u) - \textstyle\sum_{j=0}^N \varphi_j(u)\cdot d_1(u)\cdot u^{j+1}. \tag{3.1.31}$$

Пусть

$$\beta_i(u) = u^{-i}\delta_i(u), i = 1, 2, \ldots, N.$$

Тогда нетрудно показать, что для некоторых матриц $A^k(u) = (A^k_{i,j})^N_{i,j=1}(u) \in M_N(C[[u^{-1}]], k = 1, 2$ имеет место равенство:

$$h_k(u)x^-(t)v_+ = \sum_{1\leq i,j\leq N} A^k_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{1,i}. \tag{3.1.32}$$

Рассматривая совместно соотношения (3.3.29) и (3.3.8-3.3.9) получаем соотношения

$$\sum_{1\le i,j\le N} A^2_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{1,i} =$$

$$x^-_1(t)\bar{d}_2(u)v_+ + \frac{(h_2(u)(x^-_1(t)-x^-_1(u)) + (x^-_1(t)-x^-_1(u))h_2(u))}{(u-t)}v_+; \tag{3.1.33}$$

$$\sum_{1\le i,j\le N} A^1_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{1,i} = x^-_1(t)\bar{d}_1(u). \tag{3.1.34}$$

Полученные соотношения можно переписать как линейные рекуррентные соотношения, зависящие от набора произвольных констант. Полученные из них соотношения после несложных преобразований и дают соотношение (3.3.7).Теорема доказана. ☐

3.2 Корневые образующие и теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для $Y(A(m,n))$

Рассмотрим теперь общий случай янгиана $Y(A(m,n))$.

В этом пункте мы для удобства читателя напоминаем формулировку теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ – теоремы) для янгиана супералгебры Ли, доказанной в параграфе 2.3. Этот результат – квантовый аналог соответствующей теоремы для универсальных обёртывающих алгебр (см. [8], [106]). В обоих случаях конструируется некий бесконечный линейный базис (то есть базис в векторном пространстве).

Пусть ниже $\mathfrak{g} = A(m,n)$.

Будем называть степенью образующих $a_{i,k}, a_{i,k} \in \{x^+_{i,k}, x^-_{i,k}, h_{i,k}\}$ – их второй индекс. Степенью монома от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. Степенью многочлена от образующих будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Степенью тензорного произведения мономов будем называть сумму степеней тензорных сомножителей. Степенью тензорного полинома будем как и выше называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g})$ степени не выше чем k через $Y_k = Y_k(\mathfrak{g})$). Получаем на $Y(\mathfrak{g})$ фильтрацию:

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots.$$

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (то есть по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k+l-1}$) коммутационные соотношения в $Y(\mathfrak{g})$ имеют вид:

$$[h_{\alpha,\bar{k}}, x_{\beta,\bar{l}}] = (\alpha,\beta)x_{\beta,\bar{k}+\bar{l}}; \quad [h_{\alpha,\bar{k}}, h_{\beta,\bar{l}}] = 0; \tag{3.2.1}$$

$$[x_{\alpha,\bar{k}}, x_{\beta,\bar{l}}] = \begin{cases} 0, & \alpha+\beta \notin \Delta\cup\{0\}, \\ h_{\alpha,\bar{k}+\bar{l}}, & \beta = -\alpha, \\ N(\alpha,\beta)x_{\alpha+\beta,\bar{k}+\bar{l}}, & \alpha+\beta\in\Delta \end{cases} \tag{3.2.2}$$

где $N(\alpha,\beta)$ определяется из следующего соотношения в $U(\mathfrak{g})$:
$[x_\alpha, x_\beta] = N(\alpha,\beta)x_{\alpha+\beta}$, для $\alpha+\beta\in\Delta$.

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{g})$. Пусть α_{m+1} – нечётный корень и Δ_+ – множество положительных корней супералгебры Ли $A(m,n)$. Определим на Δ_+ так называемый выпуклый порядок по индукции. Сначала зафиксируем упорядочение на множестве простых корней, соответствующее их нумерации: $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots \prec \alpha_{m+n+1}$. Если $\alpha,\beta\in\Delta_+$, $\alpha\prec\beta$ и определена их сумма $\alpha+\beta$, то будем считать, что $\alpha\prec\alpha+\beta\prec\beta$. Зафиксируем монотонное отображение, сохраняющее порядок: $\alpha : [1,2,\ldots,N] \to \Delta_+, \alpha(k)\prec\alpha(n)$, если $k<n$. (Отметим, что $N = \frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2}$.)

Пусть $\overline{(i,k)} = (i_1, k_1, i_2, k_2, \dots, i_{m+n+1}, k_{m+n+1})$ – вектор, $|\overline{(i,m)}| = \sum_{j=1}^{m+n+1}(i_j + m_j)$ – сумма компонент этого вектора. Пусть Y_- – ассоциативная подалгебра янгиана $Y(A(m,n))$, порождённая образующими $\{x^-_{i,k} = x^-_{\alpha(i),k} | 1 \le i \le N, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Опишем упорядоченный базис в янгиане $Y(\mathfrak{g})$, как в векторном пространстве, то есть базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ – базис).

Пусть $\overline{k} = (k_1, \dots, k_r), k_i \ge 0,$ – вектор $k = |\overline{k}| = \sum_{i=1}^{r} k_i$. Пусть также

$$x(\overline{k}, \overline{w}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t}) = (x^+_{\alpha(1),k_1})^{w_1} \cdot \ldots \cdot (x^+_{\alpha(N),k_N})^{w_N} \cdot$$

$$(h_{1,s_1})^{p_1} \cdot \ldots \cdot (h_{m+n+1,s_{m+n+1}})^{p_{m+n+1}} \cdot (x^-_{\alpha(1),r_1})^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^+_{\alpha(N),r_N})^{t_N}.$$

На множестве векторов $\{x(\overline{k}, \overline{w}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t})\}$ определим лексикографический порядок.

Пусть $\alpha = \alpha_s + \alpha_{s+1} + \ldots + \alpha_t; \alpha, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t \in \Delta_+$, а $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t$ – простые корни, $s < t, l = t - s + 1$. Пусть $x^{\pm}_{s,k_1}, \dots, x^{\pm}_{t,k_l} \in Y(G)$, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$. Определим корневые векторы формулами:

$$x_{\pm\alpha,k} = [x^{\pm}_{s,k_1}, [x^{\pm}_{s+1,k_2}, [\ldots, x^{\pm}_{t,k_l}] \cdots]].$$

Нетрудно проверить, что если $(k'_1, \dots, k'_l)$ – другое разложение числа k, то

$$x_{\pm\alpha,k} = [x^{\pm}_{m,k'_1}, [x^{\pm}_{m+1,k'_2}, \dots, x^{\pm}_{t,k'_l}] \ldots]].$$

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (то есть по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k-1}$ коммутационные соотношения в $\oplus_{k=1}^{\infty} Y(\mathfrak{g})_k / Y(\mathfrak{g})_{k-1} \oplus Y(\mathfrak{g})_0$ аналогичны коммутационным соотношениям универсальной обёртывающей алгебры Ли токов $U(\mathfrak{g}[t])$, то есть имеют следующий вид:

$$[h_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) x^{\pm}_{j,k+l},$$

$$[x^+_{i,k}, x^-_{j,l}] = \delta_{ij} h_{i,k+l},$$

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0,$$

$$[x^{\pm}_{i,l}, [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}]] = 0,$$

$$[[x^{\pm}_{m,r}, x^{\pm}_{m+1,0}], [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m+2,s}]] = 0.$$

Тут следует отметить, что именно этих соотношений оказывается достаточно для определения линейного порядка на элементах базиса в алгебре полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t] = A(m,n)[t]$, когда в соотношениях участвуют нечётные корневые образующие. Последнее проверяется прямыми вычислениями.

Для каждого числа k зафиксируем вектор $(k_1, k_2, \dots, k_l), k = k_1 + \ldots + k_l$, определяющий разбиение этого числа.

Выше мы ввели линейный порядок на множестве корней Δ и индуцированный этим порядком порядок на корневых векторах. Обозначим через Ω множество упорядоченных мономов от $x_\alpha, h_i, \alpha \in \Delta, i \in I$. Мы используем обозначение $x_\alpha = x^+_\alpha, x_{-\alpha} = x^-_\alpha, \alpha \in \Delta_+$.

Напомним, что имеет место теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта (см. теорему 5.8.1 из параграфа 2.3).

Теорема 3.2.1. $(\Omega, \prec)$ *– базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в янгиане* $Y(\mathfrak{g})$.

3.3 Представления янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$

3.3.1 Основные определения

Ниже мы будем пользоваться основными понятиями, относящимися к янгиану $Y(A(m,n))$. При этом во всех соотношениях мы будем использовать следующую симметризованную матрицу Картана супералгебры Ли $A(m,n)$:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Основные понятия теории представлений янгианов

Напомним основные определения из теории представлений янгианов.

Определение 3.3.1. *Пусть V – модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$, $\bar{d} = \{d_{i,r} | i \in I, r \in \mathbb{Z}_+\}$ – набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть весовым подпространством модуля V, подпространство*

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V : h_{i,r}v = d_{i,r}v\} \tag{3.3.1}$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть весом янгианного модуля.

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{g})$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

Будем называть вектор $v \in V$ *примитивным*, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x_{i,r}^{\pm} \cdot v = 0$ для всех $i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$.

Мы будем также называть модуль V *модулем со старшим весом*, если он порождается примитивным вектором, то есть $V = Y(A(m,n)) \cdot v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}$.

Покажем сначала, что каждое конечномерное представление янгиана супералгебры Ли типа $Y(\mathfrak{g})$ обладает старшим вектором.

Отметим, что каждый модуль со старшим весом может быть построен как фактор *модуля Верма*. Модуль же Верма $M(\bar{d})$ может быть сконструирован обычным образом как фактор-модуль янгиана $Y(\mathfrak{g})$ по идеалу, порождённому векторами $x_{i,r}^{+}$ и векторами $h_{i,k} - d_{i,k}$. Роль старшего вектора играет единица янгиана 1. Ввиду вложения $U(\mathfrak{g}) \subset Y(\mathfrak{g})$ – каждый $Y(\mathfrak{g})$ – модуль можно рассматривать как $Y(\mathfrak{g})$-модуль. Рассмотрим вес $\sum_i \lambda_i \cdot h_{i,0}$, где λ – фундаментальные веса супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда весовое подпространство янгианного модуля Верма с таким весом одномерно. Несложно показать, что отсюда вытекает, что модуль Верма имеет единственный неприводимый фактор-модуль, обозначаемый обычно $V(\bar{d}) = M(\bar{d})/N(\bar{d})$, где $N(\bar{d})$ – максимальный подмодуль модуля $M(\bar{d})$. Пусть $\pi : M(\bar{d}) \to V(\bar{d})$ – каноническая проекция.

Мы будем использовать, данное выше фильтрации на янгиане супералгебры Ли $Y(\mathfrak{g})$.

Предложение 3.3.1. *Каждое конечномерное неприводимое представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$ (неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль) V содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) старший вектор v.*

Доказательство этого предложение основано на следующей лемме. Пусть $V_0 = \{v \in V | x_{i,k}^{+} v = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Лемма 3.3.1. *1) $h_{i,k}V_0 \subset V_0$.*
2) $V_0 \neq 0$.

Доказательство. 1) Пусть $v \in V_0$. Тогда $x^+_{i,k} h_{j,l} v = h_{j,l} x^+_{i,k} v + [h_{i,l+1}, x^+_{i,k-1}]v + \frac{1}{2}(h_{i,k} x^+_{i,l} + x^+_{i,l} h_{i,k})v$. Переставляя образующие $x^+_{i,s}$ и $h_{j,r}$ при помощи коммутационных соотношений (определяющих соотношений янгиана) получим, что $x^+_{i,k} h_{j,l} v = 0$. Другими словами, $h_{j,l} v \in V_0$ для $v \in V_0$, то есть $h_{i,l} V_0 \in V_0$.

2) Пусть $v' \in V_0$. Начинаем действовать на вектор v' элементами ПБВ-базиса. Рассмотрим сначала случай $m = n = 1$, то есть случай $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$, а после общий случай. В случае $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$ обязательно найдётся такое m, что $(x^+_0)^m v' \neq 0$, $(x^+_0)^{m+1} v' = 0$. Пусть $v_2 = (x^+_0)^m v'$. Начинаем действовать элементами PBW базиса в соответствии с выбранным порядком на этом базисе. Ясно, что найдётся такое r, что $v_r = (x^+_r)^{p_r} \cdot \ldots \cdot (x^+_0)^{p_0} v \neq 0$, но $x^+_t \cdot v_r = 0$ для $\forall t \in Z_+$. Ясно, что $v_r \in V_0$. Поэтому $V_0 \neq \{0\}$.

Рассмотрим теперь общий случай $Y(A(m,n))$. Рассмотрим линейный порядок на векторах PBW базиса, лежащих в Y_+. Обозначим векторы этого базиса через $\{x^+(j)\}_{j=0}^{\infty}$, причём $x^+(j) \prec x^+(l)$ при $j < l$. Найдётся такое натуральное число $m \in Z_+$, что $x^+(m)v' \neq 0$, но $x^+(m+1)v' = 0$ для $v' \in V_0$.

□

Лемма 3.3.2. *V_0 – одномерное подпространство. (То есть любые два вектора из V_0 – пропорциональны.)*

Доказательство. Пусть $v', v" \in V_0, v' \neq v"$. Тогда, действуя на каждый из них янгианом $Y(A(m,n))$, получаем два подмодуля $Y(A(m,n))v'$ и $Y(A(m,n))v"$ модуля V. Последнее противоречит неприводимости модуля V в случае когда векторы $v', v"$ – непропорциональны. Доказательство окончено. □

Легко видеть, что предложение А.3.1 вытекает из лемм 3.3.1, 3.3.2.

Введём теперь класс модулей со старшим весом – аналоги модулей Верма. Пусть $V_0 = Cv^{\Lambda}_+$ – одномерное векторное пространство, Y^+_0 – подсуперaлгебра янгиана $Y(A(m,n))$, порождённая образующими $x^+_{i,k}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m+n+1\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$; $Y^0_0 = \langle h_{i,k} | i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \rangle$ – линейная оболочка образующих $\{h_{i,k} | i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+\}$; $Y^+ = Y^+_0 \cdot Y^{)}_0$. Пусть также $h_{i,k} v^{\Lambda}_+ = d_{i,k} v^{\Lambda}_+, Y^+_0 \cdot v^{\Lambda}_+ = 0$. (Наряду с обозначением $\bar{d}$ мы будем также использовать обозначение $\Lambda = \bar{d}$, чтобы подчеркнуть аналогию со старшими весами модулей супералгебр Ли, кроме того, для краткости будем использовать для старшего вектора обозначение $v_+ = v^{\Lambda}_+$.) Тогда V_0 превращается в одномерный $Y(A(m,n))$-модуль. Определим свободный модуль M_{Λ} со старшим весом Λ формулой:

$$M_{\Lambda} = Y(\mathfrak{g}) \otimes_{Y^+} v^{\Lambda}_+. \tag{3.3.2}$$

Очевидно, что как векторное пространство M_{Λ} изоморфно $Y^-_0 \otimes v^{\Lambda}_+ : M_{\Lambda} \cong Y^-_0 \otimes v^{\Lambda}_+$. Мы будем для краткости писать $x^-_{i,k} v^{\Lambda}_+$ вместо $x^-_{i,k} \otimes v^{\Lambda}_+$. Ясно, что модуль M_{Λ} бесконечномерен. Стандартные рассуждения показывают, что модуль M_{Λ} содержит максимальный подмодуль N_{Λ}. Тогда модуль $V_{\Lambda} = M_{\Lambda}/N_{\Lambda}$ – неприводимый модуль со старшим весом Λ. Используя стандартные методы теории представлений можно показать, что любые два модуля с одинаковым старшим весом – изоморфны (сравни, например с [8]). Именно, пусть $V_1(\Lambda), V_2(\Lambda)$ – два неприводимых модуля с одинаковым старшим весом $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, а $u^{\Lambda}_+, w^{\Lambda}_+$ – их старшие векторы, соответственно. Пусть $W = V_1(\Lambda) \oplus V_2(\Lambda)$, $v^{\Lambda}_+ = (u^{\Lambda}_+, w^{\Lambda}_+)$ – старший вектор некоторого подмодуля $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ, порождённого в W вектором v^{Λ}_+ под действием $Y(A(m,n))$. Определим проекции $P_i : V(\Lambda) \to V_i(\Lambda), i = 1, 2 :$ $P_1(v_1, v_2) = (v_1, 0), P_2(v_1, v_2) = (0, v_2), v_i \in V_i(\Lambda)$. Легко проверить, что P_i – гомоморфизмы модулей и, кроме того, $P_1(v^{\Lambda}_+) = u^{\Lambda}_+, P_2(v^{\Lambda}_+) = w^{\Lambda}_+$. Из неприводимости модулей $V_i(\Lambda)$ вытекает, что $ImP_i = V_i(\Lambda)$. Заметим также, что $KerP_1$ – подмодуль $V_2(\Lambda)$, а $KerP_2$ – подмодуль

$V_1(\Lambda)$. Поэтому $KerP_1 = \{0\}, KerP_2 = \{0\}$ (либо $KerP_1 = V_2(\Lambda), KerP_2 = V_1(\Lambda)$.) Но последнее невозможно, поскольку векторы $(0, w_+^\Lambda), (u_+^\Lambda, 0) \notin W$. Таким образом, $P_i, i = 1, 2$ – изоморфизмы модулей. Следовательно,

$$V(\Lambda) \cong V_1(\Lambda) \cong V_2(\Lambda).$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Для любого старшего веса $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ существует единственный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ.*

3.3.3 Вспомогательные утверждения

Зададим на модуле $M(\bar{d})$ следующие две фильтрации. Так как модуль $M(\bar{d})$ как векторное пространство естественно изоморфен $Y(\mathfrak{g})_-$, зададим сначала эти фильтрации на $Y(\mathfrak{g})_-$, а потом, используя этот естественный изоморфизм перенесём их на $M(\bar{d})$. Эти фильтрации определяются заданием степеней, являющихся сужением степеней d_1, d_2, соответственно. Пусть $(Y(\mathfrak{g})_-)_k$, соответственно, $(Y(\mathfrak{g})_-)^k$, линейная оболочка мономов степени не выше k. Степень монома будем считать равной сумме степеней образующих произведением которых он является. Степень же образующей в первом случае положим равной значению её второго индекса, а во втором случае положим равной на единицу больше значения её второго индекса. Пусть $Y(\mathfrak{g})_k = \{x \in Y(\mathfrak{g}) : d_1(x) \leq k\}$, а $Y(\mathfrak{g})^k = \{x \in Y(\mathfrak{g}) : d_2(x) \leq k\}$. Будем рассматривать сужения этих фильтраций на $Y(\mathfrak{g})_-$. Таким образом, получаем две фильтрации на $(Y(\mathfrak{g})_-)^k$:

$$C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_1 \subset \cdots (Y(\mathfrak{g})_-)_k \subset ... \tag{3.3.3}$$

$$\{0\} \subset C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^1 \subset \cdots (Y(\mathfrak{g})_-)^k \subset ... \tag{3.3.4}$$

Пусть $M(\bar{d})_k = (Y(\mathfrak{g})_-)_k \cdot v^{\bar{d}}$, соответственно, $M(\bar{d})^k = (Y(\mathfrak{g})_-)^k \cdot v^{\bar{d}}$. Так как неприводимый модуль $V(\bar{d})$ является фактор-модулем модуля Верма $M(\bar{d})_k$, то определённые выше фильтрации задают фильтрации и на неприводимом модуле $V(\bar{d})$. Следует отметить, что эти фильтрации различны по своим свойствам. Правда, фильтрующее пространство первой фильтрации с индексом k содержит все фильтрующие пространства второй фильтрации с индексами, по меньшей мере, до порядка $k + 1$ включительно.

Опишем теперь условия конечномерности неприводимого модуля со старшим весом.

Обозначим через $\bar{B}_{m+1,t}, \bar{B}_{i,k}, i \in I \backslash \{m+1\}$ линейные оболочки следующих векторов

$$\bar{B}_{m+1,s} := \langle (x_{m+1,k_1}^-)^t \cdot \ldots \cdot x_{m+1,k_r}^- \cdot v_+ | (k_1 + 1) + \ldots + (k_r + 1) \leq s \rangle$$

$$\bar{B}_{i,s} := \langle (x_{i,k_1}^-)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x_{i,k_r}^-)^{y_r} \cdot v_+ | t_1(k_1 + 1) + \ldots t_r(k_r + 1) \leq s \rangle, \quad i \in I \backslash \{m+1\}$$

Лемма 3.3.3. *Если $\bar{B}_{m+1,p} = \bar{B}_{m+1,p+1}$, то и $\bar{B}_{m+1,p} = \bar{B}_{m+1,p+k}$ для произвольного натурального $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \bar{B}_{m+1,p}$. Покажем сначала, что любой вектор из $\bar{B}_{m+1,p+k}$ можно представить как образ $\bar{B}_{m+1,p}$ при действии картановской подалгебры $\mathfrak{h} = \langle h_{m+1,k}, h_{m+2,k} | k \in Z_+ \rangle$, именно $\bar{B}_{m+1,p+k} \subset \mathfrak{h} \cdot \bar{B}_{m+1,p}$. При $k = 1$ этот факт вытекает из условия леммы. Пусть теперь $k = 2$. Нам потребуется следующее соотношение

$h_{i,1} \cdot x_{j,n}^- \cdot v_+ = x_{j,n}^- \cdot h_{i,1} \cdot v_+ + [h_{i,1}, x_{j,n}^-] \cdot v_+ = x_{j,n}^- \cdot h_{i,1} \cdot v_+ + [h_{i,0}, x_{j,n+1}^-] \cdot v_+$
$+ a_{i,j}/2(h_{i,0} x_{j,n}^- + x_{j,n}^- h_{i,0}) \cdot v_+ = d_{i,1} x_{j,n}^- \cdot v_+ + a_{i,j} x_{j,n+1}^- \cdot v_+ +$

$a_{i,j}/2(h_{i,0}x^-_{j,n} + x^-_{j,n}h_{i,0}) \cdot v_+ = a_{i,j}x^-_{j,n+1} \cdot v_+ + (d_{i,1} + (a_{i,j}/2)(a_{i,j} + 2d_{i,0}))x^-_{j,n} \cdot v_+.$

Используя это соотношение докажем лемму. Пусть $a \in \bar{B}_{m+1,p+2}$, тогда $a = \sum_{s=1}^r x^-_{i_s,k_s} b_s v_+$. Представим элемент a в виде

$$a = \sum_{s=1}^{r} a^{-1}_{i_s-1,i_s}[h_{i_s-1,1}, x^-_{i_s,k_s-1}]b_s v_+ \tag{3.3.5}$$

Используя несколько раз приведённые выше два коммутационных соотношения, можно представить элемент a в виде суммы элементов из $\bar{B}_{m+1,p+1}$ и произведения $x^-_{m+1,1}$ и элемента из $\bar{B}_{m+1,p+1}$. Так как каждый элемент из $\bar{B}_{m+1,p+1}$ содержится в $\bar{B}_{m+1,p}$ последовательно получаем, что $a \in \bar{B}_{m+1,p+1}$ и, следовательно, в силу условия леммы, $a \in \bar{B}_{m+1,p}$. Лемма доказана. △ ☐

Пусть теперь $x^-(s) = x^-_{1,k_1} \dots x^-_{1,k_r}, k_1 + \dots + k_r = s, k_r < \dots < k_1$. Следующая лемма, по существу, эквивалентна предыдущей, но мы докажем её независимо.

Лемма 3.3.4. *Если вектор $x^-(p+1)v_+ \in \bar{B}_{m+1,p}$, то и вектор $x^-(p+k+1)v_+ \in \bar{B}_{m+1,p}$ для произвольного $k \in Z_+$.*

Доказательство. Доказательство проведём по индукции. В доказательстве мы будем использовать картановские образующие $h_{i,1}, h_{i,2}, i \in I$. Индукцию проведём по k. При $k = 1$ утверждение является следствием условия леммы. Предположим, что утверждение справедливо при $k = m$, докажем его справедливость при $k = r + 1$. Идея доказательства основана на том, что мы покажем, что: 1) картановские образующие переводят векторное пространство $\bar{B}_{1,p+r}$ в себя; 2) каждый моном PBW базиса, указанного в формулировке вида, лежащий в $\bar{B}_{m+1,p+r+1}$ может быть получен в виде линейной комбинации образов мономов PBW базиса, указанного в формулировке теоремы вида, при действии картановских образующих $h_{i,1}, h_{i,2}, i \in I$, а также элементов PBW базиса, уже лежащих в $\bar{B}_{m+1,p+r}$. Отметим, что из пунктов 1), 2) легко вытекает доказываемое утверждение. Действительно, так как каждый моном из $\bar{B}_{m+1,p+r+1}$, указанного вида, может быть получен действием картановских образующих $h_{i,1}, h_{i,2}$ на мономы из $\bar{B}_{p+r}$, указанного вида, и комбинацией мономов из $\bar{B}_{p+r}$, то, следовательно лежит в $\bar{B}_{m+1,p+r}$. Но по индукционному предположению мономы из $\bar{B}_{m+1,p+r}$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций мономов из $\bar{B}_{m+1,p}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать пункты 1), 2), которые проверяются по индукции с использованием коммутационных соотношений в янгиане.

Пусть сначала $p = 1$. Тогда получаем, что $x^-(1) \in B_{m+1,1}$. Следовательно, $x^-(1) = \sum_{k=0}^m \alpha_{0,k} x^-_0(\bar{k})$. Прокоммутируем левую и правую части с элементом $h_{m+2,1}$. При этом степени мономов, увеличатся на 1, а число этих мономов также вообще говоря увеличится. Сумма этих мономов является линейной комбинацией мономов меньших степеней (степени $p + k$), каждый из которых по индукционному предположению также является линейной комбинацией мономов степени p. Лемма доказана. ☐ ☐

Лемма 3.3.5. *1) Имеют место строгие вложения*
$B_{i,k} \subset B_{i,k+1}, \quad \forall k < n_i, \quad k \geq 0, \quad i \in I;$
2) $B_{i,n_i} = B_{i,n_i+1} = \dots$.

Доказательство. Случай $i \in I \backslash \{m+1\}$ вытекает из результатов, относящихся к представлениям янгиана $Y(\mathfrak{sl}(2))$ (см. [24], [75]). Пункт 1) следует, по существу, из определений. Пункт 2) вытекает из предыдущей леммы в случае $i = m + 1$. ☐

3.3.4 Теорема о классификации

Сформулируем и докажем основной результат данной главы. Главный результат главы – следующая теорема.

Теорема 3.3.2. *1) Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(m,n))$-модуль V является модулем со старшим весом d :$V = V(d)$.*
2) Модуль $V(d)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены P_i^d, $i \in \{1, 2, \ldots, m, m+2, \ldots m+n+1\} = I \backslash \{m+1\}$, а также многочлены P_{m+1}^d, Q_{m+1}^d, удовлетворяющие следующим условиям:
a) все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными 1;
b)

$$\frac{P_i^d(u + a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I \backslash \{m+1\}, \tag{3.3.6}$$

$$\frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} = 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k} \cdot u^{-k-1}. \tag{3.3.7}$$

Здесь a_{ii} – матричный элемент симметричной матрицы Картана супералгебры Ли $A(m-1, n-1)$.

Доказательство. Пункт 1) теоремы уже доказан. Выведем пункт 2) теоремы из доказанных выше лемм. Покажем сначала необходимость, то есть предполагая, что модуль $V(d)$ конечномерен, покажем, что существуют упомянутые в условии теоремы многочлены, удовлетворяющие условиям а), б) теоремы.
По существу, мы рассмотрим сначала частный случай когда супералгебра $\mathfrak{g} = A(m,n)$ совпадает с $A(0,1)$. Точнее говоря, рассмотрим вложение $A(0,1) \to A(m,n)$, индуцированное вложением корней $\alpha_1 \to \alpha_{m+1}, \alpha_2 \to \alpha_{m+2}$. Это вложение индуцирует вложение супералгебр Хопфа $Y(A(0,1)) \to Y(A(m,n))$, задаваемое вложением корневых образующих, индуцированное вложением корней. Первая часть доказательства, на самом деле, будет относиться к частному случаю неприводимого представления янгиана $Y(A(0,1))$ с весом $\bar{d}(u) = (d_{m+1}(u), d_{m+2}(u))$. После этого мы сведём общий случай к рассмотренному частному случаю.

Пусть, как и выше, $x_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k}^- \cdot u^{-k-1}, i \in I$. Из доказанных выше лемм вытекает, что $x_i^-(u) \cdot v_+ = \sum_{s=0}^{N} \beta_s^i(u) \cdot v_{i,s}$, где $\{v_{i,s}\}$ образуют базис в $\bar{B}_{i,N}, i \in I$. Ниже мы получим явный вид для $\beta_s^i(u)$. Для краткости мы будем писать $\beta_s(u)$ вместо $\beta_s^{m+2}(u)$. Здесь следует отметить, что все результаты, относящиеся к чётным корневым образующим можно получить рассматривая вложения $\mathfrak{sl}(2)$-троек. Эти результаты хорошо известны, поскольку могут быть сведены к результатам, относящимся к описанию неприводимых представлений янгиана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, полученным впервые в [75] (см. также [76], [24], [25], [107]). Поэтому, мы подробно остановимся на доказательстве соотношения (3.3.7), относящегося к нечётной части янгиана $Y(A(m,n))$.

Нам потребуются соотношения (3.1.15) в следующем частном случае:

$$[h_{m+1}(u), x_{m+2}^-(t)] =$$

$$\frac{1}{2(u-t)}((h_{m+1}(u)(x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u)) + (x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u))h_{m+1}(u))); \tag{3.3.8}$$

$$[h_{m+1}(u), x_{m+1}^-(t)] = 0. \tag{3.3.9}$$

Пусть $v_{i,k} = x^-_{i,k}v_+$. Тогда, в силу леммы 3.3.4, имеет место следующее представление:

$$x^-_k(u)v_+ = \sum_{i=0}^{N} \beta^k_i(u)v_{k,i}. \tag{3.3.10}$$

Для краткости будем использовать обозначение:

$$\beta_i(u) = \beta^{m+2}_i(u). \tag{3.3.11}$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^-_{m+2,k}u^{-k-1}v_+ = \sum_{k=0}^{N} x^-_{m+2,k}u^{-k-1}v_+ + \sum_{k=N+1}^{\infty} x^-_{m+2,k}u^{-k-1}v_+ =$$

$$\sum_{k=0}^{N} x^-_{m+2,k}u^{-k-1}v_+ + \sum_{k=0}^{N} u^{-N-1}\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i_k u^{-i-1}v_{m+2,k}.$$

Обозначим

$$\varphi_k(u) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i_k u^{-i-1}, \tag{3.3.12}$$

$$\tilde{\varphi}_k(u) = u^{-k-1} + \varphi_k(u). \tag{3.3.13}$$

Перепишем соотношение (3.3.10) в следующей форме:

$$x^-_{m+2}(u)v_+ = \sum_{i=0}^{N} \beta_i(u)v_{m+2,i} = \sum_{i=0}^{N}(u^{-i-1} + u^{-N-1}\varphi_i(u)v_{m+2,i}). \tag{3.3.14}$$

Тогда из равенства (3.3.14) следует, что

$$x^-_{m+2,N+k+1}v_+ = \sum_{i=0}^{k} \varphi^k_i x^-_{m+2,i}v_+. \tag{3.3.15}$$

Подействуем на левую и правую части равенства (3.3.15) элементом $h_{m+1,1}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых линейно независимых векторах получаем следующие соотношения:

$$\varphi^{i+1}_k - \varphi^i_{k-1} - \varphi^i_N \cdot \varphi^0_k = 0, \quad k \geq 0, \tag{3.3.16}$$

$$\varphi^{i+1}_0 - \varphi^i_N \cdot \varphi^0_0 = d_{m+1,N+i+1} - \textstyle\sum_{j=0}^{N} \varphi^i_j \cdot d_{m+1,j}.. \tag{3.3.17}$$

$$\varphi^{i+1}_k = -d_{m+1,0}\varphi^i_{k-1} + (\tfrac{1}{2} + d_{m+1,0})\varphi^{i-1}_k, i \geq 1, \tag{3.3.18}$$

$$\varphi^{k+1}_0 = -\tfrac{1}{2}d_{m+1,0}\varphi^k_0. \tag{3.3.19}$$

Или, эквивалентные соотношения

$$\varphi^{i+1}_k = \varphi^i_{k-1} + \varphi^i_N \cdot \varphi^0_k, \tag{3.3.20}$$

$$\varphi^{k+1}_0 = 0. \tag{3.3.21}$$

Введём следующие обозначения. Пусть

$$\varphi_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_i^k \cdot u^{-k-1}, \tag{3.3.22}$$

$$\delta_i(u) = 1 + u^{i-N}\varphi_i(u), \tag{3.3.23}$$

$$\bar{d}_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k}u^{-k-1}, i \in \{1, \dots, n+m+1\}. \tag{3.3.24}$$

Отметим, что соотношения (3.3.20) – (3.3.17)легко можно переписать в терминах производящих функций, правда, эта явная формула нам здесь не потребуется.

$$u\varphi_i(u) - \varphi_i(u) = \varphi_N(u) \cdot \varphi_i^0, \quad k \geq 0, \tag{3.3.25}$$

$$u\varphi_0(u) - \varphi_N(u) \cdot \varphi_0^0 = u^N \cdot d_{m+1}(u) - \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(u) \cdot \bar{d}_{m+1}(u) \cdot u^{j+1}. \tag{3.3.26}$$

Легко видеть, что из соотношений (3.3.20), (3.3.17), учитывая (3.3.23), вытекает равенство:

$$\delta_i(u) = \delta_N(u) \left(1 - \sum_{j=i}^{N} \varphi_j^0 u^{j-N-1} \right). \tag{3.3.27}$$

Пусть

$$\beta_i(u) = u^{-i-1}\delta_i(u), i = 1, 2, \dots, N. \tag{3.3.28}$$

Тогда нетрудно показать, что для некоторых матриц
$A^k(u) = (A_{i,j}^k)_{i,j=0}^N(u) \in M_{N+1}(C[[u^{-1}]]), \quad k, r = m+1, m+2$ имеет место равенство:

$$h_r(u)x_k^-(t)v_+ = \sum_{0 \leq i,j \leq N} A_{i,j}^r(u)\beta_j^r(t)v_{k,i}. \tag{3.3.29}$$

Рассматривая совместно соотношения (3.3.29) и (3.3.8-3.3.9) получаем соотношения

$$\sum_{0 \leq i,j \leq N} A_{i,j}^{m+1}(u)\beta_j(t)v_{m+2,i} = x_{m+2}^-(t)\bar{d}_{m+1}(u)v_+ +$$

$$\frac{1}{2(u-t)}(h_{m+1}(u)(x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u)) + (x_{m+2}^-(t) - x_{m+2}^-(u))h_{m+1}(u))v_+; \tag{3.3.30}$$

$$\sum_{0 \leq i,j \leq N} A_{i,j}^{m+1}(u)\beta_j(t)v_{m+1,i} = x_{m+1}^-(t)\bar{d}_{m+1}(u)v_+. \tag{3.3.31}$$

Полученные соотношения, в силу (3.3.10) принимают следующий вид

$$\sum_{0 \leq i,j \leq N} A_{i,j}^{m+1}(u)\beta_j(t)v_{m+2,i} = \bar{d}_{m+1}(u)(\sum_{i=0}^{N} \beta_i(u)v_{m+2,i}) +$$

$$\frac{1}{2(u-t)}(\bar{d}_{m+1}(u)(\sum_{i=0}^{N}(\beta_i(t) - \beta_i(u))v_{m+2,i}) +$$

$$\sum_{0 \leq i,j \leq N} A_{i,j}^{m+1}(u)(\beta_j(t) - \beta_j(u))v_{m+2,i})); \tag{3.3.32}$$

$$\sum_{0 \leq i,j \leq N} A_{i,j}^{m+1}(u)\beta_j(t)v_{m+1,i} = \bar{d}_{m+1}(u)(\sum_{i=0}^{N} \beta_i(t)v_{m+1,i}). \tag{3.3.33}$$

Отметим, что полученные соотношения можно переписать как линейные рекуррентные соотношения. Приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах $v_{m+2,i}$, получаем, что из соотношений (3.3.33) вытекает следующее равенство:

$$\sum_{j=0}^{N} A_{i,j}^{m+1}(u)(\beta_j(t) - \tfrac{1}{2(u-t)}(\beta_j(t) - \beta_j(u)))v_{m+2,i} =$$

$$\bar{d}_{m+1}(u)((\beta_i(u)v_{m+2,i}) + \tfrac{1}{2(u-t)}((\beta_i(t) - \beta_i(u)))v_{m+2,i}. \tag{3.3.34}$$

Отметим, следующий легко проверяемый факт. Можно подобрать такое множество констант $u_0, \mu_0, \ldots, \mu_N$, таких, что сумма $\sum_{i=0}^{N} \mu_i \beta_i(u_0)$ отлична от нуля. Положим в равенстве (3.3.34) $u = u_0$ и умножим равенство на μ_i. Складывая полученные равенства (для $0 \leq i \leq N$ мы приходим к равенству из которого можно явно выразить $d_{m+1}(u)$. Именно, мы получаем, что выполняется равенство

$$\bar{d}_{m+1}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{N}(a_i u + b_i)\beta_i(u)}{\sum_{j=0}^{N}(c_j u + d_j)\beta_j(u)} \tag{3.3.35}$$

для некоторых постоянных $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 0, \ldots, N$.

Из соотношения (3.3.35), в силу соотношений (3.3.27), (3.3.28), вытекает доказываемое равенство (3.3.7).

Аналогично проведённым выше рассуждениям можно доказать, что и соотношение (3.3.6) выводится из соотношений вида (3.3.30) для других значений индекса k, соответствующего другим простым (чётным) корням суперагебры Ли $A(m, n)$. Правда, как отмечено выше, соотношение (3.3.6) следует, по существу, из результатов работ [75], [25].

Теперь утверждение теоремы получается стандартными рассуждениями, в силу того факта, что вложения суперагебр $\mathfrak{sl}(1, 2)$ и $\mathfrak{sl}(2)$ являются морфизмами суперагебр Хопфа.

Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность также легко выводится из полученных формул фактически обращением проведённых рассуждений. Действительно, пусть $\bar{d}_{m+1}(u)$ удовлетворяет соотношениям (3.3.6 – 3.3.7). Покажем, что простой модуль $V(d)$ конечномерен. Мы, используя теорему 3.2.1, получим оценку размерности этого модуля. Будем действовать на старший вектор v_+ мономами вида $x^-(n) = x^-_{1,k_1} \ldots x^-_{1,k_r}, k_1 + \ldots + k_r = n, k_r < \cdots < k_1$. Пусть, в силу (3.3.7), $d_{m+1}(u)$ является отношением двух многочленов. Покажем, что в силу коммутационных соотношений лишь конечное число векторов вида $x^-(n)v_+$ будут линейно независимы. Мы получим несколько больше, именно, покажем, что размерность модуля $V(\bar{d})$ ограничена сверху числом $2^N, N = n_1 + \ldots + n_k$, а $n_i = deg(P_i(u)$ – степени многочленов, задающих старший вес. Пусть $\bar{d}_{m+1}(u) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k} \cdot u^{-k-1}$, причём $\bar{d}_{m+1}(u) = \dfrac{P^d_{m+1}(u)}{Q^d_{m+1}(u)}$, а многочлены, стоящие в числителе и знаменателе не имеют общих множителей. Построим неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1, 1))$-модуль $V(\bar{d})$ со старшим весом $\bar{d}(u)$. Покажем, что его размерность ограничена сверху числом 2^M, где $N = n_{d+1} = deg(P_{m+1}(u)) = deg(Q_{m+1}(u))$. Рассмотрим линейную оболочку

$$M_1 = \langle \{v_+; x^-(r_1) \ldots x^-(r_s) \cdot v_+ | 1 \leq r_s \leq \ldots \leq r_1 \leq N\} \rangle. \tag{3.3.36}$$

Покажем, что

$$V(\bar{d}) \subseteq M_1. \tag{3.3.37}$$

Достаточно показать, что

$$x^+_k(u) \cdot x^-(n) = 0, \forall n > N. \tag{3.3.38}$$

Заметим, что (3.3.38) следует из следующего коммутационного соотношения в янгиане, являющегося следствием соотношения (4.8.18), (3.3.7):

$$[x^+_k(u), x^-_{m+1}(v)]v_+ = \delta_{k,m+1} \frac{h_{m+1}(u) - h_{m+1}(v)}{u - v} v_+ =$$
$$\delta_{k,m+1} \frac{P_{m+1}(u)Q_{m+1}(v) - P_{m+1}(v)Q_{m+1}(u)}{Q_{m+1}(u)Q_{m+1}(v)(u - v)} v_+. \tag{3.3.39}$$

Аналогично показывается, что размерности соответствующих $Y(\mathfrak{sl}(2))$ - модулей $V(d_k)$ со старшим весом $d_k(u)$ ограничены числами 2^{n_k}, где $n_k = deg(P_k(u)$ – степень многочлена $P_k(u)$. Поскольку вложения янгианов $Y(\mathfrak{sl}(2))$, $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$ в янгиан $Y(A(m,n))$ являются морфизмами супералгебр Хопфа, они индуцируют структуру $Y(A(m,n))$-модуля на каждом из модулей $V(d_k)$, а также на их тензорном произведении: $V(d_1) \otimes \ldots \otimes V(d_{m+n})$. Несложно проверяется, что $V(\bar{d}) \subseteq V(d_1) \otimes \ldots \otimes V(d_{m+n})$ и является подмодулем тензорного произведения модулей. Отсюда следует конечномерность модуля $V(\bar{d})$ и оценка его размерности. Достаточность доказана.

Теорема доказана. □

3.3.5 Сравнение с результатами Р.Б. Жанга

В этом пункте мы выведем теорему 3.3.4 о классификации неприводимых конечномерных представлений янгиана $Y(A(m,n))$ из результатов работы [275], используя результаты работы [160]. Коротко опишем схему доказательства. Для удобства читателя приведём необходимые результаты из работ [274], [275], [160].

Напомним, что представление $V(\mu)$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ называется представлением со старшим весом (см. [275]) $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{m+n}(x))$, $\mu_i(x) = (-1)^{|i|} + \sum_{k>0} \mu_{i,k} x^{-k}$, если найдётся такой вектор v_+ (называемый старшим вектором), что

$$t_{ij}^{(k)} v_+ = 0, \qquad 1 \leq j < i \leq m+n, k \in N, \tag{3.3.40}$$

$$t_{ii}^{(k)} v_+ = \mu_{i,k} v_+, \quad 1 \leq i \leq m+n, k \in N. \tag{3.3.41}$$

Отметим, что условия (3.3.40)– (4.5.45), бывает удобно переписать как условие для действия производящих функций образующих $t_{ij}(x) = \delta_{i,j} + \sum_{k>0} t_{ij}^{(k)} u^{-k-1}$ в следующей форме

$$\begin{aligned} t_{ij}(x) v_+ &= 0, \qquad 1 \leq j < i \leq m+n, \\ t_{ii}(x) v_+ &= \mu_i(x) v_+, \quad 1 \leq i \leq m+n. \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Здесь $\{t_{ij}^{(k)} : 1 \leq i,j \leq m+n, k \in N\}$ – система образующих янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ полной линейной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$ (см. [160], [275]), удовлетворяющих следующей системе определяющих соотношений:

$$[t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s)}] = (-1)^{\bar{i}\bar{j}+\bar{i}\bar{k}+\bar{j}\bar{k}} \sum_{p=0}^{min(r,s)-1} (t_{kj}^{(p)} t_{il}^{(r+s-1-p)} - t_{kj}^{(r+s-1-p)} t_{il}^{(p)}), \tag{3.3.43}$$

где $\bar{i}$ – чётность индекса i: $\bar{i} = 0$, для $1 \leq i \leq m$, $\bar{i} = 1$, для $m+1 \leq i \leq m+n$, а квадратные скобки обозначают суперкоммутатор.

Определим матрицу, матричные элементы которой – порождающие функции образующих:

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{m+n} t_{ij}(u) \otimes E_{ij} (-1)^{\bar{j}(\bar{i}+1)},$$

где E_{ij} – стандартная элементарная матрица (матричная единица).

Предложение 3.3.2. *(см. [275]) Пусть L – представление янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ со старшим весом $\mu(u) = (\mu_1(u), \ldots, \mu_{m+n+1}(u))$. Тогда каждый коэффициент квантового определителя $qdet(T(u))$ действует на L как умножение на скаляр, определённый формулой:*

$$qdet(T(u)) \mid_L = \mu_1(u) \ldots \mu_{m+n+1}(u-m-n)$$

Следующий результат доказан В.О. Тарасовым.

Предложение 3.3.3. *(см. [217], [75], [76]) Неприводимое представление $L(\mu) = L(\mu_1(u), \mu_2(u))$ старшего веса μ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(2))$ конечномерно, тогда и только тогда, когда существует такой полином $P(u)$ от u со старшим коэффициентом 1, что*

$$\frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)} = \frac{P(u+1)}{P(u)}. \tag{3.3.44}$$

Приведём также результат Жанга, описывающий неприводимые конечномерные представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}(1,1))$.

Предложение 3.3.4. *(см. [274]) Неприводимое представление $L(\mu) = L(\mu_1(u), \mu_2(u))$ старшего веса μ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(1,1))$ конечномерно тогда и только тогда когда существуют взаимно простые многочлены от u^{-1} такие, что*

$$\frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)} = \frac{P_1(u)}{P_2(u)}, \tag{3.3.45}$$

$P_i(u) = (-1)^{i+1} + o(u^{-1})$. Здесь $\mu_i(u) = (-1)^{\bar{i}} + \sum_{k>0} \mu_{i,k} \cdot u^{-k-1}$ – компоненты старшего веса представления $L(\mu_1(u), \mu_2(u))$, а $\bar{1} = 0, \bar{2} = 1$.

Соотношение (3.3.44) объясняет следующее обозначение, широко используемое в настоящее время (см. [217]). Для двух формальных рядов $\lambda(u), \mu(u)$ по u^{-1} пишут

$$\lambda(u) \to \mu(u), \tag{3.3.46}$$

если существует такой полином $P(u)$ от u со старшим коэффициентом 1, что выполняется соотношение (3.3.44) для $\mu_1(u) = \lambda(u), \mu_2(u) = \mu(u)$.

Справедлив следующий результат Р.Б. Жанга.

Теорема 3.3.3. *(см. [275]) Неприводимый $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ – модуль $V(\mu)$ со старшим весом μ конечномерен если и только если его старший вес μ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{gathered}\frac{\mu_a(x)}{\mu_{a+1}(x)} = \frac{P_a(x + (-1)^{|a|})}{P_a(x)},\\ \frac{\mu_m(x)}{\mu_{m+1}(x)} = \frac{\tilde{Q}_m(x)}{Q_m(x)},\end{gathered} \tag{3.3.47}$$

где $1 \leq a < n+m, a \neq m$, $\tilde{Q}_m(x) = \prod_{i=1}^{K_m}(1 + \frac{r_1^{(i)}}{x})$, $Q_m(x) = -\prod_{i=1}^{K_m}(1 + \frac{r_2^{(i)}}{x})$ – взаимно простые многочлены, $P_a(x) = \prod_{i=1}^{K_m}(x + p_a^{(i)})$, $1 \leq a < N + M, a \neq M$. Здесь $|a| = 0$ для $1 \leq a \leq m$ и $|a| = 1$ для $m < a < m+n$.

Другими словами, из сформулированной теоремы следует, что $\mu_i(u) \to \mu_{i+1}(u)$ для $1 \leq i < m$ и $\mu_i \circ s(u) \to \mu_{i+1} \circ s(u)$ для $m < i \leq m+n-1$, где $s(u) = -u$, $f \circ g$ обозначает композицию функций f и g.

Напомним также результат L. Gow ([160]), построившей изоморфизм между двумя реализациями янгиана супералгебры $A(m,n)$.

Предложение 3.3.5. *(см. [159], предложение 9.1). Пусть $Z_{m|n}$ обозначает центр янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$. Тогда для $m \neq n$ имеет место изоморфизм*

$$Y(\mathfrak{gl}(m,n)) \cong Z_{m|n} \otimes Y(\mathfrak{sl}(m,n)) \tag{3.3.48}$$

Докажем теперь основной результат этого параграфа

Теорема 3.3.4. *Неприводимое представление* $L(\Lambda_1(u),\dots,\Lambda_{m+n-1}(u))$ *янгиана* $Y(\mathfrak{sl}(m,n)) = Y(A(m-1,n-1))$ *конечномерно тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены* $P_1(u),\dots,P_{m-1}(u)$*,*
$P_{m+1}(u),\dots,P_{m+n-1}(u),P_m(u),Q_m(u)$ *от* u *со старшим коэффициентом* 1*, что*

$$\Lambda_i(u) = \frac{P_i(u+a_{ii}/2)}{P_i(u)}, \quad i \neq m;$$
$$\Lambda_m(u) = \frac{P_m(u)}{Q_m(u)}. \tag{3.3.49}$$

Здесь, как и выше a_{ii} *– матричный элемент симметричной матрицы Картана супералгебры Ли* $A(m-1,n-1)$ *(см. пункт 3.3.1 и [140]).*

Доказательство. Пусть представление $L(\Lambda_1(u),\dots,\Lambda_{m+n-1}(u))$ янгиана $Y(A(m-1,n-1))$– неприводимо и конечномерно. Оно, в силу, предложения 3.3.5 может быть продолжено до некоторого неприводимого конечномерного представления $L(\mu_1(u),\dots,\mu_{m+n}(u))$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$. Обратно, пусть представление $L(\mu_1(u),\dots,\mu_{m+n}(u))$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ неприводимо и конечномерно. Заметим, что для $i \in \{1,\dots,m+n-1\}\backslash\{m\}$ существуют такие формальные ряды $f_1(u),\dots,f_{m-1},f_{m+1},\dots,f_{m+n-1}(u)$, что

$$f_i(u)\mu_i(u) = (1+\alpha_{i,1}u^{-1})\dots(1+\alpha_{i,k}u^{-1}), i \neq m, i \neq m+1.$$

Этот факт хорошо известен для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(2))$ (см. предложение 3.3.3), а также для янгиана $Y(\mathfrak{gl}(1,1))$ (см. предложение 3.3.4).

Выведем теперь доказываемое утверждение из предложений 3.3.4, 3.3.5. Действительно, действие элементов центра в неприводимом представлении янгиана сводится к умножению на скаляр. Из предложения 3.3.4, в силу (3.3.48) (предложение 3.3.5) следует, что ограничение каждого представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ на янгиан $Y(\mathfrak{sl}(m,n)) = Y(A(m-1,n-1))$ остаётся неприводимым. И наоборот каждое неприводимое представления янгиана $Y(A(m-1,n-1))$ можно получить при помощи такого ограничения. Действительно, поскольку каждое представление янгиана $Y(A(m-1,n-1))$ можно, в силу (3.3.48), продолжить до представления янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m,n))$ так, что элементы центра действовали как умножения на скаляры. Но это ограничение зависит лишь от отношений $\frac{\mu_i(u)}{\mu_{i+1}(u)}$. Осталось заметить, что в силу леммы 8.2 работы [160] имеют место равенства

$$h_i(u) = d_i(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i)) \cdot d_{i+1}(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))^{-1}, \tag{3.3.50}$$

где

$$d_j(u) = t_{jj}(u) - \sum_{k,l<j} t_{jk}(u)(|T(u)_{\{1,2,\dots,j-1\},\{1,2,\dots,j-1\}}|^{-1}_{lk} t_{lj}(u). \tag{3.3.51}$$

Здесь, как обычно $|X|_{ij}$ обозначает квазидетерминант (см.[160]). В силу равенств (4.5.46) получаем, что, если v_+ – старший вектор, то

$$h_i(u)v_+ = \frac{\mu_i(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{\mu_{i+1}(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}v_+ =$$
$$\mu_{i+1}(u+\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))^{-1}\mu_i(u+\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i)) \cdot v_+. \tag{3.3.52}$$

Отметим, что последнее равенство доказывается прямой проверкой с использованием соотношений (3.3.50) – (3.3.51). Действительно, все члены кроме первого слагаемого переводят старший вектор в 0: $d_i(u)v_+ = t_{ii}(u)v_+$. С другой стороны, действие производящей функции $h_i(u)$ на старшем векторе v_+ $Y(A(m-1,n-1))$-модуля $L(\lambda_1(u),\ldots,\lambda_{m+n-1}(u))$ определяется формулой:

$$h_i(u)v_+ = \Lambda_i(u)v_+.$$

Отметим теперь, что в силу теоремы 4.5.1 и формулы (3.3.52)

$$\Lambda_i(u) = \frac{\mu_i(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{\mu_{i+1}(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{P_i((u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))+(-1)^{|i|})}{P_i(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{\tilde{P}_i(u+a_{ii})}{\tilde{P}_i(u)},$$

$$\Lambda_m(u) = \frac{\mu_m(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{\mu_{m+1}(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{P_m(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))}{Q_m(u+\frac{1}{2}(-1)^{\bar{i}}(m-i))} = \frac{\tilde{P}_m(u)}{\tilde{Q}_m(u)}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. *а) Заметим сначала, что теорема А.4.1 является, с некоторыми оговорками, аналогом для янгианов результата В.Г. Каца о классификации неприводимых конечномерных представлений базисных супералгебр Ли (см. [180]). В этом случае степени многочленов, участвующих в формулировке теоремы А.4.1 являются аналогами компонент старшего веса представления базисной супералгебры Ли.*
б) Можно показать, что все неприводимые конечномерные модули янгиана $Y(A(m,n))$ являются неприводимыми подмодулями тензорного произведения простейших фундаментальных модулей. На этом пути, по аналогии с результатами работы [180] (а также имея ввиду аналогию со случаем модулей над янгианом простой алгебры Ли), возможно определение и вычисление характеров представлений янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Для этого, вероятно, придется использовать новые подходы, в основе которых должны лежать способы описания неприводимых подмодулей в тензорных произведениях неприводимых модулей.

Замечание 2. *Отметим также, что интерес представляет обобщение доказанной выше теоремы на представления янгианов других базисных и странных супералгебр Ли. В следующей главе проведённое выше доказательство частично обобщается на случай классификации неприводимых конечномерных представлений янгианов супералгебр Ли типа $B(m,n), C(n), D(m,n)$. Интересным вопросом является и прояснение связи между неприводимыми представлениями янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ и представлениями вырожденной аффинной алгебры Гекке (или его правильно определённого супераналога). Другими словами, получить конструкцию аналога функтора Дринфельда (см. [26], [84]).*

3.4 Представления янгиана супералгебры Ли типа $A(n,n)$

Здесь мы исследуем представления янгиана $Y(A(n,n))$ супералгебры Ли $A(n,n)$. Этот случай особенно важен для квантовой теории суперструн. Поэтому мы его рассмотрим отдельно. Кроме того есть дополнительные сложности в рассмотрении случая $m = n$. В частности, в этом случае картановские образующие уже не являются линейно независимыми, что несколько затрудняет исследование и приносит дополнительные технические трудности.

3.4.1 Основные определения

Напомним, что базисная супералгебры Ли $A(n,n)$ имеет ранг $2n$ и размерность $4n^2+4n+2$. Число её простых корней равно $2n-1$ и отличается от ранга. Это обстоятельство привносит некоторые технические сложности в исследования, связанные с этой супералгеброй Ли. Супералгебра Ли $A(n,n)$ порождается образующими $h_i, x_i^{\pm}, i \in \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n+1\}$. Её симметризованная матрица Картана имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Система определяющих соотношений следующая

$$[h_i, h_j] = 0,$$

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n+1\}; \tag{3.4.1}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, i, j \in I; \tag{3.4.2}$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, i, j \in I; \tag{3.4.3}$$

$$[x_{n+1}^{\pm}, x_{n+1}^{\pm}] = 0; \tag{3.4.4}$$

$$[x_i^{\pm}, x_j^{\pm}] = 0; |i-j| > 1; \tag{3.4.5}$$

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0, |i-j| = 1, i, j \in I; \tag{3.4.6}$$

$$[[x_n^{\pm}, x_{n+1}^{\pm}], [x_{n+1}^{\pm}, x_{n+2}^{\pm}]] = 0. \tag{3.4.7}$$

Приведём также определение янгиана $Y(A(n,n))$.

Определение 3.4.1. *Янгиан $Y(A(n,n))_\hbar$ – это супералгебра (над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$), порождённая образующими $h_{i,k}, x_{i,k}^{\pm}, i \in I = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}, k \in \mathbb{Z}_+$ ($p(x_{n+1,k}^{\pm}) = 1, p(x_{i,k}^{\pm}) = p(h_{j,k}) = 0, i \in I \backslash \{n+1\}, j \in I, k \in \mathbb{Z}_+$), которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad i, j \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \tag{3.4.8}$$

$$[x_{i,k}^+, x_{j,l}^-] = \delta_{i,j} h_{i,k+l}, \quad i, j \in I, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+; \tag{3.4.9}$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^{\pm}] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^{\pm}] \pm (a_{ij}/2)\hbar(h_{i,k} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} h_{i,k}),$$

$$i, j \in I, k, l \in \mathbb{Z}_+; i \neq n \quad \textit{или} \quad j \neq n \tag{3.4.10}$$

$$[h_{n+1,k+1}, x_{n+1,l}^{\pm}] = 0; \tag{3.4.11}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,l}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,l}^{\pm}, i, j \in I, l \in \mathbb{Z}_+; \tag{3.4.12}$$

$$[x_{i,k+1}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}] = [x_{i,k}^{\pm}, x_{j,l+1}^{\pm}] \pm (a_{ij}/2)\hbar(x_{i,k}^{\pm} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} x_{i,k}^{\pm}),$$

$$i, j \in I, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+; i \neq n \quad \textit{or} \quad j \neq n; \tag{3.4.13}$$

$$[x_{n+1,k}^{\pm}, x_{n+1,l}^{\pm}] = 0; \tag{3.4.14}$$

$$[x_{i,k_1}^{\pm}, [x_{i,k_2}^{\pm}, x_{j,k_3}^{\pm}]] + [x_{i,k_2}^{\pm}, [x_{i,k_1}^{\pm}, x_{j,k_3}^{\pm}]] = 0,$$

$$|i-j| = 1, \quad i, j \in I, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_+; \tag{3.4.15}$$

$$[x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}] = 0, \quad |i-j| > 1; \tag{3.4.16}$$

$$[[x^{\pm}_{n,r}, x^{\pm}_{n+1,0}], [x^{\pm}_{n+1,0}, x^{\pm}_{n+2,s}]] = 0. \tag{3.4.17}$$

3.4.2 Теорема о классификации

Сформулируем основной результат этого параграфа — теорему о классификации (см [256]). Пусть $n \geq 1$.

Теорема 3.4.1. *1) Каждый простой конечномерный $Y(A(n,n))$-модуль V является модулем со старшим весом d :$V = V(d)$.*
2) Простой модуль $V(d)$ является конечномерным тогда и только тогда когда существуют такие полиномы P^d_i, $i \in \{1, 2, \dots, n, n+2, \dots 2n\} = I \backslash \{n+1\}$, и полиномы P^d_{n+1}, Q^d_{n+1}, такие, что:
a) их старшие коэффициенты равны 1;
b)

$$\frac{P^d_i(u + \frac{a_{ii}}{2})}{P^d_i(u)} = 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I \backslash \{n+1\}, \tag{3.4.18}$$

$$\frac{P^d_{n+1}(u)}{Q^d_{n+1}(u)} = 1 + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{n+1,k} \cdot u^{-k-1}. \tag{3.4.19}$$

Доказательство. Доказательство во многом аналогично доказательству предыдущей теоремы о классификации. Отметим лишь отличия.

Доказательство пункта 1) уже, по существу, было проведено в предыдущем параграфе. Докажем пункт 2). Мы выведем его из доказанных выше вспомогательных утверждений. Сначала докажем необходимость, именно, мы докажем, что если простой модуль $V(d)$ является конечномерным, то существуют, упомянутые в пункте 2) теоремы, многочлены, удовлетворяющие условиям a), b) теоремы.

Нам потребуются соотношения (3.1.15) в следующем частном случае:

$$\begin{gathered}[h_{n+1}(u), x^-_{n+2}(t)] = \\ \tfrac{1}{2(u-t)}((h_{n+1}(u)(x^-_{n+2}(t) - x^-_{n+2}(u)) + (x^-_{n+2}(t) - x^-_{n+2}(u))h_{n+1}(u))); \end{gathered}\tag{3.4.20}$$

$$[h_{n+1}(u), x^-_{n+1}(t)] = 0. \tag{3.4.21}$$

Пусть, как и в предыдущем параграфе, $v_{i,k} = x^-_{i,k}v_+$. Тогда, как следует из проведённых в предыдкщем параграфе рассуждений, имеет место следующее представление:

$$x^-_k(u)v_+ = \sum_{i=0}^{N} \beta^k_i(u) v_{k,i}. \tag{3.4.22}$$

Для краткости, как и ранее, будем использовать обозначение:

$$\beta_i(u) = \beta^{m+2}_i(u). \tag{3.4.23}$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^-_{n+2,k} u^{-k-1} v_+ = \sum_{k=0}^{N} x^-_{n+2,k} u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=N+1}^{\infty} x^-_{n+2,k} u^{-k-1} v_+ =$$

$$\sum_{k=0}^{N} x^{-}_{n+2,k} u^{-k-1} v_{+} + \sum_{k=0}^{N} u^{-N-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{i}_{k} u^{-i-1} v_{n+2,k}.$$

Обозначим

$$\varphi_k(u) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i_k u^{-i-1}, \tag{3.4.24}$$

$$\tilde{\varphi}_k(u) = u^{-k-1} + \varphi_k(u). \tag{3.4.25}$$

Перепишем соотношение (3.4.22) в следующей форме:

$$x^{-}_{n+2}(u) v_{+} = \sum_{i=0}^{N} \beta_i(u) v_{n+2,i} = \sum_{i=0}^{N} (u^{-i-1} + u^{-N-1} \varphi_i(u) v_{n+2,i}). \tag{3.4.26}$$

Тогда из равенства (3.4.26) следует, что

$$x^{-}_{n+2,N+k+1} v_{+} = \sum_{i=0}^{k} \varphi^k_i x^{-}_{n+2,i} v_{+}. \tag{3.4.27}$$

Подействуем на левую и правую части равенства (3.4.27) элементом $h_{n+1,1}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых линейно независимых векторах получаем следующие соотношения:

$$\varphi^{i+1}_k - \varphi^i_{k-1} - \varphi^i_N \cdot \varphi^0_k = 0, \quad k \geq 0, \tag{3.4.28}$$

$$\varphi^{i+1}_0 - \varphi^i_N \cdot \varphi^0_0 = d_{n+1,N+i+1} - \textstyle\sum_{j=0}^{N} \varphi^i_j \cdot d_{n+1,j},. \tag{3.4.29}$$

$$\varphi^{i+1}_k = -d_{n+1,0} \varphi^i_{k-1} + (\tfrac{1}{2} + d_{n+1,0}) \varphi^{i-1}_k, i \geq 1, \tag{3.4.30}$$

$$\varphi^{k+1}_0 = -\tfrac{1}{2} d_{n+1,0} \varphi^k_0. \tag{3.4.31}$$

Или, эквивалентные соотношения

$$\varphi^{i+1}_k = \varphi^i_{k-1} + \varphi^i_N \cdot \varphi^0_k, \tag{3.4.32}$$

$$\varphi^{k+1}_0 = 0. \tag{3.4.33}$$

Введём следующие обозначения. Пусть

$$\delta_i(u) = 1 + u^{i-N} \varphi_i(u). \tag{3.4.34}$$

$$\bar{d}_i(u) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} u^{-k-1}, i \in \{1, \ldots, 2n+1\}. \tag{3.4.35}$$

Отметим, что соотношения (3.4.30) – (3.4.33) легко можно переписать в терминах производящих функций, правда, эта явная формула нам здесь не потребуется.

$$u\varphi_i(u) - \varphi_i(u) = \varphi_N(u) \cdot \varphi^0_i, \quad k \geq 0, \tag{3.4.36}$$

$$u\varphi_0(u) - \varphi_N(u) \cdot \varphi^0_0 = u^N \cdot d_{n+1}(u) - \textstyle\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(u) \cdot \bar{d}_{n+1}(u) \cdot u^{j+1}.. \tag{3.4.37}$$

Легко видеть, что из соотношений (3.4.30), (3.4.33), учитывая (3.4.34), вытекает равенство:

$$\delta_i(u) = \delta_N(u)(1 - \sum_{j=i}^{N} \varphi_j^0 u^{j-N-1}). \tag{3.4.38}$$

Пусть

$$\beta_i(u) = u^{-i-1}\delta_i(u), i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.4.39}$$

Тогда нетрудно показать, что для некоторых матриц $A^k(u) = (A^k_{i,j})^N_{i,j=0}(u) \in M_{N+1}(C[[u^{-1}]]), k, r = n+1, n+2$ имеет место равенство:

$$h_r(u)x_k^-(t)v_+ = \sum_{0\leq i,j\leq N} A^r_{i,j}(u)\beta^r_j(t)v_{k,i}. \tag{3.4.40}$$

Рассматривая совместно соотношения (3.4.40) и (3.4.20-3.4.21) получаем соотношения

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{0\leq i,j\leq N} A^{n+1}_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{n+2,i} = x^-_{n+2}(t)\bar{d}_{n+1}(u)v_+ + \\ \frac{1}{2(u-t)}(h_{n+1}(u)(x^-_{n+2}(t) - x^-_{n+2}(u)) + (x^-_{n+2}(t) - x^-_{n+2}(u))h_{n+1}(u))v_+; \qquad (3.4.41)\\ \textstyle\sum_{0\leq i,j\leq N} A^{n+1}_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{n+1,i} = x^-_{n+1}(t)\bar{d}_{n+1}(u)v_+. \qquad (3.4.42)\end{gathered}$$

Полученные соотношения, в силу (3.4.22) принимают следующий вид

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{0\leq i,j\leq N} A^{n+1}_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{n+2,i} = \bar{d}_{n+1}(u)(\sum_{i=0}^N \beta_i(u)v_{n+2,i}) + \\ \tfrac{1}{2(u-t)}(\bar{d}_{n+1}(u)(\textstyle\sum_{i=0}^N(\beta_i(t) - \beta_i(u))v_{m+2,i}) + \\ \textstyle\sum_{0\leq i,j\leq N} A^{n+1}_{i,j}(u)(\beta_j(t) - \beta_j(u))v_{n+2,i})); \qquad (3.4.43)\\ \textstyle\sum_{0\leq i,j\leq N} A^{n+1}_{i,j}(u)\beta_j(t)v_{n+1,i} = \bar{d}_{n+1}(u)(\sum_{i=0}^N \beta_i(t)v_{n+1,i}). \qquad (3.4.44)\end{gathered}$$

Отметим, что полученные соотношения можно переписать как линейные рекуррентные соотношения. Приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах $v_{n+2,i}$, получаем, что из соотношений (3.4.44) вытекает следующее равенство:

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{j=0}^N A^{n+1}_{i,j}(u)(\beta_j(t) - \dfrac{1}{2(u-t)}(\beta_j(t) - \beta_j(u)))v_{n+2,i} = \\ \bar{d}_{n+1}(u)((\beta_i(u)v_{n+2,i}) + \dfrac{1}{2(u-t)}((\beta_i(t) - \beta_i(u)))v_{n+2,i}. \qquad (3.4.45)\end{gathered}$$

Отметим, следующий легко проверяемый факт. Можно подобрать такое множество констант $u_0, \mu_0, \ldots, \mu_N$, таких, что сумма $\sum_{i=0}^N \mu_i\beta_i(u_0)$ отлична от нуля. Положим в равенстве (3.4.45) $u = u_0$ и умножим равенство на μ_i. Складывая полученные равенства (для $0 \leq i \leq N$ мы приходим к равенству из которого можно явно выразить $d_{n+1}(u)$. Именно, мы получаем, что выполняется равенство

$$\bar{d}_{n+1}(u) = \frac{\sum_{i=0}^N(a_iu + b_i)\beta_i(u)}{\sum_{j=0}^N(c_ju + d_j)\beta_j(u)} \tag{3.4.46}$$

для некоторых постоянных $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 0, \cdots, N$.

Из соотношения (3.4.46), в силу соотношений (3.4.38), (3.4.39), вытекает доказываемое равенство (3.4.19).

Рассуждения для чётных корней уже были в предыдущем параграфе, но так же как и там достаточно сослаться на работы [75], [25].

Теперь утверждение теоремы получается стандартными рассуждениями, в силу того факта, что вложения супералгебр $\mathfrak{sl}(2,2)$ и $\mathfrak{sl}(2)$ являются морфизмами супералгебр Хопфа.

Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность также легко выводится из полученных формул фактически обращением проведённых рассуждений. Действительно, пусть $\bar{d}_{n+1}(u)$ удовлетворяет соотношениям теоремы. Покажем, что простой модуль $V(d)$ конечномерен. Так же как и в предыдущем параграфе, получим оценку размерности этого модуля. Будем действовать на старший вектор v_+ мономами вида $x^-(l) = x^-_{1,k_1} \dots x^-_{1,k_r}, k_1 + \ldots + k_r = l, k_r < \cdots < k_1$. Пусть $d_{n+1}(u)$ является отношением двух многочленов. Покажем, что в силу коммутационных соотношений лишь конечное число векторов вида $x^-(l)v_+$ будут линейно независимы. Мы получим несколько больше, именно, покажем, что размерность модуля $V(\bar{d})$ ограничена сверху числом $2^N, N = n_1 + \ldots + n_k$, а $n_i = deg(P_i(u)$ – степени многочленов, задающих старший вес. Пусть $\bar{d}_{n+1}(u) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{n+1,k} \cdot u^{-k-1}$, причём $\bar{d}_{m+1}(u) = \dfrac{P^d_{m+1}(u)}{Q^d_{m+1}(u)}$, а многочлены, стоящие в числителе и знаменателе не имеют общих множителей. Построим неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$-модуль $V(\bar{d})$ со старшим весом $\bar{d}(u)$. Покажем, что его размерность ограничена сверху числом 2^M, где $N = n_{d+1} = deg(P_{n+1}(u)) = deg(Q_{n+1}(u))$. Рассмотрим линейную оболочку

$$M_1 = \langle \{v_+; x^-(r_1) \dots x^-(r_s) \cdot v_+ | 1 \leq r_s \leq \ldots \leq r_1 \leq N\} \rangle. \tag{3.4.47}$$

Покажем, что

$$V(\bar{d}) \subseteq M_1. \tag{3.4.48}$$

Достаточно показать, что

$$x^+_k(u) \cdot x^-(l) = 0, \forall n > N. \tag{3.4.49}$$

Заметим, что (3.4.49) следует из следующего коммутационного соотношения в янгиане:

$$\begin{aligned} [x^+_k(u), x^-_{n+1}(v)]v_+ = \delta_{k,n+1} \frac{h_{n+1}(u) - h_{n+1}(v)}{u - v} v_+ = \\ \delta_{k,n+1} \frac{P_{m+1}(u)Q_{n+1}(v) - P_{n+1}(v)Q_{n+1}(u)}{Q_{n+1}(u)Q_{n+1}(v)(u-v)} v_+. \end{aligned} \tag{3.4.50}$$

Аналогично показывается, что размерности соответствующих $Y(\mathfrak{sl}(2))$ - модулей $V(d_k)$ со старшим весом $d_k(u)$ ограничены числами 2^{n_k}, где $n_k = deg(P_k(u)$ – степень многочлена $P_k(u)$.

□

Глава 4

Янгианы базисных супералгебр Ли

4.1 Введение

В этой главе мы исследуем янгианы базисных супералгебр Ли. Данная глава своей структурой повторяет главу 2, а результаты, полученные здесь являются прямым обобщением результатов второй главы. По существу, в данной главы мы пытаемся обобщить основные конструкции первоначальных работ В.Г. Дринфельда на случай базисных супералгебр Ли. Другими словами, мы вводим и исследуем янгианы Дринфельда базисных супералгебр Ли. Следует напомнить, что понятие янгиана простой алгебры Ли было введено В.Г. Дринфельдом как квантование биалгебры Ли полиномиальных токов (со значениями в этой простой алгебре Ли) и со структурой коалгебры Ли, задаваемой рациональной r-матрицей (r-матрицей Янга). Но двойственный к янгиану объект (для полной линейной алгебры Ли $gl(n)$) начал изучаться ранее в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния. В.Г. Дринфельд показал, что он изоморфен янгиану. Во многих работах используется именно такое задание янгиана в терминах образующих, являющихся матричными элементами неприводимых представлений янгиана в смысле В.Г. Дринфельда. Как отмечено выше, эти два языка по существу изоморфны, и их использование диктуется решаемыми задачами. Мы используем подход В.Г. Дринфельда, ввиду его большей общности. Сначала мы рассматриваем случай янгиана базисной супералгебры Ли типа $D(m,n)$, чтобы на этом важном примере показать отличия общего случая от рассмотренного выше случая янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$.

Основным результатом данной главы является получение точной формулы для универсальной R-матрицы для янгиана и его квантового дубля базисной супералгебры Ли. Отметим, что явных формул для универсальной R-матрицы янгиана базисной супералгебры Ли, как и его квантового дубля, в известной автору литературе нет.

В этой главе мы описываем квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана для супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в терминах образующих и соотношений. Мы также вычисляем универсальную R-матрицу янгианного дубля следуя схеме работы [187]. Основной результат данной работы – такая формула для универсальной R- матрицы представленная в факторизованной форме в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых является бесконечным произведением. После того как формула для универсальной R-матрицы дубля янгиана получена мы вычисляем универсальную R-матрицу янгиана просто применяя к полученной формуле оператор $id \otimes T_\lambda$. Существенным при этом оказывается вычисление действия оператора T_λ на образующих двойственной к янгиану супералгебры Хопфа. Мы рассматриваем частные случаи $\mathfrak{g} = D(m,n)$, $\mathfrak{g} = B(m,n)$ и в этих случаях получаем основные результаты. После чего рассматриваем схему вычисления в общем случае янгиана базисной супералгебры Ли.

4.2 Базисные супералгебры Ли

Для удобства читателя напомним основные факты, относящиеся к теории супералгебр Ли (см. [180], [140], а также параграф 1.2 главы 1). Пусть k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Мы далее ограничимся случаем $k = \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, хотя все результаты могут быть распространены на случай произвольного поля алгебраически замкнутого поля k нулевой характеристики.

4.2.1 Основные определения

Здесь мы ещё раз напомним некоторые определения из параграфа 1.2, а также приведём более детально некоторые конструкции, которые мы будем использовать в этой главе. Сначала, мы дадим в удобной для дальнейшего форме определения используемых далее типов базисных супералгебр Ли. Подробно будет рассмотрен случай ортосимплектических супералгебр Ли. Все описанные выше в параграфе 1.2 супералгебры Ли образуют класс супералгебр Ли классического типа. Я напомню, что супералгебра Ли $G = G_0 \oplus G_1$ называется супералгеброй Ли классического типа (или классической), если представление G_0 в G_1 вполне приводимо. Известно, что супералгебра Ли является супералгеброй Ли классического типа в том и только том случае когда G_0 – редуктивная алгебра Ли (см. [140]). Все супералгебры Ли классического типа являются либо базисными, либо странными супералгебрами Ли. Базисные супералгебры Ли выделяются из классических супералгебр Ли условием: на них существует невырожденная инвариантная билинейная форма. Супералгебры Ли классического типа, которые не являются базисными называются странными. Они образуют две серии: P_n, Q_n. Мы в данной работе в следующей главе 5 будем иметь дело со странной супералгеброй Ли типа Q_n. Все базисные супералгебры Ли являются либо контрагредиентными супералгебрами Ли, либо их факторами по центру (как $A(n, n)$). Я напомню их определение (см. также параграф 1.2). Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ матрица порядка r с элементами из $\mathbb{C}$, и τ подмножество множества $I = \{1, 2, \ldots, r\}$. Обозначим через $\tilde{G}(A, \tau)$ супералгебру Ли с образующими $x_i^+, x_i^-, h_i, \quad i \in I$ и следующими определяющими соотношениями:

$$[h_i, h_j] = 0 \tag{4.2.1}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, \tag{4.2.2}$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \tag{4.2.3}$$

$$p(h_i) = 0, \quad p(x_j^{\pm}) = 0, \alpha_j \notin \tau; \quad p(x_j^{\pm}) = 1, \alpha_j \in \tau.$$

Далее, мы через $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ будем обозначать множество простых корней супералгебры Ли $\tilde{G}(A, \tau)$, равномощное множеству $\{1, 2, \cdots, r\}$, а через τ – множество её нечётных корней. Кроме того в случае базисной супералгебры Ли, которая является либо контрагредиентной, либо, как в случае супералгебры Ли $A(n, n)$ является фактором контрагредиентной по её центру, выполняются также соотношения Серра, на которых мы подробно остановимся чуть ниже. Отметим, что базисная супералгебра Ли наделена $Z-$градуировкой, задаваемой формулами $deg(x_i^+) = -deg(x_i^-) = 1, deg(h_i) = 0, i \in \tau$. Пусть J – максимальный (единственный) $Z-$градуированный идеал, удовлетворяющий условию $J \cap (\tilde{G}(A, \tau))_{-1} \oplus (\tilde{G}(A, \tau))_0 \oplus (\tilde{G}(A, \tau))_1 = 0$. Тогда $Z-$градуированная супералгебра Ли $G(A, \tau) = (\tilde{G}(A, \tau))/J$ называется контрагредиентной супералгеброй Ли, матрица A называется матрицей Картана супералгебры Ли $G(A, \tau)$, а число r называется рангом супералгебры Ли $G(A, \tau)$.

Напомним, что матрица Картана, задающая порождающие отношения базисной супералгебры Ли, эквивалентна диаграмме Дынкина. Каждая вершина диаграммы Дынкина соответствует простому корню супералгебры Ли, причем чётным корням соответствуют белые вершины, нечётным простым корням нулевой длины соответствуют серые вершины, а нечётным простым корням ненулевой длины соответствуют чёрные вершины. Пусть $A^s = (a'_{ij})^r_{i,j=1}, a'_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ – соответствующая симметрическая матрица Картана. Тогда две вершины диаграммы Дынкина соединяются n_{ij} линиями. При этом число линий определяется следующими условиями: $n_{ij} = \dfrac{2|a'_{ij}|}{min(|a'_{ii}|, |a'_{jj}|)}$, если $a'_{ii}a'_{jj} \neq 0$, $n_{ij} = \dfrac{2|a'_{ij}|}{min_{a'_{kk}\neq 0}(|a'_{kk}|)}$, если $a'_{ii} \neq 0, a'_{jj} = 0$, $n_{ij} = a'_{ij}$, если $a'_{ii} = a'_{jj} = 0$. Напомним, что диаграмма Дынкина, как и матрица Картана, супералгебры Ли не определяется однозначно супералгеброй Ли (в отличии от алгебры Ли). Это связано, как отмечено выше, с неоднозначностью выделения системы простых корней. Если же потребовать, чтобы нечётный простой корень был единственным, то это требование однозначно фиксирует систему простых корней, а также матрицу Картана и диаграмму Дынкина базисной супералгебры Ли. Кроме того система простых корней с билинейной формой, заданной на них, эквивалентна матрице Картана, а следовательно, диаграмме Дынкина. Такая система простых корней, а также матрица Картана и диаграмма Дынкина, в силу отмеченного выше, называется выделенной. Если не оговорено противное, мы будем в этой главе иметь дело с выделенной системой простых корней, а также выделенными матрицей Картана и диаграммой Дынкина.

4.2.2 Примеры базисных супералгебр Ли

Супералгебра Ли типа $B(m,n)$. В этом пункте мы напомним основные определения и результаты, относящиеся к ортосимплектической супералгебре Ли $\mathfrak{osp}(2m+1, 2n) = B(m,n)$, поскольку ниже мы отдельно рассмотрим янгианы этой супералгебры Ли и супералгебры Ли $D(m,n)$. Это будут главные примеры, который мы рассмотрим наиболее подробно. Напомню, что ранг супералгебры Ли $B(m,n)$ равен $m+n$, а размерность $2(m+n)^2 + m + 3n$. Отметим, что в случае $m = 0$ у супералгебры Ли типа $B(m,n)$ появляются чёрные корни. Этот случай мы рассмотрим несколько позднее. Пусть сначала $m \neq 0$. В этом случае выделенная система простых корней выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \ldots, \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \alpha_n = \delta_n - \varepsilon_1,\\ \alpha_{n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \alpha_{n+m-1} = \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \alpha_{n+m} = \epsilon_m.\end{gathered} \tag{4.2.4}$$

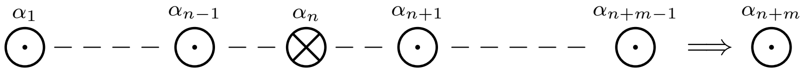
Опишем корневую систему данной супералгебры Ли. Пусть $1 \le i \neq j \le m, 1 \le k \neq l \le n$. Тогда корневая система супералгебры Ли $B(m,n)$ $(m \neq 0)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\Delta = \{\pm\epsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\varepsilon_i, \pm\delta_k \pm \delta_l, \pm 2\delta_k, \pm\varepsilon_i \pm \delta_k, \pm\delta_k\},\\ \Delta_{\bar{0}} = \{\pm\epsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\varepsilon_i, \pm\delta_k \pm \delta_l, \pm 2\delta_k\},\\ \Delta_{\bar{1}} = \{\pm\varepsilon_i \pm \delta_k, \pm\delta_k\},\\ \bar{\Delta}_{\bar{0}} = \{\pm\epsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\varepsilon_i, \pm\delta_k \pm \delta_l\},\\ \bar{\Delta}_{\bar{1}} = \{\pm\varepsilon_i \pm \delta_k\}.\end{gathered}$$

Супералгебра Ли $B(m,n)$ порождается образующими $h_i, x_i^{\pm}, i \in \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, m+n\}$. Матрица Картана супералгебры Ли $B(m,n)$ (выделенная матрица Картана), задающая систему определяющих соотношений, имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что диаграмма Дынкина для $B(m,n) = \mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ имеет вид:



Опишем теперь выделенные положительные корни ($1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq m$):

$$\begin{gathered} \delta_k - \delta_l = \alpha_k + \dots \alpha_{l-1}, \\ \delta_k + \delta_l = \alpha_k + \dots \alpha_{l-1} + 2\alpha_l + \dots 2\alpha_{n+m}, \\ 2\delta_k = 2\alpha_k + \dots 2\alpha_{n+m}, \\ \epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_{n+i} + \dots \alpha_{n+j-1}, quad \\ \epsilon_i + \epsilon_j = \alpha_{n+i} + \dots \alpha_{n+j-1} + 2\alpha_{n+j} + \dots 2\alpha_{n+m}, \\ \epsilon_i = \alpha_{n+i} + \dots \alpha_{n+m}, \\ \delta_k - \epsilon_i = \alpha_k + \dots \alpha_{n+i-1}, \\ \delta_k - \epsilon_i = \alpha_k + \dots \alpha_{n+i-1} + 2\alpha_{n+i} + \dots \alpha_{n+m}, \\ \delta_k = \alpha_k + \dots \alpha_{n+m}. \end{gathered}$$

Система определяющих соотношений задаётся обычными формулами, задающими соотношения базисной суперанлгебры Ли, в которые в качестве параметров входят матричные элементы матрицы Картана, и соотношения Серра. На последних мы остановимся несколько подробнее, поскольку мы будем ниже, при выводе определяющих соотношений янгиана их использовать.

Суперанлгебра Ли типа $D(m,n)$. В этом пункте мы напомним основные определения и результаты, относящиеся к ортосимплектической суперанлгебре Ли $\mathfrak{osp}(2m,2n) = D(m,n)$ ($m > 1$), поскольку ниже мы отдельно рассмотрим янгиан такой суперанлгебры Ли. Напомню, что ранг этой суперанлгебры Ли равен $m+n$, а размерность $2(m+n)^2 - m + n$. Отметим, что в случае $m = 0$ у суперанлгебры Ли типа $B(m,n)$ появляются чёрные корни. Этот случай мы рассмотрим несколько позднее. Пусть сначала $m \neq 0$. В этом случае выделенная система простых корней выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \dots, \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \alpha_n = \delta_n - \varepsilon_1, \\ \alpha_{n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n+m-1} = \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \alpha_{n+m} = \epsilon_{m-1} + \epsilon_m. \end{gathered} \tag{4.2.5}$$

Матрица Картана имеет следующий вид:

$$A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Опишем корневую систему данной супералгебры Ли.

4.3 Бисупералгебры Ли

4.3.1 Основные определения

Для удобства читателя мы приведём здесь более подробно аналоги для супералгебр Ли основных понятий из теорий биалгебр Ли, которые частично уже были приведены в главе 1, параграф 1.3. Здесь мы уточним для конкретных примеров базисных супералгебр Ли общие определения, данные в параграфе 1.3. Другими словами, мы рассмотрим некоторые примеры токовых бисупералгебр Ли со значениями в базисных бисупералгебрах Ли и явно опишем для них операцию коскобки, а также соответствующие им тройки Манина. Отметим, что в параграфе 1.3 мы привели факты и результаты, относящиеся к бисупералгебрам Ли, и справедливые для всех базисных супералгебр Ли. Здесь же мы сосредоточимся на определениях и результатах, справедливых для конкретных примеров базисных бисупералгебр Ли и обсудим отличия, в первую очередь, от случая специальной линейной супералгебры Ли.

Напомним (см. определение 1.3.1), что супералгебра Ли $\mathfrak{A}$ называется бисупералгеброй Ли, если $\mathfrak{A}^*$ также супералгебра Ли и выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) коскобка $\delta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\bigwedge\mathfrak{A}$ является 1-коциклом (для чётных когомологий).

2) структурные константы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ согласованы:

$$c_{rs}^{k}f_{k}^{ij}=c_{ar}^{i}f_{s}^{ja}-c_{rs}^{j}f_{s}^{ia}+c_{as}^{i}f_{r}^{ja}-c_{as}^{j}f_{r}^{ia}.$$

Здесь $\{c_{rs}^{k}\}$ – структурные константы для скобки супералгебры Ли $\mathfrak{A}$, $\{f_{k}^{ij}\}$ – структурные константы для скобки в супералгебре Ли $\mathfrak{A}^*$.

Заметим, что $\{c_{rs}^{k}\}$ – структурные константы для коскобки в $\mathfrak{A}^*$, а $\{f_{k}^{ij}\}$ – структурные константы для коскобки в косупералгебре Ли $\mathfrak{A}$.

Заметим, что можно ввести понятие пуассоновой супергруппы Ли, эквивалентное понятию бисупералгебры Ли. Но эта структура выглядит, на наш взгляд менее естественно и просто, чем структура бисупералгебры Ли и в данной работе использоваться не будет.

Опишем теперь явно примеры структур бисупералгебр для конкретных токовых бисупералгебр Ли со значениями в базисных бисупералгебрах Ли.

4.3.2 Примеры токовых бисупералгебр Ли

Токовая бисупералгебра Ли $B(m,n)[t]$. Опишем теперь явно соотношения и структуру биалгебры Ли на $B(m,n)[t]$. Нам потребуется явный вид оператора Казимира и формы Киллинга на токовом базисе Шевалле.

Напомним, что супералгебра Ли $B(m,n)[t]$ порождается образующими: $x_i^{\pm} \otimes t^k, h_i \otimes t^k$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_i \otimes t^k, h_j \otimes t^m] = 0, \tag{4.3.1}$$

$$[h_i \otimes t^k, x_j^{\pm} \otimes t^m] = [h_i, x_j^{\pm}] \otimes t^{k+m} = \pm a_{ij} x_j^{\pm} \otimes t^{k+m}, \tag{4.3.2}$$

$$[x_i^+ \otimes t^k, x_j^- \otimes t^m] = \delta_{ij} h_j \otimes t^{m+k}, \tag{4.3.3}$$

$$[x_i^{\pm} \otimes t^m, [x_i^{\pm} \otimes t^n, x_j^{\pm} \otimes t^r]] = 0, \quad , i \neq m+n-1 \quad or \quad j \neq m+n, \tag{4.3.4}$$

$$[x_{m+n-1}^{\pm} \otimes t^m, [x_{m+n-1}^{\pm} \otimes t^n, [x_{m+n-1}^{\pm} \otimes t^l, x_{m+n}^{\pm} \otimes t^r]]] = 0. \tag{4.3.5}$$

Опишем теперь явно структуру бисупералгебры Ли на ней. Кокоммутатор задаётся явно следующей формулой:

$$a(u) \mapsto [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), \frac{\mathfrak{t}}{u-v}], \tag{4.3.6}$$

где $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$ – элемент Казимира в универсальной обёртывающей супералгебре $U(B(m,n))$.

Опишем явно оператор Казимира. Он имеет следующий вид

$$\mathfrak{t} = \sum_{i}^{m+n} h_i \otimes h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha^+ \otimes x_\alpha^- + x_\alpha^- \otimes x_\alpha^+. \tag{4.3.7}$$

Элементы h^i принадлежат картановской подалгебры и выражаются через как линейные комбинации картановских образующих $\{h_i\}$ с коэффициентами, являющимися элементами матрицы A^{-1} обратной к матрице Картана $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m+n}$. Отметим, что $|\Delta_+| = m^2 + n^2 + 2mn + n$.

Токовая бисупералгебра Ли $D(m,n)[t]$**.** Опишем теперь явно соотношения и структуру биалгебры Ли на $D(m,n)[t]$. Нам потребуется явный вид оператора Казимира и формы Киллинга на токовом базисе Шевалле. Система определяющих соотношений имеет такой же вид, как и система определяющих соотношений для $B(m,n)[t]$, а оператор Казимира определяется формулой аналогичной формуле (4.3.7):

$$\mathfrak{t} = \sum_{i}^{m+n} h_i \otimes h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha^+ \otimes x_\alpha^- + x_\alpha^- \otimes x_\alpha^+. \tag{4.3.8}$$

Отметим, что $|\Delta_+| = m^2 + n^2 + 2mn - m$

Токовая бисупералгебра Ли $C(n+1)[t]$**.** Система определяющих соотношений имеет такой же вид, как и система определяющих соотношений для $B(m,n)[t]$, а оператор Казимира определяется формулой аналогичной формуле (4.3.7):

$$\mathfrak{t} = \sum_{i}^{n} h_i \otimes h^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_\alpha^+ \otimes x_\alpha^- + x_\alpha^- \otimes x_\alpha^+. \tag{4.3.9}$$

Отметим, что $|\Delta_+| = n^2 + 2n$.

4.4 Квантование бисупералгебры Ли полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t]$

Квантование биалгебры Ли было определено В.Г. Дринфельдом в [120] как некоммутативная деформация в классе алгебр Хопфа универсальной обёртывающей алгебры биалгебры Ли. На случай базисных бисупералгебр Ли эти определения также могут быть перенесены, как это показано в главе 1 (см. параграф 1.7 главы 1). Мы сосредоточимся на рассмотрении деформаций токовых бисупералгебр базисных супералгебр Ли следующих бесконечных серий. Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли типа $B(m,n)$, $C(n)$ или $D(m,n)$. Напомним, что (см. также параграфы 1.5, 1.7 главы 1).

Определение 4.4.1. *Квантованием бисупералгебры Ли $B(=\mathfrak{g}[t])$ называется супералгебра Хопфа $A = A_\hbar$ над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\hbar]]$, которая удовлетворяет следующим условиям:*
1)

$$A_\hbar/\hbar A_\hbar \cong U(B),$$

где $U(B)$ – универсальная обёртывающая супералгебра супералгебры Ли B;
2) Супералгебра $A_\hbar$ изоморфна $U(B)[[\hbar]]$, как векторное пространство;
3) выполняется следующий принцип соответствия

$$\hbar^{-1}(\Delta(x) - \Delta^{op}(x)) \bmod \hbar = \varphi(x) \bmod \hbar,$$

где Δ – коумножение, Δ^{op} – противоположное коумножение, то есть, если $\Delta(x) = \sum x'_i \otimes x"_i$, то $\Delta^{op}(x) = \sum (-1)^{p(x'_i)p(x"_i)} x"_i \otimes x'_i$. Коскобка $\varphi : B \to B \bigwedge B$ является коциклом в B.

Опишем теперь квантование бисупералгебры Ли $(\mathfrak{g}[u], \delta)$. Я напомню (см. также (A.2.13), что

$$\mathfrak{g}[u] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{g} \cdot u^k$$

– градуированная степенями u супералгебра Ли,

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), \frac{t}{u-v}], \qquad (4.4.1)$$

где $\mathfrak{t}$ – оператор Казимира и отображение δ – однородно степени -1.

Наложим на квантование дополнительные условия.
1) Пусть A – градуированная супералгебра над градуированным кольцом $C[[\hbar]]$, $\quad deg(\hbar) = 1$;
2) Градуировка A и градуировка $\mathfrak{g}[u]$ индуцируют одну и ту же градуировку $U(\mathfrak{g}[u])$, то есть,

$$A/\hbar A = U(\mathfrak{g}[u])$$

как градуированные супералгебры над $\mathbb{C}$.

Напомним, что супералгебру Хопфа A над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ обладающую тем свойством, что $A/\hbar A \cong B$, где B супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}$, называют формальной деформацией B. Пусть $p : A \to A/\hbar A \cong B$ – каноническая проекция. Если $p(a) = x$, то элемент a называют деформацией элемента x. Есть теоремы (некоторые из которых приведены в параграфах первой главы) из которых, по существу, вытекает существование и единственность квантования (или формальной деформации) во многих частных случаях(см., например, [192], [193] для неградуированного случая, то есть для случая алгебр), в том числе и в случае супералгебр, после небольших видоизменений (см. главу 1, параграф 1.5). Некоторые из них, как отмечено выше, мы привели в первой главе. Но здесь мы можем без них обойтись, и по существу, этими теоремами в данном параграфе пользоваться не будем. Мы получим явные формулы для деформаций образующих из которых будет следовать существование деформации бисупералгебры Ли, а также единственность с точностью до преобразования, которое фиксируется если наложить дополнительные условия на сохранение Z-градуировки.

Так же как и в параграфе 1.7 главы 1 будем обозначать через $m_{i,k}$, где $m_i \in \{h_i, x_i^{\pm}\}$ – образующие супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, деформации образующих $m_i \cdot u^k$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}[u]$. Так как образующие $m_i, m_i \cdot u^k$ порождают $U(\mathfrak{g}[u])$, то их деформации $m_{i,0}, m_{i,1}$ порождают супералгебру Хопфа A. Нам надо описать систему порождающих соотношений между этими образующими. Эту систему порождающих соотношений мы получим как условие совместимости структур супералгебры и косупералгебры на A. Здесь мы воспользуемся результатами параграфа 1.5, не будем повторять проведённые там рассуждения и сосредоточимся здесь на выводе соотношений Серра, который не был проведён в параграфе 1.5. Приведём лишь окончательный результат.

Теперь мы можем описать супералгебру Хопфа $A = A_h$, являющуюся деформацией (квантованием) бисупералгебры Ли $(\mathfrak{g}, \delta)$, где $\mathfrak{g} \in \{B(m,n), C(n), D(m,n)\}$. Пусть τ – множество нечётных корней для выделенной системы простых корней, будем также обозначать через τ_1 – множество серых корней, а через τ_1 – множество чёрных корней системы простых выделенных корней. Будем через $I(\tau)$, $I(\tau_1)$, $I(\tau_2)$ обозначать множество индексов соответствующих этим корням. Легко видеть, что каждое из этих множеств состоит из одного элемента и $\tau = \tau_1$ для $B(m,n), C(n), D(m,n)$, $I(\tau) = \{m\}$ для $D(m,n)$, $B(m,n)$, $I(\tau) = \{1\}$ для $C(n)$; $\tau = \tau_2$ для $B(0,n)$ и $I(\tau) = \{n\}$ для $B(0,n)$. Пусть также $\tilde{a_{ij}} = \max\{a_{ij}, a_{ji}\}$.

Теорема 4.4.1. *Супералгебра Хопфа* $A = A_\hbar$ *над* $\mathbb{C}[[\hbar]]$, *порождается образующими*

$$h_{i,0}, \quad x_{i,0}^{\pm}, \quad h_{i,1}, \quad x_{i,1}^{\pm}, \quad i \in I.$$

Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{i,0}, h'_{j,1}] = [h'_{i,1}, h'_{j,1}] = 0, \tag{4.4.2}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,0}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,0}^{\pm}, \tag{4.4.3}$$

$$[h'_{i,1}, x_{j,0}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,1}^{\pm}, \tag{4.4.4}$$

$$[x_{i,0}^{+}, x_{j,0}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,0}, \tag{4.4.5}$$

$$[x_{i,1}^{+}, x_{j,0}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,1} := \delta_{ij}(h'_{i,1} + \tfrac{\hbar}{2} h_{i,0}^2), \tag{4.4.6}$$

$$[x_{i,1}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}] = [x_{i,0}^{\pm}, x_{j,1}^{\pm}] \pm \hbar \tfrac{a_{ij}}{2}(x_{i,0}^{\pm} x_{j,0}^{\pm} + x_{j,0}^{\pm} x_{i,0}^{\pm}), \tag{4.4.7}$$

$$[x_{m,1}^{\pm}, x_{m,0}^{\pm}] = 0, \quad m \in I(\tau_1), \tag{4.4.8}$$

$$ad(x_{i,0})^{m_{ij}}(x_{j,0}) = 0, \quad i \neq j, \quad m_{ij} = 1 - \tilde{a_{ij}}, \tag{4.4.9}$$

$$[x_{i,1}^{\pm}, ad(x_{i,0}^{\pm})^{-m_{ij}}(x_{j,0}^{\pm})] + \ldots ad(x_{i,0}^{\pm})^{-m_{ij}}([x_{i,1}^{\pm}, x_{j,0}^{\pm}]) = 0, \quad m_{ij} = \tilde{a_{ij}}, \quad i \neq j, \tag{4.4.10}$$

$$[[h'_{i,1}, x_{i,1}^{+}], x_{j,1}^{-}] + [x_{i,1}^{+}, [h'_{i,1}, x_{j,1}^{-}]] = 0, \quad i \neq m, \tag{4.4.11}$$

$$[[h'_{m\pm1,1}, x_{m,1}^{+}], x_{m,1}^{-}] + [x_{m,1}^{+}, [h'_{m\pm1,1}, x_{m,1}^{-}]] = 0, \quad m \in I(\tau). \tag{4.4.12}$$

Отметим, что здесь приведена пока не полная система определяющих соотношений, поскольку здесь не приведены аналоги соотношений Серра. Остановимся на описании этих *соотношений. Если* $\mathfrak{g} = B(m,n)$, $m \neq 0$, *то дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[[x^{\pm}_{m-1,1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,1}]] = 0, \tag{4.4.13}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.14}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1, i \neq m+n, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.15}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{m+n-1,k_3}]]] = 0. \tag{4.4.16}$$

Здесь $\mathfrak{S}_n$ *– группа перестановок* n*-элементного множества.*

Пусть $\mathfrak{g} = B(0,n)$, *тогда дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.17}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} |i-j| > 1, i \neq n+1, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.18}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n,k_3}]]] = 0. \tag{4.4.19}$$

Пусть $\mathfrak{g} = D(m,n)$, *тогда дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[[x^{\pm}_{m-1,1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,1}]] = 0, \tag{4.4.20}$$

$$\begin{gathered}[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \\ |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, m+n-1, \quad k_i \in \{0,1\},\end{gathered} \tag{4.4.21}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \text{или} |i-j| > 1, \quad i \neq m+n, m+n-1, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.22}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{m+n-1,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.23}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{m+n-2,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}. \tag{4.4.24}$$

Пусть $\mathfrak{g} = C(n+1)$, *тогда дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq n, n+1 \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.25}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1 \quad i \neq n, n+1, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.26}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{pm}_{n+1,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.4.27}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n+1,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}. \tag{4.4.28}$$

Коумножение Δ *определяется на* $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ *следующими формулами:*

$$\Delta(h_{i,0}) = h_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0}, \tag{4.4.29}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,0}) = x^{\pm}_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\pm}_{i,0}, \tag{4.4.30}$$

$$\Delta(h'_{i,1}) = h'_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h'_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \Omega'_2], \tag{4.4.31}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,1}) = a^{-1}_{i,i}[\Delta(h'_{i,1}), \Delta(x^{\pm}_{i,0})], \quad i \neq m, \tag{4.4.32}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{m,1}) = a^{-1}_{m-1,m}[\Delta(h'_{m-1,1}), \Delta(x^{\pm}_{m,0})]. \tag{4.4.33}$$

Здесь $\Omega'_2 = \sum\limits_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{p(\alpha)} x^-_{\alpha} \otimes x^+_{\alpha}$, $p(\alpha) := p(x^{\pm}_{\alpha})$ *– функция чётности.*

Отметим, что чтобы получить янгиан $Y(\mathfrak{g})$ в условиях теоремы 4.4.1 нужно в определении супералгебры Хопфа $A_\hbar$ положить $\hbar = 1$ и получающаяся при этом супералгебра Хопфа над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и будет янгианом $Y(\mathfrak{g})$.

4.5 Янгиан базисной супералгебры Ли, токовая система образующих

4.5.1 Формулировка основных результатов

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ определён в предыдущем параграфе как деформация универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ полиномиальных токов (см. предыдущий параграф).

Ниже, пусть $\mathfrak{g} = B(m,n)$ или $C(n)$, или $D(m,n)$, или $B(0,n)$. $\mathfrak{g}$ как и всякая базисная супералгебра Ли определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n}$ в случае $\mathfrak{g} = B(m,n)$ или $D(m,n)$ (или $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ в случае $B(0,n)$, $C(n)$). Её ненулевые элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i < m; \quad a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1,$$

$$a_{i,i} = -2, \quad m < i, \quad a_{n+m-1,n+m} = 2, \quad i \in I = \{1, \ldots, m+n\}$$

в случае $B(m,n)$. То есть матрица Картана имеет вид

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В случае $\mathfrak{g} = C(n+1)$ её ненулевые элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i} = -2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1, \quad i > 1; \quad a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1,$$

$$a_{i,i} = -2, \quad 1 < i < n+1, \quad a_{n+1,n} = 2, \quad i \in I = \{1, \ldots, n+1\}.$$

Матрица Картана в этом случае имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В случае $\mathfrak{g} = B(0,n)$ её элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i < n; \quad a_{n,n-1} = -2, \quad i \in I = \{1, \ldots, n\}.$$

Её матрица Картана имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В случае $\mathfrak{g} = D(m,n)$ её элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i < m+n, i \neq m; \quad a_{m,m} = 0, a_{m,m+1} = 1,$$

$$a_{m+n-2,m+n-1} = a_{m+n-1,m+n-2} = a_{m+n-2,m+n} = a_{m+n,m+n-2} = -1, \quad i \in I = \{1, \dots, m+n\}.$$

Её матрица Картана имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $\mathfrak{g}$ порождается образующими: $h_i, x_i^{\pm}, i \in I$. В случае $B(m,n)$, $m \neq 0$ и $D(m,n)$ образующие $x_{m+1}^{\pm}$ – нечётные, а остальные образующие чётные, то есть функция чётности принимает на них следующие значения: $p(h_i) = 0, i \in I, \quad p(x_j^{\pm}) = 0, j \neq m+1, \quad p(x_{m+1}^{\pm}) = 1$.

В случае $\mathfrak{g} = B(0,n)$ нечётной является только образующие $x_{n+1}^{\pm}$, то есть $p(x_{n+1}^{\pm}) = 1$, а на остальных образующих функция чётности принимает значение равное 0.

Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям, которые для суперrepresentations алгебр Ли различных типов имеют, вообще говоря, разный вид. Следующие соотношения являются общими для всех типов:

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{4.5.1}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, \tag{4.5.2}$$

$$[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_i. \tag{4.5.3}$$

$$\tag{4.5.4}$$

Далее в случае супералгебры Ли типа $B(m,n)$, $m \neq 0$ имеем следующие дополнительные соотношения:

$$[[x_{m-1}^{\pm}, x_m^{\pm}], [x_{m+1}^{\pm}, x_m^{\pm}]] = 0, \tag{4.5.5}$$

$$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0, i \neq m+n, \tag{4.5.6}$$

$$[x_{m+n}^{\pm}, [x_{m+n}^{\pm}, [x_{m+n}^{\pm}, x_{m+n-1}^{\pm}]]] = 0. \tag{4.5.7}$$

В случае супералгебры Ли типа $D(m,n)$ имеем следующие дополнительные соотношения:

$$[[x^{\pm}_{m-1}, x^{\pm}_{m}], [x^{\pm}_{m+1}, x^{\pm}_{m}]] = 0, \tag{4.5.8}$$
$$[x^{\pm}_{i}, [x^{\pm}_{i}, x^{\pm}_{j}]] = 0, i \neq m+n, m+n-1, \tag{4.5.9}$$
$$[x^{\pm}_{m+n-1}, [x^{\pm}_{m+n-1}, x^{\pm}_{m+n-2}]] = 0, \tag{4.5.10}$$
$$[x^{\pm}_{m+n-2}, [x^{\pm}_{m+n-2}, x^{\pm}_{m+n-1}]] = 0, \tag{4.5.11}$$
$$[x^{\pm}_{m+n}, [x^{\pm}_{m+n}, x^{\pm}_{m+n-2}]] = 0. \tag{4.5.12}$$

Как обычно, $[\cdot,\cdot]$ обозначает суперкоммутатор: $[a,b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba$. Пусть $\Pi = \Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}\}$ – множество простых корней в случае $\mathfrak{g} = B(m,n), D(m,n)$, или $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ в случае $\mathfrak{g} = B(0,n), C(n)$. Пусть также $\Delta(\Delta_+)$ – множество всех корней (положительных корней) супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}, \quad \alpha \in \Delta_+$ – базис Картана-Вейля, нормализованный условием $(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1$.

Ниже, если не оговорено противное, мы в пределах этого параграфа будем использовать обозначение $\mathfrak{g} := B(m,n)$, либо $D(m,n)$, либо $C(n+1)$.

В силу теоремы 4.4.1, мы можем дать следующее

Определение 4.5.1. *Янгиан $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ это супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}$ порождённая образующими: $x^{\pm}_{i,0}$, $h_{i,0}$, $x^{\pm}_{i,1}$, $h'_{i,1}$, $i \in I = I(\Gamma)$, которые удовлетворяют соотношениям:*

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{i,0}, h'_{j,1}] = [h'_{i,1}, h'_{j,1}] = 0, \tag{4.5.13}$$
$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,0}, \tag{4.5.14}$$
$$[h'_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1}, \tag{4.5.15}$$
$$[x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,0}, \quad [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,1} := \delta_{ij}(h'_{i,1} + \tfrac{1}{2} h^2_{i,0}), \tag{4.5.16}$$
$$[x^{\pm}_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] \pm (a_{ij}/2)(x^{\pm}_{i,0} x^{\pm}_{j,0} + x^{\pm}_{j,0} x^{\pm}_{i,0}), \tag{4.5.17}$$
$$[x^{\pm}_{m,1}, x^{\pm}_{m,0}] = 0, \tag{4.5.18}$$
$$ad(x^{\pm}_{i,0})^{1-m_{ij}}(x^{\pm}_{j,0}) = 0, \quad m_{ij} = \tilde{a_{ij}} = \max\{a_{ij}, a_{ji}\}, \quad i \neq j, \tag{4.5.19}$$
$$[x^{\pm}_{i,1}, ad(x^{\pm}_{i,0})^{-m_{ij}}(x^{\pm}_{j,0})] + \ldots + ad(x^{\pm}_{i,0})^{-m_{ij}}([x^{\pm}_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}]) = 0, \quad m_{ij} = \tilde{a_{ij}}, \quad i \neq j, \tag{4.5.20}$$
$$[[h'_{i,1}, x^{+}_{i,1}], x^{-}_{j,1}] + [x^{+}_{i,1}, [h'_{i,1}, x^{-}_{j,1}]] = 0, \quad i \in I \backslash I(\tau), \tag{4.5.21}$$
$$[[h'_{m-1,1}, x^{+}_{m,1}], x^{-}_{m,1}] + [x^{+}_{m,1}, [h'_{m-1,1}, x^{-}_{m,1}]] = 0, \quad m \in I(\tau). \tag{4.5.22}$$

Дополнительные соотношения Серра имеют следующий вид. Для $\mathfrak{g} = B(m,n)$, $m \neq 0$:

$$[[x^{\pm}_{m-1,1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,1}]] = 0, \tag{4.5.23}$$
$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.24}$$
$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1, i \neq m+n, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.25}$$
$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{m+n-1,k_3}]]] = 0. \tag{4.5.26}$$

Здесь $\mathfrak{S}_n$ – группа перестановок n-элементного множества.

Если $\mathfrak{g} = B(0,n)$, тогда дополнительные соотношения имеют следующий вид:

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.27}$$
$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или,} \quad |i-j| > 1, i \neq n+1, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.28}$$
$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n,k_3}]]] = 0. \tag{4.5.29}$$

Если $\mathfrak{g} = D(m,n)$, то дополнительные соотношения имеют следующий вид:

$$[[x^{\pm}_{m-1,1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,1}]] = 0, \tag{4.5.30}$$

$$\begin{gathered}[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0,\\ |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, m+n-1, \quad k_i \in \{0,1\},\end{gathered} \tag{4.5.31}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \textit{или} \quad |i-j| > 1, i \neq m+n, m+n-1, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.32}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, x^{\pm}_{m+n-1,k_3}]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.33}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, x^{\pm}_{m+n-2,k_3}]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}. \tag{4.5.34}$$

Если $\mathfrak{g} = C(n+1)$, то дополнительные соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1,\\ i \neq n, n+1 \quad k_i \in \{0,1\},\end{gathered} \tag{4.5.35}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \textit{или} \quad |i-j| > 1, \quad i \neq n, n+1, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.36}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x^{pm}_{n+1,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}, \tag{4.5.37}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x^{\pm}_{n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n+1,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \{0,1\}. \tag{4.5.38}$$

Коумножение Δ определяется на $\bar{Y}(G)$ следующими формулами:

$$\Delta(h_{i,0}) = h_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0}, \tag{4.5.39}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,0}) = x^{\pm}_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\pm}_{i,0}, \tag{4.5.40}$$

$$\Delta(h'_{i,1}) = h'_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h'_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \Omega'_2], \tag{4.5.41}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,1}) = a^{-1}_{i,i}[\Delta(h'_{i,1}), \Delta(x^{\pm}_{i,0})], \quad i \neq m, \tag{4.5.42}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{m,1}) = a^{-1}_{m-1,m}[\Delta(h'_{m-1,1}), \Delta(x^{\pm}_{m,0})]. \tag{4.5.43}$$

Здесь $\Omega'_2 = \sum\limits_{\alpha\in\Delta_+} (-1)^{p(\alpha)} x^{-}_{\alpha} \otimes x^{+}_{\alpha}$, $p(\alpha) := p(x^{\pm}_{\alpha})$ – функция чётности.

Введём новую систему образующих и соотношений для янгиана базисной суперaлгебры, аналогичную новой системе образующих В.Г. Дринфельда для янгианов простых алгебр Ли (см. [120], [24]). Эта система образующих особенно удобна при доказательстве теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ теоремы) и основанных на ней утверждений. Так же как и в параграфе 2.3, мы введем новую ассоциативную супералгебру и покажем, что она изоморфна янгиану базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть, как и выше, $\mathfrak{S}_n$ – группа перестановок множества из n элементов.

Определение 4.5.2. *Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ это супералгебра Хопфа на $\mathbb{C}$, порождённая как ассоциативная супералгебра, образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}$, $x^{\pm}_{i,k} := x^{\pm}_{\alpha_i,k} := x_{\pm\alpha_i,k}$, $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \tag{4.5.44}$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x^{+}_{i,k}, x^{-}_{j,l}], \tag{4.5.45}$$

$$[h_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [h_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + b_{ij}(h_{i,k} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l} h_{i,k}), \quad i \quad \text{или} \quad j \neq m, \tag{4.5.46}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,l}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,l}, \tag{4.5.47}$$

$$[h_{m,k+1}, x^{\pm}_{m,l}] = 0, \tag{4.5.48}$$

$$[x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + b_{ij}(x^{\pm}_{i,k} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l} x^{\pm}_{i,k}), \quad i \in I \setminus \tau \quad \text{или} \quad j \in I \setminus I(\tau), \tag{4.5.49}$$

$$[x^{\pm}_{m,k+1}, x^{\pm}_{m,l}] = 0, \quad m \in I(\tau_1), \tag{4.5.50}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} [x^{\pm}_{i,\sigma k_1}, \dots [x^{\pm}_{i,\sigma k_{r-1}}, [x^{\pm}_{i,\sigma k_r}, x^{\pm}_{j,l}]] \dots] = 0, \quad r = 1 - \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j. \tag{4.5.51}$$

для произвольных целых m, r, l, t. *Здесь* $b_{ij} = a_{ij}/2$.

Дополнительные соотношения Серра имеют следующий вид. В случае $\mathfrak{g} = B(m,n)$, $m \neq 0$:

$$[[x^{\pm}_{m-1,k_1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,k_2}]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.52}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.53}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1, i \neq m+n, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.54}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{m+n-1,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.55}$$

Если $\mathfrak{g} = B(0,n)$, *то дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.56}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1, i \neq n+1, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.57}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.58}$$

Если $\mathfrak{g} = D(m,n)$, *то дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[[x^{\pm}_{m-1,k_1}, x^{\pm}_{m,0}], [x^{\pm}_{m,0}, x^{\pm}_{m+1,k_2}]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.59}$$

$$\begin{gathered} [x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \\ |i-j| = 1, \quad i \neq m+n, m+n-1, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{4.5.60}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1, i \neq m+n, m+n-1, k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.61}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, x^{\pm}_{m+n-1,k_3}]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.62}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{m+n,k_{\sigma(2)}}, x^{\pm}_{m+n-2,k_3}]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.63}$$

Если $\mathfrak{g} = C(n+1)$, *то дополнительные соотношения имеют следующий вид:*

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, \quad |i-j| = 1, \quad i \neq n, n+1, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.64}$$

$$[x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_2}] = 0, \quad |i-j| > 2 \quad \text{или} \quad |i-j| > 1, \quad i \neq n, n+1, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.65}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n+1,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.66}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(2)}}, [x^{\pm}_{n,k_{\sigma(3)}}, x^{\pm}_{n+1,k_3}]]] = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.67}$$

Коумножение на образующих $h_{i,k}, x^{\pm}_{i,k}, i \in I, k = 0, 1$ *определяется следующими формулами:*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, x \in \mathfrak{g}, \tag{4.5.68}$$

$$\Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] + h_{i,0} \otimes h_{i,0} =$$

$$h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} (\alpha_i, \alpha) x_{-\alpha} \otimes x_\alpha; \tag{4.5.69}$$

$$\Delta(x^-_{i,1}) = x^-_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^-_{i,1} + [1 \otimes x^-_{i,0}, \mathfrak{t}_0] =$$

$$x^-_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^-_{i,1} + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} [x_{-\alpha_i}, x_{-\alpha}] \otimes x_\alpha; \tag{4.5.70}$$

$$\Delta(x^+_{i,1}) = x^+_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{i,1} + [x^+_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] =$$

$$x^+_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{i,1} - \sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} x_{-\alpha} \otimes [x_{\alpha_i}, x_\alpha]. \tag{4.5.71}$$

Сумма берется по всем перестановкам σ *множества* $\{1, \dots, r\}$. *Функция чётности принимает следующие значения на образующих:* $p(x^\pm_{j,k}) = 0$, *для* $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \setminus I(\tau)$, $p(h_{i,k}) = 0$, *для* $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^\pm_{i,k}) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i \in I(\tau)$.

Отметим, что универсальная обёртывающая супералгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно вложена в $Y(\mathfrak{g})$: $U(\mathfrak{g}) \hookrightarrow Y(\mathfrak{g})$, $x^\pm_i \mapsto x^\pm_{i,0}$, $h_i \mapsto h_{i,0}$.

Покажем, что приведенные выше два определения янгиана эквивалентны. Учитывая определение 4.5.1, введём новую систему образующих для янгиана $\bar{Y}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли с симметризуемой матрицей Картана, и покажем, что полученный объект изоморфен $Y(\mathfrak{g})$ (см. определение 4.5.1).

Введём образующие $\tilde{x}^\pm_{i,k}$, $\tilde{h}_{i,k}$ $(\in \bar{Y}(G))$, $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$ формулами

$$\begin{gathered}\tilde{x}^\pm_{i,k+1} = \pm(\alpha_i, \alpha_i)[h'_{i,1}, \tilde{x}^\pm_{i,k}], \quad i \in I \backslash \tau, \\ \tilde{x}^\pm_{m,k+1} = \pm(\alpha_{m-1}, \alpha_m)[h'_{m-1,1}, \tilde{x}^\pm_{m,k}], \quad m \in \tau,\end{gathered} \tag{4.5.72}$$

$$\tilde{h}_{i,k} = [\tilde{x}^+_{i,k}, x^-_{i,0}], \tag{4.5.73}$$

$$\tilde{x}^\pm_{i,0} = x^\pm_{i,0}, \quad \tilde{h}_{i,0} = h_{i,0}.$$

Отметим, что функция чётности принимает следующие значения на образующих: $p(x^\pm_{i,k}) = 0$, для $i \in I \setminus \tau$ $(i \neq m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $p(h_{i,k}) = 0$ для $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^\pm_{m,k}) = 1$.

Теорема 4.5.1. *Соответствие*

$$\tilde{x}^\pm_{i,k} (\in \bar{Y}(\mathfrak{g})) \to x^\pm_{i,k} (\in Y(\mathfrak{g})),$$

$$\tilde{h}_{i,k} (\in \bar{Y}(\mathfrak{g})) \to h_{i,k} (\in Y(\mathfrak{g}))$$

определяет изоморфизм супералгебр

$$\bar{Y}(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g}).$$

Доказательству этой теоремы будет посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

4.5.2 Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 4.5.1.

Доказательство. Схема доказательства теоремы 4.5.1 следующая. (Она в основных чертах совпадает со схемой доказательства аналогичной теоремы 2.2.1 из параграфа 2.2 главы 2). Можно считать, что $\tilde{Y}(\mathfrak{g})$ порождается образующими $\tilde{x}^{\pm}_{i,k}$, $\tilde{h}_{i,k}$, удовлетворяющими порождающим соотношениям (4.5.45)–(4.5.51), (4.5.72), (4.5.73), а также соотношениям Серра (4.5.52 – 4.5.67). Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что соотношения (4.5.45)–(4.5.51), а также соотношения Серра (4.5.52 – 4.5.67) вытекают из соотношений (4.5.13)–(4.5.22), (4.5.72), (4.5.73), а также соответствующих соотношений Серра (4.5.23 – 4.5.38), и наоборот, соотношения (4.5.13)–(4.5.22), (4.5.72), (4.5.73), (4.5.23 – 4.5.38) вытекают из соотношений (4.5.45)–(4.5.51), (4.5.52 – 4.5.67). Последнее, впрочем, почти очевидно. Действительно, соотношения (4.5.13)–(4.5.22), (4.5.23 – 4.5.38) просто содержатся среди соотношений (4.5.45)–(4.5.51), (4.5.52 – 4.5.67). Что же касается соотношений (4.5.72), то они сразу следуют из (4.5.46) и определения $\tilde{h}_{i,1}$. Соотношение (4.5.48) следует из соотношения (4.5.18). Отметим, что рассуждения относящиеся к соотношениям, отличным от соотношений Серра, по существу повторяют рассуждения, проведённые выше для частного случая янгиана $Y(A(m,n))$ специальной линейной супералгебры Ли. Вывод соотношений Серра также проводится в соответствии с уже использованной выше схемой, но, тем не менее, отличается в деталях. В силу этого мы приведём более короткое доказательство, более подробно останавливаясь на отличиях от рассмотренного выше частного случая, именно, на выводе соотношений Серра для янгианов базисных супералгебр Ли различных серий. Будем предполагать сначала симметризуемость матрицы Картана, а диаграмма Дынкина содержит только белые и серые корни. Затем отдельно рассмотрим случай, когда диаграмма Дынкина содержит и чёрные корни.

Так же как и выше в главе 2 введём новые, "логарифмические"образующие $\bar{h}_{i,k}$. Пусть

$$h_i(t) = \sum_{k\geq -1} h_{i,k}t^{-k-1}, \quad x^{\pm}_i(t) = \sum_{k\geq 0} x^{\pm}_{i,k}t^{-k-1}, h_{i,-1} = 1. \tag{4.5.74}$$

Определим образующие $\bar{h}_{i,k}$ формулой:

$$\bar{h}_i(t) = \sum_{k\geq 0} \bar{h}_{i,k}t^{-k-1} = \ln\left(h_i(t)\right). \tag{4.5.75}$$

Из леммы 2.2.1, доказанной в главе 2, сразу следует следующая лемма, которая будет играть важную роль при доказательстве данной теоремы об эквивалентности двух систем образующих и определяющих соотношений в янгиане.

Лемма 4.5.1. *В* $Y(\mathfrak{g})$ *имеют место следующие соотношения:*

$$[\bar{h}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}] = \pm(\alpha_i,\alpha_j)\cdot x^{\pm}_{j,k+l} \pm \sum_{\substack{0\leq s\leq k-2\\ s\in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{2^{s-k}\cdot(\alpha_i,\alpha_j)^{k+l-s}}{k+1} C^s_{k+1} x^{\pm}_{l+s}. \tag{4.5.76}$$

Приступим к доказательству теоремы 4.5.1. В силу сделанного выше замечания достаточно показать, что соотношения (4.5.45)–(4.5.51) вытекают из соотношений (4.5.13)–(4.5.22). Покажем это. Вначале мы проверим соотношения (4.5.45)–(4.5.51) для малых значений второго индекса (≤ 2), подготовив таким образом базу индукции (A). После чего последовательно докажем по индукции соотношения (4.5.45)–(4.5.51), (4.5.52 – 4.5.67) для

$i = j$ (B), потом соотношения (4.5.52 – 4.5.67))(C), после соотношения (4.5.45)–(4.5.48), (4.5.49) для $i \neq j$ и соотношения (4.5.51),(4.5.52 – 4.5.67)(D). Отметим, что часть соотношений для, в которых участвуют образующие $x^{\pm}_{\alpha_i,k}$, индексированные белыми и серыми корнями, по существу, уже проверена в главе 2, при доказательстве аналогичной данной теоремы для частного случая янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Этот факт мы будем ниже учитывать, ссылаясь на него в необходимых случаях.

A). Из (4.4.11)–(4.4.13) и определения $x^{\pm}_{j,1}$, $h_{i,k}$ следует, (4.5.47), (4.5.49), (4.5.47)

для $k = 0$. Коммутируя обе части равенства $h_{i,1} = [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{i,0}] = [x^{+}_{i,0}, x^{-}_{i,1}]$ с $\bar{h}_{i,1}$ при $i \neq m$ и с $\bar{h}_{m+1,1}$ при $i = m$, получим, что

$$h_{i,2} := [x^{+}_{i,2}, x^{-}_{i,0}] = [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{i,1}] = [x^{+}_{i,0}, x^{-}_{i,2}]. \tag{4.5.77}$$

Из (4.4.12) и определения $h_{i,1} = \bar{h}_{i,1} + \dfrac{1}{2}h^2_{i,0}$ вытекает, что

$$[h_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] + b_{ij}(h_{i,0}x^{\pm}_{j,0} + x^{\pm}_{j,0}h_{i,0}), \tag{4.5.78}$$

где, как и выше, $b_{i,j} = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)$. Из 4.5.21 следует также, что (4.5.13) эквивалентно равенству $[h_{i,2}, h_{i,1}] = 0$.

Как и выше, будем обозначать через $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{2}$, где a_{ij} элемент матрицы Картана (симметризованной).

Лемма 4.5.2. *Пусть $s, p \in \mathbb{Z}_+$, и*

$$[h_{i,l}, h_{i,k}] = 0 \quad \textit{для} \quad k + l \leq s. \tag{4.5.79}$$

Пусть $\bar{h}_{i,0}, \bar{h}_{i,1}, \ldots, \bar{h}_{i,s}$ определяются формулой (4.5.77), и также соотношение (4.5.79) имеет место для $k \leq s$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ и имеет место равенство

$$[x^{\pm}_{i,p+1}, x^{\pm}_{i,p}] = \pm b_{ii}x^{\pm 2}_{i,p}. \tag{4.5.80}$$

Тогда соотношение (4.5.51)(и часть соотношений (4.5.52 – 4.5.67)), а также (4.5.74) имеют место для $k = p + s$ и $l = p$:

$$[x^{\pm}_{i,p+s+1}, x^{\pm}_{i,p}] = [x^{\pm}_{i,p+s}, x^{\pm}_{i,p+1}] \pm b_{ii}(x^{\pm}_{i,p+s}x^{\pm}_{i,p} + x^{\pm}_{i,p}x^{\pm}_{i,p+s}),$$

для $i \in I \setminus \tau$, а также в случае, когда $i \in I(\tau)$ и α_i – чёрный корень, то есть $i \in I(\tau_1)$ а соотношение

$$[x^{\pm}_{m,p+s+1}, x^{\pm}_{m,p}] = 0 \tag{4.5.81}$$

имеет место для $m \in I(\tau)$ в случае когда α_m – серый корень ($m \in I(\tau_2)$).

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного результата в частном случае янгиана $Y(A(m, n))$, проведённое в главе 2. Оно, по существу повторяет это доказательство в случае белых и серых корней и и, как отмечено выше, проводится по такой же схеме в случае чёрных корней.

□

Отметим, что условия предыдущей леммы выполняются для $s \leq 1$, $p = 0$. Поэтому из этой леммы следует, что

$$[x^{\pm}_{i,2}, x^{\pm}_{i,0}] = \pm b_{ii}(x^{\pm}_{i,1}x^{\pm}_{i,0} + x^{\pm}_{i,0}x^{\pm}_{i,1}), \quad i \in I \setminus I(\tau_1), \quad [x^{\pm}_{m,2}, x^{\pm}_{m,0}] = 2(x^{\pm}_{m,1})^2 = 0, \quad m \in I(\tau_1).$$

Поэтому

$$[[x^+_{i,2}, x^+_{i,0}], x^-_{i,0}] = [h_{i,2}, x^+_{i,0}] + (-1)^{p(i)p(i)}[x^+_{i,2}, h_{i,0}] = [h_{i,2}, x^+_{i,0}] + [x^+_{i,2}, h_{i,0}].$$

Отсюда следует, что

$$[h_{i,2}, x^+_{i,0}] + [x^+_{i,2}, h_{i,0}] = (h_{i,1}x^+_{i,0} + x^+_{i,0}h_{i,1} + x^+_{i,1}h_{i,0} + h_{i,0}x^+_{i,1}) =$$

$$= [h_{i,1}, x^+_{i,1}] - [h_{i,0}, x^+_{i,2}] + (h_{i,1}x^+_{i,0} + x^+_{i,0}h_{i,1});$$

$$[h_{m,1}, x^+_{m,1}] - [x^+_{m,2}, h_{m,0}] = 0 \quad \text{или} \quad [h_{m,1}, x^+_{m,1}] = -[h_{m,0}, x^+_{m,2}].$$

Выбирая в этих формулах вначале знак + и коммутируя с $x^-_{i,0}$, получаем:

$$[h_{i,2}, x^+_{i,0}] = [h_{i,1}, x^+_{i,1}] + (h_{i,1}x^+_{i,0} + x^+_{i,0}h_{i,1}).$$

Аналогично, $[h_{i,2}, x^-_{i,0}] = [h_{i,1}, x^-_{i,1}] + (h_{i,1}x^-_{i,0} - x^-_{i,0}h_{i,1})$. Так как

$$[\tilde{h}'_{i,1}, h_{i,2}] = 0, \quad \text{то} \quad [h_{i,2}, x^\pm_{i,l}] = [h_{i,1}, x^\pm_{i,l+1}] \pm (h_{i,1}x^\pm_{i,l} - x^\pm_{i,l}h_{i,1}),$$

$$[h_{m,2}, x^\pm_{m,0}] = -[h_{m,0}, [\tilde{h}'_{m,2}, x^\pm_{m,1}]] = 0. \tag{4.5.82}$$

Коммутируя это равенство с $\tilde{h}'_{m+1,1}$ получим, что

$$[h_{m,2}, x^\pm_{m,l}] = 0;. \tag{4.5.83}$$

B)

Лемма 4.5.3. *Формулы (4.5.49), (4.5.50) имеют место при $k, l \in Z_+$, $i = j$.*

Доказательство. Пусть $x^\pm(i,k,l) := [x^\pm_{i,k+1}, x^\pm_{i,l}] - [x^\pm_{i,k}, x^\pm_{i,l+1}] \mp b_{ii}(x^\pm_{i,k}x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l}x^\pm_{i,k})$, $i \in I \setminus \tau$; $x^\pm(m,k,l) := [x^\pm_{m,k+1}, x^\pm_{m,l}]$, $m \in \tau$. Отметим, что $x^\pm(i,k,l) = 0$ для $0 \leq l < k \leq 2$. Прокоммутируем $x^\pm(m,k,l)$ с $\tilde{h}'_{m+1,1}$ и получим $[\tilde{h}'_{m+1,1}, x^\pm(m,k,l)] = \mp x^\pm(m,k+1,l) \mp x^\pm(m,k,l+1) = 0$. Ещё раз прокоммутировав с $\tilde{h}'_{m+1,1}$ получим:

$$x^\pm(m,k+2,l) + 2x^\pm(m,k+1,l+1) + x^\pm(m,k,l+2) = 0.$$

С другой стороны, после коммутации с $\tilde{h}'_{m+1,2}$ получим:

$$x^\pm(m,k+2,l) + x^\pm(m,k,l+2) = 0.$$

Решая эту систему, получим, что: $x^\pm(m,k+1,l+1) = 0$. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $x^\pm(i,p,l) = 0 \Rightarrow$

$$x^\pm(m,k+2,l) + 2x^\pm(m,k+1,l+1) + x^\pm(m,k,l+2) = 0. \tag{4.5.84}$$

$$x^\pm(m,k+2,l) + x^\pm(m,k,l+2) = 0. \tag{4.5.85}$$

Получаем, что

$$x^\pm(j,p,l) = 0 \ \rightarrow \ x^\pm(j,p+2,l) + x^\pm(j,p,l+2) = 0, \tag{4.5.86}$$

$$x^\pm(j,p,l) = 0 \ \rightarrow \ x^\pm(j,p+1,l+1). \tag{4.5.87}$$

Из (4.5.84), (4.5.86) и предыдущих рассуждений получаем, что $x^\pm(j,p,l) = 0$ для $0 \leq l \leq p \leq 2$. Пусть равенство $x^\pm(j,p,l) = 0$ имеет место для $0 \leq l \leq p \leq s$, где $s \geq 2$. Применяя предыдущие рассуждения получаем, что $x^\pm(j,p,l) = 0$ для $0 \leq l \leq p \leq s+1$. Лемма доказана. □

C) Сейчас мы докажем формулы

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad k + l \leq s, \quad k \geq l. \tag{4.5.88}$$

$$[x^+_{i,s}, x^-_{i,0}] = [x^+_{i,s-1}, x^-_{i,1}] = \ldots = [x^+_{i,0}, x^-_{i,s}]; \tag{4.5.89}$$

$$[h_{m,k}, x^\pm_{m,l}] = [h_{m,k-1}, x^\pm_{m,l+1}] = 0; \tag{4.5.90}$$

$$[h_{i,k}, x^\pm_{j,l}] = [h_{i,k-1}, x^\pm_{j,l+1}] \pm b_{ij}(h_{i,k}x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l}h_{i,k}), \tag{4.5.91}$$

$(i \in I \setminus \tau \quad$ или $\quad j \in I \setminus \tau)$.

Мы будем различать случаи $j \in I \setminus I(\tau)$ и $j \in I(\tau)$, предполагая, что $i \neq j$ и $i \in I \setminus I(\tau)$. При этом мы будем использовать индукцию по s. Для $s = 3$ эти формулы уже доказаны ранее. Предположим, что они выполняются для $s = r$ и пусть $r = 2p-1$ — нечётно вначале. Так как $[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0$ для $l \leq p$, то коммутируя (4.5.90), (4.5.91) с $\tilde{h}'_{m+1,m}$, $m \in I(\tau)$, $\tilde{h}'_{i,i}$, соответственно, получим, что эти формулы справедливы для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_+$. С другой стороны:

$$0 = [h_{i,p}, h_{i,p}] = [h_{i,p}, \tilde{h}'_{i,p}] = [[x^+_{i,p}, x^-_{i,0}], \tilde{h}'_{i,p}] =$$
$$= -2[x^+_{i,2p}, x^-_{i,0}] - [x^+_{i,p}, x^-_{i,p}]. \tag{4.5.92}$$

Коммутируя $\tilde{h}'_{i,1}$ с обеими частями (4.5.89), а $\tilde{h}'_{m+1,1}$ с обеими частями (4.5.90) при $s = 2p-1$, получим:

$$[x^+_{i,2p}, x^-_{i,0}] - [x^+_{i,2p}, x^-_{i,1}] = [x^+_{i,2p}, x^-_{i,0}]-$$
$$- [x^+_{i,2p-1}, x^-_{i,1}] = \ldots = [x^+_{i,1}, x^-_{i,2p-1}] - [x^+_{i,0}, x^-_{i,2p}]. \tag{4.5.93}$$

Аналогично (4.5.92) имеем

$$0 = [h_{i,p}, h_{j,p}] = [h_{i,p}, \tilde{h}'_{j,p}] = [[x^+_{i,p}, x^-_{i,0}], \tilde{h}'_{j,p}] = [x^+_{i,2p}, x^-_{i,0}]-$$
$$[x^+_{i,p}, x^-_{i,p}]. \tag{4.5.94}$$

Сравнивая (4.5.86 – 4.5.89), получаем, что (4.5.89) выполняется для $s = 2p = r + 1$.

Для $q < p$ имеют место следующие равенства:

$$[h_{i,r-q}, h_{j,q+1}] = [[x^+_{i,r-q}, x^-_{i,0}], \tilde{h}'_{j,q+1}] = [x^+_{i,r+1}, x^-_{i,0}]-$$
$$[x^+_{i,r-q}, x^-_{i,q+1}] = 0.$$

Отсюда следует, что (4.5.88) выполняется для $s = r+1$. Для доказательства индукционного шага, относящегося к формулам (4.5.91), (4.5.90) достаточно прокоммутировать $\tilde{h}'_{i,1}$, $\tilde{h}'_{m+1,m}$ с этими формулами при $s \leq r + 1$, получим (4.5.91), (4.5.90) с $s = r + 1$. Таким образом индукционный шаг в случае нечётного $r = 2p - 1$ обоснован.

Пусть теперь $r = 2p$ — чётно. Коммутируя $\tilde{h}'_{i,1}$, $\tilde{h}'_{m+1,m}$ с (4.5.88) при $s = 2p$, получим:

$$[x^+_{i,2p+1}, x^-_{i,0}] - [x^+_{i,2p}, x^-_{i,1}] = [x^+_{i,2p}, x^-_{i,0}]-$$
$$- [x^+_{i,2p-1}, x^-_{i,2}] = \ldots = [x^+_{i,1}, x^]_{i,2p} - [x^+_{i,0}, x^-_{i,2p+1}]; \tag{4.5.95}$$

Из (4.5.88) следует, что $[h_{i,p}, h_{j,l}] = 0$, $l \leq p$, следовательно можно определить $\tilde{h}'_{i,p}$. Нетрудно видеть, что:

$$[h_{i,p+1}, h_{i,p}] = [h_{i,p+1}, \tilde{h}'_{i,p}] = [[x^+_{i,p+1-q}, x^-_{i,q}], \tilde{h}'_{i,p}] =$$
$$= -(\alpha_i, \alpha_i)([x^+_{i,2p+1-q}, x^-_{i,q}] - [x^+_{i,p+1-q}, x^-_{i,p+q}]). \tag{4.5.96}$$

С другой стороны:

$$[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = [h_{i,p+1}, [x^+_{j,p-1}, x^-_{j,1}]] =$$

$$= [[h_{i,p+1}, x^+_{j,p-1}], x^-_{j,1}]] + [x^+_{j,p-1}, [h_{i,p+1}, x^-_{j,1}]].$$

Применяя(4.5.90), (4.5.91) несколько раз, получим, что последнее равенство совпадает с

$$[h_{i,0}, x^+_{j,2p}], x^-_{j,1}]] + b_{ij}\left[\sum_{0\le l\le p}(h_{i,p-l}x^+_{j,p+l-1} + x^+_{j,p+l-1}h_{i,p-l}), x^-_{j,1}\right]$$

$$+[x^+_{j,p-1}[h_{i,0}, x^-_{j,p+2}]] + b_{ij}\left[x^+_{j,p-1}, \sum_{0\le l\le p}(h_{i,p-l}x^-_{j,p+l-1} + x^-_{j,p+l-1}h_{i,p-l})\right] =$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)([x^+_{j,2p}, x^-_{j,1}] - [x^+_{j,p-1}, x^-_{j,p+2}])+$$

$$+b_{ij}\sum_{0\le t\le p}([h_{i,p-t}x^+_{j,p+t-1} + x^-_{j,p+t-1}h_{i,p-t}, x^-_{i,1}] + [x^+_{j,p-1}, h_{i,p-t}x^-_{j,t+1} + x^-_{j,t+1}h_{i,p-t}]).$$

В $Y(\mathfrak{g})$ левая часть последнего равенства равна 0, равно как и первый член правой части. Значит равна нулю и сумма, стоящая в правой части. С другой стороны в $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ эта сумма также равна 0, так как у элементов этой суммы, суммы вторых индексов мономов этой суммы меньше $2p$ и по индукционной гипотезе такие элементы в $Y(G)$ и в $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ совпадают. Последнее равенство в $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ может быть переписано в виде:

$$[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = (\alpha_i, \alpha_j)([x^+_{i,2p}, x^-_{i,1}] - x^+_{i,p-1}, x^-_{j,p+2}]).$$

Сравнивая с (4.5.96), получаем, что

$$[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = -[h_{i,p+1}, h_{j,p}] = 0.$$

Таким образом, индукционный шаг $s = 2p+1 = r+1$ для формулы (4.5.88) совершён. Отсюда следует и доказательство индукционного шага для формулы (4.5.88). Из формул (4.5.88), (4.5.89) следуют формулы (4.5.90), (4.5.91) (поскольку вторая из них является частным случаем первой).

D) Нам осталось доказать формулы (4.5.49), (4.5.50) при $i \neq j$, а также дополнительные соотношения Серра (4.5.52) – (4.5.67). Доказательства первых двух формул похожи. Докажем, например, (4.5.49). Пусть

$$x^\pm(i,j;k,l) = [x^\pm_{i,k+1}, x^\pm_{j,l}] - [x^\pm_{i,k}, x^\pm_{j,l+1}] \mp b_{ij}(x^\pm_{i,k}x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l}x^\pm_{i,k}).$$

Прокоммутируем это равенство с $\tilde{h_{i,1}}'$ и потом независимо с $\tilde{h'_{j,p}}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{ii}x^\pm(i,j;k+1,l) - a_{ij}x^\pm(i,j;k,l+1) = 0, \\ a_{ji}x^\pm(i,j;k+1,l) - a_{jj}x^\pm(i,j;k,l+1) = 0 \end{cases}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля то отсюда следует, что $x^\pm(i,j;k+1,l) = 0$, $x^\pm(i,j;k,l+1) = 0$. Так как $x^\pm(i,j;0,0) = 0$ то отсюда следует справедливость (4.5.49) для всех k, l, при $i \neq j$.

Осталось доказать справедливость соотношений Серра для различных типов базисных суперальгебр Ли, то есть соотношения (4.5.52) – (4.5.67). Рассмотрим сначала случай соотношений Серра для янгиана суперальгебры Ли типа $D(m,n)$, $m \neq 0$. Заметим сначала, что соотношения Серра в которых участвуют только корневые образующие, соответствующие только белым простым корням уже рассмотрены в главе 2, где и приведён их вывод. Поэтому мы здесь остановимся только на выводе соотношений Серра в которых участвуют корневые образующие, соответствующие серым или чёрным простым корням.

Рассмотрим сначала соотношений Серра в случае янгиана $Y(D(m,n))$.

Обозначим через

$$x_1(m+n;k,s,l) := [x^{\pm}_{m+n,k},[x^{\pm}_{m+n,s},x_{m+n-1,l}]]+[x^{\pm}_{m+n,s},[x^{\pm}_{m+n,k},x^{\pm}_{m+n-1,l}]], \quad (4.5.97)$$

$$x_3(m+n;k,s,l) := [x^{\pm}_{m+n,k},[x^{\pm}_{m+n,s},x_{m+n-2,l}]]+[x^{\pm}_{m+n,s},[x^{\pm}_{m+n,k},x^{\pm}_{m+n-2,l}]], \quad (4.5.98)$$

$$x_2(n;k,t) := [[x^{\pm}_{n-1,k},x^{\pm}_{n,0}],[x^{\pm}_{n,0},x^{\pm}_{n+1,t}]]. \quad (4.5.99)$$

Выведем сначала соотношение (4.5.60) — (4.5.63) из соотношения (4.5.31) – (4.5.34). Отметим, что этот вывод ничем не отличается от аналогичного вывода для янгиана простой алгебры Ли, поскольку в упомянутых выше соотношениях фигурируют лишь корневые образующие, соответствующие простым белым корням. Но для полноты изложения мы приведём вывод этих соотношений. Ограничимся выводом соотношения (4.5.62), (4.5.63) из соотношений (4.5.33), (4.5.34). Начнём с вывода соотношения (4.5.62). Вывод соотношения (4.5.63) дословно повторяет вывод соотношения (4.5.62).

Прокоммутируем сначала $h'_{m+n,1}$ с соотношением (4.5.33):

$$[h'_{m+n,1},x_1(m+n;0,0,0)] = 2x_1(m+n;1,0,0)+2x_1(m+n;0,1,0)+a_{m+n,m+n-1}x_1(m+n;0,0,1) = 0.$$

Прокоммутируем теперь $h'_{m+n-1,1}$ с соотношением (4.5.33). Получим, что $x_1(m+n;0,0,1) = 0$. Таким образом,

$$x_1(m+n;1,0,0)+x_1(m+n;0,1,0) = 0.$$

Далее рассуждения проводятся по индукции. Пусть соотношение

$$x_1(m+n;k,s,l) = 0 \quad (4.5.100)$$

справедливо при $k \leq n_1$, $s \leq n_2$, $l \leq n_3$. Докажем его справедливость при $k = n_1+1$, $s = n_2+1$, $l = n_3+1$. Прокоммутируем $h'_{m+n-1,1}$ с соотношением $x_1(m+n;n_1,n_2-1,n_3) = 0$. Получим:

$$[h'_{m+n-1,1},x_1(m+n;n_1,n_2-1,n_3)] = a_{m+n-1,m+n}(x_1(m+n;n_1+1,n_2-1,n_3)+x_1(m+n;n_1,n_2,n_3)) = 0.$$

Поскольку, по индукционному предположению $x_1(m+n;n_1,n_2,n_3) = 0$, получаем, что $x_1(m+n;n_1+1,n_2-1,n_3) = 0$. Таким образом, мы получили, что соотношение (4.5.100) выполняется при всех k, $l < n_2$, $s \leq n_3$. Коммутируя это соотношение с $h'_{m+n-1,1}$ убеждаемся, что оно справедливо также и при всех l. Коммутируя с $h'_{m+n,1}$ аналогично получаем, что соотношение (4.5.100) справедливо и при всех s.

Выведем теперь соотношение (4.5.59) из соотношений (4.5.30). Соотношение

$$x_2(n;1,0) = 0$$

совпадает с соотношением (4.5.30). Прокоммутируем $h'_{n,1}$ с (4.5.30) (при $k=1$):

$$[h'_{n,1},x_2(n;1,0)] = x_2(n;2,0)+x_2(n;1,1) = 0. \quad (4.5.101)$$

Прокоммутировав $h'_{n,1}$ с (4.5.30) (при $k=0$) получим

$$[h'_{n,1}, x_2(n;0,0)] = x_2(n;1,0) + x_2(n;0,1) = 0. \qquad (4.5.102)$$

Вычитая из (4.5.101) соотношение (4.5.102) мы получим соотношение

$$x_2(m;2,0) + x_2(m;0,0) = 0.$$

Так как $x_2(m;0,0) = 0$ в силу (4.5.30) (при $k = 0$), получаем, что $x_2(n;2,0) = 0$. Учитывая (4.5.101) получаем, что $x_2(n;1,1) = 0$. Аналогично доказываем и равенство $x_2(n;0,2) = 0$. Пусть теперь соотношения

$$x_2(n;t_1,t_2) = 0$$

справедливы при $t_1, t_2 \leq N$. Докажем его справедливость и при $t_1 = N+1$. Прокоммутируем $h'_{n,1}$ с $x_2(n;N,t_2-1) = 0$. Получим

$$[h'_{n,1}, x_2(n;N,t_2-1)] = x_2(n;N+1,t_2-1) + x_2(n;N,t_2) = 0.$$

Поскольку по индукционному предположению $x_2(n;N,t_2) = 0$, получаем, что

$$x_2(n;N+1,t_2-1) = 0.$$

Таким образом,

$$x_2(n;t_1,t_2) = 0 \qquad (4.5.103)$$

при всех t_1 и $t_2 < N$.

Теперь коммутируем $h'_{n,1}$ с $x_2(n;t_1,N-1) = 0$. Получаем, что

$$[h'_{n,1}, x_2(n;t_1,N-1)] = x_2(n;t_1+1,N-1) + x_2(n;t_1-1,N) = 0.$$

Учитывая, что по индукционному предположению $x_2(n;t_1+1,N-1) = 0$ получаем, что

$$x_2(n;t_1-1,N) = 0$$

и соотношение (4.5.59) доказано.

□

4.6 Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана базисной супералгебры Ли

4.6.1 Формулировка теоремы

Доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ повторяет в основных чертах доказательство этой теоремы для частного случая – янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ (см. главу 2, параграф 2.3). По существу меняется лишь вид соотношений Серра, которые используются лишь при построении точного представления, на существовании которого основано доказательство линейной независимости элементов ПБВ-базиса. В основе полноты базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта лежит такой специальный способ упорядочивания системы образующих, что при перестановке сомножителей с использованием коммутационных соотношений появлялись слагаемые меньшего порядка, относительно выбранного порядка. В нашем случае такой выбор порядка основан на выборе порядка на некотором множестве корней аффинной системы вещественных корней, которые параметризуют образующие янгиана. Мы показываем, что эта общая схема может быть всегда реализована в случае янгиана произвольной базисной супералгебры Ли. Мы относительно сжато повторим элементы общей схемы доказательства и несколько подробнее остановимся на доказательстве линейно независимости элементов ПБВ-базиса. Отметим, что важным элементом доказательства линейной независимости элементов ПБВ-базиса является обоснование продолжаемости фундаментального представления базисной супералгебры Ли до представления её янгиана (частично вынесенное в приложение). Сначала напомним основные определения, которые используются при доказательстве. Будем называть степенью образующих $x^{\pm}_{i,k}$, $h_{i,k}$ их второй индекс. Степенью монома от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. Степенью многочлена от образующих будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Степенью тензорного произведения мономов будем называть сумму степеней тензорных сомножителей. Степенью тензорного полинома будем как и выше называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином.

Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли (Будем предполагать сначала, что матрица Картана симметризуема. (Для простоты можно считать, что $\mathfrak{g} = D(m,n)$.) Случай несимметризуемой матрицы Картана мы также рассматриваем). Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g})$ степени не выше чем k через $Y(\mathfrak{g})$. Получаем на $Y(\mathfrak{g})$ фильтрацию:

$$0 = Y(\mathfrak{g})_{-1} \subset Y(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{g}) \subset Y(\mathfrak{g})_1 \subset \ldots \subset Y(\mathfrak{g})_k \subset Y(\mathfrak{g})_{k+1} \subset \ldots$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{g})$. Пусть $\alpha = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_p}$ — разложение положительного корня в сумму таких корней, что

$$x^{\pm}_{\alpha} = [x^{\pm}_{i_1}, [x^{\pm}_{i_2}, \ldots [x^{\pm}_{i_{p-1}}, x^{\pm}_{i_p}] \ldots]]$$

является ненулевым корневым вектором из $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$. Пусть $k = k_1 + \ldots + k_p$, $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}_+ \times \ldots \times \mathbb{Z}_+ = Z^p_+$. Определим корневые векторы формулами

$$x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}} = [x^{\pm}_{i_1,k_1}, [x_{i_2,k_2}{}^{\pm}, \ldots [x^{\pm}_{i_{p-1},k_{p-1}}, x^{\pm}_{i_p,k_p}] \ldots]],$$

$$x_{\pm\alpha,\bar{k}} = x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}},\ h_{\alpha,\bar{k}} = [x^{+}_{\alpha,0}, x^{-}_{\alpha,\bar{k}}],\ h_{i,\bar{k}} = h_{\alpha_i,\bar{k}}. \tag{4.6.1}$$

Нетрудно проверить, что если $k = k'_1 + \ldots, k'_p$ — другое разложение числа k, $\bar{k}' = (k'_1, \ldots, k'_p)$ то

$$x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}} - x^{\pm}_{\alpha,\bar{k}'} \in Y(G)_{k-1}, \quad h_{\alpha,\bar{k}} - h_{\alpha,\bar{k}'} = Y(G)_{k-1}. \tag{4.6.2}$$

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (то есть по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k+l-1}$) коммутационные соотношения в $Y(\mathfrak{g})$ имеют вид:

$$[h_{\alpha,\bar{k}}, x_{\beta,\bar{l}}] = (\alpha,\beta) x_{\beta,\bar{k}+\bar{l}}; \quad [h_{\alpha,\bar{k}}, h_{\beta,\bar{l}}] = 0; \tag{4.6.3}$$

$$[x_{\alpha,\bar{k}}, x_{\beta,\bar{l}}] = \begin{cases} 0, & \alpha+\beta \notin \Delta U\{0\}, \\ h_{\alpha,\bar{k}+\ barl}, & \beta = -\alpha, \\ N(\alpha,\beta) x_{\alpha+\beta,\bar{k}+\bar{l}}, & \alpha+\beta \in \Delta, \end{cases} \tag{4.6.4}$$

где $N(\alpha,\beta)$ (так же как и параграфе 2.3, главы 2) определяется из следующего соотношения в $U(\mathfrak{g})$ $[x_\alpha, x_\beta] = N(\alpha,\beta) x_{\alpha+\beta}$, для $\alpha+\beta \in \Delta$.

Для каждого числа k зафиксируем вектор $\bar{k}$, определяющий разбиение этого числа.

Сейчас мы введём линейный порядок $<$ на множестве $\{x^{+}_{\alpha,\bar{k}}, x^{-}_{\beta,\bar{l}}, h_{j,m}\}$, $\alpha,\beta \in \Delta$, $j \in I$, $k,l,m \in Z_+$ и обозначим через $\Omega(<)$ множество упорядоченных мономов от $x^{+}_{\alpha,\bar{k}}$, $x^{-}_{\beta,\bar{l}}$, $h_{j,m}$. Наша задача показать, что $\Omega(<)$ — ПБВ-базис янгиана $Y(\mathfrak{g})$.

Линейный порядок выберем следующим образом (см. также главу 2, параграф 2.3): пусть $\beta(1) < \ldots < \beta(N)$ — линейный порядок на Δ_+. Потребуем, чтобы

$$x^+_{\alpha,\bar{k}} \prec h_{j,\bar{l}} \prec x^-_{\beta,\bar{s}}, \quad \text{для} \quad \forall \alpha, \beta, j, k, l, s;$$

если $i < j$ то $x^{\pm}_{\beta(i),\bar{k}} \prec x^{\pm}_{\beta(j),\bar{l}}$ и $h_{i,\bar{k}} \prec h_{j,\bar{l}}$ для $\forall k, l$;
если $k < l$ тогда $x^{\pm}_{\beta(i),\bar{k}} \prec x^{\pm}_{\beta(i),\bar{l}}$ и $h_{j,\bar{k}} \prec h_{j,\bar{l}}$, для всех $i, j \in \Gamma$.

Теорема 4.6.1. $\Omega(\prec)$ *— базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта янгиана* $Y(\mathfrak{g})$.

4.6.2 Доказательство теоремы

Доказательство. Доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана базисной супералгебры Ли повторяет в общих чертах доказательство этой теоремы для частного случая – янгиана специальной линейной супералгебры Ли (см. также главу 2, параграф 2.3). Докажем полноту $\Omega(\prec)$. Для монома M из $\Omega(\prec)$ определим его длину $l(M)$ как число множителей — образующих входящих в M. При переупорядочивании сомножителей составляющих мономов в силу определяющих соотношений (4.6.3), (4.6.4) мы будем получать дополнительные слагаемые либо меньшей степени, либо той же степени и меньшей длины. Используя индукцию получаем, что $Y(\mathfrak{g})$ совпадает с линейной оболочкой элементов из $\Omega(\prec)$. Действительно, любой моном, состоящий из одной корневой образующей очевидным образом является элементом системы $\Omega(\prec)$. Пусть любой моном M длины $l(M) \leq n$ может быть перупорядочен таким образом, что он представим в виде суммы мономов из $\Omega(\prec)$, степеней меньше либо равных n. Рассмотрим теперь произвольный моном степени $l(M) = n + 1$. Представим его в виде $a \cdot M_1$, где $l(M_1) = n$. Переупорядочим элементы из M_1, так, чтобы представить M_1 в виде суммы элементов из $\Omega(\prec)$. Тогда мы можем, используя коммутационные соотношения в янгиане переставить элемент a так, что мы превратим каждый моном в сумму элементов из $\Omega(\prec)$. Таким образом полнота семейства элементов из $\Omega(\prec)$ доказана.

Докажем теперь линейную независимость мономов из $\Omega(\prec)$. Это более сложная часть доказательства. Это доказательство основано на существовании представления ρ янгиана $Y(\mathfrak{g})$, которое обладает тем свойством, что $\rho(x^+_{i,0})$, $\rho(x^-_{i,0})$, $\rho(h_{i,0})$ линейно независимы. Здесь существенным образом используется вид системы определяющих соотношений. Можно построить (см. ниже) исходя из вида определяющих соотношений янгиана базисной супералгебры Ли (именно, соотношений (4.5.44) – (4.5.51)) представление ρ, обладающее тем свойством, что $\rho\Big|_{U(\mathfrak{g})}$ — фундаментальное представление. Существование такого представления выше (см. главу 2, параграф 2.3) было показано в случае янгиана специальной линейной супералгебры Ли. В случае янгиана произвольной базисной супералгебры Ли доказательство этого факта громоздко и основано на явных конструкциях фундаментальных представлений базисных супералгебр Ли и анализе системы определяющих соотношений янгианов базисных супералгебр Ли.

Предположим, что мономы из $\Omega(\prec)$ не являются линейно независимыми. Тогда найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_s \in C \setminus \{0\}$ и мономы $M_1, \ldots, M_s \in \Omega(\prec)$, что

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j M_j = 0. \tag{4.6.5}$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию. Мы будем использовать автоморфизмы τ_α, $\alpha \in C$, (см. параграф 2.3 главы 2, а также работы [106], [120]), задаваемые на образующих формулами:

$$\tau_\alpha(h_{i,k}) = \sum_{0\leq r\leq k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} a^{k-r} h_{i,r};$$

$$\tau_\alpha(x^\pm_{i,k}) = \sum_{0\leq r\leq k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} a^{k-r} x^\pm_{i,r}.$$

Пусть

$$\rho_0 : Y(\mathfrak{g}) \to End(V)$$

такое представление $Y(\mathfrak{g})$, что $\rho_0(x^+_{\alpha,0})$, $\rho_0(x^-_{\alpha,0})$, $\rho_0(h_{i,0})$ — линейно независимы. Например, ρ_0 – продолжение на янгиан $Y(\mathfrak{g})$ фундаментального представления универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g})$. Существование такого представления отмечено выше. Дальнейшие рассуждения, по существу, повторяют рассуждения из параграфа 2.3 главы 2 при доказательстве линейной независимости ПБВ-базиса в теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Пусть L — максимальная из длин мономов $M_1, \ldots, M_s$. Перемножая тензорно ρ_0 на себя достаточное число раз, мы можем сконструировать такое представление

$$\rho: \; Y(\mathfrak{g}) \to End(V)$$

(являющееся тензорной степенью исходного представления ρ_0), что все мономы от $\rho(x^\pm_{\alpha,0})$, $\rho(h_{i,0})$ с $l(M) \leq L$ линейно независимы. Определим представление

$$\tilde{\rho}: \; Y(\mathfrak{g}) \to End\,\tilde{V} := End(V) \otimes \mathbb{C}[a]$$

формулой

$$\tilde{\rho}(x)(a) = (\rho \circ \tau_\alpha)(x),$$

$x \in Y(\mathfrak{g})$. Применяя $\tilde{\rho}$ к обеим частям (4.6.5) и выбирая в (4.6.5) члены старшей степени, соответствующей a, видим, что (4.6.5) должно иметь место для некоторых одночленов степеней $d = d(M_j)$. Если

$$M_j = \prod_{\alpha\in\Delta_+} M^+_{j,\alpha} \cdot \prod_{r=1}^{n} M^0_{i,r} \cdot \prod_{\alpha\in\Delta_+} M^-_{r,\alpha},$$

где

$$M^\pm_{j,\alpha} = \prod_{k\in Z_+} x^{\pm^{m^\pm(\alpha,k,j)}}_{\alpha,k},$$

$$M^0_{j,r} = \prod_{k\in\mathbb{Z}_+} h^{m^0(r,k,j)}_{r,k}$$

с конечным множеством ненулевых показателей. Легко проверить, что множества $m^\pm(i,j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m^\pm(\alpha,k,j)$, $m^0(i,j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)$ — не зависят от j. Поэтому можно считать, что множества

$$I^\pm_j = \{i \big| m^\pm(i,j) > 0\}, \quad I^0_j = \{i \big| m^0(i,j) > 0\}$$

не зависят от j. Обозначим их через $I^{\pm}$, I^0, соответственно. Пусть $p = \operatorname{card} I^+ + \operatorname{card} I^- + \operatorname{card} I^0$, где $cardX = |X|$ обозначает мощность множества X. Используя индукцию по p покажем, что это предположение приводит к противоречию. Пусть $p = 1$. Тогда либо

$$M_j = M_{j,i}^0, \quad M_j = M_{j,i}^+,$$

либо $M_j = M_{j,i}^-$. Пусть

$$M_j = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} h_{r,k}^{m^0(r,k,j)}$$

с $d = d(M_j) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)k$ и

$$m = m^0(i,j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)$$

которые уже не зависят от j. Рассмотрим действие $Y(\mathfrak{g})$ на

$$(V \otimes \mathbb{C}[a_1]) \otimes (V \otimes \mathbb{C}[a_2]) \otimes \ldots \otimes (V \otimes \mathbb{C}[a_m]).$$

Используя определения коумножения, автоморфизмов τ_α и выбирая члены старшей степени, получаем, что

$$\sum_{1 \le j \le s} c_j \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} (ha_1^k \otimes 1^{\otimes(m-1)} + 1 \otimes ha_2^k \otimes 1^{\otimes(m-2)} + \ldots + 1^{\otimes(m-1)} \otimes ha_m^k)^{m_{kj}} = 0,$$

где $h = \rho(h_{i0})$, $m_{kj} = m^0(i,k,j)$. Переставляя круглые скобки соберём члены в форме $f(a_1, \ldots, a_m)h^{\otimes m}$, где f — моном от $a_1, \ldots, a_m$. Из этих членов выберем члены с наибольшей a_1-степенью; из отобранных членов выберем члены с наибольшей a_2-степенью и так далее. В конце концов получим член в котором степени $\{m(i,k,j) \big| k \in \mathbb{Z}_+\}$, $1 \le j \le s$, взаимно различны. Следовательно, равенство (4.6.5) с которого мы начали рассуждения, не может иметь места.

Предположим теперь, что линейная независимость доказана для всех мономов с $p \le l$, где $l \ge 1$ и имеет место равенство (4.6.5) с $c_j \ne 0$ и $p(M_j) = l + 1$. Применяя Δ к (4.6.5), переставим круглые скобки и выберем члены старшей степени. После чего, предполагая, что нашлось такое i, что $M_{ji}^+ = I$ (другие случаи рассматриваются аналогично), мы выберем все члены в форме

$$\sum_{r \le j \le s} c_j M_{ji}^+ \otimes \prod_{\substack{r \ne i \\ 1 \le r \le N}} M_{jr}^+ \prod_{1 \le q \le N} M_{qr}^0 \prod_{1 \le r \le N} M_{jr}^-.$$

Обозначая правые тензорные сомножители через N_{ji} получим

$$\sum_{1 \le j \le s} c_j M_{ji}^+ \otimes N_{ji} = 0. \tag{4.6.6}$$

Так как $M_1, \ldots, M_s$ взаимно различны, то таковы либо $M_{1i}^+, \ldots, M_{si}^+$ либо $N_{1i}, \ldots, N_{si}$. Но $p(M_{1i}^+) = \ldots = p(M_{si}^+) = 1 \le p$ и $p(N_{1i}) = \ldots = p(N_{si}) = p$, следовательно, согласно индукционному предположению, из (4.6.6) следует, что $c_1 = \ldots = c_s = 0$. Теорема доказана. $\square$

4.7 Квантовый дубль янгиана базисной супералгебры Ли

Я напомню, что янгиан $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [140], [180], параграф 1.7 главы 1 данной работы, а также параграф 4.5 данной главы) это деформация универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ полиномиальных токов (параграф 1.7 настоящей работы). При этом структура бисупералгебры Ли определяется коциклом

$$\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \bigwedge \mathfrak{g},$$

где

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r(u, v)], \tag{4.7.1}$$

где

$$r(u, v) = \frac{\mathfrak{t}}{u - v},$$

а $\mathfrak{t}$ – оператор Казимира, определяемый невырожденным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ (которое существует на базисной супералгебре Ли (см. [140])). Другими словами пусть $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные относительно этого скалярного произведения базисы в $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$. Ниже, мы часто будем иллюстрировать общие рассуждения, рассматривая частный случай базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = D(m, n)$. Зафиксируем некоторую базисную супералгебру Ли $\mathfrak{g}$. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ как и всякая базисная супералгебра Ли определяется своей матрицей Картана, имеющей в частном случае $\mathfrak{g} = D(m, n)$ следующий вид: $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n}$. Её ненулевые элементы имеют следующий вид:
$a_{i,i} = 2, a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i < m; \quad a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1, a_{i,i} = -2, m < i < m + n, \quad i \in I = \{1, \ldots, m + n\}, \quad a_{m+n,m+n-2} = 1, a_{m+n-2,m+n} = 1.$
Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается образующими: $h_i, \quad x_i^{\pm}, \quad i \in I$. Причём образующие $x_m^{\pm}$ – нечётные, при $m \in I(\tau)$, а остальные образующие чётные, то есть функция чётности принимает на них следующие значения: $p(h_i) = 0, i \in I, p(x_j^{\pm}) = 0, j \in I \backslash I(\tau), p(x_m^{\pm}) = 1, m \in I(\tau)$. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{4.7.2}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, \tag{4.7.3}$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \tag{4.7.4}$$

$$[[x_{m+1}^{\pm}, x_{m+2}^{\pm}], [x_{m+2}^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}]] = 0, \tag{4.7.5}$$

$$ad^{1-a_{ij}}(x_i) x_j = 0. \tag{4.7.6}$$

Опишем сначала множества простых корней в важных частных случаях не исключительных базисных супералгебр Ли. Пусть $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{m+n}\}$ – множество простых корней (α_n – нече́тный серый корень, остальные корни – чётные), в случае $\mathfrak{g} = B(m, n)$, $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ – множество простых корней, в случае $\mathfrak{g} = B(0, n)$ (α_n – нечётный чёрный корень, остальные корни чётные), $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ – множество простых корней, в случае $\mathfrak{g} = C(n + 1)$ (α_1 – нечётный серый корень, остальные простые корни чётные), $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m}\}$ – множество простых корней, в случае $\mathfrak{g} = D(m, n)$ (α_m – нечётный серый корень, остальные простые корни чётные). Мы здесь не будем рассматривать следующие базисные супералгебры Ли: $F(4), G(3), D(2, 1, \alpha)$. Случай супералгебры Ли $D(m, n)$ мы будем выделять ввиду его некоторой похожести на рассмотренный выше случай специальной линейно супералгебры Ли. Отметим, что матрица Картана супералгебры Ли типа $D(m, n)$ является симметризуемой.

Пусть, далее, $\Delta(\Delta_+)$ – множество всех корней (положительных корней). Пусть также $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}, \alpha \in \Delta_+$ – базис Картана-Вейля, нормализованный условием $(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1$. Отметим, что $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$ для симметризованной матрицы Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^N$, $N = |I|$. Отметим, что $N = n+m$ в частном случае $\mathfrak{g} = D(m,n)$. Будем также использовать обозначение $b_{i,j} = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)$.

Определение 4.7.1. *Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ это супералгебра Хопфа над $\mathcal{C}$, порождённая как ассоциативная супералгебра, образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}, x^\pm_{i,k} := x^\pm_{\alpha_i,k}, i \in I, k \in Z_+$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \tag{4.7.7}$$

$$[x^+_{i,k}, x^-_{j,l}] = \delta_{i,j} h_{i,k+l}, \tag{4.7.8}$$

$$[h_{i,k+1}, x^\pm_{j,l}] = [h_{i,k}, x^\pm_{j,l+1}] + b_{ij}(h_{i,k}x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l}h_{i,k}), \tag{4.7.9}$$

$$[h_{i,0}, x^\pm_{j,l}] = \pm a_{ij} x^\pm_{j,l}, \tag{4.7.10}$$

$$[x^\pm_{i,k+1}, x^\pm_{j,l}] = [x^\pm_{i,k}, x^\pm_{j,l+1}] + b_{ij}(x^\pm_{i,k}x^\pm_{j,l} + x^\pm_{j,l}x^\pm_{i,k}), \tag{4.7.11}$$

$$\textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} [x^\pm_{i,k_{\sigma(1)}}, \ldots [x^\pm_{i,k_{\sigma(r)}}, x^\pm_{j,l}] \ldots] = 0, i \neq j, r = m_{ij} = 1 - \tilde{a}_{ij}. \tag{4.7.12}$$

Выделим отдельно дополнительные соотношения Серра. В случае янгиана $Y(B(m,n))$ они имею вид:

$$[[x^\pm_{m-1,k_1}, x^\pm_{m,0}], [x^\pm_{m+1,k_2}, x^\pm_{m,0}]] = 0. \tag{4.7.13}$$

В случае янгиана $Y(C(n+1))$ они имеют вид: они имею вид:

$$[[x^\pm_{1,0}, x^\pm_{2,k_1}], x^\pm_{3,k_2}] = 0. \tag{4.7.14}$$

В случае янгиана $Y(D(m,n))$ они имеют вид: они имею вид:

$$[[x^\pm_{m-1,k}, x^\pm_{m,0}], [x^\pm_{m,0}, x^\pm_{m+1,r}]] = 0. \tag{4.7.15}$$

Сумма берется по всем перестановкам σ множества $\{1, \ldots, r\}$. Функция чётности принимает следующие значения на образующих: $p(x^\pm_{j,k}) = 0$, для $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \backslash \tau$ $p(h_{i,k}) = 0$, для $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x^\pm_{i,k}) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i \in I(\tau)$.

Коумножение на образующих $h_{i,k}, x^\pm_{i,k}, i \in I, k = 0, 1$ определяется следующими формулами:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, x \in \mathfrak{g} \tag{4.7.16}$$

$$\begin{gathered}\Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] + h_{i,0} \otimes h_{i,0} = \\ h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} (\alpha_i, \alpha) x_{-\alpha} \otimes x_\alpha;\end{gathered} \tag{4.7.17}$$

$$\begin{gathered}\Delta(x^-_{i,1}) = x^-_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^-_{i,1} + [1 \otimes x^-_{i,0}, \mathfrak{t}_0] = \\ x^-_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^-_{i,1} + \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} [x_{-\alpha_i}, x_{-\alpha}] \otimes x_\alpha;\end{gathered} \tag{4.7.18}$$

$$\begin{gathered}\Delta(x^+_{i,1}) = x^+_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{i,1} + [x^+_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = \\ x^+_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{i,1} - \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{deg(x_\alpha)} x_{-\alpha} \otimes [x_{\alpha_i}, x_\alpha].\end{gathered} \tag{4.7.19}$$

Отметим, что универсальная обёртывающая супералгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно вложена в $Y(\mathfrak{g})$.

Введем квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Я напомню определение квантового дубля (см. параграф 1.4 главы 1 данной работы, а также параграф 2.4 главы 2). Пусть A –

супералгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда квантовым дублем DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA \otimes DA$; линейное отображение $A \otimes A^0 \to DA, a \otimes b \to ab$ – биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием квантованием классического дубля $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем коумножение в классическом дубле определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}} \oplus (-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Так как янгиан является квантованием бесконечномерной бисупералгебры Ли то при определении его квантового дубля требуется некоторая аккуратность.

Пусть $C(\mathfrak{g})$ (см. параграф 2.4, а также работы [26], [187]) супералгебра, порождённая образующими

$$h_{i,k}, \quad x^{\pm}_{i,k}, \quad i \in I, \quad k \in \mathbb{Z},$$

которые удовлетворяют вышеприведенным соотношениям (4.7.7)–(4.7.15). Если определить степень элементов в $C(\mathfrak{g})$ формулой: $deg(h_{i,k}) = deg(x^{\pm}_{i,k}) = k$, то получаем фильтрацию на $C(\mathfrak{g})$:

$$\cdots C_{-n} \subset \cdots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset \cdots \subset C_m \subset \cdots C(\mathfrak{g}), \tag{4.7.20}$$

где $C_k = \{x \in C(\mathfrak{g}) : deg(x) \leq k\}$.

Пусть $\bar{C}(\mathfrak{g})$ формальное пополнение $C(\mathfrak{g})$ относительно этой фильтрации. Образующие $x^{\pm}_{i,k}, h_{i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$ порождают подсупералгебру Хопфа $Y^+(\mathfrak{g})$ в $\bar{C}(\mathfrak{g})$, изоморфную $Y(\mathfrak{g})$. Пусть $Y^-(\mathfrak{g})$ замкнутая подсупералгебра в $\bar{C}(\mathfrak{g})$, порождённая образующими $x^{\pm}_{i,k}, h_{i,k}, i \in I, k < 0$.

Теорема 4.7.1. *Супералгебра Хопфа $Y^0(\mathfrak{g})$ изоморфна $Y^-(\mathfrak{g})$.*

Эта теорема будет вытекать из формулируемых ниже результатов. Из теоремы 4.8.1 вытекает, что супералгебра Хопфа $Y^-(\mathfrak{g})$ является квантованием бисупералгебры Ли $t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$ (с коциклом 4.7.1).

Для описания $DY(\mathfrak{g})$ удобно ввести порождающие функции

$$e^+_i(u) := \sum_{k \geq 0} x^+_{i,k} u^{-k-1}, e -_i (u) := -\sum_{k<0} x^+_{i,k} u^{-k-1},$$

$$f^+_i(u) := \sum_{k \geq 0} x^-_{i,k} u^{-k-1}, h^+_i(u) := 1 + \sum_{k \geq 0} h_{i,k} u^{-k-1},$$

$$f^-_i(u) := -\sum_{k<0} x^-_{i,k} u^{-k-1}, h_i(u) := 1 - \sum_{k<0} h_{i,k} u^{-k-1}.$$

Предложение 4.7.1. *Определяющие соотношения 4.7.7–4.7.15 в супералгебре $\bar{C}(\mathfrak{g})$ экви-*

валентны следующим соотношениям для порождающих функций

$$[h_i^{\pm}(u), h_j^{\pm}(v)] = 0, \quad [h_i^{+}(u), h_j^{-}(u)] = 0, \tag{4.7.21}$$

$$[e_i^{\pm}(u), f_j^{\pm}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h_i^{\pm}(u) - h_i^{\pm}(v)]}{u-v}, \tag{4.7.22}$$

$$[e_i^{\pm}(u), f_j^{\mp}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h_i^{\mp}(u) - h_i^{\pm}(v)]}{u-v}, \tag{4.7.23}$$

$$[h_i^{\pm}(u), e_j^{\pm}(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^{\pm}(u), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.24}$$

$$[h_i^{\pm}(u), e_j^{\mp}(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^{\pm}(u), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\mp}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.25}$$

$$[h_i^{\pm}(u), f_j^{\pm}(v)] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^{\pm}(u), (f_j^{\pm}(u) - f_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.26}$$

$$[h_i^{\pm}(u), f_j^{\mp}(v)] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^{\pm}(u), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\mp}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.27}$$

$$[e_i^{\pm}(u), e_j^{\pm}(v)] + [e_j^{\pm}(u), e_i^{\pm}(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(e_i^{\pm}(u) - e_i^{\pm}(v)), (e_j^{\pm}(u) - e_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.28}$$

$$[e_i^{+}(u), e_j^{-}(v)] + [e_j^{+}(u), e_i^{-}(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(e_i^{+}(u) - e_i^{-}(v)), (e_j^{+}(u) - e_j^{-}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.29}$$

$$[f_i^{\pm}(u), f_j^{\pm}(v)] + [f_j^{\pm}(u), f_i^{\pm}(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(f_i^{\pm}(u) - f_i^{\pm}(v)), (f_j^{\pm}(u) - f_j^{\pm}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.30}$$

$$[f_i^{+}(u), f_j^{-}(v)] + [f_j^{+}(u), f_i^{-}(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(f_i^{+}(u) - f_i^{-}(v)), (f_j^{+}(u) - f_j^{-}(v))\}}{u-v}, \tag{4.7.31}$$

$$[e_i^{\epsilon_1}(u_1), [e_i^{\epsilon_2}(u_2), e_j^{\epsilon_3}(u_3)]] + [e_i^{\epsilon_2}(u_2), [e_i^{\epsilon_1}(u_1), e_j^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0, \tag{4.7.32}$$

$$[f_i^{\epsilon_1}(u_1), [f_i^{\epsilon_2}(u_2), f_j^{\epsilon_3}(u_3)]] + [f_i^{\epsilon_2}(u_2), [f_i^{\epsilon_1}(u_1), f_j^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0, \tag{4.7.33}$$

$$[[e_m^{\epsilon_1}(u_1), e_{m+1}^{\epsilon_2}(u_2)], [e_{m+2}^{\epsilon_3}(u_3), e_{m+1}^{\epsilon_4}(u_4)]] = 0, \tag{4.7.34}$$

$$[[f_m^{\epsilon_1}(u_1), f_{m+1}^{\epsilon_2}(u_2)], [f_{m+2}^{\epsilon_3}(u_3), f_{m+1}^{\epsilon_4}(u_4)]] = 0. \tag{4.7.35}$$

Остальные соотношения Серра, различные для разных базисных супералгебр Ли, также очевидным образом переписываются в терминах производящих функций. Выпишем явно для удобства читателя эти соотношения Серра для янгианов разных серий базисных супералгебр Ли.

В случае дубля янгиана $DY(A(m,n))$:

$$[[e_{m+1,0}, e_{m+2}(u_1)], [e_{m+2}(u_2), e_{m+1,0}]] = 0, \tag{4.7.36}$$

$$[[f_{m+1,0}, f_{m+2}(u_1)], [f_{m+2}(u_2), f_{m+1,0}]] = 0. \tag{4.7.37}$$

В случае дубля янгиана $DY(D(m,n))$:

$$[[e_{m-1}(u_1), e_{m,0}], [e_{m,0}, e_{m+1}(u_2)]] = 0, \tag{4.7.38}$$

$$[[f_{m-1}(u_1), f_{m,0}], [f_{m,0}, f_{m+1}(u_2)]] = 0. \tag{4.7.39}$$

В случае дубля янгиана $DY(B(m,n))$:

$$[[e_{m-1}(u_1), e_{m,0}], [e_{m,0}, e_{m+1}(u_2)]] = 0, \tag{4.7.40}$$

$$[[f_{m-1}(u_1), f_{m,0}], [f_{m,0}, f_{m+1}(u_2)]] = 0. \tag{4.7.41}$$

В случае дубля янгиана $DY(C(n+1))$:

$$[[e_{1,0}, e_2(u_1)], e_3(u_2)] = 0, \tag{4.7.42}$$

$$[[f_{1,0}, f_2(u_1)], f_3(u_2)] = 0. \tag{4.7.43}$$

В заключение отметим, что теорема 4.8.1 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 4.7.2. *Квантовый дубль янгиана изоморфен супералгебре* $\bar{C}(\mathfrak{g})$.

4.8 Треугольное разложение и формулы спаривания

4.8.1 Треугольное разложение

Пусть $Y'_+,\quad Y'_0,\quad Y'_-$ – подсупералгебры (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порожденные элементами

$$x^+_{ik}, \quad h_{ik}, \quad x^-_{ik}, \quad i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

соответственно. Пусть $Y_+,\quad Y_0,\quad Y_-$ – подсупералгебры, получающиеся присоединением единичного элемента к подсупералгебрам $Y'_+,\quad Y'_0,\quad Y'_-$, соответственно (другими словами, их унитализации).

Предложение 4.8.1. *Умножение в* $Y(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных суперпространств*

$$Y_+ \otimes Y_0 \otimes Y_- \to Y(\mathfrak{g}). \tag{4.8.1}$$

Обобщим это предложение на $DY(\mathfrak{g})$. Для этого нам потребуются некоторые простые свойства операции коумножения на $Y(\mathfrak{g})$, доказываемые по индукции, опираясь на формулы (4.7.16– 4.7.19) и соотношения (4.7.7 – 4.7.15), а также тот факт, что операция коумножения является гомоморфизмом, то есть, что

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b).$$

Предложение 4.8.2. *1) Для произвольного* $x \in Y'_+$ *имеет место следующее равенство*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 (mod Y \otimes Y'_+).$$

2) Для произвольного $y \in Y'_-$ *имеет место равенство*

$$\Delta(y) = 1 \otimes y (mod Y'_- \otimes Y).$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на прямых вычислениях, основанных на индукции по степени образующих. Напомним, что степенью образующей мы называем её второй индекс. Проведём рассуждения для элементов из Y'_+. Пусть $x = x^+_{i,1}$. В этом случае доказываемая формула является простым следствием формул для коумножения, приведённых выше. Напомним, что $x^+_{i,n+1} = a^{-1}_{i,i}[h'_{i,1}, x^+_{i,n}]$, когда корень α_i соответствует белой вершине, и $x^+_{i,n+1} = a^{-1}_{i-1,i}[h'_{i-1,n-1}, x^+_{i,n}]$, когда корень α_i соответствует серой или чёрной вершинам. Рассмотрим случай белой вершины. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Поскольку коумножение является гомоморфизмом ассоциативных алгебр мы получаем, что

$$\Delta(x^+_{i,n+1}) = a^{-1}_{i,i}[\Delta(h'_{i,1}), \Delta(x^+_{i,n})] =$$

$$a_{i,i}^{-1}[h'_{i,1}\otimes 1+1\otimes h'_{i,1}-\sum_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha_i,\alpha)x_{-\alpha}\otimes x_\alpha, x_{i,n}^+\otimes 1+1\otimes x_{i,n}^+ +\sum a_i\otimes b_i],$$

где $a_i \in Y$, $b_i \in Y'_+$ в силу индуктивного предположения. Осталось заметить (это отмечено выше), что Y'_+ является подсупералгеброй. Это завершает рассуждения по индукции, доказывающих пункт 1 для образующих. Отсюда, в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта и того факта, что коммутатор является дифференцированием, следует справедливость пункта 1 для элементов базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта, а значит, в силу линейности коумножения, и для произвольного элемента из Y'_+. Пункт 2) доказывается аналогично. $\square$

Следствие. 1) $\Delta(Y_+)\subset Y\otimes Y_+$;
2) $\Delta(Y_-)\subset Y_-\otimes Y$.

Таким образом, мы получаем, что $Y_+(Y_-)$ является правым (левым) коидеалом в $Y = Y(\mathfrak{g})$.

Пусть также $BY'_\pm$ – подсупералгебра (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порождённая элементами $x_{i,k}^\pm, h_{j,r}$, $(i,j\in I, \quad k,r\in Z_+)$.

Предложение 4.8.3. *1) $\Delta(e)=e\otimes 1(modY\otimes BY'_+)$, для произвольного $e\in BY'_+$;*
2) $\Delta(f)=1\otimes f(modBY'_-\otimes Y)$, для произвольного $f\in BY'_-$.
3) $\Delta(h)=h\otimes 1(modY\otimes BY'_+)=1\otimes h(modBY'_-\otimes Y)$, для произвольного $f\in Y'_0$.

Свойства 1), 2) также как и аналогичные свойства в предыдущем предложении, а свойство 3) вытекает из свойств 1), 2).

Пусть

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : Y(\mathfrak{g})\otimes Y^0(\mathfrak{g})\to C$$

каноническое билинейное спаривание $Y(\mathfrak{g})$ и его двойственной супералгебры Хопфа $Y^*(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением. (Напомним, что мы обозначаем через $Y^0(\mathfrak{g})$ двойственную янгиану супералгебру Хопфа $Y^*(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением.) Из определения вытекают следующие свойства этого спаривания.

$$\langle xy, x'y'\rangle = \langle\Delta(xy), x'\otimes y'\rangle = (-1)^{p(x)p(y)}\langle y\otimes x, \Delta(x'y')\rangle,$$
$$\langle x\otimes y\rangle\langle x'\otimes y'\rangle = (-1)^{p(x)p(y)}\langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle,$$

для $\forall x,y\in Y(\mathfrak{g}), \forall x',y'\in Y^0(\mathfrak{g})$.

Пусть A,B – подсупералгебры в $Y(\mathfrak{g})$. Пусть также

$$(AB)_\perp := \{x'\in Y^0(\mathfrak{g}) : \langle ab, x'\rangle = 0, \quad \forall a\in A, b\in B\}.$$

Легко проверить, что

$$(Y\cdot BY'_-)_\perp, \quad (BY'_+\cdot Y)_\perp, \quad (Y\cdot Y'_-)_\perp, \quad (Y'_+\cdot Y)_\perp$$

являются подсупералгебрами в $Y^0(\mathfrak{g})$. Пусть

$$Y^*_+ := (Y\cdot BY'_-)_\perp, \quad BY^*_+ := (Y\cdot Y'_-)_\perp, \quad Y^*_- := (BY'_+\cdot Y)_\perp,$$

$$(BY)^*_- := (Y'_+\cdot Y)_\perp, \quad Y^*_0 := BY^*_+\bigcap BY^*_-.$$

Предложение 4.8.4. *1) Для любых*

$$x \in Y_+, \quad h \in Y_0, \quad y \in Y_-, \quad x' \in Y_+^*, \quad h' \in Y_0^*, \quad y' \in Y_-^*$$

каноническое спаривание факторизуется

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)} \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

2) Умножение в $Y^0(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных пространств:*

$$Y_+^* \otimes Y_0^* \otimes Y_-^* \to Y^0(\mathfrak{g}).$$

3) Имеет место теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для $Y^0(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Докажем 1).

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = \langle \Delta(xh) \cdot \Delta(y), x'h' \otimes y' \rangle = \langle \Delta(x)\Delta(h)\Delta(y), x'h' \otimes y' \rangle =$$

$$\langle (x \otimes 1 + \sum a_n \otimes x_n)(h \otimes 1 + \sum \tilde{a}_s \otimes \tilde{x}_s)(1 \otimes y + \sum y_m \otimes a'_m), x'h' \otimes y' \rangle =$$

$$\langle xh \otimes y, x'h' \otimes y' \rangle + \langle \sum c_r \otimes d_r, x'h' \otimes y' \rangle =$$

$$(-1)^{deg(x')deg(y)} \langle xh, x'h' \rangle \langle y, y' \rangle$$

.

Отметим, что

$$\langle \sum c_r \otimes d_r, x'h' \otimes y' \rangle = \sum_r (-1)^{deg(x')deg(d_r)} \langle c_r, x'h' \rangle \langle d_r, y' \rangle = 0.$$

Так как $\langle d_r, y' \rangle = 0$ в силу того, что $d_r \in Y_+'Y, y' \in (BY_+'Y)_\perp$. С другой стороны

$$\langle xh, x'h' \rangle = \langle (x \otimes 1 + \sum a_n \otimes x_n)(1 \otimes h + \sum y_m \otimes b_m), x' \otimes h' \rangle$$

$$= \langle x \otimes h, x' \otimes h' \rangle + 0 = \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle.$$

Отсюда и вытекает доказываемое утверждение пункта 1).

Отметим, что пункт 2 вытекает из пункта 3 теоремы. Докажем 3. По существу пункт 3 теоремы вытекает из доказанной выше теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Действительно, выберем ПБВ базис в $Y(\mathfrak{g})$. Каждый вектор этого базиса имеет вид: xhy, где $x \in Y_+, h \in H, y \in Y_-$. Тогда биортогональные векторы, в соответствии с доказанным пунктом 1 теоремы, будут иметь вид: $x'h'y'$, где $x' \in Y_+^*, h \in H^*, y \in Y_-^*$. Эти векторы также образуют базис в $Y^0(\mathfrak{g})$. Это и доказывает 3. □

Изучим это спаривание более детально. Сначала более подробно опишем ПБВ базис для $Y(\mathfrak{g})$ (сравни с [54], а также с доказательством теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта, приведённым выше в главе 2 (параграф 2.3), а также с параграфом 4.6. Пусть как и выше Δ, Δ_+ обозначает множество корней, множество положительных корней, базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим также $\hat{\Delta}^{re}$ множество вещественных корней соответствующей аффинной (нескрученной) супералгебры Ли $\mathfrak{g}^{(1)}$ (см. [140]). Для образующих $DY(\mathfrak{g})$ $x_{i,k}^{\pm}$ будем использовать следующие обозначения:

$$x_{\alpha_i + k\delta} := x_{i,k}^+, \quad x_{-\alpha_i + k\delta} := x_{i,k}^-, \quad i \in I, \quad k \in Z, \quad \alpha_i \in \Delta_+.$$

В этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{re}$. Пусть $\Xi \subset \hat{\Delta}^{re}$. Линейный порядок $\gneqq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$ и таких, что $\gamma = \alpha + \beta$ имеет место одно из следующих двух отношений порядка:
$\alpha \gneqq \gamma \gneqq \beta$ или $\beta \gneqq \gamma \gneqq \alpha$.
Введем подмножества Ξ_+, Ξ_- множества $\hat{\Delta}^{re}$:

$$\Xi_\pm := \{\pm\gamma + k\delta : \gamma \in \hat{\Delta}^{re}_+\}.$$

Введем на Ξ_+, Ξ_- выпуклые порядки $\gneqq_+, \gneqq_-$, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma + k\delta \gneqq_+ \gamma + l\delta \qquad \text{и} \quad -\gamma + l\delta \gneqq_- -\gamma + k\delta, \qquad \text{если} \quad k, l \quad \text{для} \quad \forall\gamma \in \Delta_+.$$

Определим теперь корневые векторы $x_{\pm\beta}, \beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$ по индукции следующим образом. Пусть векторы x_{β_1}, x_{β_2} уже построены. Если корень x_{β_3} таков, что: $x_{\beta_1} \gneqq x_{\beta_3} \gneqq x_{\beta_2}$ и в интервале $(x_{\beta_1}, x_{\beta_2})$ нет корней для которых уже построены корневые векторы. то определим корневые векторы $x_{\pm\beta_3}$ формулами:

$$x_{\beta_3} = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}], x_{-\beta_3} = [x_{-\beta_2}, x_{-\beta_1}].$$

Отметим, что выпуклый (нормальный) порядок связан с естественным упорядочиванием элементов аффинной группы Вейля. Нам потребуется следующее описание $Y(\mathfrak{g})$, являющееся аналогом описания квантованной аффинной супералгебры. Мы отдельно опишем нормальные порядки для янгианов разных серий базисных супералгебр Ли. Мы начнём с янгианов базисных супералгебр Ли типа $D(m, n)$. Сначала зафиксируем следующий нормальный порядок на $\mathfrak{g} = D(m, n)$:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+1}), (\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_4, \ldots, \epsilon_2 - \epsilon_{m+n+1}), \ldots (\epsilon_{m+n} - \epsilon_{m+n+1}).$$

Здесь $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$.

К простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{m+n+1}$ добавим еще аффинный корень $\alpha_0 = \delta - \theta, \theta := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m+n} = \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+1}$ – старший корень, а δ здесь и ниже – минимальный мнимый корень. Рассмотрим следующий нормальный порядок на множестве $\hat{\Delta}^{re}$ аффинных вещественных корней:

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \delta, \alpha_1 + 2\delta, \ldots, \alpha_1 + k\delta, \ldots), (\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + k\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$(\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ldots, (\ldots \alpha_{n+m} + k\delta, \ldots, \alpha_{n+m} + \delta, \alpha_{n+m}).$$

Теперь рассмотрим случай янгиана базисной супералгебры Ли типа $\mathfrak{g} = B(m, n)$:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+1}), (\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_4, \ldots, \epsilon_2 - \epsilon_{m+n+1}), \ldots (\epsilon_{m+n} - \epsilon_{m+n+1}).$$

К простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_{m+n}$ добавим еще аффинный корень $\alpha_0 = \delta - \theta$, где $\theta := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m+n} = \epsilon_1 - \epsilon_{m+n}$ – старший корень. Рассмотрим следующий нормальный порядок на множестве $\hat{\Delta}^{re}$ аффинных вещественных корней:

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \delta, \alpha_1 + 2\delta, \ldots, \alpha_1 + k\delta, \ldots), (\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + k\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$(\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ldots, (\ldots \alpha_{n+m} + k\delta, \ldots, \alpha_{n+m} + \delta, \alpha_{n+m}).$$

Общий случай нормального порядка на множестве $\hat{\Delta}^{re}$ аффинных вещественных корней для янгиана произвольной базисной супералгебры Ли получается из рассмотренного выше, например, случая янгиана $Y(A(m, n))$, заменой $m + n + 1$ на $|I|$, а $m + 1$ на t, где $\tau = \{\alpha_t\}$.

4.8.2 Формулы спаривания

Вычислим формулы спаривания для корневых векторов. Пусть $h^*_{i,k}, e^*_{i,k}, f^*_{i,k}$ – образующие $Y^* = Y_-$. Пусть $e_{i,k} := x^+_{i,k}, f_{i,k} := x^-_{i,k}$. Пусть, как и выше, $a_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$ обозначает элемент симметризованной матрицы Картана, $\alpha_i, \alpha_j \in I$ – простые корни, а $b_{i,j} = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)$.

Предложение 4.8.5. *Следующие два условия равносильны.*
1)

$$\langle e_{i,k}, e^*_{j,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l};$$

$$\langle f_{i,k}, f^*_{j,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l};$$

$$\langle h_{i,k}, h^*_{j,-l-1}\rangle = -\frac{a_{ij}k!}{l!(k-l)!} \qquad k \geq l \geq 0.$$

2)

$$[h^*_{i,-k}, h^*_{j,-l}] = 0, \tag{4.8.2}$$

$$\delta_{i,j}h^*_{i,-k-l} = [e_{i,-k}, f_{j,-l}], \tag{4.8.3}$$

$$[h^*_{i,-k-1}, e^*_{j,-l}] = [h^*_{i,-k}, e^*_{j,-l-1}] + b_{ij}(h^*_{i,-k}e_{j,-l} + e^*_{j,-l}h^*_{i,-k}), \tag{4.8.4}$$

$$[h^*_{i,-k-1}, f^*_{j,-l}] = [h^*_{i,-k}, f^*_{j,-l-1}] - b_{ij}(h^*_{i,-k}f_{j,-l} + f^*_{j,-l}h^*_{i,-k}), \tag{4.8.5}$$

$$[h^*_{i,0}, e^*_{j,l}] = a_{ij}e^*_{j,l}, \tag{4.8.6}$$

$$[h^*_{i,0}, f^*_{j,l}] = -a_{ij}f^*_{j,l} \tag{4.8.7}$$

$$[e^*_{i,-k+1}, e^*_{j,-l}] = [e^*_{i,-k}, e^*_{j,-l+1}] + b_{ij}\{e^*_{i,-k}, e^*_{j,-l}\}, \tag{4.8.8}$$

$$[f^*_{i,-k+1}, f^*_{j,-l}] = [f^*_{i,-k}, f^*_{j,-l+1}] - b_{ij}\{f^*_{i,-k}, f^*_{j,-l}\}, \tag{4.8.9}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [e^*_{i,-k_{\sigma(1)}}, \cdots [e^*_{i,-k_{\sigma(r)}}, e^*_{j,-l}]...] = 0, i \neq j, r = n_{ij} = 2 \tag{4.8.10}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [f^*_{i,-k_{\sigma(1)}}, \cdots [f^*_{i,-k_{\sigma(r)}}, f^*_{j,-l}]...] = 0, i \neq j, r = n_{ij} = 2 \tag{4.8.11}$$

$$[[e^*_{m,-k_1}, e^*_{m+1,-k_2}], [e^*_{m+2,-k_3}, e^*_{m+1,-k_4}]] = 0, \tag{4.8.12}$$

$$[[f^*_{m,-k_1}, f^*_{m+1,-k_2}], [f^*_{m+2,-k_3}, f^*_{m+1,-k_4}]] = 0. \tag{4.8.13}$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения довольно громоздко и мы, отметив основные моменты доказательства, опустим некоторые технические детали. Доказательство будет вестись по индукции, по значениям индексов k, l. Прежде всего несложно доказываются следующие формулы.

$$\Delta(e_{i,k}) = e_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes e_{i,k-r} (mod Y Y_- \otimes Y'_+);$$

$$\Delta(f_{i,k}) = f_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes e_{i,k-r} (mod Y'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(h_{i,k}) = h_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes h_{i,k-r} (mod Y Y'_- \otimes Y'_+ Y).$$

Из этих формул вытекают следующие равенства:

$$\Delta(e_{i,k}e_{j,l}) = e_{i,k}e_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,k}e_{j,l} + e_{i,k} \otimes e_{j,l} + (-1)^{deg(e_{i,k})deg(e_{j,l})} e_{j,l} \otimes e_{i,k} (mod Y Y'_- \otimes Y'_+);$$

$$\Delta(f_{i,k}f_{j,l}) = f_{i,k}f_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,k}f_{j,l} + f_{i,k} \otimes f_{j,l} + (-1)^{deg(f_{i,k})deg(f_{j,l})} f_{j,l} \otimes f_{i,k} (mod Y'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(h_{i,k}h_{j,l}) = h_{i,k}h_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,k}h_{j,l} + h_{i,k} \otimes h_{j,l} + h_{j,l} \otimes h_{i,k}(modYY'_- \otimes Y'_+ Y).$$

Используя эти формулы и определение спаривания в дубле можно по индукции доказать инвариантность этого спаривания на образующих дубля.

$$\langle [a,b], c\rangle = \langle a, [b,c]\rangle. \tag{4.8.14}$$

Доказательство этого факта основано на прямых вычислениях. Проверка делается на элементах ПБВ базиса индукцией по длине монома. Эти вычисления, по существу, такие же как и аналогичные вычисления для частного случая янгиана специальной линейной супералгебры Ли, проведённые в главе 2. Так же, как и там, важную роль играет хопфово спаривание, определяемое следующими равенствами.

$$\langle ab, cd\rangle = \langle \Delta(ab), c \otimes d\rangle = (-1)^{deg(a)deg(b)}\langle b \otimes a, \Delta(cd)\rangle \tag{4.8.15}$$

$$\langle a, 1\rangle = \epsilon(a), \quad \langle 1, b\rangle = \epsilon(b). \tag{4.8.16}$$

Перейдём к доказательству утверждений, сформулированных в условии предложения. Докажем сначала необходимость. Доказательство аналогично доказательству в частном случае янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$, но основано на использовании системы определяющих соотношений базисной супералгебры Ли. Мы в некоторых случаях будем вынуждены рассматривать отдельно случаи различных базисных супералгебр Ли. Покажем как условие 1) следует из условия 2). Покажем, например, как по индукции выводится формула спаривания на картановских образующих дубля из коммутационных соотношений с использование формулы (). При $m = n = 0$, доказываемые формулы совпадают с их квазиклассическим пределом при котором они, очевидно, справедливы. Пусть эти формулы верны при $m \geq k, n < l+1$. Покажем их справедливость при $n = l+1$.

$$\begin{gathered}
\langle h_{i,k}, h_{j,l}\rangle = -\langle e_{i,0}, [f_{i,k}, h_{j,l}]\rangle = \\
\langle e_{i,0}, [h_{j,0}, f_{i,k-l-1}] + \tfrac{1}{2} \cdot a_{ij} \textstyle\sum_{s=0}^{l} \{h_{j,s-l-1}, f_{k-s-1}\}\rangle = \\
-\tfrac{1}{2} a_{ij}(\langle e_{i,0}, \textstyle\sum_{s=0}^{l}([h_{j,s-l-1}, f_{k-s-1}] + \\
2f_{i,k-s-1}h_{j,s-l-1})\rangle) = -\tfrac{1}{2}a_{ij}(\langle e_{i,0}, \textstyle\sum_{s=0}^{l}[h_{j,s-l-1}, f_{k-s-1}]\rangle \\
+2\langle e_{i,0}, \textstyle\sum_{s=0}^{l}[f_{i,k-s-1}, h_{j,s-l-1}]\rangle).
\end{gathered}$$

Второе слагаемое равно нулю в силу индукционного предположения. Преобразуем первое слагаемое. Используя определяющие соотношения в янгиане понизим степень правой части в формуле спаривания.

$$\begin{gathered}
\langle h_{i,k}, h_{j,l}\rangle = a_{ij}\langle e_{i,0}, \textstyle\sum_{s=0}^{l}(l+s-1)[h_{j,-s}, f_{k-l+s-2}]a_{ij}/2\rangle = \\
-(\tfrac{1}{2}a_{ij})^2\langle e_{i,0}, \textstyle\sum_{s=0}^{l}(l+s-1)[h_{j,-s}, f_{k-l+s-2}]\rangle = \cdots \\
= -(1/2)a_{ij})^{k-l}(\langle e_{i,0}, [h_{j,0}, f_{i,-1}]\rangle(C_{k-l-1}^{k-l-1} + C_{k-l}^{k-l-1} + \cdots C_{k-l+l-1}^{k-l-1}) = \\
-(\tfrac{1}{2}a_{ij})^{k-l} C_k^{k-l} a_{ij}.
\end{gathered}$$

Первая формула спаривания доказана. Вторая доказывается проще аналогичными рассуждениями.

Доказательство достаточности довольно громоздко и мы его здесь полностью не приводим. Отметим лишь, что по существу, оно также проводится по индукции и основано на формулах (4.8.15), (4.8.16). Идея доказательства состоит в возможности по двойственности выразить операцию умножения в двойственной супералгебре Хопфа через операцию коумножения в исходной. При этом мы используем не полную формулу для коумножения, а лишь главные, относительно градуировки, члены, входящие в формулу для коумножения. Вычисления во всех случаях проводятся по одной и той же схеме, но рассуждения немного отличаются для янгианов различных классов базисных супералгебр Ли. Остановимся несколько подробнее на рассуждениях в частном случае $Y(D(m,n))$.

□

Теорема 4.8.1. *1) Подсупералгебры* Y_+^*, H^*, Y_-^* *супералгебры* Y_- *порождаются, соответственно, полями*

$$e_i^-(u), h_i^-(u), f_i^-(u).$$

2) Спаривание образующих подсупералгебр Y_+, Y_- *супералгебры* $DY(\mathfrak{g})$ *задается следующими соотношениями для* $|v| < 1 < |u|$*:*

$$\langle e_i^+(u), f_j^-(v)\rangle = \langle f_i^+(u), e_j^-(v)\rangle = \frac{\delta_{i,j}}{u-v}; \tag{4.8.17}$$

$$\langle h_i^+(u), h_j^-(v)\rangle = \frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}. \tag{4.8.18}$$

Доказательство. Теорема, по существу, вытекает из предложения 4.7.8. Остановимся на этом чуть подробнее.

□

4.9 Вычисление универсальной R- матрицы квантового дубля янгиана базисной супералгебры Ли $DY(\mathfrak{g})$

Отметим сначала, что схема вычисления универсальной R-матрицы квантового дубля базисной супералгебры Ли совпадает со схемой вычисления в частном случае супералгебры Ли типа $A(m,n)$, приведённой выше. Тем не менее, в техническом отношении доказательство несколько сложнее и отличается уже, хотя бы в силу того, что система определяющих соотношений (особенно соотношений Серра) в общем случае сложнее чем в частном случае янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$.

Пусть $Y_+^{\pm}, Y_0^{\pm}, Y_-^{\pm}$ – подсупералгебры в $DY(\mathfrak{g})$, порожденные полями $e_i^{\pm}(u), h_i^{\pm}(u), f_i^{\pm}(u), i \in I$, соответственно. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.9.1. *1) Универсальная* R*-матрица дубля может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes Y_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes Y_+^-$.
2)Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:

$$\langle e_{\beta_0}^{n_0} e_{\beta_1}^{n_1} \dots e_{\beta_k}^{n_k}, e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} \cdots e_{-\beta_k-\delta}^{m_k}\rangle = \tag{4.9.1}$$

$$(-1)^{n_0+\dots+n_k}\delta_{n_0,m_0}\dots\delta_{n_0,m_0}\cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0}\dots\alpha(\gamma_k)^{n_k}(-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)}; \tag{4.9.2}$$

$$\langle e_{-\beta_k}^{n_k} \dots e_{-\beta_1}^{n_1} e_{\beta_0}^{n_0}, e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \dots e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} e_{-\beta_0-\delta}^{m_0}\rangle = \tag{4.9.3}$$

$$(-1)^{n_0+\dots+n_k}\delta_{n_0,m_0}\dots\delta_{n_0,m_0}\cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0}\dots\alpha(\gamma_k)^{n_k}(-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)}. \tag{4.9.4}$$

Здесь $\beta_k = \beta'_k + n'_k\delta$, *а коэффициенты* $\alpha(\beta)$ *вычисляются из условия* $[e_\beta, e_{-\beta}] = \alpha(\beta)h_{\beta'}$.

Отметим, что данное предложение может быть выведено из формул спаривания, по существу также, как и в частном случае янгиана $Y(A(m,n))$. Из предложения 4.9.1 можно вывести следующую лемму, представляющую фактически основной результат данного параграфа.

Лемма 4.9.1. *Элементы* R_+, R_- *в разложении универсальной* R- *матрицы для* $DY(\mathfrak{g})$ *могут быть представлены в следующей форме*

$$R_+ = \overrightarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta \otimes e_{-\beta}), \tag{4.9.5}$$

$$R_- = \overleftarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta \otimes e_{-\beta}), \tag{4.9.6}$$

где произведения берутся в соответствии с нормальными порядками $\gneqq_+, \gneqq_-$, *удовлетворяющими указанным выше условиям. Нормализующие константы* $a(\beta)$ *находятся из следующего условия:*

$$[e_\beta, e_{-\beta}] = (a(\beta))^{-1}h_\gamma \quad \textit{если} \quad \beta = \gamma + n\delta \in \Xi_+, \gamma \in \Delta_+(\mathfrak{g}),$$
$$[e_\beta, e_{-\beta}] = (a(\beta))^{-1}h_\gamma \quad \textit{если} \quad \beta = \gamma + n\delta \in \Xi_+, \gamma \in \Delta_+(\mathfrak{g}),$$

а $\theta(\beta) = deg(e_\beta) = deg(e_{-\beta})$ *означает четность элемента* $e_{\pm\beta}$.

Описание члена R_0 проводится по схеме, реализованной в главе 2.

Прежде всего, также как и в главе 2, введем "логарифмические"образующие $\phi_i^\pm(u), i = 1,\ldots,r$ формулами

$$\phi_i^+(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,k}u^{-k-1} = \ln(h_i^+(u)), \phi_i^-(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,-k-1}u^k = \ln(h_i^-(u)). \tag{4.9.7}$$

Введем также вектор функции

$$\phi^\pm(u) = \begin{pmatrix} \phi_1^\pm(u) \\ \phi_2^\pm(u) \\ \ldots \\ \phi_r^\pm(u) \end{pmatrix}, \quad h^\pm(u) = \begin{pmatrix} h_1^\pm(u) \\ h_2^\pm(u) \\ \ldots \\ h_r^\pm(u) \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 4.8.1 вытекает формула спаривания в терминах производящих вектор-функций

$$\langle((h^+(u))^T, h^-(v))\rangle = \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right)_{i,j=1}^{r}. \tag{4.9.8}$$

Следовательно, для производящих функций $\phi_i^+(u), \phi_j^-(u)$ формула спаривания следующая

$$\langle\phi_i^+(u), \phi_j^-(v)\rangle = \ln\left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right). \tag{4.9.9}$$

В матричной форме эти формулы мы можем переписать следующим образом

$$\langle(\phi^+(u))^T, \phi^-(v)\rangle = \left(\ln\left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right)\right)_{i,j=1}^{r}, \tag{4.9.10}$$

$$\langle(\phi^+(u))^T, \phi^-(v)\rangle = \left(\ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}\right)\right)_{i,j=1}^{r}. \tag{4.9.11}$$

Наряду с дублем янгиана $DY(\mathfrak{g})$ рассмотрим так же, как и выше, супералгебру Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, изоморфную как ассоциативная супералгебра супералгебре $DY(\mathfrak{g})$, но с другим коумножением (коумножением Дринфельда), определяемым следующими формулами.

$$\tilde{\Delta}(h_i^{\pm}(u)) = h_i^{\pm}(u)\otimes h_i^{\pm}(u), \tag{4.9.12}$$

$$\tilde{\Delta}(e_i(u)) = e_i(u)\otimes 1 + h_i^-(u)\otimes e_i(u), \tag{4.9.13}$$

$$\tilde{\Delta}(f_i(u)) = 1\otimes f_i(u) + f_i(u)\otimes h_i^+(u). \tag{4.9.14}$$

Здесь

$$e_i(u) := e_i^+(u) - e_i^-(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{i,k}u^{-k-1},$$

$$f_i(u) := f_i^+(u) - f_i^-(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{i,k}u^{-k-1}.$$

Легко проверить, что коумножения Δ и $\tilde{\Delta}$ сплетаются предельным оператором

$$\hat{t}^{\infty} := lim_{n\to\infty}\hat{t}^n,$$

$$\hat{t}(e_{i,k}) = e_{i,k+1}, \quad \hat{t}(f_{i,k}) = f_{i,k-1}, \quad \hat{t}(h_{i,k}) = h_{i,k}.$$

Другими словами,

$$\tilde{\Delta}(x) = lim_{n\to\infty}(\hat{t}^n\otimes\hat{t}^n)\Delta(\hat{t}^{-n}(x)), \tag{4.9.15}$$

для $\forall x\in DY(\mathfrak{g})$. Сходимость здесь понимается в $\hbar$-адической топологии $DY(\mathfrak{g})\otimes DY(\mathfrak{g})$.

Пусть $\widehat{DY}^+(\mathfrak{g})$ $(\widehat{DY}^-(\mathfrak{g}))$ – подсупералгебра Хопфа супералгебры Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, порожденная элементами $e_{i,k}, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad h_{i,m}, \quad m\in\mathbb{Z}_+$ $(f_{i,k}, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad h_{i,m}, \quad m<0)$. Тогда $\widehat{DY}^-(\mathfrak{g})$ изоморфна двойственной супералгебре Хопфа $(\widehat{DY}^-(\mathfrak{g}))^*$. Из формулы для коумножения 4.9.12 вытекает, что элементы $\phi_{i,k}^{\pm}$ являются примитивными элементами в $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$. Пусть

$$\Phi^+ = \langle\phi_{i,k}^+ : i\in I=\{1,\ldots,r\}, k\in\mathbb{Z}_+\rangle, \quad \Phi^- = \langle\phi_{i,-k-1}^- : i\in I=\{1,\ldots,r\}, k\in\mathbb{Z}_+\rangle$$

линейные пространства, (порожденные указанными в скобках множествами векторов). Пусть также $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}, \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ двойственные относительно формы 4.9.9 базисы в пространствах Φ^+, Φ^-, соответственно. Имеет место следующее предложение.

Предложение 4.9.1. *Элемент R_0 из предложения 4.9.1 имеет следующий вид*

$$R_0 = \exp(\sum_{i,m}(-1)^{deg(\tilde{\phi}_{i,m})}\tilde{\phi}_{i,m}\otimes\tilde{\phi}^{i,m}). \tag{4.9.16}$$

Доказательство. Пусть $B_+ = \mathbb{C}[\Phi^+], \quad B_- = \mathbb{C}[\Phi^-]$ – коммутативные алгебры функций на Φ^+, Φ^-, соответственно, а $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}, \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ – упомянутые выше двойственные базисы. Зафиксируем некоторый линейный порядок базисных векторов и ниже будем писать $\{\tilde{\phi}_a\}, \{\tilde{\phi}^a\}, a\in\mathbb{N}$. Докажем по индукции следующую формулу

$$\langle\tilde{\phi}_{i_1}^{n_1}\ldots\tilde{\phi}_{i_k}^{n_k}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{m_1}\ldots(\tilde{\phi}^{i_k})^{m_k}\rangle = \delta_{n_1,m_1}\ldots\delta_{n_k,m_k}n_1!\ldots n_k!. \tag{4.9.17}$$

Легко проверяется база индукции при $k = 1, n_1 = 1$

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}, \tilde{\phi}^{i_1} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{\phi}_{i_1}, 1 \rangle = 0.$$

Далее, пусть

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}^n, (\tilde{\phi}^{i_1})^n \rangle = n!.$$

Покажем, что

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}^{n+1}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{n+1} \rangle = (n+1)!.$$

Действительно,

$$\langle \Delta(\tilde{\phi}_i)\Delta((\tilde{\phi}_i)^n), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}^i)^n \rangle$$

$$= \langle (\tilde{\phi}_i \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\phi}_i)(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\tilde{\phi}_i)^k (\tilde{\phi}_i)^{n-k}), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}^i)^n \rangle$$

$$= (n+1)\langle \tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}^i \rangle \langle (\tilde{\phi}_i)^n, (\tilde{\phi}^i)^n \rangle = (n+1)!.$$

Используя доказанную формулу аналогично, индукцией по k доказывается утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Пусть теперь $(f(u))' = \frac{d}{du}(f(u))$. Продифференцируем равенство 4.9.9 по параметру u. Получим

$$\frac{d}{du}\langle \phi_i^+(u), \phi_j^-(u) \rangle = \langle (\phi_i^+(u))', \phi_j^-(u) \rangle =$$

$$\frac{1}{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} - \frac{1}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}.$$

Пусть

$$\tilde{\phi}_i^+(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,k} u^{-k-1},$$

$$\tilde{\phi}_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,-k-1} u^{k}.$$

Тогда в терминах производящих функций спаривание

$$\langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}_{j,l} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}$$

переписывается следующим образом:

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v) \rangle = \sum_{k,l} \langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}^{j,l} \rangle u^{-k-1} v^l =$$

$$(v < 1 < u) = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} u^{-1} (\frac{v}{u})^k = \frac{\delta_{ij}}{u - v}.$$

Таким образом получили, что

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{u - v}. \tag{4.9.18}$$

Введем теперь производящие вектор-функции

$$\tilde{\phi}^{\pm}(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1^{\pm}(u) \\ \tilde{\phi}_2^{\pm}(u) \\ \dots \\ \tilde{\phi}_r^{\pm}(u) \end{pmatrix}.$$

Тогда спаривание 4.9.18 можно переписать в виде следующего матричного равенства:

$$\langle (\tilde{\phi}^+(u))^T, \tilde{\phi}^-(u) \rangle = \frac{E_r}{u-v}, \tag{4.9.19}$$

где E_r – единичная $r \times r$-матрица.

Пусть $T : f(v) \to f(v-1)$ – оператор сдвига. Ясно, что

$$\langle (\phi_i^-(v))', \phi_j^+(v) \rangle = \frac{1}{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} - \frac{1}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} =$$
$$(id \otimes (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}}))\frac{\delta_{ij}}{u-v} = \langle \tilde{\phi}_i^-(v), (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}})\tilde{\phi}_j^+(u) \rangle.$$

Здесь $b_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)$. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^r$ – матрица Картана базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть также $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^r$ – q-аналог матрицы Картана, где $a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = [(\alpha_i,\alpha_j)]_q = \dfrac{q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}}}{q-q^{-1}}$, а $D(q)$ – матрица обратная к матрице $A(q)$, а A^T означает операцию транспонирования матрицы A. Тогда предыдущее равенство можно переписать следующим образом в матричной форме

$$\langle (\phi^+(v))^T, \phi^-(u) \rangle = \langle (\tilde{\phi}^+(u))^T, A(T^{-\frac{1}{2}})(T - T^{-1})\tilde{\phi}^-(v) \rangle.$$

Поэтому

$$\langle (\tilde{\phi}^-(v))^T, \tilde{\phi}^+(u) \rangle \qquad = \\ \langle ((T-T^{-1})^{-1} D(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^-(v))^T, (\phi^+(u))'.\rangle \tag{4.9.20}$$

Таким образом получаем следующее равенство

$$\frac{E_r}{u-v} = \langle ((T-T^{-1})^{-1} D(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^-(v)), ((\phi^+(u))')^T \rangle. \tag{4.9.21}$$

Итак мы диагонализовали спаривание. Представим матрицу $D(q)$ в виде $D(q) = \dfrac{1}{[l(\mathfrak{g})]}C(q)$, где $C(q)$ ($\in Mat(n, \mathbb{Z}[q,q^{-1}])$) – матрица с коэффициентами, являющимися полиномами от q, q^{-1} с целыми коэффициентами, то есть $c_{ij} \in \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$, а $l(\mathfrak{g}) = \check{h}(\hat{\mathfrak{g}})$ – дуальное число Кокстера. Тогда предыдущая формула перепишется в следующем виде

$$\frac{E_r}{u-v} = \\ \langle ((T^{l(\mathfrak{g})} - T^{-l(\mathfrak{g})})^{-1} C(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^-(v)), ((\phi^+(u))')^T \rangle. \tag{4.9.22}$$

Из этого равенства и вытекает формула для члена R_0 в факторизованной формуле для универсальной R-матрицы, являющаяся главным результатом данного параграфа.

Теорема 4.9.2.

$$R_0 = \\ \textstyle\prod_{n\geq 0} \exp \sum_{i,j=1}^r \sum_{k\geq 0} ((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi_j^-(v + (n+\frac{1}{2})l(\mathfrak{g})))_{-k-1}. \tag{4.9.23}$$

4.10 Вычисление универсальной R- матрицы янгиана $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли

Данный параграф имеет такую же структуру, как и параграф 2.5. Прежде всего рассмотрим классический аналог проводимых ниже рассуждений. Классическая $r-$матрица $r(u,v)$ классического дубля

$$(\mathfrak{g}((u^{-1}))), \quad u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]], \quad \mathfrak{g}[u])$$

алгебры токов $\mathfrak{g}[u]$ имеет следующий вид:

$$r(u,v) = \sum_{i,k} e_{i,k} \otimes e^{i,k},$$

где $\{e_{i,k} = e_i u^k\}, \{e^{i,k} = e^i u^{-k-1}\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{g}[u]), \quad u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]]$, соответственно, относительно спаривания

$$\langle f, g\rangle = res(f(u), g(u)),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$, а $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные относительно этой формы базисы в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что

$$r = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot v^{-k-1} = \sum_{k+0}^{\infty} \sum_i e_i \otimes e^i \cdot v^{-1}(\frac{u}{v})^k =$$

$$(u < 1 < v) = \sum_i e_i \otimes e^i \frac{v^{-1}}{1 - u/v} = \frac{\mathfrak{t}}{v - u},$$

где $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$ оператор Казимира универсальной обертывающей супералгебры $U(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом получили, что

$$r = \frac{\mathfrak{t}}{v - u}. \tag{4.10.1}$$

Отметим, что полученная классическая r-матрица не принадлежит $\mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$. Введем следующий оператор сдвига $T_\lambda : f(u) \to f(u + \lambda)$. Подействуем оператором $id \otimes T_\lambda$ на r. Получим

$$(id \otimes T_\lambda) r(u,v) = \frac{\mathfrak{t}}{\lambda - (u - v)} = \frac{\mathfrak{t}}{\lambda(1 - \lambda^{-1}(u - v))} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{t}(u - v)^k \lambda^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \lambda^{-k-1},$$

где $r_k \in \mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$.

Рассмотрим теперь гомоморфизм T_λ:

$$T_\lambda : Y(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g}),$$

где $T_\lambda(x) = x$ для $x \in \mathfrak{g}$, $T_\lambda(a_{i,1}) = a_{i,1} + \lambda a_{i,0}$ для $a \in \{e, f, h\}$.

Предложение 4.10.1. *Действие T_λ на образующих $a_{i,n}, \quad a \in \{e,f,h\}, \quad n \in \mathbb{Z}$ дубля янгиана $DY(\mathfrak{g})$ определяется формулами:*

$$T_\lambda a_{i,n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{i,k} \lambda^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.10.2}$$

$$T_\lambda a_{i,-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} a_{i,k} \lambda^{-n-k-1}, n \in \mathbb{N}. \tag{4.10.3}$$

Доказательство. Доказательство данного предложения, фактически, повторяет доказательство предложения 2.5.2.

□

Замечание 3. *Отметим, что ряд, определяющий значение оператора T_λ на образующих $a_{i,-n}$ сходится при достаточно больших значениях λ.*

Теперь мы можем вычислить универсальную R-матрицу $R(\lambda)$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$ формулой:

$$R(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R, \tag{4.10.4}$$

где R - универсальная R- матрица в дубле $DY(\mathfrak{g})$. Так как $R = R_+R_0R_-$, то действуя оператором $id \otimes T_\lambda$ на R и пользуясь тем, что T_λ – гомоморфизм, а следовательно и $id \otimes T_\lambda$ - гомоморфизм, получаем

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda), \tag{4.10.5}$$

где

$$R_+(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R_+, R_0(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R_0,$$
$$R_-(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R_-.$$

Отметим, что

$$R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^{-k-1}, \tag{4.10.6}$$

где 1 – единичный элемент в $Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, а $R_k \in Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g})$. Но такая форма не очень удобно, так как коэффициенты R_k имеют трудно обозримый вид. Поэтому окончательный ответ мы представим в другом более обозримом виде. Подействуем оператором $id \otimes T_{-\lambda}$ на правую часть формулы (4.9.5). Получим

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes T_{-\lambda} e_{-\beta}), \tag{4.10.7}$$

Вычислим отдельно элемент $T_{-\lambda}e_{-\beta}$. Так как $\beta = \beta' + n\delta$, то в силу формулы (4.10.3) получаем

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\right)\right). \tag{4.10.8}$$

Аналогично вычисляется элемент $R_-(\lambda)$. Суммируя сказанное выше получаем следующее

Предложение 4.10.2. *Члены $R_+(\lambda), R_-(\lambda)$ универсальной R матрицы янгиана имеют следующий вид*

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\right)\right), \tag{4.10.9}$$

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp\left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\right)\right. \tag{4.10.10}$$

Пример 4.8.1. Рассмотрим пример вычисления членов $R_+(\lambda), R_-(\lambda)$ в случае простой алгебры Ли $\mathfrak{sp}_2$. Тогда

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{n \geq 0} \exp(-e_n \otimes T_\lambda(f_{-n-1}))$$

$$= \overrightarrow{\prod}_{n\geq 0} \exp\left((-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n}^{n} e_n \otimes f_m \lambda^{-n-m-1}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n}^{n}(-1)^n e_n \otimes f_m \lambda^{-n-m-1}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n e_n \otimes f_{k-n}\right)\lambda^{-k-1}\right)$$

$$= \overrightarrow{\prod}_{n\geq 0} \exp\left(\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n e_n \otimes f_{k-n}\right)\lambda^{-k-1}\right).$$

Аналогично вычисляется и член $R_-(\lambda)$. Таким образом получаем следующие формулы

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{n\geq 0} \exp\left(\left(\textstyle\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n e_n \otimes f_{k-n}\right)\lambda^{-k-1}\right), \tag{4.10.11}$$

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{n\geq 0} \exp\left(\left(\textstyle\sum_{m=0}^{k} C_k^n (-1)^n f_n \otimes e_{k-n}\right)\lambda^{-k-1}\right). \tag{4.10.12}$$

Пусть $ord(\beta) := n$, если $\beta = \beta' + n\delta, \beta' \in \Delta_+(\mathfrak{g})$. Тогда предложение 4.2 можно переписать в виде следующих формул

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)\cdot$$

$$(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+ord(\beta)-1}^{ord(\beta)-1}(e_\beta \otimes e_{-\beta+(ord(\beta)+k)\delta})\lambda^{-ord(\beta)-k-1})), \tag{4.10.13}$$

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)\cdot$$

$$(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+ord(\beta)-1}^{ord(\beta)-1}(e_\beta \otimes e_{-\beta+(ord(\beta)+k)\delta})\lambda^{-ord(\beta)-k-1})). \tag{4.10.14}$$

Вычислим теперь член $R_0(\lambda)$. Докажем сначала следующее предложение.

Предложение 4.10.3. *Оператор сдвига действует на производящую функцию картановских образующих по следующей формуле*

$$T_\lambda(h_i^-(u)) = h_i^+(u+\lambda). \tag{4.10.15}$$

Доказательство. Действительно, :

$$T_\lambda(h_i^-(u)) = T_\lambda(1 - \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,-k-1}u^k) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} T_\lambda(h_{i,-k-1})u^k =$$

$$1 - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^{k} h_{i,m}\lambda^{-m-k-1}u^k = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_{i,m}(\lambda^+ u)^{-m-1} = h_i^+(u+\lambda).$$

Предложение доказано. □

Следствие 4.8.2. $T_\lambda(\varphi_i^-(u)) = \varphi_i^+(u+\lambda)$.

Доказательство. $T_\lambda(\varphi_i^-(u)) = T_\lambda(\ln(h_i^-(u))) = \ln(T_\lambda(h_i^-(u))) = \ln(h_i^+(u+\lambda)) = \varphi_i^+(u+\lambda)$. □

Таким образом, мы вычислили член $R_0(\lambda)$ и доказали следующее предложение.

Предложение 4.10.4. *Член* $R_0(\lambda)$ *имеет следующий вид*

$$R_0(\lambda) = \prod_{n\geq 0} \exp(\sum_{i,j\in I}\sum_{k\geq 0}((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi_j^+(v+(n+\frac{1}{2})l(\mathfrak{g})+\lambda))_k). \tag{4.10.16}$$

Пример 4.8.2. В случае простой алгебры Ли $\mathfrak{sp}_2$ формула (5.11.12) принимает следующий простой вид

$$R_0(\lambda) = \prod_{n\geq 0} \exp(-\sum_{k\geq 0}((\phi^+(u))')_k \otimes (\phi^+(v-2n-1+\lambda))_k.$$

Результаты этого пункта можно представить в виде следующей теоремы, результатом которой и является формула для универсальной R-матрицы янгиана базисной супералгебры Ли.

Теорема 4.10.1. *Пусть члены $R_+(\lambda), R_0(\lambda), R_-(\lambda)$ описываются, соответственно, формулами 4.10.13, (4.10.14), (4.10.16). Тогда формула для универсальной R- матрицы янгиана имеет следующий вид*

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda). \tag{4.10.17}$$

4.11 Классификация неприводимых представлений янгианов базисных супералгебр Ли

В этом параграфе мы будем изучать неприводимые представления янгианов базисных супералгебр Ли. Изучение неприводимых представлений играет важную роль в приложениях квантовых алгебр в теории интегрируемых моделей квантовой теории поля, особенно в таких методах исследования интегрируемых моделей как алгебраический анзатц Бёте и метод угловых матриц Р.Бакстера (см. [2]). В последнее время появились важные приложения алгебраического анзатца Бёте в теории квантовых суперструн в связи с AdS-гипотезой. Во всех этих методах центральную роль играет рассмотрение образа универсальной R-матрицы янгиана и его квантового дубля в различных неприводимых представлениях янгиана (или его квантового дубля). С другой стороны и сами интегрируемые модели получаются квантовой гамильтоновой редукцией как тензорное произведение счётного или непрерывного семейства неприводимых представлений янгиана (квантового дубля янгиана). Ввиду сказанного задача изучения неприводимых представлений янгианов базисных супералгебр Ли является важной для приложений в математической физике.

4.11.1 Представления янгиана базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$

Определение 4.11.1. *Пусть V – модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\bar{d} = \{d_{i,r}\}, i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$ – набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть весовым подпространством модуля V, подпространство*

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V : \quad h_{i,r}v = d_{i,r}v.\} \tag{4.11.1}$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть весом янгианного модуля.

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{g})$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным. Следующие определения ничем не отличаются от сформулированных ранее определений для представлений янгиана $Y(A(m,n))$ специальной линейной супералгебры Ли.

Будем называть вектор $v \in V$ *примитивным*, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x^{\pm}_{i,r} \cdot v = 0$ для всех $i \in I, \quad r \in \mathbb{Z}_+$.

Будем также называть модуль V *модулем со старшим весом*, если он порождается примитивным вектором, то есть $V = Y(\mathfrak{g})) \cdot v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}$.

Покажем сначала, что каждое конечномерное представление янгиана базисной супералгебры Ли $Y(\mathfrak{g})$ обладает старшим вектором.

Отметим, что каждый модуль со старшим весом может быть построен как фактор *модуля Верма.* Модуль же Верма $M(\bar{d})$ может быть сконструирован обычным образом как фактор модуль янгиана $Y(\mathfrak{g})$ по идеалу, порождённому векторами $x^+_{i,r}$ и векторами $h_{i,k} - d_{i,k} \cdot 1$. Роль старшего вектора играет единица янгиана 1. Ввиду вложения $U(\mathfrak{g}) \subset Y(\mathfrak{g})$, каждый $Y(\mathfrak{g})$ - модуль можно рассматривать как $Y(\mathfrak{g})$-модуль. Рассмотрим вес $\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i \cdot h_{i,0}$, где $\lambda_i, i = 1, \ldots, n+m$ – фундаментальные веса супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда весовое подпространство янгианного модуля Верма с таким весом одномерно. Можно показать, что отсюда вытекает, что модуль Верма имеет единственный неприводимый фактор-модуль, обозначаемый обычно $V(\bar{d}) = M(\bar{d})/N(\bar{d})$, где $N(\bar{d})$ – максимальный подмодуль модуля $M(\bar{d})$.

Пусть $\pi : M(\bar{d}) \to V(\bar{d})$ – каноническая проекция. Мы будем использовать, определённые выше фильтрации.

Доказательство следующего утверждения аналогично проведённому выше доказательству предложения A.3.1

Предложение 4.11.1. *Каждое конечномерное неприводимое представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$ (неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль) V содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) старший вектор v.*

Доказательство этого предложение основано на следующей лемме. Пусть $V_0 = \{v \in V | x^+_{i,k} v = 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Лемма 4.11.1. *1)* $h_{i,k} V_0 \subset V_0$.
2) $V_0 \neq 0$.

Доказательство. Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 3.3.1. □

Лемма 4.11.2. V_0 *– одномерное подпространство. (То есть любые два вектора из* V_0 *– пропорциональны.)*

Доказательство. Пусть $v', v" \in V_0, v' \neq v"$. Тогда, действуя на каждый из них янгианом $Y(mathfrakg)$, получаем два подмодуля $Y(mathfrakg)v'$ и $Y(mathfrakg)v"$ модуля V. Последнее противоречит неприводимости модуля V в случае когда векторы $v', v"$ – непропорциональны. Доказательство окончено. □

Легко видеть, что предложение 4.11.1 вытекает из лемм 4.11.1, 4.11.2.

Введём теперь класс модулей со старшим весом – аналоги модулей Верма. Пусть $V_0 = Cv^{\Lambda}_+$ – одномерное векторное пространство, Y^+_0 – подсупералгебра янгиана $Y(\mathfrak{g})$, порождённая образующими $x^+_{i,k}, i \in \{1, 2, \ldots, m+n\}, k \in \mathbb{Z}_+$; $Y^0_0 = \langle h_{i,k} | i \in I, k \in \mathbb{Z}_+ \rangle$ – линейная оболочка образующих $\{h_{i,k} | i \in I = \{1, 2, \ldots, m+n\}, k \in \mathbb{Z}_+\}$; $Y^+ = Y^+_0 \cdot Y^0_0$. Пусть также $h_{i,k} v^{\Lambda}_+ = d_{i,k} v^{\Lambda}_+, \quad Y^+_0 \cdot v^{\Lambda}_+ = 0$. (Наряду с обозначением $\bar{d}$ мы будем также использовать обозначение $\Lambda = \bar{d}$, чтобы подчеркнуть аналогию со старшими весами модулей супералгебр Ли, кроме того, для краткости будем использовать для старшего вектора обозначение $v_+ = v^{\Lambda}_+$.) Тогда V_0 превращается в одномерный $Y(\mathfrak{g})$-модуль. Определим свободный модуль M_Λ со старшим весом Λ формулой:

$$M_\Lambda = Y(\mathfrak{g}) \otimes_{Y^+} v^{\Lambda}_+. \tag{4.11.2}$$

Очевидно, что как векторное пространство M_Λ изоморфно $Y^-_0 \otimes v^{\Lambda}_+ : M_\Lambda \cong Y^-_0 \otimes v^{\Lambda}_+$. Мы будем для краткости писать $x^-_{i,k} v^{\Lambda}_+$ вместо $x^-_{i,k} \otimes v^{\Lambda}_+$. Ясно, что модуль M_Λ бесконечномерен.

Стандартные рассуждения показывают, что модуль M_Λ содержит максимальный подмодуль N_Λ. Тогда модуль $V_\Lambda = M_\Lambda / N_\Lambda$ – неприводимый модуль со старшим весом Λ. Используя стандартные методы теории представлений можно показать, что любые два модуля с одинаковым старшим весом – изоморфны.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.11.1. *Для любого старшего веса* $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ *существует единственный неприводимый* $Y(\mathfrak{g})$*-модуль* $V(\Lambda)$ *со старшим весом* Λ.

Зададим на модуле $M(\bar{d})$ две фильтрации так же как и в случае модуля со старшим весом янгиана $Y(A(m,n))$. Так как модуль $M(\bar{d})$ как векторное пространство естественно изоморфен $Y(\mathfrak{g})_-$, зададим сначала эти фильтрации на $Y(\mathfrak{g})_-$, а потом, используя этот естественный изоморфизм перенесём их на $M(\bar{d})$. Эти фильтрации определяются заданием степеней, являющихся сужением степеней $d_1, d_2, \ldots, d_{m+n}$, соответственно. Пусть $(Y(\mathfrak{g})_-)_k$, соответственно, $(Y(\mathfrak{g})_-)^k$, линейная оболочка мономов степени d_1, соответственно, d_2 не выше k. Степень монома будем считать равной сумме степеней образующих произведением которых он является. Степень же d_1 образующей в первом случае положим равной значению её второго индекса, а во втором случае степень d_2 положим равной на единицу больше значения её второго индекса. Пусть $Y(\mathfrak{g})_k = \{x \in Y(\mathfrak{g}) : d_1(x) \leq k\}$, а $Y(\mathfrak{g})^k = \{x \in Y(\mathfrak{g}) : d_2(x) \leq k\}$. Будем рассматривать сужения этих фильтраций на $Y(\mathfrak{g})_-$. Таким образом, получаем две фильтрации на $(Y(\mathfrak{g}))_-)^k$:

$$C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)_1 \subset \ldots (Y(\mathfrak{g})_-)_k \subset \ldots \tag{4.11.3}$$

$$\{0\} \subset C \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^0 \subset (Y(\mathfrak{g})_-)^1 \subset \ldots (Y(\mathfrak{g})_-)^k \subset \ldots \tag{4.11.4}$$

Пусть $M(\bar{d})_k = (Y(\mathfrak{g})_-)_k \cdot v^{\bar{d}}$, соответственно, $M(\bar{d})^k = (Y(\mathfrak{g})_-)^k \cdot v^{\bar{d}}$. Так как неприводимый модуль $V(\bar{d})$ является фактор-модулем модуля Верма $M(\bar{d})_k$, то определённые выше фильтрации задают фильтрации и на неприводимом модуле $V(\bar{d})$. Следует отметить, что эти фильтрации различны по своим свойствам. Правда, фильтрующее пространство первой фильтрации с индексом k содержит все фильтрующие пространства второй фильтрации с индексами, по меньшей мере, до порядка $k+1$ включительно.

4.11.2 Классификация конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной суперaлгебры Ли

Опишем теперь условия конечномерности неприводимого модуля со старшим весом для янгиана ортосимплектической суперaлгебры Ли типа $D(m,n)$. Сформулируем следующую теорему, которая и составляет основной результат этого параграфа.

Теорема 4.11.2. *1) Каждый неприводимый конечномерный* $Y(D(m,n))$ *- модуль* V *является модулем со старшим весом* Λ *–* $V(\Lambda)$.
2)Модуль $V(\Lambda)$ *является конечномерным неприводимым, в том и только в том случае, когда существуют многочлены* $P_i^d(u)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots m+n\} = I \backslash \{n\}$ *и многочлены* $P_n^d(u)$, $Q_n^d(u)$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*
a) все эти многочлены являются многочленами с коэффициентом при мономе старшей степени равным 1;
b)

$$\frac{P_i^d(u + a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I \backslash \{n\}$$

$$\frac{P_n^d(u)}{Q_n^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} \cdot u^{-k-1}.$$

Доказательство. Отметим, что доказательство необходимого условия конечномерности неприводимого представления $Y(D(m,n))$ по существу повторяет доказательство в случае представлений янгиана $Y(A(m,n))$, приведённое выше. Докажем достаточность. Нам потребуются некоторые факты о фундаментальных представлениях янгианов. Схема доказательства достаточного условия следующая. Мы покажем сначала, что каждое конечномерное представление янгиана базисной супералгебры Ли является фактор представлением подпредставления тензорного произведения фундаментальных представлений. Далее мы покажем, что для каждой базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует фундаментальное конечномерное представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Тогда каждое фундаментальное представление янгиана является подпредставлением тензорной степени этого представления. В силу отмеченного выше факта получаем доказываемое достаточное условие конечномерности неприводимого представления янгиана базисной супералгебры Ли. Для доказательства существования конечномерного фундаментального представления янгиана для каждой базисной супералгебры Ли нам потребуются некоторые факты о фундаментальных представлениях базисных супералгебрах Ли.

Отметим сначала, что для произвольного многочлена $P_i(u) = (u - a)$ существует конечномерный неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(2))$-модуль (см., например, ([25]). Отсюда можно получить, что для произвольного чётного корня α_i супералгебры Ли $D(m,n)$ и такого набора многочленов $\{P_{\alpha_j}(u)\}$, индексированного положительными корнями супералгебры Ли $D(m,n)$, что $P_{\alpha_j} = 1$ при $j \neq i$ и $P_{\alpha_i}(u) = (u - a_{ii})$ (где a_{ii} – диагональный элемент симметризованной матрицы Картана супералгебры Ли $D(m,n)$) найдётся неприводимый $Y(D(m,n))$-модуль, многочлены Дринфельда которого, индексированные чётными корнями совпадают с упомянутыми выше многочленами. Этот факт проверяется прямыми вычислениями и основывается на рассмотрении вложений янгианов, индуцированными вложениями $\mathfrak{sl}(2)$-троек. Аналогично, для произвольной пары многочленов $P(u), Q(u)$ можно построить неприводимый $Y(\mathfrak{sl}(1,1))$-модуль (см. [274]) задаваемый этим многочленом. Дальнейшее доказательство проводится следующим образом. Можно просто рассмотреть модуль Верма, порождаемый просто тензорным произведением старших векторов построенных модулей. В построенном модуле Верма можно выделить максимальный подмодуль после факторизации по которому мы получаем искомый неприводимый модуль с заданными многочленами Дринфельда. Из построенных модулей можно аналогично сконструировать неприводимый модуль с произвольными заданными многочленами Дринфельда, удовлетворяющими условиям a), b).

Нам потребуется описание следующих фундаментальных представлений для базисных супералгебр Ли типов $B(m,n), D(m,n), C(n+1)$.

□

Глава 5

Янгиан странной супералгебры Ли типа Q_n

5.1 Введение

Цель данной главы – описать янгиан и его квантовый дубль для "странной"супералгебры Ли типа Q_n как результат квантования в смысле В.Г. Дринфельда некоторой тройки Манина и вычислить универсальную $R-$матрицу для квантового дубля янгиана. Как отмечено выше, супералгебры Ли классического типа делятся на два класса: базисные и странные супералгебры Ли. Супералгебры Ли из первого класса по своим свойствам похожи на простые алгебры Ли. На них существует невырожденная инвариантная билинейная форма (и ненулевой оператор Казимира). Эти свойства дают возможность определить янгиан для базисной супералгебры Ли также как янгиан простой алгебры Ли, что и было сделано в предыдущей главе. Правда, при этом доказательства некоторых теорем существенно меняются. Я напомню, что янгиан простой алгебры Ли g (см. [120]) является специализацией деформации универсальной обёртывающей алгебры $U(g[t])$ токовой алгебры Ли $g[t]$. Это определение было позднее распространено на случай общей и специальной супералгебр Ли в работах разных авторов (см. [54], [250], [227]). В предыдущей главе это определение было распространено и на другие базисные супералгебры Ли. Но токовые супералгебры со значениями в странных супералгебрах Ли P_n, Q_n (см. [140]) не обладают структурой бисупералгебры Ли, поскольку на них нет ненулевых инвариантных билинейных форм. Но иногда такую структуру можно определить на скрученной токовой супералгебре Ли. Супералгебру Ли Q_n можно определить как множество неподвижных точек некоторого инволютивного автоморфизма σ базисной супералгебры Ли $A(n,n)$. Этот автоморфизм естественно продолжается до автоморфизма $\tilde{\sigma}$ токовой супералгебры Ли $A(n,n)[u]$. При этом скрученная супералгебра Ли совпадает с множеством неподвижных точек этого автоморфизма $\tilde{\sigma}$ – $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$. Специализацию квантования при $\hbar = 1$ бисупералгебры Ли $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$ поэтому естественно считать янгианом странной супералгебры Ли Q_n. Впервые, вероятно, этот факт был подмечен М.Назаровым (see [227], [228]). Но М.Назаров определил янгиан для странной супералгебры Ли Q_n, используя язык формализма Решетихина-Тахтаджяна-Фаддеева (РТФ формализма), устанавливающего подход к квантовым группам, возникший в рамках алгебраического анзатца Бёте. (Если быть точным, М. Назаров использовал модификацию РТФ формализма, введённую Г.И. Ольшанским.) Именно, М.Назаров исследовал двойственный янгиану объект $Y^*(\mathfrak{g})$, который порождается матричными элементами представлений янгиана в смысле Дринфельда. Но, как известно, эти два объекта изоморфны (см. [24]), причём изоморфизм может быть сконструирован с использованием псевдотреугольной структуры (универсальной R-матрицы). Существует ещё один альтернативный подход, основанный на том, что странную супералгебру Ли можно рассматривать в качестве специальной линейной алгебры но над некоторой супералгеброй Клиффорда. На основе такого подхода недавно была исследована квантовая странная супералгебра в работах [158], [156], [157]. Помимо структурной теории в этих работах была развита и теория представлений квантовой странной супералгебры. Как известно янгиан тесно связан с аффинной квантовой странной супералгеброй. Мы, ниже обсуждаем связь между упомянутыми выше подходами к определению янгиана странной супералгебры Ли.

В данной главе мы вводим янгиан странной супералгебры Ли типа Q_n как специализацию при $\hbar = 1$ квантования по В.Г. Дринфельду скрученной бисупералгебры Ли полиномиальных петель $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$ и описываем полученный объект в терминах аналогов образующих Картана-Вейля. Мы также вводим токовую систему образующих и соотношений, которая является аналогом "новой"системы образующих, введённой В.Г.Дринфельдом для янгианов простых алгебр Ли. Мы такую систему образующих называем токовой. Мы доказываем важную теорему об эквивалентности токовой системы образующих и определяющих соотношений исходной системе образующих и определяющих соотношений янгиана, которая получается при специализации квантования. Мы также продолжаем данную токовую систему образующих до корневой системы образующих, составляющих базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта. После чего формулируем и доказываем теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Далее мы вводим квантовый дубль янгиана странной супералгебры Ли и вычисляем хопфово спаривание для образующих дубля. На основе полученных формул получаем структурную мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы дубля янгиана супералгебры Ли Q_n (не вычисляя точно коэффициенты спаривания в квантовом дубле янгиана).

5.2 Странная супералгебра Ли типа Q_n

Пусть $C(n|n) = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ – Z_2-градуированное векторное пространство (суперпространство) размерности $(n|n)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$). Выберем стандартный базис в этом суперпространстве. Нам удобно будет элементы базиса нумеровать положительными и отрицательными числами из промежутка $[-n, n]$ (ноль мы исключаем). Таким образом, пусть $(e_{-n}, e_{-n+1}, \ldots, e_{-1}, e_1, \ldots, e_n)$ – стандартный базис в $C(n|n)$, а $End(C(n|n))$ – супералгебра линейных операторов, действующих в $C(n|n)$. Базис в $End(C(n|n))$ образуют матрицы $E_{a,b}, -n \leq a, b, \leq n, ab \neq 0$ и чётность p для $E_{a,b}$ определяется формулой:

$$p(E_{a,b}) = |a| + |b|, \tag{5.2.1}$$

где $|a| = p(a) = 0$, если $a < 0$ и $|a| = p(a) = 1$, для $a > 0$, $|a|, |b| \in \mathbb{Z}_2$. Напомним (см. главу 1 данной работы), что общая линейная супералгебра $\mathfrak{gl}(n|n)$ определяется как векторное пространство $End(C(n|n))$ наделённое (супер)скобкой $[\cdot,\cdot]$, задаваемой формулой:

$$[x, y] = x \cdot y - (-1)^{|x||y|} y \cdot x. \tag{5.2.2}$$

Суперслед на $\mathfrak{gl}(n|n)$ задаётся формулой $str(E_{ab}) = \delta_{ab}(-1)^{1+|a|}$ на элементах базиса и распространяется линейно на все остальные элементы векторного пространства $\mathfrak{gl}(n|n)$.

Напомним (см. главу 1) также определение специальной линейной супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(n|n)$:

$$\mathfrak{sl}(n|n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n|n) | str(A) = 0\}. \tag{5.2.3}$$

Пусть

$$\sigma : \mathfrak{gl}(n|n) \to \mathfrak{gl}(n|n),$$

инволютивный автоморфизм, задаваемый формулой:

$$\sigma : E_{a,b} \mapsto E_{-a,-b}.$$

Отметим, что σ переводит $\mathfrak{sl}(n|n)$ в $\mathfrak{sl}(n|n)$. Кроме того, отметим, что на $\mathfrak{sl}(n,n)$ задана невырожденная билинейная инвариантная форма $(\cdot,\cdot)$, определяемая формулой:

$$(A,B) = str(AB). \tag{5.2.4}$$

Отметим, что форма (5.2.4) отлична от формы Киллинга.

Пусть также

$$J = \sum_{i=1}^{n} (E_{i,-i} - E_{-i,i}).$$

Определение 5.2.1. *Супералгебра Ли q_n может быть определена следующими двумя эквивалентными способами: либо как централизатор J в $\mathfrak{gl}(n|n)$, либо как множество неподвижных точек инволютивного автоморфизма $\sigma : \mathfrak{gl}(n|n) \to \mathfrak{gl}(n|n)$. Пусть также $sq_n = [q_n, q_n]$.*

Отметим также, что sq_n подсупералгебра Ли супералгебры Ли q_n, состоящая из $2n \times 2n$-матриц у которых левый нижний и правый верхний $n \times n$-блоки имеют нулевой след, в отличии от диагональных блоков, не обязанных иметь нулевой след. Легко видеть, что sq_n содержит единичную матрицу. Отметим, что супералгебру Ли sq_n иногда обозначают через $\tilde{Q}_{n-1}$.

Простая супералгебра Ли Q_{n-1} определяется (см. [180]) как факторсупералгебра Ли по одномерному центру

$$Q_{n-1} = sq_n / \mathbb{C} I_{2n}.$$

Выберем в q_n базис

$$E^0_{a,b} = E_{a,b} + E_{-a,-b}, \tag{5.2.5}$$

$$E^1_{a,b} = E_{-a,b} + E_{a,-b}, \quad 1 \le a, b \le n. \tag{5.2.6}$$

Отметим, что чётная часть супералгебры Ли q_n изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$, а её нечётная часть также изоморфна $\mathfrak{gl}_n$, рассматриваемой как $\mathfrak{gl}_n$-модуль относительно присоединённого действия. В то же время для sq_n её чётная часть изоморфна $\mathfrak{gl}_n$, а нечётная часть изоморфна $\mathfrak{sl}_n$, так, что следующие матрицы образуют в sq_n базис:

$$E^0_{a,b}, E^1_{a,b}, \quad 1 \le a \ne b \le n, \tag{5.2.7}$$

$$E^0_{a,a}, \quad 1 \le a \le n, \tag{5.2.8}$$

$$h^1_a = E^1_{a,a} - E^1_{a+1,a+1}, \quad 1 \le a \le n-1. \tag{5.2.9}$$

Отметим, что картановская подалгебра имеет как чётную, так и нечётную части. Мы часто также будем использовать следующие обозначения для образующих картановской подалгебры супералгебры Ли q_n:

$$\bar{h}_{i,0} := \bar{h}_i = E_{i,i} + E_{-i,-i}, \quad \bar{h}_{i,1} := \bar{k}_i = E_{i,-i} + E_{-i,i}, \tag{5.2.10}$$

$$h_{i,0} := h_i = \bar{h}_i - \bar{h}_{i+1}, \quad h_{i,1} := k_i = \bar{k}_i - \bar{k}_{i+1}. \tag{5.2.11}$$

Теперь мы приведём описание странной супералгебры Ли sq_n, аналогичное описанию простой алгебры Ли в терминах образующих и соотношений Серра. Отметим, что sq_n можно отождествлять с подалгеброй супералгебры Ли q_n. Мы будем часто отождествлять образующие супералгебры Ли sq_n с их образами в супералгебре Ли q_n при отображении вложения. Из контекста будет ясно о каких именно образующих идёт речь. Напомним определение супералгебры Ли sq_n в терминах образующих и определяющих соотношений.

Предложение 5.2.1. *Супералгебра Ли* sq_n *изоморфна супералгебре Ли* $\mathfrak{g}$*, порождённой образующими* $x^{\pm}_{i,j}, h_{i,1}, 1 \leq i \leq n-1, j = 0,1$ *и* $h_{i,0}, 1 \leq i \leq n$ *(образующие со вторым индексом* $j = 1$ *являются нечётными, а со вторым индексом* $j = 0$ *– чётными), которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$\begin{gathered}
[h_{i_1,1}, h_{i_2,1}] = 2\delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0} + h_{i_1+1,0}) - 2\delta_{i_1+1,i_2}h_{i_2,0}, \quad i_1 \leq i_2, \\
[h_{i_1,j_1}, h_{i_2,j_2}] = 0, \quad (j_1, j_2) \neq (1,1), \qquad (5.2.12) \\
[h_{i_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2}] = \pm(\delta_{i_1,i_2} - \delta_{i_1,i_2+1})x^{\pm}_{i_2,j_2}, \qquad (5.2.13) \\
[h_{i_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2}] = (\pm 1)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2} \cdot \delta_{j_2,0} - (-1)^{j_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})x^{\pm}_{i_2,j_2+1}, \qquad (5.2.14) \\
[x^{+}_{i_1,j_1}, x^{-}_{i_2,j_2}] = \delta_{i_1,i_2}h_{i_1,j_1+j_2}, \quad j_1 \neq j_2, \\
[x^{+}_{i_1,j_1}, x^{-}_{i_2,j_1}] = \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0} - (-1)^{j_1}h_{i_1+1,0}), \qquad (5.2.15) \\
[x^{\pm}_{i_1,j_1}, x^{\pm}_{i_2,j_2}] = (\pm 1)^{j_1+j_2+1}[x^{\pm}_{i_1,j_1+1}, x^{\pm}_{i_2,j_2+1}], \quad i_1 \leq i_2; \qquad (5.2.16) \\
ad(x^{\pm}_{i_1,j_1})^2(x^{\pm}_{i_2,j_2}) = 0, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n-1, \quad j_1, j_2 = 0,1, \quad |i_1 - i_2| = 1, \qquad (5.2.17) \\
[x^{\pm}_{i_1,j_1}, x^{\pm}_{i_2,j_2}] = 0, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n-1, \quad j_1, j_2 = 0,1, \quad |i_1 - i_2| \neq 1. \qquad (5.2.18)
\end{gathered}$$

Как известно супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ вложен в свою универсальную обёртывающую супералгебру $U(\mathfrak{g})$. В частности $\mathfrak{q}_n$ вложена в $U(\mathfrak{q}_n)$. Имеет место следующее предложение.

Предложение 5.2.2. *В универсальной обёртывающей супералгебре Ли* $U(\mathfrak{q}_n)$ *следующие соотношения эквивалентны:*

$$(-\delta_{i+1,j} + 2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j})(h_{i,1}x^{\pm}_{j,1} + x^{\pm}_{j,1}h_{i,1}) = (\delta_{i-1,j} - \delta_{i-1,j})(h_{i,0}x^{\pm}_{j,0} - x^{\pm}_{j,0}h_{i,0}), \qquad (5.2.19)$$

$$(-\delta_{i+1,j} + 2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j})(h_{i,1}x^{\pm}_{j,1} - x^{\pm}_{j,1}h_{i,1}) = (\delta_{i-1,j} - \delta_{i-1,j})(h_{i,0}x^{\pm}_{j,0} + x^{\pm}_{j,0}h_{i,0}). \qquad (5.2.20)$$

Доказательство. Утверждение справедливо для точного представления супералгебры Ли $U(\mathfrak{q}_n)$, что проверяется непосредственными вычислениями. Следовательно, доказываемое утверждение справедливо и в самой супералгебре Ли $\mathfrak{q}_n$. Поскольку имеет место точное вложение супералгебры Ли в свою универсальную обёртывающую супералгебру, переводящую скобку в коммутатор, то утверждение справедливо и в универсальной обёртывающей супералгебре $U(\mathfrak{q}_n)$. Предложение доказано. □

Как отмечено выше, на супералгебре Ли $A(n,n)$ есть невырожденная билинейная форма, отличная от билинейной формы Киллинга. Она определяется формулой $(A,B) = str(AB)$ (см. (5.2.4)), где $str(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \sum_{i=n+1}^{2n} a_{ii}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2n} \in A(n,n)$. Выше на супералгебре Ли $A(n,n)$ мы определили автоморфизм $\sigma : A(n,n) \to A(n,n)$, $\sigma(A) = (a_{-i,-j})$, для $A = (a_{ij})_{i,j=-n,\ldots,-1,1,\ldots,n}$. Относительно этого автоморфизма супералгебра Ли раскладывается в прямую сумму собственных подпространств этого автоморфизма: $A(n,n) = A(n,n)_0 \oplus A(n,n)_1$.

Опишем подпространства, двойственные друг другу относительно выше определённой формы. Пусть как выше $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(n,n)$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0$, где $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ – чётная, а $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ – нечётная части. Тогда если $\tilde{\mathfrak{g}}^i$, $i = 0,1$ – собственные подпространства автоморфизма σ, то $\tilde{\mathfrak{g}}^0_0 \simeq \mathfrak{gl}(n)$, а $\tilde{\mathfrak{g}}^1_0 \simeq \mathfrak{sl}(n)$. С другой стороны $\tilde{\mathfrak{g}}^0_1 \simeq \mathfrak{sl}(n)$, а $\tilde{\mathfrak{g}}^1_1 \simeq \mathfrak{gl}(n)$.

Кроме того супералгебра Ли Q_n получается факторизацией супералгебры Ли $A(n,n)_0$ по одномерному центру. В силу этого двойственное к Q_n пространство может быть также описано как подпространство модуля $A(n,n)_1$.

Отметим, что мы далее будем иногда обозначать $\mathfrak{sl}(n,n)$ также через $\tilde{A}(n-1,n-1)$. Супералгебра Ли $\tilde{A}(n-1,n-1)$, как отмечено выше, содержит 1-мерный центр $Z = \mathbb{C}I$. Пусть тогда $A(n-1,n-1) := \tilde{A}(n-1,n-1)/Z$. Это простая супералгебра Ли, которая может быть задана в терминах образующих и соотношений Шевалле. Определяющие соотношения задаёт матрица Картана $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2n-1} : a_{ii} = 2, \quad i \neq n, \quad a_{n,n} = 0; \quad a_{i+1,i} = -1, (i = 1, \ldots, 2n-2), a_{j,j+1} = -1, \quad j \neq n, a_{n,n+1} = 1; a_{ij} = 0$ для остальных $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Именно, $A(n-1,n-1)$ порождается образующими: $h_i, x_i^{\pm}, 1 \leq i \leq 2n-1$, где $deg(h_i) = 0, deg(x_i^{\pm}) = 0$ для $i \neq n$, $deg(x_n^{\pm}) = 1$. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$\left[x_i^+, x_i^-\right] = \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, h_j] = 0, \tag{5.2.21}$$

$$\left[h_i, x_i^{\pm}\right] = \pm b_{i,j} x_j^{\pm}, \quad \left(ad^{n_{ij}} x_i^{\pm}\right)\left(x_j^{\pm}\right) = 0, \quad i \neq j, \tag{5.2.22}$$

где $n_{i,j} = 1$ если $a_{i,i} = a_{i,j} = 0$; $n_{i,j} = 2$ если $b_{i,i} = 0, a_{i,j} \neq 0; n_{i,j} = 1 - 2a_{i,j}/a_{i,i}$, если $a_{i,i} \neq 0$; $ada(b) = [a,b]$.

Определим автоморфизм $\sigma' : \tilde{A}(n-1,n-1) \to \tilde{A}(n-1,n-1)$ на матричных единицах $E_{i,j}$ формулой:

$$\sigma'(E_{i,j}) = E_{-i,-j}. \tag{5.2.23}$$

Так как $\sigma'(Z) = Z$, то определена проекция σ' на $A(n-1,n-1)$, которую мы обозначаем через

$$\sigma : A(n-1,n-1) \to A(n-1,n-1). \tag{5.2.24}$$

Отметим, что $\sigma(h_i) = h_{2n-i}, \quad \sigma(x_i^{\pm}) = x_{2n-i}^{\pm}$, для $i \neq n$ и $\sigma(h_n) = -h_n, \quad \sigma(x_n^{\pm}) = x_n^{\mp}$.

Пусть $\mathfrak{g} = A(n-1,n-1)$. Нетрудно понять, что $\sigma^2 = id$ и, следовательно, собственные значения σ равны ± 1. Пусть $\epsilon = -1, j \in \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathfrak{g}^j := Ker(\sigma - \epsilon^j E)$ – собственное подпространство линейного оператора σ. Имеет место разложение:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1,$$

где $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^\sigma$ множество неподвижных точек автоморфизма σ. Легко видеть, что $\mathfrak{g}^0$ подсупералгебра Ли супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^\sigma$ через Q_{n-1}. Это и есть "странная"супералгебра Ли Q_{n-1}. Легко проверить, что прообраз Q_{n-1} относительно отображения $p : \tilde{A}(n-1,n-1) \to A(n-1,n-1)$ (естественной проекции), который мы обозначаем через $\tilde{Q}_{n-1}$, состоит из следующих матриц:

$$Q^{\tilde{}}_{n-1} = \tilde{\mathfrak{g}}^0 = \{\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{gl}(n), B \in \mathfrak{sl}(n)\}, \tilde{\mathfrak{g}}^1 = \{\begin{pmatrix} D & C \\ -C & -D \end{pmatrix} : D \in \mathfrak{gl}(n), C \in \mathfrak{sl}(n)\}.$$

Автоморфизм σ действует на корневых подпространствах корневого разложения супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. На простых корнях его действие определяется формулой: $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{n+i}; \quad \sigma(\alpha_n) = -\delta = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = -\alpha_1 - \ldots - \alpha_{2n-1}$. Отметим, что $\sigma(\delta) = \sigma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = -\alpha_n$. Орбиты действия автоморфизма σ на множестве простых корней имеет следующий вид:

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \alpha_{n+1}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + \alpha_{n+2}, \ldots, \quad \tilde{\alpha}_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_{2n-1}.$$

Кроме того

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n - \delta = \alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} \ldots + \alpha_{2n-1} = \tilde{\alpha}_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_{n-1}.$$

Таким образом множество орбит корневой системы супералгебры Ли $A(n-1,n-1)$ совпадает с корневой системой простой алгебры Ли A_{n-1}. Следовательно, корневая система Q_{n-1}

совпадает с корневой системой $\mathfrak{sl}(n)$. Опишем теперь корневые подпространства супералгебры Ли $Q_{n-1} = \mathfrak{g}^{\sigma}$. Корневое подпространство $\mathfrak{g}^{\sigma}_{\tilde{\alpha}_i}$ двумерно и состоит из одномерных чётной и нечётной частей. Чётная часть порождена вектором $x_{\alpha_i}+x_{\alpha_{n+i}}$, а нечётная часть собственным вектором $x_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{n+i}}+\sigma(x_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{n+i}}) = x_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{n+i}}+x-x_{-\alpha_{i-1}-\ldots-\alpha_{n+i-1}}$. Легко проверить, что это и на самом деле корневые векторы. Действительно, пусть $x_1 = x_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{n+i}}$, $x_2 = x_{-\alpha_{i-1}-\ldots-\alpha_{n+i-1}}$. Тогда

$$[h_i+h_{n+i}, x_1+x_2] = (\alpha_i+\alpha_{n+i}, \alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{n+i})x_1-(\alpha_i+\alpha_{n+i}, \alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{n+i-1})x_2 = 2(x_1+x_2).$$

Опишем теперь картановскую подалгебру. Она также состоит из чётной и нечётной частей (обе равной размерности n). Чётная часть порождается векторами $h_{\tilde{\alpha}_i}, i = 1, \ldots, n-1$. Опишем нечётную часть. Она порождается образующими $k_{\tilde{\alpha}_i}, i = 1, \ldots, n-1$. В терминах корневых образующих аналогично описывается и второе корневое подпространство, соответствующее второму собственному значению $\lambda = -1$, с заменой корней $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \alpha_{n+i}$ на корни $\alpha_i - \alpha_{n+i}$.

Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \bigcup \mathfrak{h}_1$ – картановская подсупералгебра супералгебры Ли $\mathfrak{q}_n$, а $\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$ – базис в $\mathfrak{h}_0$, а $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ – базис в $\mathfrak{h}_1$. Пусть $h_i = \bar{h}_i - \bar{h}_{i+1}$, $k_i = \bar{k}_i - \bar{k}_{i+1}$. Пусть $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ базис в $\mathfrak{h}_0^*$, двойственный к базису $\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$, $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$. Пусть

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbf{Z}\alpha_i, \quad Q_+ = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}_+\alpha_i.$$

Далее, мы также будем использовать следующие обозначения:

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad J = \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Z}\epsilon_i$ – весовая решётка супералгебры Ли $\mathfrak{q}_n$, а $P^{\vee} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Z}\bar{h}_i$ – двойственная весовая решётка.

Как отмечено выше супералгебра Ли Q_{n-1} получается факторизацией супералгебры Ли $\mathfrak{sq}_n$ по одномерному центру. Но супералгебру Ли Q_{n-1} можно также задать образующими и соотношениями. Пусть $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$, а $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2n-1}$ матрица Картана супералгебры Ли $A(n-1, n-1)$. Тогда Q_{n-1} порождается образующими $h_{i,0}, \quad x^{\pm}_{i,0}, \quad h_{i,1}, \quad x\pm_{i,1}, \quad 1 \leq i \leq n$, где $deg(h_{i,0}) = deg(x^{\pm}_{i,0}) = 0, \quad deg(h_{i,1}) = deg(x^{\pm}_{i,1}) = 1$. Определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{i,0}, h_{j,1}] = 0, \tag{5.2.25}$$

$$[h_{i,1}, h_{i,1}] = -\sum_{k=1}^{i-1} \tfrac{4k}{n+1} h_{k,0} + \tfrac{2(n+1-2i)}{n+1} h_{i,0} + \sum_{k=i+1}^{n} \tfrac{4(n+1-k)}{n+1} h_{k,0} = 2(\bar{h}_{i,0} + \bar{h}_{i+1,0}), \tag{5.2.26}$$

$$[h_{i,1}, h_{i+1,1}] = [h_{i+1,1}, h_{i,1}] = \sum_{k=1}^{i} \tfrac{2k}{n+1} h_{k,0} - \sum_{k=i+1}^{n} \tfrac{2(n+1-k)}{n+1} h_{k,0} = -2\bar{h}_{i+1,0}, \tag{5.2.27}$$

$$[h_{i,1}, h_{j,1}] = 0, \qquad |i-j| > 1, \tag{5.2.28}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,0}, \quad [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1}, \tag{5.2.29}$$

$$[h_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1}, \quad [h_{i,1}, x^{\pm}_{j,1}] = \pm \tilde{a}_{n+1,n+1+j-i} x^{\pm}_{j,0}, \tag{5.2.30}$$

$$[x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,0}, \quad [x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,1}] = \delta_{ij} h_{i,1}, \tag{5.2.31}$$

$$[x^{+}_{i,1}, x^{-}_{j,1}] = \delta_{ij}(-\tfrac{(n-1)}{n+1}((2i-n-1)h_i + \sum_{k=i+1}^{n} 2(k-n-1)h_k)) = \delta_{ij}(\bar{h}_{i,0} + \bar{h}_{i+1,0}). \tag{5.2.32}$$

Здесь мы используем обозначения $a_{i,j} = -\delta_{i,j-1} + 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1}$, $\tilde{a}_{i,j} = -\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1}$.

Изоморфизм между этими двумя реализациями Q_{n-1} определяется следующими двумя формулами (более точно, этими формулами определяется проекция из первой реализации $\tilde{Q}_{n-1}$ на вторую реализацию Q_{n-1}):

$(E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + E_{-i,-i} - E_{-i-1,-i-1}) \mapsto h_{i,0} := h_i, \quad E_{i,i+1} + E_{-i,-i-1} \mapsto x^+_{i,0} := x^+_i,$
$E_{i+1,i} + E_{-i-1,-i} \mapsto x^-_{i,0} := x^-_i, \quad E_{i,-i-1} + E_{-i,i+1} \mapsto x^+_{i,1} := \hat{x}^+_i,$
$E_{i+1,-i} + E_{-i-1,i} \mapsto x^-_{i,1} := \hat{x}^-_i, \quad E_{i,-i} - E_{i+1,-i-1} + E_{-i,i} - E_{-i-1,i+1}) \to h_{i,1} := k_i.$

Напомним, что наши обозначения связаны с общепринятыми обозначениями для образующих Q_n (см. [140]) следующими формулами:

$$h_{i,0} = \bar{h}_i, \quad h_{i,1} = \bar{k}_i, \quad x^\pm_{i,0} = x^\pm_i, \quad x^\pm_{i,1} = \hat{x}^\pm_i.$$

Отметим, что соотношения между образующими выглядят похоже на соотношения для контрагредиентных супералгебр Ли, хотя странная супералгебра Ли сама не является контрагредиентной супералгеброй Ли. Легко видеть, что задать соотношения в Q_n это то же самое, что определить их в $\tilde{Q}_n$ с точностью до элементов центра $\tilde{Q}_n$. Этим фактом мы будем ниже пользоваться.

Для того, чтобы прояснить связь странной супералгебры Ли и контрагредиентных супералгебр, введём алгебру Клиффорда Λ, порождаемую единственным элементом $\mathbf{c}$, так, что $\Lambda = \langle 1, \mathbf{c} \rangle = span\{1, \mathbf{c}\}$. В алгебре Клиффорда имеет место следующее соотношение:

$$s^2 = 1. \tag{5.2.33}$$

Непосредственно проверяется следующее

Предложение 5.2.3. *Супералгебра Ли sq_n изоморфна $\mathfrak{sl}_n(\Lambda)$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что изоморфизм $\mathfrak{gl}_n(\lambda) \to q_n$ задаётся на матричных единицах формулами $E_{ab}(1) \mapsto E^0_{ab}$, $E_{ab}() \mapsto E^1_{ab}$. Поскольку этот изоморфизм переводит коммутаторный идеал в коммутаторный идеал, то он и индуцирует доказываемый изоморфизм $\mathfrak{sl}_n(\lambda) \to sq_n$. Предложение доказано. ☐

Доказанное предложение делает более понятными многие сложные, приводённые ниже формулы, относящиеся как к странной супералгебре Ли, так и к её янгиану.

Я напомню, что на $A(n-1, n-1)$ существует такая невырожденная инвариантная билинейная форма $(\cdot,\cdot)$, что $(\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0) = (\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1) = 0$ и $\mathfrak{g}^0$ и $\mathfrak{g}^1$ невырожденно спарены. Определим сначала билинейную форму на $\tilde{Q}_{n-1}$ следующей формулой:

$$(A, B) = str(A \cdot B). \tag{5.2.34}$$

Тогда билинейную форму на Q_{n-1} можно определить условием, что значения этой формы равны значениям формы, определенной ранее на прообразах этих элементов (при канонической проекции p), лежащих в $\tilde{Q}_{n-1}$. Нетрудно понять, что это определение корректно.

Для удобства читателя мы опишем соотношения между образующими $\mathfrak{g}^0$ и $\mathfrak{g}^1$. Сначала заметим, что соотношения между образующими $\mathfrak{g}^1$ имеют вид, похожий на соотношения между образующими $\mathfrak{g}^0$, только в правой части появляются образующие из $\mathfrak{g}^0$, вместо ожидаемых соответствующих образующих из $\mathfrak{g}^1$.

Введём обозначения для элементов, двойственных элементам $h_i = h_{i,0}, k_i = h_{i,1}$ из $\mathfrak{g}^0$. Мы будем обозначать их, соответственно, через $\check{h}^i = \check{h}^{i,0}$, $\check{k}^i = \check{h}^{i,1}$. Другими словами,

$$(h_{i,0}, \check{h}^{j,0}) = \delta_{ij}, \quad (h_{i,1}, \check{h}^{j,1}) = \delta_{ij}.$$

Выпишем явные формулы, выражающие $\check{h}^{i,k}$ через $h^{i,k}$, $k = 0, 1$. Прежде всего отметим, что $(h_{i,0}, h^{j,0}) = \tilde{a}_{ij}, (h_{i,1}, h^{j,1}) = a_{n,n+i-j}$. Пусть

$$\check{h}^{j,0} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^i_k h^{k,0}, \quad \check{h}^{j,1} = \sum_{r=1}^{n-1} \beta^i_r h^{r,1}.$$

Коэффициенты α_k^i, β_k^i можно вычислить решая следующие системы уравнений:

$$(h_{i,0}, \check{h}^{r,0}) = \delta_{ij}, r = 1, \ldots, n-1; \tag{5.2.35}$$
$$(h_{i,1}, \check{h}^{r,1}) = \delta_{ij}, r = 1, \ldots, n-1. \tag{5.2.36}$$

Матрица первой системы совпадает с матрицей Картана $\tilde{A}$ для простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$. Так как матрица Картана $\tilde{A}$ невырождена, то эта система имеет единственное решение. Найдём явно это решение. Пусть $\tilde{A}^{-1}$ – матрица, обратная к матрице Картана, $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ - $i-$ый базисный вектор в $\mathbb{C}^{n-1}$. Тогда коэффициенты $\bar{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{n-1}^i)$ образуют вектор, равный $(\bar{\alpha}^i)^T = \tilde{A}^{-1} e_i$, где T обозначает операцию транспонирования. Матрица, обратная к матрице Картана легко вычисляется и имеет вид:

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & ... & ... & 4 & 3 & 2 & 1 \\ n-2 & 2(n-2) & 2(n-3) & ... & ... & 8 & 4 & 2 & 2 \\ .. & .. & ... & .. & .. & .. & .. & ... & .. \\ 2 & 4 & 6 & 8 & ... & ... & 2(n-3) & 2(n-2) & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & ... & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Как было отмечено выше $i-$ый столбец этой матрицы совпадает с $(\bar{\alpha}^i)^T$. Легко явно выписываются формулы для $\check{h}^{i,k}$, $k = 0, 1$.

Опишем теперь явно систему определяющих в соотношений в суперадгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$. Далее мы будем использовать следующую систему обозначений. Образующие в супералгебре Ли $\mathfrak{g}$, изоморфной базисной супералгебре Ли $A(n,n)$ мы будем обозначать буквами с тремя нижними индексами, причём первый индекс обозначает номер простого корня корневой системы типа A_n, нумерующий образующую, второй индекс, принадлежащий $\mathbb{Z}_2$ указывает на её чётность (0 – для чётных образующих и 1 – для нечётных), а третий индекс, также принимающий значения в $\mathbb{Z}_2$ равен 0 если образующая принадлежит $\mathfrak{g}^0$ и равен 1 если образующая принадлежит $\mathfrak{g}^1$.

Предложение 5.2.4. *Супералгебра Ли $A(n,n)$ изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$, порождённой образующими $x_{i,j,r}^{\pm}, h_{i,j,r}, 1 \leq i \leq n-1, j, r = 0, 1$ и (образующие со вторым индексом $j = 1$ являются нечётными, а со вторым индексом 0 – чётными). Пусть также $\{\bar{h}_{i,1,j}\}_{i=1}^n, j = 0, 1$, где $h_{i,1,j} = \bar{h}_{i,1,j} - \bar{h}_{i+1,1,j}$ – ещё одна система линейно зависимых нечётных картановских образующих. Упомянутые выше образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i_1,1,0}, h_{i_2,1,0}] = 2\delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,0} + h_{i_1+1,0,0}) - 2\delta_{i_1+1,i_2} h_{i_2,0,0}, \quad i_1 \leq i_2, \tag{5.2.37}$$
$$[h_{i_1,j_1,0}, h_{i_2,j_2,0}] = 0, \quad (j_1, j_2) \neq (1,1), \tag{5.2.38}$$
$$[h_{i_1,1,1}, h_{i_2,1,1}] = -2(\delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,0} + h_{i_1+1,0,0}) - \delta_{i_1+1,i_2} h_{i_2,0,0}), \quad i_1 \leq i_2, \tag{5.2.39}$$
$$[h_{i_1,0,1}, h_{i_2,1,1}] = 2\delta_{i_1,i_2}\bar{h}_{i_2,0,1} - 2\delta_{i_1,i_2+1}\bar{h}_{i_1,0,1}, \tag{5.2.40}$$
$$[h_{i_1,0,1}, h_{i_2,0,j_2}] = 0, \tag{5.2.41}$$
$$[h_{i_1,j,0}, h_{i_2,s,1}] = 0, \tag{5.2.42}$$
$$[h_{i_1,0,0}, x_{i_2,j_2,0}^{\pm}] = \pm(\delta_{i_1,i_2} - \delta_{i_1,i_2+1}) x_{i_2,j_2,0}^{\pm}, \tag{5.2.43}$$

$$[h_{i_1,1,0}, x^{\pm}_{i_2,0,1}] = [h_{i_1,1,1}, x^{\pm}_{i_2,0,0}] = \mp\alpha_{i_2}(h_{i_1})x^{\pm}_{i_2,1,1}, \tag{5.2.44}$$

$$[h_{i_1,1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2} \cdot \delta_{j_2,0} - (-1)^{j_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}, \tag{5.2.45}$$

$$[h_{i_1,1,1}, x^{\pm}_{i_2,0,1}] = \pm(\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})x^{\pm}_{i_2,1,0}, \tag{5.2.46}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_2,0}] = \delta_{i_1,i_2}h_{i_1,j_1+j_2,0}, \quad j_1 \neq j_2,$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_1,0}] = \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,0} - (-1)^{j_1}h_{i_1+1,0,0}), \tag{5.2.47}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_1+j_2+1}[x^{\pm}_{i_1,j_1+1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}], i_1 \leq i_2; \tag{5.2.48}$$

$$ad(x^{\pm}_{i_1,j_1,s})^2(x^{\pm}_{i_2,j_2,s}) = 0, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n-1, j_1, j_2 = 0, 1, \quad |i_1 - i_2| = 1, s = 0, 1, \tag{5.2.49}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,s}, x^{\pm}_{i_2,j_2,s}] = 0, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n-1, j_1, j_2 = 0, 1, |i_1 - i_2| \neq 1, s = 0, 1. \tag{5.2.50}$$

Доказательство. Доказательство получается прямыми вычислениями с использованием приведённых выше формул. ☐

5.3 Бисупералгебры Ли

Определение 5.3.1. *Супералгебра Ли $\mathfrak{A}$ называется бисупералгеброй Ли, если $\mathfrak{A}^*$ также супералгебра Ли и коскобка $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \bigwedge \mathfrak{A}$ является 1-коциклом.*

Предполагается, что $\mathfrak{A}$ действует на $\bigwedge^2 \mathfrak{A}$ посредством присоединённого представления:

$$g \cdot a \otimes b = [g, a] \otimes b + (-1)^{deg(g)deg(a)} a \otimes [g, b]) := [g \otimes 1 + 1 \otimes g, a \otimes b]. \tag{5.3.1}$$

Утверждение о том, что δ является 1-коциклом можно переписать в виде следующей формулы:

$$\delta([x, y]) = x \cdot \delta(y) - y \cdot \delta(x) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \delta(y)] - [y \otimes 1 + 1 \otimes y, \delta(x)]. \tag{5.3.2}$$

Отметим, что утверждение о том, что $\mathfrak{A}$ – косупералгебра Ли, или, что тоже самое, что $\mathfrak{A}^*$ – супералгебра Ли, означает, что:
1)$\delta(\mathfrak{A}) \subset \bigwedge^2 \mathfrak{A}$;
2) $Alt(\delta \otimes id)\delta = 0$,
где Alt – операция альтернирования (антисуперсимметризации).

Заметим, что если $\mathfrak{A}$ – бисупералгебра Ли, то на $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}^*$ также существует структура бисупералгебры Ли, индуцирующая на $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ заданные структуры супералгебр Ли и такая инвариантная билинейная форма Q, что:

$$Q((x_1, l_1), (x_2, l_2)) = l_1(x_1) + l_2(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{A}, \quad l_1, l_2 \in \mathfrak{A}^*.$$

Эту структуру супералгебры Ли можно определить для $x \in \mathfrak{A}, \quad l \in \mathfrak{A}^*$ следующей формулой:

$$[x, l] = (ad^* x)l - (1 \otimes l)(\delta(x)), \tag{5.3.3}$$

где ad^* – коприсоединённое действие супералгебры Ли. В координатной форме эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$[e_i, e^j] = f_i^{jk} e_k + c_{ki}^j e^k,$$

где $\{e_i\}, \{e^j\}$ двойственные относительно формы Q базисы в $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$, соответственно, а $f_i^{jk} + c_{ki}^j$ структурные константы, соответственно, для коумножения и умножения в $\mathfrak{A}$ (или умножения и коумножения, соответственно, в $\mathfrak{A}^*$).

Верно и обратное, пусть $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{A}^*$ супералгебра Ли с невырожденным инвариантным скалярным произведением, относительно которого $\mathfrak{A},\mathfrak{A}^*$ изотропные подсупералгебры Ли. Тогда на $\mathfrak{A}$ существует структура бисупералгебры Ли.

Действительно, определим кокоммутатор $\delta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ как отображение двойственное коммутатору $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{A}^*\otimes\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{A}^*$, то есть, если $[e^i,e^j]=f_k^{ij}e^k$ то $\delta(e_k)=f_k^{ij}e_i\otimes e_j$. Из тождества Якоби и формулы, определяющей коммутатор $[x,l],\quad x\in\mathfrak{A},\quad l\in\mathfrak{A}^*$ (см. (5.3.3)) следует, что δ является 1-коциклом.

Отметим также, что если $\mathfrak{A}$ – бисупералгебра Ли, то и $G=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{A}^*$ также является бисупералгеброй Ли с кокоммутатором $\delta_G(x)=\delta_{\mathfrak{A}}\oplus(-\delta_{\mathfrak{A}^*})$. Более того, 1-коцикл δ_G является кограницей некоторого элемента $r\in G\otimes G$. Именно, если $r\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}*\subset G\otimes G*$ является каноническим элементом, соответствующим тождественному оператору $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, то есть $r=\sum e_i\otimes e^i$, где $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{A},\quad\mathfrak{A}*$, соответственно, то $\delta_G=dr$ (где r понимается как 0-коцепь со значениями в $G\otimes G$) и

$$\delta_G(x)=[x\otimes 1+1\otimes x,r]. \tag{5.3.4}$$

Пара (G,r), где $G=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{A}^*$, а r – канонический элемент, называется классическим дублем бисупералгебры Ли $\mathfrak{A}$. Можно проверить, что в этом случае r удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE):

$$\langle r,r\rangle=[r_{12},r_{13}]+[r_{12},r_{23}]+[r_{13},r_{23}]=0, \tag{5.3.5}$$

где $r_{12}=r\otimes 1,\quad r_{23}=1\otimes r,\quad r_{13}=\sum a_i'\otimes 1\otimes a_i"$, если $r=\sum a_i'\otimes a_i"$. Пара (G,r) является квазитреугольной бисупералгеброй Ли (см. [24]).

Часто удобно бывает использовать язык троек Манина (см. [24]). Я напомню, что тройкой Манина называется тройка $(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2)$, где $\mathfrak{P}$ – супералгебра Ли с фиксированной билинейной невырожденной инвариантной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2$ такие её инвариантные изотропные подсупералгебры Ли, что:

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1\oplus\mathfrak{P}_2.$$

Существует биективное соответствие между тройками Манина и бисупералгебрами Ли. Выше мы по бисупералгебре Ли $\mathfrak{g}$ построили её классический дубль $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$, который и является её тройкой Манина. Пусть теперь задана тройка Манина $(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2$. Построим по ней бисупералгебру Ли. Ясно, что $\mathfrak{P}_2\simeq\mathfrak{P}_1^*$ и $\mathfrak{P}\simeq\mathfrak{P}_1\oplus\mathfrak{P}_1^*$. Положим $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}_1$ и определим δ формулой:

$$\langle\delta(a),l_1\otimes l_2\rangle=\langle a,[l_1,l_2]\rangle$$

как отображение, двойственное коммутатору в $\mathfrak{P}_2$ относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Можно проверить, что δ является 1-коциклом.

Ниже нас будут интересовать следующие два примера бисупералгебр Ли, а точнее определяющих их троек Манина. Пусть $\mathfrak{g}=A(n-1,n-1)$, $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ – автоморфизм 2-го порядка, определённый в предыдущем пункте (см. формулы (5.2.23), (5.2.24)),

$$\epsilon=-1,\quad \mathfrak{g}^j=Ker(\sigma-\epsilon^jI),\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{g}^0\oplus\mathfrak{g}^1.$$

Здесь I, как обычно, означает единичный оператор (единичную матрицу).

Продолжим автоморфизм σ до автоморфизма $\tilde{\sigma}:\mathfrak{g}((u^{-1}))\to\mathfrak{g}((u^{-1}))$, лорановских рядов со значениями в $\mathfrak{g}$ по формуле:

$$\tilde{\sigma}(x\cdot u^j)=\sigma(x)(-u)^j. \tag{5.3.6}$$

Рассмотрим следующую тройку Манина $(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2)$: $(\mathfrak{P}=\mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}}, \quad \mathfrak{P}_1=\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}, \quad \mathfrak{P}_2=(u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])^{\tilde{\sigma}})$.

Определим билинейную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{P}$ по формуле:

$$\langle f,g\rangle = res(f(u),g(u))du, \tag{5.3.7}$$

где $res(\sum_{k=-\infty}^{n} a_k\cdot u^k) := a_{-1}$, $(\cdot,\cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$.

Ясно, что $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2$ – изотропные подсуперагебры относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Легко проверить также, что имеют место следующие разложения:

$$\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\mathfrak{g}^0\cdot u^{2k}\oplus\mathfrak{g}^1\cdot u^{2k+1}), \tag{5.3.8}$$

$$\mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}^0\cdot u^{2k}\oplus\mathfrak{g}^1\cdot u^{2k+1}). \tag{5.3.9}$$

Опишем структуры бисуперагебры Ли на $\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}$. Пусть $\{e_i\}$ базис в $\mathfrak{g}^0$ а $\{e^i\}$ двойственный ему относительно формы $(\cdot,\cdot)$ базис в $\mathfrak{g}^1$. Пусть $t_0=\sum e_i\otimes e^i, t_1=\sum e^i\otimes e_i, t=t_0+t_1$. Давайте рассмотрим также базис $\{e_{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_1$ и двойственный ему относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ базис $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$ которые определяются следующими формулами:

$$e_{i,2k}=e_i\cdot u^{2k},\quad e_{i,2k+1}=e^i\cdot u^{2k+1},\quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{5.3.10}$$
$$e^{i,2k}=e^i\cdot u^{-2k-1},\quad e^{i,2k+1}=e_i\cdot u^{-2k-2},\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{5.3.11}$$

Вычислим канонический элемент r, определяющий кокоммутатор в $\mathfrak{P}$.

$$\begin{aligned}
r=\sum e_{i,k}\otimes e^{i,k} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i}(e_i\cdot v^{2k}\otimes e^i\cdot u^{-2k-1}+e^i\cdot v^{2k+1}\otimes e_i\cdot u^{-2k-2})\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}((\sum e_i\otimes e^i)\cdot u^{-1}(\frac{v}{u})^{2k})+\\
\sum_{k=0}^{\infty}((\sum e^i\otimes e_i)\cdot u^{-1}(\frac{v}{u})^{2k+1}) &= \mathfrak{t}_0\frac{u^{-1}}{(1-(v/u)^2)}+\mathfrak{t}_1\frac{u^{-1}(v/u)}{1-(v/u)^2}\\
=\frac{\mathfrak{t}_0\cdot u}{(u^2-v^2)}+\frac{\mathfrak{t}_1\cdot v}{u^2-v^2} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{u-v}+\frac{1}{u+v})t_0+(1/2)(\frac{1}{u-v}-\frac{1}{u+v})\mathfrak{t}_1\\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0+\mathfrak{t}_1}{u-v}+\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0-\mathfrak{t}_1}{u+v}=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2}\frac{(\sigma^k\otimes id)\cdot\mathfrak{t}}{u-\epsilon^k\cdot v}.
\end{aligned}$$

Обозначим $r_\sigma(u,v):=r$. Тогда формула для кокоммутатора δ примет следующий вид:

$$\delta : a(u)\to[a(v)\otimes 1+1\otimes a(u), r_\sigma(u,v)].$$

Предложение 5.3.1. *Элемент $r_\sigma(v,u)$ обладает следующими свойствами:*
1) $r_\sigma(u,v)=-r_\sigma^{21}(u,v)$;
2)$[r_\sigma^{12}(u,v),r_\sigma^{13}(u,w)]+[r_\sigma^{12}(u,v),r_\sigma^{23}(v,w)]+[r_\sigma^{13}(u,w),r_\sigma^{23}(v,w)]=0$.

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{t}_0^{21} = \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_1^{21} = \mathfrak{t}_0$. Тогда $r_\sigma^{21}(v,u) = \frac{1}{2}\dfrac{\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_0}{v-u} + \frac{1}{2}\dfrac{\mathfrak{t}_1 - \mathfrak{t}_0}{v+u} = -r_\sigma(u,v)$.

Пункт 2) легко следует из того факта, что канонический элемент $r = \dfrac{\mathfrak{t}}{u-v}$ удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE) $\langle r, r\rangle = 0$.

☐

Опишем явный вид кокоммутатора на образующих первого порядка $a^i v$. Получим

$$\delta(a^i u) = [a^i v \otimes 1 + 1 \otimes a^i u, r_\sigma(u,v)].$$

Рассмотрим ещё один пример. Пусть K – центральный элемент, $d := \frac{d}{du}$, $\tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}} \oplus CK \oplus Cd; \tilde{\mathfrak{P}}_1 = \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} \oplus CK; \tilde{\mathfrak{P}}_1 = \mathfrak{g}[[u^{-1}]]^{\tilde{\sigma}} \oplus Cd$. Структуру супералгебры Ли на $\tilde{\mathfrak{P}}$ определим формулами:

$$\begin{gathered}[x \cdot u^m, y \cdot u^n] = [x,y] \cdot u^{m+n} + \delta_{m,-n} \cdot (x|y) \cdot K;\\ [K, x \cdot u^m] = [K,d] = [K,K] = 0; \quad [d, x \cdot u^m] = m \cdot x \cdot u^{m-1}.\end{gathered} \tag{5.3.12}$$

Определим билинейную форму $\langle \cdot | \cdot \rangle$ на $\tilde{\mathfrak{P}}$ формулами:

$$\begin{gathered}\langle x \cdot u^m, y \cdot u^n \rangle = res((x|y)u^{m+n}du) = (x|y) \cdot \delta_{m,-n-1};\\ \langle d, K\rangle = 1, \quad \langle d, x \cdot u^m\rangle = \langle K, x \cdot u^m\rangle = \langle d,d\rangle = \langle K,K\rangle = 0.\end{gathered} \tag{5.3.13}$$

Предложение 5.3.2. *Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определяемая формулами (5.3.13) – инвариантная.*

Доказательство. Нетривиальной является лишь проверка равенства:
$\langle [d, x \cdot u^m], y \cdot u^n\rangle = \langle d, [x \cdot u^m, y \cdot u^n]\rangle$ для $m = -n$.

Имеют место равенства

$$\langle [d, x \cdot u^m], y \cdot u^n\rangle = \langle n \cdot x \cdot u^{n-1}, y \cdot u^{-n}\rangle = n(x|y).$$

С другой стороны, имеем следующее равенство

$$\langle d, [x \cdot u^m, y \cdot u^n]\rangle = \langle d, [x,y] + n \cdot (x|y) \cdot K\rangle = n \cdot (x|y).$$

Таким образом, инвариантность формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ проверена. ☐

Легко проверить, что и в этом случае подсупералгебры $\tilde{\mathfrak{P}}_1, \tilde{\mathfrak{P}}_2$ являются изотропными подсупералгебрами . Поэтому $\tilde{\mathfrak{P}}$ является классическим дублем бисупералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{P}}_1$. Более того $\tilde{\mathfrak{P}}$ является квазитреугольной бисупералгеброй Ли. Также как и выше опишем структуру бисупералгебр Ли на $\tilde{\mathfrak{P}}$ и $\tilde{\mathfrak{P}}_1$. Опишем канонический элемент r_σ^c.

Также как и в предыдущем примере выберем базис $\{e_{i,k}\}$ и дополним его элементом K. Получим базис в $\tilde{\mathfrak{P}}_1$. Двойственный базис в $\tilde{\mathfrak{P}}_2$ получается прибавлением элемента d к базису $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$. Тогда канонический элемент r_σ^c будет иметь следующий вид:

$$r_\sigma^c = \sum e_{i,k} \otimes e_{i,k} + K \otimes d = r_\sigma + K \otimes d = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(\sigma^k \otimes id) \cdot \mathfrak{t}}{u - \epsilon^k \cdot v} + K \otimes d.$$

В этом случае формула для кокоммутатора будет следующей:

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r_\sigma^c(u,v)].$$

Из свойств классического дубля (см. [125]) следует, что $r_\sigma^c(u,v)$ удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE), но не удовлетворяет условию антисуперкоммутативности. Это всё и означает, что $\tilde{\mathfrak{P}}$ – квазитреугольная бисупералгебра Ли.

Для удобства читателя явно опишем структуру супералгебры Ли на $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} = (\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}})^0 \oplus (\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}})^1$. Бисупералгебра Ли $\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}$ порождается образующими:

$$h_{i,k} = h_{i,0,k} := h_i \cdot u^k = h_{i,0} \cdot u^k, \quad k_{i,2k} = h_{i,1,k} := k_i \cdot u^k = h_{i,1} \cdot u^k,$$

$$x_{i,k}^{\pm} = x_{i,0,k}^{\pm} := x_i^{\pm} \cdot u^k = x_{i,0}^{\pm} \cdot u^k, \quad \hat{x}_{i,k}^{\pm} = x_{i,1,k}^{\pm} := \hat{x}_i^{\pm} \cdot u^k = x_{i,1}^{\pm} \cdot u^k,$$

которые удовлетворяют следующим определяющим соотношениям, которые очевидным образом следуют из приведённых выше в предыдущем параграфе соотношений в супералгебре Ли $A(n,n)$:

$$[h_{i,0,m}, h_{j,0,p}] = [h_{i,0,2m}, h_{j,1,p}] = [h_{i,0,2m+1}, h_{j,1,2p+1}] = 0; \tag{5.3.14}$$

$$\begin{gathered}[h_{i,0,2m+1}, h_{j,1,2p}] = \tfrac{2}{n}(\delta_{ij} - \delta_{i,j+1})(-\textstyle\sum_{r=1}^{i-1} r h_{r,1,2(m+p)+1} \\ + \textstyle\sum_{r=i}^{n-1}(n-r)h_{r,1,2(m+p)+1}) + \tfrac{2}{n}(2\delta_{ij} - \delta_{i,j-1})(-\textstyle\sum_{r=1}^{i} r h_{r,1,2(m+p)+1} \\ + \textstyle\sum_{r=i+1}^{n-1}(n-r)h_{r,1,2(m+p)+1}) \\ = (2\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i,j+1})(\bar{h}_{i,1,2(m+p)+1} + \bar{h}_{i+1,1,2(m+p)+1});\end{gathered} \tag{5.3.15}$$

$$[h_{i,1,2m+1}, h_{j,1,2p}] = 0; \tag{5.3.16}$$

$$\begin{gathered}[h_{i,1,2m}, h_{j,1,2p}] = \tfrac{2}{n}(\delta_{ij} - \delta_{i,j+1})(-\textstyle\sum_{r=1}^{i-1} r h_{r,0,2(m+p)} \\ + \textstyle\sum_{r=i}^{n-1}(n-r)h_{r,0,2(m+p)}) + \tfrac{2}{n}(\delta_{ij} - \delta_{i,j+1})(-\textstyle\sum_{r=1}^{i} r h_{r,0,2(m+p)} \\ + \textstyle\sum_{r=i+1}^{n-1}(n-r)h_{r,0,2(m+p)}) = (2\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i,j+1})(\bar{h}_{i,0,2(m+p)} + \bar{h}_{i+1,0,2(m+p)});\end{gathered} \tag{5.3.17}$$

$$\begin{gathered}[h_{i,1,2m+1}, h_{j,1,2p+1}] = \tfrac{2}{n}(\delta_{ij} - \delta_{i,j+1})(-\textstyle\sum_{r=1}^{i-1} r h_{r,0,2(m+p+1)} \\ + \textstyle\sum_{r=i}^{n-1}(n-r)h_{r,0,2(m+p+1)}) + \tfrac{2}{n}(\delta_{ij} - \delta_{i,j+1})(-\textstyle\sum_{r=1}^{i} r h_{r,0,2(m+p+1)} \\ + \textstyle\sum_{r=i+1}^{n-1}(n-r)h_{r,0,2(m+p+1)}) = (2\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i,j+1})(\bar{h}_{i,0,2(m+p+1)} + \bar{h}_{i+1,0,2(m+p+1)});\end{gathered} \tag{5.3.18}$$

$$[h_{k,0,m}, x_{j,0,p}^{\pm}] = \pm\tilde{a}_{ij} x_{j,0,p+m}^{\pm}; \tag{5.3.19}$$

$$\begin{gathered}[h_{i,1,m}, h_{i,1,l}] = -\textstyle\sum_{k=1}^{i-1} \tfrac{4k}{n+1} h_{k,0,l+m} + \tfrac{2(n+1-2i)}{n+1} h_{i,0,l+m} \\ + \textstyle\sum_{k=i+1}^{n} \tfrac{4(n+1-k)}{n+1} h_{k,0,l+m} = (\bar{h}_{i,0,l+m} + \bar{h}_{i+1,0,l+m});\end{gathered} \tag{5.3.20}$$

$$\begin{gathered}[h_{i,1,l}, h_{i+1,1,m}] = [h_{i+1,1,l}, h_{i,1,m}] = \textstyle\sum_{k=1}^{i} \tfrac{2k}{n+1} h_{k,0,l+m} - \textstyle\sum_{k=i+1}^{n} \tfrac{2(n+1-k)}{n+1} h_{k,1,l+m} = \\ \bar{h}_{i+1,0,l+m};\end{gathered} \tag{5.3.21}$$

$$[h_{i,1,l}, h_{j,1,m}] = 0, \qquad |i-j| > 1, \tag{5.3.22}$$

$$[h_{i,0,l}, x_{j,1,m}^{\pm}] = \pm\tilde{a}_{ij} x_{j,1,l+m}^{\pm}, \tag{5.3.23}$$

$$[h_{i,1,l}, x_{j,0,m}^{\pm}] = \pm\tilde{a}_{ij} x_{j,1,l+m}^{\pm}, \quad [h_{i,1,l}, x_{j,1,m}^{\pm}] = \pm a_{n+1,n+1+j-i} x_{j,0,l+m}^{\pm}, \tag{5.3.24}$$

$$[x_{i,0,l}^{+}, x_{j,0,m}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,0,l+m}, \quad [x_{i,0,l}^{+}, x_{j,1,m}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,1,l+m}, \tag{5.3.25}$$

$$\begin{gathered}[x_{i,1,l}^{+}, x_{j,1,m}^{-}] = \delta_{ij}(-\tfrac{(n-1)}{n+1}((2i-n-1)h_{i,0,l+m} + \textstyle\sum_{k=i+1}^{n} 2(k-n-1)h_{k,0,l+m}) = \\ \delta_{ij}(\bar{h}_{i,0,l+m} + \bar{h}_{i,0,l+m}).\end{gathered} \tag{5.3.26}$$

Опишем явно значение коцикла $\delta(h_{i,0,1}\cdot v) = [h_{i,0,1}\cdot v\otimes 1+1\otimes h_{i,0,1}\cdot v, r_\sigma(v-u)]$. Получаем, что

$$[h_{i,0,1}\cdot v\otimes 1 + 1\otimes h_{i,0,1}\cdot v, r_\sigma(v-u)] =$$

$$\left[h_{i,0,1}\cdot v\otimes 1 + 1\otimes h_{i,0,1}\cdot v, \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0+\mathfrak{t}_1}{u-v} + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0-\mathfrak{t}_1}{u+v}\right]$$

$$= [1\otimes h_{i,0,1}, \mathfrak{t}_0] = [1\otimes h_{i,0,1}, \sum_j h_{j,0}\otimes h^{j,0} + \sum_j h_{j,1}\otimes \check{h}_{j,1}$$

$$+ \sum_{\alpha\in\Delta_+} x^-_{\alpha,0}\otimes x^+_{\alpha,0} + x^-_{\alpha,1}\otimes x^+_{\alpha,1} + x^+_{\alpha,0}\otimes x^-_{\alpha,0} + x^+_{\alpha,1}\otimes x^-_{\alpha,1}].$$

Отметим, что в силу проведённых выше вычислений естественно будет определить коумножение на образующей $h_{i,0,1}$ следующей формулой:

$$\Delta(h_{i,0,1}) = h_{i,0,1}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,0,1} + \hbar[1\otimes h_{i,0,1}, \bar{\mathfrak{t}}_0],$$

где $\bar{\mathfrak{t}}_0$ – часть оператора Казимира, определяемая следующей формулой $\mathfrak{t}_0 = \bar{\mathfrak{t}}_0 - \tau(\bar{\mathfrak{t}}_0)$, где $\tau(a\otimes b) = (-1)^{p(a)p(b)}b\otimes a$ – суперперестановка тензорных сомножителей. Нетрудно видеть, что $\bar{\mathfrak{t}}_0$ можно явно задать следующей формулой:

$$\bar{\mathfrak{t}}_0 = \sum_j h_{j,1}\otimes \check{h}_{j,1} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} x^-_{\alpha,0}\otimes x^+_{\alpha,0} + x^-_{\alpha,1}\otimes x^+_{\alpha,1}.$$

Отметим, что можно также определить структуру бисупералгебры Ли на супералгебре полиномиальных токов $\mathfrak{sl}_n(\Lambda)[u]$, если задать следующее коммутационное соотношение:

$$[s,s] = 2, \tag{5.3.27}$$

$$s\cdot u = -u\cdot s. \tag{5.3.28}$$

Покажем, что полученная токовая алгебра с коэффициентами из алгебры Клифформа Λ изоморфна, определённой выше скрученной полиномиальной супералгебре Ли $\tilde{\mathfrak{P}}_1$.

Пусть $\mathbf{\Lambda} = \mathbb{C}[u]\oplus s\cdot\mathbb{C}[u]$, а $\Lambda_1 = [\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}]$.

Теорема 5.3.1. *Имеем место следующий изоморфизм супералгебр Ли:*

$$\mathfrak{sl}_n(\Lambda_1) \cong \tilde{\mathfrak{P}}_1. \tag{5.3.29}$$

Доказательство. Теорема доказывается установлением биективного соотношения между системами образующих упомянутых в формулировке теоремы супералгебр Ли, а также прямой проверкой того факта, что системы определяющих соотношений между образующими одной супералгебры Ли и соответствующими им при биективном соответствии образующими второй супералгебры Ли, совпадают. Действительно, зададим отображение $f : \mathfrak{sl}_n(\Lambda_1) \to \tilde{\mathfrak{P}}_1$ формулами:

$$f : h_i\cdot u^{2k} \mapsto h_{i,0,2k}, \quad f : h_i\cdot s\cdot u^{2k+1} \mapsto h_{i,1,2k+1},$$

$$f : x^\pm_i\cdot u^{2k} \mapsto x^\pm_{i,0,2k}, \quad f : x^\pm_i\cdot su^{2k+1} \mapsto x^\pm_{i,1,2k+1}.$$

Покажем, что соотношения между любыми образующими $a, b\in\mathfrak{sl}_n(\Lambda)[u]$ и их образами $f(a), f(b)\in\tilde{\mathfrak{P}}_1$, совпадают. Достаточно проверить совпадение для соотношений Шевалле-Серра в супералгебре Ли $\mathfrak{sl}_n(\Lambda_1)$. Прежде всего заметим, что имеет место

естественный изоморфизм супералгебр Ли

$$\mathfrak{sl}_n(\Lambda_1) \to \oplus_{k=0}^\infty \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\otimes u^{2k} \oplus \oplus_{k=0}^\infty \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\otimes s\cdot u^{2k+1}.$$

В силу этого образующие $h_i\cdot(su)^k, x^\pm_i\cdot(su)^k, \quad i\in I=\{1,\dots,n\}$ образуют полную систему образующих.

□

5.4 Квантование бисуперсупералгебры Ли скрученных токов

Напомним (см. главу 1, определение 1.5.1), что квантованием бисупералгебры Ли $A(\in \{G[t], G[t]^{\sigma}\})$ называется супералгебра Хопфа $A_{\hbar}$ над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\hbar]]$, которая удовлетворяет следующим условиям:
1)

$$A_{\hbar}/\hbar A_{\hbar} \cong U(A),$$

где $U(A)$ – универсальная обёртывающая супералгебра супералгебры Ли A;
2) Супералгебра $A_{\hbar}$ изоморфна $U(A)[[\hbar]]$, как векторное пространство;
3) выполняется следующий принцип соответствия

$$\hbar^{-1}(\Delta(x) - \Delta^{op}(x)) \mathrm{mod}\, \hbar = \varphi(\bar{x}) \mathrm{mod}\, \hbar,$$

где Δ– коумножение, Δ^{op} – противоположное коумножение (то есть, если $\Delta(x) = \sum x_i' \otimes x"_i$, то $\Delta^{op}(x) = \sum (-1)^{p(x_i')p(x"_i)} x"_i \otimes x_i')$, $x \in A_{\hbar}$, $\bar{x} \equiv x \mod \hbar$, $\bar{x} \in U(A)$.

Опишем теперь квантование бисупералгебры Ли $(\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}, \delta)$. Я напомню (см. также (A.2.13), что

$$\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathfrak{g}^0 \cdot u^{2k} \oplus \mathfrak{g}^1 \cdot u^{2k+1})$$

– градуированная степенями u супералгебра Ли,

$$\delta : a(u) \to \left[a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(\sigma^k \otimes id) \cdot \mathfrak{t}}{u - \epsilon^k \cdot v} \right] \tag{5.4.1}$$

– коскобка, задающая структуру косупералгебры. Здесь $\mathfrak{t}$ – оператор Казимира, а δ – однородно степени -1.

Наложим, как и ранее, на квантование следующие дополнительные условия.
1)Зададим на A градуировку степенями $\hbar$ так, что A превращается в градуированную супералгебру над градуированным кольцом $\mathbb{C}[[\hbar]]$, $\quad deg(\hbar) = 1$;
2) Потребуем, чтобы градуировка A и градуировка $\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}$ индуцировали одну и ту же градуировку на $U(\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}})$, то есть,

$$A/\hbar A \simeq U(\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}})$$

изоморфны, как градуированные супералгебры над $\mathbb{C}$.

Я напомню, что супералгебру Хопфа A над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ обладающую тем свойством, что $A/\hbar A \cong B$, где B супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}$, называют формальной деформацией B. Пусть $p : A \to A/\hbar A \cong B$ – каноническая проекция. Если $p(a) = x$, то элемент a называют деформацией элемента x. Сначала мы докажем общий результат о существовании и единственности квантования (или формальной деформации). Отметим, что это теорема существования, поскольку она не даёт конструктивного описания, получившегося в результате квантования объекта в терминах системы образующих и порождающих соотношений. Конструктивное описание мы получим чуть позже.

Теорема 5.4.1. *Квантование $A_{\hbar}$ бисупералгебры Ли $(G[u]^{\tilde{\sigma}}, \delta)$ существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $HH^i(X, Y), i = 1, 2$ группа когомологий Хохшильда ассоциативной алгебры X с коэффициентами в бимодуле Y. Для доказательства существования квантования надо показать, что вторые когомологии Хохшильда универсальной обёртывающей алгебры исходной скрученной бисупералгебры Ли $U(B_0) = U(G[u]^{\tilde{\sigma}})$ с коэффициентами в бимодуле, являющемся тензорным квадратом исходной скрученной бисупералгебры Ли токов, равны 0. Рассмотрим $HH^i(U(B_0), U(B_0) \otimes U(B_0)), i = 1, 2$. Явными вычислениями можно показать, что в этом случае каждый коцикл является кограницей. Опишем схему доказательства этого утверждения. Будем использовать во время доказательства следующее обозначение $\mathfrak{g} = B_0$. Рассуждения в целом повторяют проведённые ранее аналогичные рассуждения для нескрученной супералгебры токов. Рассмотрим комплекс

$$0 \to k \to U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{\otimes 2} \to U(\mathfrak{g})^{\otimes 3} \to \dots \tag{5.4.2}$$

с дифференциалами $d_k : U(\mathfrak{g})^{\otimes k} \to U(\mathfrak{g})^{\otimes (k+1)}$, определяемыми формулами

$$d_k = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i d_k^i, d_k^i(a_1 \otimes \dots a_k) = a_1 \otimes \dots a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \dots a_k, 1 < i < k,$$
$$d_k^0(x) = 1 \otimes x, d_k^k = x \otimes x. \tag{5.4.3}$$

Заметим, что когомологии H^k этого комплекса совпадают с когомологиями следующего комплекса (с теми же самыми дифференциалами):

$$0 \to D_0 \to D_1 \to D_2 \to \dots, \tag{5.4.4}$$

где $D_k = Kers_k^1 \bigcap Kers_k^2 \bigcap \dots Kers_k^k, s_k^i = \epsilon(a_i) a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \dots a_k$.

Последний факт обосновывается следующим образом. Сначала проверяется, сужение дифференциалов переводит коциклы в коциклы, а кограницы в кограницы, откуда следует корректность отображения когомологий одного комплекса на другой. Несложно проверяется биективность построенного отображения. Далее заметим, что $d_k(\mathfrak{g}^{\otimes k}) = 0$. Отсюда следует существование отображения $\mathfrak{g}^{\otimes k} \to H^k$. Его ограничение на $\bigwedge^k \mathfrak{g}$ обозначим через μ. Стандартными рассуждениями показывается, что μ – изоморфизм. Нетривиальным здесь является доказательство сюръективности.

Отметим, что доказательство сюръективности, в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для универсальных обёртывающих супералгебр Ли, сводится к сюръективности сужения для следующего комплекса, эквивалентного исходному:

$$0 \to k \to Sym^*(\mathfrak{g}) \to Sym^*(\mathfrak{g}) \otimes Sym^*(\mathfrak{g}) \to \dots. \tag{5.4.5}$$

Осталось показать, что первые и вторые когомологии последнего комплекса – нулевые. Последнее, может быть проверено непосредственно, но, фактически, следует из результатов Д. Лейтеса и Д.Б. Фукса о когомологиях супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(m, n)$ (см. [16], стр. 169, а также стр. 148) и хорошо известных вычислений для когомологий алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ со значениями в полупростом модуле (см., например, [11], стр. 534, или [120]). □

Будем обозначать через $m_{i,j,k}$, где $m_{i,j} \in \{h_{i,j}, x_{i,j}^{\pm}\}$, $i \in I, j = 0, 1$, – образующие супералгебры Ли Q_n, деформации образующих $m_{i,j} \cdot u^k$ супералгебры Ли $A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}}$. Так как образующие $m_{i,j}, m_{i,j} \cdot u$ порождают $U(A(n,n)[u]^{\tilde{\sigma}})$, то их деформации $m_{i,j,0}, m_{i,j,1}$, $j = 0, 1$, порождают супералгебру Хопфа A. Нам надо описать систему порождающих соотношений между этими образующими. Эту систему порождающих соотношений мы получим как условие совместимости структур супералгебры и косупералгебры на A. Но прежде мы опишем коумножение на образующих $m_{i,j,1}$. В силу условия однородности квантования 2), коумножение будет однозначно определяться на образующих $m_{i,j,1}$. Сначала опишем коумножение на образующих $h_{i,0,1}$. Прежде заметим, что из условий однородности квантования вытекает, что $U(\mathfrak{g}^0)$ вкладывается в A как супералгебра Хопфа. Это значит, что образующие $m_{i,j,0}$ мы можем отождествить с образующими супералгебры Ли $\mathfrak{g}^0 = Q_{n-1}$. Вычислим значение коцикла δ на образующих $h_{i,0} \cdot u$. Нам потребуется следующее простое предложение.

Предложение 5.4.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ – супералгебра Ли с инвариантным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$; $\{e_i\}, \{e^i\}$ - двойственные относительно этого скалярного произведения, базисы. Тогда для произвольного элемента $g \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство:*

$$[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i] = -[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i]. \tag{5.4.6}$$

Доказательство. Отметим, что по определению билинейной инвариантной формы имеет место равенство: $([g,a],b) = -(-1)^{deg(g)deg(a)}([a,g],b) = -(-1)^{deg(g)deg(a)}(a,[g,b])$ для $\forall a, b \in \mathfrak{A}$. Поэтому

$$([g,e_i],e^i) = -(-1)^{deg(g)deg(e_i)}([e_i,g],e^i) = -(-1)^{deg(g)deg(e_i)}(e_i,[g,e^i]). \tag{5.4.7}$$

Скалярное произведение, определённое на векторном пространстве V задаёт изоморфизм между V и V^*, и, следовательно, между $V \otimes V$ и $V \otimes V^*$. Суммируя по i равенство A.3.8 получаем

$$\sum_i ([g,e_i],e^i) = \sum_i -(-1)^{deg(g)deg(a)}(e_i,[g,e^i]).$$

Отметим, что из равенства значений функционалов на элементах базиса вытекает равенство функционалов, и в силу отмеченного выше изоморфизма, получаем равенство:

$$\sum_i [g,e_i] \otimes e^i = \sum_i -(-1)^{deg(g)deg(a)} e_i \otimes [g,e^i]$$

или

$$[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i] = -[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i].$$

Что и требовалось доказать. ☐

Предложение 5.4.2. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1$ супералгебра Ли с таким невырожденным скалярным инвариантным произведением, что $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$ – изотропные подпространства, $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$ спарены невырожденно, $\mathfrak{A}^0$ – подсупералгебра, а $\mathfrak{A}^1$ – модуль над $\mathfrak{A}^0$. Пусть также $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$, соответственно, а $\mathfrak{t}_0 = \sum_i e_i \otimes e^i, \mathfrak{t}_1 = \sum_i e^i \otimes e_i$. Тогда для произвольных $a \in \mathfrak{A}^0, \quad b \in \mathfrak{A}^1$ имеют место следующие равенства:*

$$[a \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = -[1 \otimes a, \mathfrak{t}_0]; [a \otimes 1, \mathfrak{t}_1] = -[1 \otimes a, \mathfrak{t}_1]$$

$$[b \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = -[1 \otimes b, \mathfrak{t}_1]; [b \otimes 1, \mathfrak{t}_1] = -[1 \otimes b, \mathfrak{t}_0]$$

Доказательство. Доказывается прямыми вычислениями. ☐

Теперь мы можем вычислить значение δ на $h_{i,0} \cdot u$.

$$\delta(h_{i,0} \cdot u) = [h_{i,0} \cdot v \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0} \cdot u, \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1}{u - v} + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1}{u + v}]$$

$$= [h_{i,0} \cdot v \otimes 1 - h_{i,0} \cdot u \otimes 1, \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1}{u - v}] + [h_i \cdot v \otimes 1 + h_{i,0} \cdot u \otimes 1, \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1}{u + v}]$$

$$= [h_{i,0} \otimes 1, \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1)] + [h_{i,0} \otimes 1, \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1)] = [h_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = -[1 \otimes h_{i,0}, \mathfrak{t}_1].$$

Вычислим теперь явно чему равно следующее выражение

$$[1 \otimes h^{i,0}, \mathfrak{t}_0]. \tag{5.4.8}$$

Важную роль при этом будет играть вспомогательное вычисление следующего выражения

$$[1 \otimes h^{i,0}, \sum_{j=1}^{n-1} h_{j,1} \otimes h^{j,1}]. \qquad (5.4.9)$$

Рассмотрим, введённое выше инвариантное билинейное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определённое на $A(n,n)$. Воспользовавшись инвариантностью спаривания и биортогональностью систем векторов $\{h_{i,1}\}$ и $\{h^{i,1}\}$. Получим

$$\langle [h^{i,0}, h^{j,1}], h^{k,1} \rangle = \langle h^{i,0}, [h^{j,1}, h^{k,1}] \rangle = \langle h^{i,0}, [h_{j,1}, h_{k,1}] \rangle$$

Заметим теперь, что в силу определяющих соотношений Q_n

$$[h_{j,1}, h_{k,1}] = 2\delta_{j,k}(h_{j,0} + h_{k,l}) - 2\delta_{j+1,k} h_{k,0}.$$

Отсюда следует, что

$$\langle [h^{i,0}, [h_{j,1}, h_{k,1}] \rangle = \langle [h^{i,0}, 2\delta_{j,k}(h_{j,0} + h_{k,l}) - 2\delta_{j+1,k} h_{k,0} \rangle = 2\delta_{j,k}(\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}) - 2\delta_{j+1,k}\delta_{i,k}.$$

Так как

$$[h_{j,1}, h_{k,1}] = \sum_{k=1}^{n} c_k^{i,j} h_{k,0},$$

то получаем следующие ограничения на ненулевые значения структурных констант

$$c_k^{i,j} \in \{2\delta_{j,k}\delta_{i,j}, 2\delta_{j,k}\delta_{i,j+1}, 2\delta_{j+1,k}\delta_{i,k}\}.$$

Окончательно получаем, что

$$[h^{j,1}, h^{k,1}] = 2\delta_{i,j} h_{i,1}. \qquad (5.4.10)$$

Теперь мы можем явно вычислить значение коцикла на образующей $h_{i,1} \cdot u$:

$$\delta(h^{i,1} \cdot u) = -\left[h^{i,1} \otimes 1, \mathfrak{t}_0\right] = \left[1 \otimes h_{i,1}, \mathfrak{t}_1\right]. \qquad (5.4.11)$$

Аналогично вычисляются значения коцикла на остальных образующих.

$$\delta(x_{i,0}^{\pm} \cdot u) = -[x_{i,0}^{\pm} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = [1 \otimes x_{i,0}^{\pm}, \mathfrak{t}_1],$$
$$\delta(x_{i,1}^{\pm} \cdot u) = -[x_{i,1}^{\pm} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = [1 \otimes x_{i,1}^{\pm}, \mathfrak{t}_1].$$

Из условий однородности квантования следует, что

$$\Delta(h_{i,0,1}) = \Delta_0(h_{i,0,1}) + \hbar F(x_{\alpha,0} \otimes x_{-\alpha,0}, x_{\alpha,1} \otimes x_{-\alpha,1} + h_{i,0} \otimes h_{j,0} + h_{i,1} \otimes h_{j,1}).$$

Из принципа соответствия (пункт 3) определения квантования вытекает, что

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,1}) - \Delta^{op}(h_{i,1}) = F - \tau F = [1 \otimes h^{i,0}, \mathfrak{t}_0].$$

Пусть $\bar{t}_0 = \sum_{\alpha \in \Delta_+} x_{\alpha,0} \otimes x^{-\alpha,0} - x_{\alpha,1} \otimes x^{-\alpha,1}$, а Δ_+ – множество положительных корней алгебры Ли типа $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n)$. Тогда, как нетрудно проверить, $F = [1 \otimes h^{i,0}, \bar{t}_0]$. Так же вычислим $\Delta(h_{i,1,1})$. Ранее было вычислено $\delta(h^{i,1}\cdot u) = [1\otimes h^{i,1}, \mathfrak{t}_0]$. Определим $\Delta(h_{i,1,1})$ формулой

$$\Delta(h_{i,1,1}) = \Delta_0(h_{i,1,1}) + \hbar[1\otimes h^{i,1}, \mathfrak{t}_0].$$

Проверим, что и в этом случае выполняется принцип соответствия:

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,1,1}) - \Delta^{op}(h_{i,1,1}) = [1\otimes h^{i,1}, \sum_{\alpha\in\Delta_+} x_{\alpha,0}\otimes x^{-\alpha,0} - x_{\alpha,1}\otimes x^{-\alpha,1}] -$$

$$[h^{i,1}\otimes 1, \sum_{\alpha\in\Delta_+} x^{-\alpha,0}\otimes x_{\alpha,0} - x^{-\alpha,1}\otimes x_{\alpha,1}].$$

Покажем, что

$$[h^{i,1}\otimes 1, \sum x^{-\alpha,0}\otimes x_{\alpha,0} + x^{-\alpha,1}\otimes x_{\alpha,1}] = [1\otimes h^{i,1}, \sum x_{-\alpha,0}\otimes x^{\alpha,0} + x_{-\alpha,0}\otimes x^{\alpha,0}].$$

Действительно,

$$[h^{i,1}\otimes 1, \sum x^{-\alpha,0}\otimes x_{\alpha,0} + x^{-\alpha,1}\otimes x_{\alpha,1}] = \sum [h^{i,1}, x^{-\alpha,0}]\otimes x_{\alpha,0} + [h^{i,1}, x^{-\alpha,1}]\otimes x_{\alpha,1}.$$

С другой стороны

$$[1\otimes h^{i,1}, \sum x_{-\alpha,0}\otimes x^{\alpha,0} + x_{-\alpha,1}\otimes x^{\alpha,1}] = \sum x_{-\alpha,0}\otimes [h^{i,1}, x^{\alpha,0}] + x_{-\alpha,1}\otimes [h^{i,1}, x^{\alpha,1}].$$

Легко проверить, что

$$[h^{i,1}, x^{\alpha_i-\alpha_j,0}] = -(\delta_{ik}+\delta_{jk}-\delta_{i,k+1}-\delta_{j,k+1})x_{\alpha_i-\alpha_j,1},$$

$$[h^{i,1}, x^{\alpha_i-\alpha_j,1}] = (\delta_{ik}-\delta_{jk}-\delta_{i,k+1}+\delta_{j,k+1})x_{\alpha_i-\alpha_j,0}.$$

Поэтому

$$[h^{i,1}, x^{-\alpha,0}]\otimes x_{\alpha,0} = -x_{-\alpha,1}\otimes [h^{i,1}, x^{\alpha,1}],$$

$$[h^{i,1}, x^{-\alpha,1}]\otimes x_{\alpha,1} = x_{-\alpha,0}\otimes [h^{i,1}, x^{\alpha,0}].$$

Следовательно,

$$[h^{i,1}\otimes 1, \sum x^{-\alpha,0}\otimes x_{\alpha,0} + x^{-\alpha,1}\otimes x_{\alpha,1}] = [1\otimes h^{i,1}, \sum x_{-\alpha,0}\otimes x^{\alpha,0} + x_{-\alpha,1}\otimes x^{\alpha,1}],$$

и равенство

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,0,1}) - \Delta^{op}(h_{i,0,1}) =$$

$$[1\otimes h^{i,1}, \sum_{\alpha\in\Delta_+} x_{\alpha,0}\otimes x^{-\alpha,0} - x_{\alpha,1}\otimes x^{-\alpha,1}] - [h^{i,1}\otimes 1, \sum_{\alpha\in\Delta_+} x^{-\alpha,0}\otimes x_{\alpha,0} - x^{-\alpha,1}\otimes x_{\alpha,1}]$$

доказано.

Точно таким же способом можно определить операцию коумножения на остальных образующих. Получаем, что

$$\Delta(x^+_{i,0,1}) = \Delta_0(x^+_{i,0,1}) + \hbar[1\otimes x^+_{i,0}, \bar{\mathfrak{t}}_0],$$

$$\Delta(x^-_{i,0,1}) = \Delta_0(x^-_{i,0,1}) + \hbar[x^-_{i,0}\otimes 1, \bar{\mathfrak{t}}_0].$$

Таким образом, мы получаем, что коумножение на $h_{i,0,1}$ определяется следующей формулой

$$\Delta(h_{i,0,1}) = h_{i,0,1}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,0,1} + h_{i,1,0}\otimes h_{i,1,0} + \sum_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha_i,\alpha)_1(x^-_{\alpha,0,0}\otimes x^+_{\alpha,0,0} + x^-_{\alpha,1,0}\otimes x^+_{\alpha,1,0}). \tag{5.4.12}$$

Определим элементы $x^{\pm}_{i,j,1}, j = 0,1$, следующей формулой

$$x^{\pm}_{i,j,1} = \pm[h_{i,0,1}, x^{\pm}_{i,j,0}]. \tag{5.4.13}$$

Тогда получаем следующие формулы для коумножения для образующих $x^{\pm}_{i,j,1}$:

$$\begin{gathered}\Delta(x^+_{i,0,1}) = x^+_{i,0,1}\otimes 1 + 1\otimes x^+_{i,0,1} + (h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0})\otimes x^+_{i,0,0} + h_{i,1,0}\otimes x^+_{i,1,0} + \\ 2x^+_{i,1,0}\otimes h_{i,1,0} + \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta_+} 2(x^-_{\alpha,0,0}\otimes[x^+_{\alpha,0,0}, x^+_{i,0,0}] + x^-_{\alpha,1,0}\otimes[x^+_{\alpha,1,0}, x^+_{i,0,0}]).\end{gathered} \tag{5.4.14}$$

Аналогичная формула имеет место и для образующей $x^-_{i,0,1}$:

$$\begin{gathered}\Delta(x^-_{i,0,1}) = x^-_{i,0,1}\otimes 1 + 1\otimes x^-_{i,0,1} - x^-_{i,0,0}\otimes(h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0}) + x^-_{i,1,0}\otimes h_{i,1,0} + \\ h_{i,1,0}\otimes x^-_{i,1,0} - \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta_+} 2([x^-_{\alpha,0,0}, x^-_{i,0,0}]\otimes x^+_{\alpha,0,0} + [x^-_{\alpha,1,0}, x^-_{i,0,0}]\otimes x^+_{\alpha,1,0}).\end{gathered} \tag{5.4.15}$$

Так же получаются и формулы коумножения для нечётных образующих:

$$\begin{gathered}\Delta(\bar h_{i,1,1} + \bar h_{i+1,1,1}) = (\bar h_{i,1,1} + \bar h_{i+1,1,1})\otimes 1 + 1\otimes(\bar h_{i,1,1} + \bar h_{i+1,1,1}) + (\bar h_{i,0,0} + \bar h_{i+1,0,0})\otimes h_{i,1,0} + \\ h_{i,1,0}\otimes(\bar h_{i,0,0} + \bar h_{i+1,0,0}) + \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta_+} 2(x^-_{\alpha,0,0}\otimes x^+_{\alpha,0,0} + x^-_{\alpha,1,0}\otimes x^+_{\alpha,1,0}).\end{gathered} \tag{5.4.16}$$

$$\begin{gathered}\Delta(x^+_{i,1,1}) = x^+_{i,1,1}\otimes 1 + 1\otimes x^+_{i,1,1} + (\bar h_{i,0,0} + \bar h_{i,0,0})\otimes x^+_{i,1,0} + h_{i,0,0}\otimes x^+_{i,1,0} + \\ x^+_{i,1,0}\otimes h_{i,0,0} + \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta_+} 2(x^-_{\alpha,0,0}\otimes[x^+_{\alpha,0,0}, x^+_{i,1,0}] + x^-_{\alpha,1,0}\otimes[x^+_{\alpha,1,0}, x^+_{i,1,0}]).\end{gathered} \tag{5.4.17}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{gathered}[\Delta(x^+_{i,0,1}), \Delta(x^-_{i,1,0})] = \\ [x^+_{i,0,1}\otimes 1 + 1\otimes x^+_{i,0,1} + (h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0})\otimes x^+_{i,0,0} + h_{i,1,0}\otimes x^+_{i,1,0} + \\ 2x^+_{i,1,0}\otimes h_{i,1,0} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} 2(x^-_{\alpha,0,0}\otimes[x^+_{\alpha,0,0}, x^+_{i,0,0}] + x^-_{\alpha,1,0}\otimes[x^+_{\alpha,1,0}, x^+_{i,0,0}]), x^-_{i,1,0}\otimes 1 + 1\otimes x^-_{i,1,0}] = \\ [x^+_{i,0,1}, x^-_{i,1,0}]\otimes 1 + 1\otimes[x^+_{i,0,1}, x^-_{i,1,0}] + \\ h_{i,1,0}\otimes(h_{i,0,0} + h_{i+1,0,0}) + 2(h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0})\otimes h_{i,1,0} + (h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0})\otimes h_{i,1,0} - \\ - \sum_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\alpha_i)_1(x^-_{\alpha,0,0}\otimes x^+_{\alpha,1,0} + x^-_{\alpha,1,0}\otimes x^+_{\alpha,0,0}).\end{gathered}$$

Отметим, что проведённая выкладка подсказывает следующее определение

$$\tilde h_{i,1,1} := [x^+_{i,0,1}, x^-_{i,1,0}]. \tag{5.4.18}$$

Из проведённой выкладки следует по существу, также, что

$$[x^+_{i,0,1}, x^-_{j,1,0}] = \delta_{ij}\tilde h_{i,1,1}. \tag{5.4.19}$$

Легко проверяется, что

$$[x^+_{i,1,1}, x^-_{j,0,0}] = \delta_{ij}\tilde{h}_{i,1,1}. \tag{5.4.20}$$

Так же определяем $\tilde{h}_{i,0,1}$. Аналогично, получаем равенство

$$[x^+_{i,0,0}, x^-_{j,0,0}] = \delta_{ij}\tilde{h}_{i,0,1}. \tag{5.4.21}$$

Из условия согласования структур супералгебры и косупералгебры мы получаем следующие соотношения:

$$\tilde{h}_{i,0,1} = h_{i,0,1} + \frac{1}{2}h^2_{i,0,0}, \tag{5.4.22}$$

$$\tilde{h}_{i,1,1} = \bar{h}_{i,1,1} + \bar{h}_{i+1,1,1} + \frac{1}{2}(h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0})h_{i,1,0}. \tag{5.4.23}$$

Имеют место следующие соотношения, которые сохраняет операция коумножения.

$$[h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] = \pm\tilde{a}_{ij}x^\pm_{j,0,1}, \qquad [h_{i,1,1}, x^\pm_{j,0,0}] = \pm\tilde{a}_{ij}x^\pm_{j,1,1}$$

$$[h_{i,0,1}, x^\pm_{j,1,0}] = \pm\tilde{a}_{ij}x^\pm_{j,1,1}, \qquad [h_{i,1,1}, x^\pm_{j,1,0}] = \pm\tilde{a}_{ij}x^\pm_{j,0,1}.$$

Проверим, что операция коумножения действительно сохраняет эти соотношения. Достаточно проверить одно из них. Проверим первое из этих соотношений. Покажем, что

$$[\Delta(h_{i,0,1}), \Delta(x^\pm_{j,0,0})] = \pm\tilde{a}_{ij}\Delta(x^\pm_{j,0,1}).$$

Действительно,

$$[\Delta(h_{i,0,1}), \Delta(x^\pm_{j,0,0})] = [\Delta_0(h_{i,0,1}) + \hbar[1 \otimes h_{i,0}, \bar{\mathfrak{t}}_0], x^\pm_{j,0,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^\pm_{j,0,0}] =$$

$$[h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] \otimes 1 + 1 \otimes [h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] + \hbar[[1 \otimes h_{i,0}, \bar{\mathfrak{t}}_0], x^\pm_{j,0,0} \otimes 1] + \hbar[[1 \otimes h_{i,0}, \bar{\mathfrak{t}}_0], 1 \otimes x^\pm_{j,0,0}].$$

Я напомню тождество Якоби

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{p(a)p(b)}[b, [a, c]]. \tag{5.4.24}$$

В силу этого тождества получаем, что

$$[\Delta(h_{i,0,1}), \Delta(x^\pm_{j,0,0})] = [h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] \otimes 1 + 1 \otimes [h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] +$$

$$\mp(\alpha_i, \alpha_j)[\sum_{\alpha\in\Delta} x_{-\alpha,0} \otimes x_{\alpha,0}, x^\pm_{j,0} \otimes 1] + [[x^\pm_{j,0,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^\pm_{j,0,0}, \sum_{\alpha\in\Delta} x_{-\alpha} \otimes x_{\alpha,0}], h_{i,0,0} \otimes 1]$$

$$\mp(\alpha_i, \alpha_j)[\sum_{\alpha\in\Delta} x_{-\alpha,1} \otimes x_{\alpha,1}, x^\pm_{j,0} \otimes 1] + [[x^\pm_{j,0,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^\pm_{j,0,0}, \sum_{\alpha\in\Delta} x_{-\alpha,1} \otimes x_{\alpha,1}], h_{i,0,0} \otimes 1] =$$

$$[h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] \otimes 1 + 1 \otimes [h_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] \mp (\alpha_i, \alpha_j) \sum_{\alpha\in\Delta_+} [x_{-\alpha,0}, x^\pm_{j,0,0}] \otimes x_{\alpha,0} +$$

$$\sum_{\alpha\in\Delta_+} ([x^\pm_{j,0,0}, x_{-\alpha,0} \otimes x_{\alpha,0}] + x_{-\alpha,0} \otimes [x^\pm_{j,0,0}, x_{\alpha,0}]), h_{i,0,0} \otimes 1] +$$

$$\mp(\alpha_i, \alpha_j) \sum_{\alpha\in\Delta_+} [x_{-\alpha,1}, x^\pm_{j,0,0}] \otimes x_{\alpha,1} +$$

$$\sum_{\alpha\in\Delta_+}[([x^{\pm}_{j,0,0}, x_{-\alpha,1}\otimes x_{\alpha,1}] + x_{-\alpha,1}\otimes [x^{\pm}_{j,0,0}, x_{\alpha,1}]), h_{i,0}\otimes 1].$$

Нетрудно проверить, что последнее выражение равно $\Delta(x^{\pm}_{j,0,1})$.

Действительно, напомним, что

$$\Delta(x^{+}_{i,0,1}) = x^{+}_{i,0,1}\otimes 1 + 1\otimes x^{+}_{i,0,1} + h_{i,0,0}\otimes x^{+}_{i,0,0} - \sum_{\gamma\in\Delta_+} x^{-}_{\gamma,0}\otimes [x^{+}_{\alpha_i,0}, x^{+}_{\gamma,0}] - \sum_{\gamma\in\Delta_+} x^{-}_{\gamma,1}\otimes [x^{+}_{\alpha_i,0}, x^{+}_{\gamma,1}].$$

Сравнимая с определениями коумножения, получаем, что:

$$[\Delta(h_{i,0,1}), \Delta(x^{+}_{j,0,0})] = \alpha_j(h_i)\Delta(x^{+}_{j,0,1}).$$

Аналогично проверяется и равенство

$$[\Delta(h_{i,0,1}), \Delta(x^{-}_{j,0,0})] = -\alpha_j(h_i)\Delta(x^{-}_{j,0,1}).$$

Здесь мы рассматриваем α_j как элемент корневой решётки Q, а h_i как кокорень, то есть элемент двойственной решётки (элемент $P^{\vee}$ или $Q^{\vee}$).

Из условия совместимости структур суперaлгебры и косуперaлгебры получаем соотношение:

$$[h_{i,0,1}, x^{\pm}_{j,0,0}] = [h_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,0,1}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)x^{\pm}_{j,0,1}.$$

Найдём также другие соотношения системы определяющих соотношений.

Покажем, что

$$[h_{i,1,1}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)x^{\pm}_{j,1,1}. \tag{5.4.25}$$

Рассуждения проводятся той же самой схеме. Вычислим коумножение от левой и правой частей.

Используя формулу

$$\Delta(h_{i,1,1}) = h_{i,1,1}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,1,1} + [h_{i,1,0}\otimes 1, \sum_{\alpha\in\Delta_+} x^{-}_{\alpha,0}\otimes x^{+}_{\alpha,0} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} x^{-}_{\alpha,1}\otimes x^{+}_{\alpha,1}],$$

систему определяющих соотношений, повторяя приведённые выше рассуждения, получаем доказываемую формулу (5.4.25).

Теперь мы можем описать суперaлгебру Хопфа $A = A_h$, являющуюся деформацией (квантованием) бисуперaлгебры Ли $(\mathfrak{g}^{\tilde{\sigma}}, \delta)$.

Теорема 5.4.2. *Суперaлгебра Хопфа $A = A_h$ над $\mathbb{C}[[\hbar]]$, порождается образующими*

$$h_{i,0,0}, x^{\pm}_{i,0,0}, h_{i,1,0}, x^{\pm}_{i,1,0}, h_{i,0,1}, x^{\pm}_{i,0,1}, h_{i,1,1}, x^{\pm}_{i,1,1},$$

$1 \le i \le n$, где $h_{i,0,j}, x^{\pm}_{i,0,j}$ – чётные, $h_{i,1,j}, x^{\pm}_{i,1,j}, j = \{0,1\}$ – нечётные образующие. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_{i,0,k_1}, h_{j,0,k_2}] = [h_{i,1,0}, h_{j,1,1}] = 0, \quad k_1, k_2 \in \{0,1\}, \quad , i, j \in I, \tag{5.4.26}$$

$$[h_{i,1,0}, h_{j,1,0}] = 2\delta_{ij}(h_{i,0,0} + h_{i+1,0,0}) - 2\delta_{i+1,j} h_{j,0,0}, \tag{5.4.27}$$

$$[h_{i,0,1}, h_{j,1,0}] = [h_{i,0,0}, h_{j,1,1}] = 2\delta_{ij}(h_{i,1,1} + h_{i+1,1,1}) - 2\delta_{i+1,j} h_{j,1,1}, \tag{5.4.28}$$

$$[h_{i,0,0}, h_{j,1,1}] = [h_{i,0,1}, h_{j,1,0}] + \frac{1}{2}\widetilde{(\alpha_i, \alpha_j)}(h_{i,0,0}h_{j,1,0} + h_{j,1,0}h_{i,0,0}), \quad i, j \in I, \tag{5.4.29}$$

$$[h_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,k,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,k,r}, \tag{5.4.30}$$

$$[h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1,0}, \tag{5.4.31}$$

$$[h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1,0}, \tag{5.4.32}$$

$$[h_{i_1,1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_2,0} - (-1)^{j_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2}) x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}, \tag{5.4.33}$$

$$[h_{i_1,0,1}, x^{\pm}_{i_2,j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{i_2,j,1}, \tag{5.4.34}$$

$$[h_{i_1,1,1}, x^{\pm}_{i_2,0,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{i_2,1,1}, \tag{5.4.35}$$

$$[h_{i_1,1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_2,0} - (-1)^{i_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2}) x^{\pm}_{i_2,j_2+1,1}, \tag{5.4.36}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_2,0}] = \delta_{i_1,i_2} h_{i_1,j_1+j_2,0}, \quad j_1 \neq j_2 \tag{5.4.37}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_1,0}] = \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,0} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,0}), \tag{5.4.38}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,1}, x^{-}_{i_2,j_2,0}] = [x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_2,1}] = \delta_{i_1,i_2} h_{i_1,j_1+j_2,1} + \frac{\hbar}{2} h^2_{i_1,j_1+j_2,0}, \quad j_1 \neq j_2 \tag{5.4.39}$$

$$[x^{+}_{i_1,0,1}, x^{-}_{i_2,1,0}] = [x^{+}_{i_1,1,1}, x^{-}_{i_2,0,0}] - \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,0}h_{i_1,1,0} + h_{i_1,1,0}h_{i_1,0,0}), \tag{5.4.40}$$

$$\begin{gathered} [x^{+}_{i_1,1,1}, x^{-}_{i_2,0,0}] = \\ \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,1} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,1} + \frac{\hbar}{2}(h_{i_1,0,1} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,1})^2), \end{gathered} \tag{5.4.41}$$

$$\begin{gathered} [x^{+}_{i_1,j_1,1}, x^{-}_{i_2,j_1,0}] = [x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_1,1}] = \\ \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,1} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,1} + \frac{\hbar}{2}(h_{i_1,0,1} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,1})^2), \end{gathered} \tag{5.4.42}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_1+j_2+1}[x^{\pm}_{i_1,j_1+1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}], \tag{5.4.43}$$

$$\begin{gathered} [x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,1}] \\ \pm\hbar(2\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_2,0} - (-1)^{i_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})(x^{\pm}_{i_1,j_1,0}x^{\pm}_{i_2,j_2,0} + x^{\pm}_{i_2,j_2,0}x^{\pm}_{i_1,j_1,0}), \end{gathered} \tag{5.4.44}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_1+j_2+1}[x^{\pm}_{i_1,j_1+1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}], \tag{5.4.45}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}]] = 0, \quad |i_1 - i_2| = 1, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n_1, j_1, j_2 \in \{0,1\}, \tag{5.4.46}$$

$$[[h_{i_1,j_1,1}, x^{+}_{i_1,j_1,0}], x^{-}_{i_2,j_2,0}] + [x^{+}_{i_1,j_1,0}, [h_{i_1,j_1,1}, x^{-}_{i_2,j_2,0}]] = 0, \tag{5.4.47}$$

$$\begin{gathered} [x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}]] + [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, [x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}]] = 0, \\ |i_1 - i_2| = 1, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n_1, j_1, j_2 \in \{0,1\}. \end{gathered} \tag{5.4.48}$$

Закон коумножения Δ *определяется следующими формулами:*

$$\Delta(h_{i,0,0}) = h_{i,0,0} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0,0}, \tag{5.4.49}$$

$$\Delta(x^{\pm}_{i,0,0}) = x^{\pm}_{i,0,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\pm}_{i,0,0}, \tag{5.4.50}$$

$$\Delta(h_{i,0,1}) = h_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0,1} + \hbar[1 \otimes h_{i,0,0}, \Omega_2], \tag{5.4.51}$$

$$\Delta(x^{+}_{i,0,1}) = x^{+}_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{i,0,1} + \hbar[x^{+}_{i,0} \otimes 1, \Omega_2], \tag{5.4.52}$$

$$\Delta(x^{-}_{i,0,1}) = x^{-}_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{i,0,1} - \hbar[1 \otimes x^{-}_{i,0,0}, \Omega_2], \tag{5.4.53}$$

$$\begin{gathered}\Delta(h_{i,0,1}) = h_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0,1} + \hbar h_{i,1,0} \otimes h_{i,1,0} + \\ +\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (\alpha_i, \alpha)(x^{-}_{\alpha,0,0} \otimes x^{+}_{\alpha,0,0} + x^{-}_{\alpha,1,0} \otimes x^{+}_{\alpha,1,0}),\end{gathered} \tag{5.4.54}$$

$$\begin{gathered}\Delta(h_{i,1,1}) = h_{i,1,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1,1} + \hbar h_{i,0,0} \otimes h_{i,1,0} + \hbar h_{i,1,0} \otimes h_{i,0,0} \\ +\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (\alpha_i, \alpha)_1(x^{-}_{\alpha,1,0} \otimes x^{+}_{\alpha,0,0} - x^{-}_{\alpha,0,0} \otimes x^{+}_{\alpha,1,0}),\end{gathered} \tag{5.4.55}$$

$$\begin{gathered}\Delta(\bar{h}_{i,1,1} + \bar{h}_{i+1,1,1}) = (\bar{h}_{i,1,1} + \bar{h}_{i+1,1,1}) \otimes 1 + 1 \otimes (\bar{h}_{i,1,1} + \bar{h}_{i+1,1,1}) + \\ +\hbar(\bar{h}_{i,0,0} + \bar{h}_{i+1,0,0}) \otimes h_{i,1,0} + \hbar h_{i,1,0} \otimes (\bar{h}_{i,0,0} + \bar{h}_{i+1,0,0}) \\ +\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} (\alpha_i, \alpha)_2(x^{-}_{\alpha,1,0} \otimes x^{+}_{\alpha,0,0} - x^{-}_{\alpha,0,0} \otimes x^{+}_{\alpha,1,0}),\end{gathered} \tag{5.4.56}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x^{+}_{i,0,1}) = {} & x^{+}_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{i,0,1} + \hbar x^{+}_{i,1,0} \otimes h_{i,1,0} + \hbar(h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0}) \otimes x^{+}_{i,0,0} \\ & +\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+}(x^{-}_{\alpha,0,0} \otimes [x^{+}_{\alpha,0,0}, x^{+}_{i,0,0}] + x^{-}_{\alpha,1,0} \otimes [x^{+}_{\alpha,1,0}, x^{+}_{i,0,0}]),\end{aligned} \tag{5.4.57}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x^{-}_{i,0,1}) = {} & x^{-}_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{i,0,1} + \hbar h_{i,1,0} \otimes x^{-}_{i,1,0} + \hbar x^{-}_{i,0,0} \otimes (h_{i,0,0} - h_{i+1,0,0}) \\ & -\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+}([x^{-}_{\alpha,0,0}, x^{-}_{i,0,0}] \otimes x^{+}_{\alpha,0,0} + [x^{-}_{\alpha,1,0}, x^{-}_{i,0,0}] \otimes x^{+}_{\alpha,1,0}),\end{aligned} \tag{5.4.58}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x^{+}_{i,1,1}) = {} & x^{+}_{i,1,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{i,1,1} - \hbar h_{i,1,0} \otimes x^{+}_{i,0,0} - \hbar(h_{i,0,0} + h_{i+1,0,0}) \otimes x^{+}_{i,1,0} \\ & +\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+}(x^{-}_{\alpha,0,0} \otimes [x^{+}_{\alpha,0,0}, x^{+}_{i,1,0}] + x^{-}_{\alpha,1,0} \otimes [x^{+}_{\alpha,1,0}, x^{+}_{i,1,0}]),\end{aligned} \tag{5.4.59}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x^{-}_{i,1,1}) = {} & x^{-}_{i,1,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{i,1,1} + \hbar x^{-}_{i,0,0} \otimes h_{i,1,0} + \hbar x^{-}_{i,0,0} \otimes (h_{i,0,0} + h_{i+1,0,0}) - \\ & -\hbar \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+}([x^{-}_{\alpha,0,0}, x^{-}_{i,1,0}] \otimes x^{+}_{\alpha,0,0} + [x^{-}_{\alpha,1,0}, x^{-}_{i,1,0}] \otimes x^{+}_{\alpha,1,0}).\end{aligned} \tag{5.4.60}$$

Доказательство. Вытекает из проведённых выше вычислений. ☐

Заметим, что супералгебры Хопфа $A_{\hbar_1}$ и $A_{\hbar_2}$ для фиксированных $\hbar_1, \hbar_2 \neq 0$ (как супералгебры над $\mathbb{C}$) изоморфны. Полагая $\hbar = 1$ в этих формулах мы получаем систему определяющих соотношений для (супер)янгиана $Y(Q_{n-1})$.

Теорема 5.4.3. *Янгиан* $Y(Q_n)$ *– это супералгебра Хопфа над полем комплексных чисел , порождаемая образующими* $h_{i,0,0}, x^{\pm}_{i,0,0}, h_{i,1,0}, x^{\pm}_{i,1,0}, h_{i,0,1}, x^{\pm}_{i,0,1}, h_{i,1,1}, x^{\pm}_{i,1,1}, \quad 1 \leq i \leq n$, *(*$h_{i,0,j}, x^{\pm}_{i,0,j}$ *– чётные,* $h_{i,1,j}, x^{\pm}_{i,1,j}, j = \{0, 1\}$ *– нечётные образующие). Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:*

$$[h_{i,0,k_1}, h_{j,0,k_2}] = [h_{i,0,0}, h_{j,1,1}] = [h_{i,0,1}, h_{j,1,1}] = 0, \quad k_1, k_2 \in \{0,1\}, \quad , i, j \in I, \tag{5.4.61}$$

$$[h_{i,1,0}, h_{j,1,0}] = 2\delta_{ij}(h_{i,0,0} + h_{i+1,0,0}) - 2\delta_{i+1,j} h_{j,0,0}, \tag{5.4.62}$$

$$[h_{i,0,1}, h_{j,1,0}] = [h_{i,0,0}, h_{j,1,1}] = 2\delta_{ij}(h_{i,1,1} + h_{i+1,1,1}) - 2\delta_{i+1,j} h_{j,1,1}, \tag{5.4.63}$$

$$[h_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,k,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,k,r}, \tag{5.4.64}$$

$$[h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1,0}, \tag{5.4.65}$$

$$[h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1,0}, \tag{5.4.66}$$

$$[h_{i_1,1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_2,0} - (-1)^{j_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2}) x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}, \tag{5.4.67}$$

$$[h_{i_1,0,1}, x^{\pm}_{i_2,j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{i_2,j,1}, \tag{5.4.68}$$

$$[h_{i_1,1,1}, x^{\pm}_{i_2,0,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{i_2,1,1}, \tag{5.4.69}$$

$$[h_{i_1,1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,1}] = (\pm)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_2,0} - (-1)^{j_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2}) x^{\pm}_{i_2,j_2+1,1}, \tag{5.4.70}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_2,0}] = \delta_{i_1,i_2} h_{i_1,j_1+j_2,0}, \quad j_1 \neq j_2 \tag{5.4.71}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_1,0}] = \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,0} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,0}), \tag{5.4.72}$$

$$\begin{gathered}[x^{+}_{i_1,j_1,1}, x^{-}_{i_2,j_2,0}] = [x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_2,1}] = \delta_{i_1,i_2} h_{i_1,j_1+j_2,1} + \tfrac{1}{2} h_{i_1,j_1,0} h_{i_1,j_2,0} = \\ \delta_{i_1,i_2} \tilde{h}_{i_1,j_1+j_2,1}, \quad j_1 \neq j_2\end{gathered} \tag{5.4.73}$$

$$\begin{gathered}[x^{+}_{i_1,j_1,1}, x^{-}_{i_2,j_1,0}] = [x^{+}_{i_1,j_1,0}, x^{-}_{i_2,j_1,1}] = \\ \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0,1} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,1} + \tfrac{1}{2}(h_{i_1,0,0} - (-1)^{j_1} h_{i_1+1,0,0})^2) = \delta_{i_1,i_2} \tilde{h}_{i_1,0,1},\end{gathered} \tag{5.4.74}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_1+j_2+1} [x^{\pm}_{i_1,j_1+1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}], \tag{5.4.75}$$

$$\begin{gathered}[x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,1}] \\ \pm(2\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_2,0} - (-1)^{i_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})(x^{\pm}_{i_1,j_1,0} x^{\pm}_{i_2,j_2,0} + x^{\pm}_{i_2,j_2,0} x^{\pm}_{i_1,j_1,0}),\end{gathered} \tag{5.4.76}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}] = (\pm 1)^{j_1+j_2+1} [x^{\pm}_{i_1,j_1+1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2+1,0}], \tag{5.4.77}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}]] = 0, \quad |i_1 - i_2| = 1, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n_1, j_1, j_2 \in \{0,1\}, \tag{5.4.78}$$

$$[[h_{i_1,j_1,1}, x^{+}_{i_1,j_1,0}], x^{-}_{i_2,j_2,0}] + [x^{+}_{i_1,j_1,0}, [h_{i_1,j_1,1}, x^{-}_{i_2,j_2,0}]] = 0 \tag{5.4.79}$$

$$\begin{gathered}[x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}]] + [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, [x^{\pm}_{i_1,j_1,1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,0}]] = 0, \\ |i_1 - i_2| = 1, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n_1, j_1, j_2 \in \{0,1\}.\end{gathered} \tag{5.4.80}$$

Пусть

$$\tilde{h}_{i,0,1} := [x^{+}_{i,0,1}, x^{-}_{i,0,0}] = [x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{i,0,1}], \tag{5.4.81}$$

$$\tilde{h}_{i,1,1} := [x^{+}_{i,1,1}, x^{-}_{i,0,0}] = [x^{+}_{i,1,0}, x^{-}_{i,0,1}] = [x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{i,1,1}]. \tag{5.4.82}$$

Тогда имеют место также следующие соотношения, являющиеся следствием соотношений (5.4.61 – 5.4.80), приведённых выше

$$[\tilde{h}_{i,0,1}, x^{\pm}_{j,s,0}] = [h_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,s,1}] \pm \tfrac{1}{2}\alpha_j(h_i)(h_{i,0,0} x^{\pm}_{j,s,1} + x^{\pm}_{j,s,1} h_{i,0,0}), \tag{5.4.83}$$

$$[\tilde{h}_{i,1,1}, x^{\pm}_{j,0,0}] = [h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,1}] + \tfrac{1}{2}\alpha_j(\bar{h}_i)(h_{i,1,0} x^{\pm}_{j,0,0} + x^{\pm}_{j,0,0} h_{i,1,0}). \tag{5.4.84}$$

$$[\tilde{h}_{i,1,1}, x^{\pm}_{j,1,0}] = [h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,1}] \pm \tfrac{1}{2}\alpha_j(h_i)(h_{i,1,0} x^{\pm}_{j,1,0} - x^{\pm}_{j,1,0} h_{i,1,0}). \tag{5.4.85}$$

Коумножение в $Y(Q_n)$ задаётся формулами (5.4.54 – 5.4.60) при $\hbar = 1$.

5.5 Токовая система образующих

5.5.1 Формулировка основных результатов

Введём, так называемую, токовую систему образующих и определяющих соотношений. Это аналог "новой"системы образующих и определяющих соотношений введённой В.Г. Дринфельдом (см. [120], [25], [26]) для янгианов простых алгебр Ли (см., также [106]), а также токовой системы образующих и определяющих соотношений для янгианов базисных суперальгебр Ли, рассмотренной в главах 2, 4 данной работы.

Введём образующие $h_{i,j,r}$, $x^{\pm}_{i,j,r}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n-1\}$, $j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Причём, когда второй индекс равен $j = 0$ получаем получаем чётные образующие, а когда второй индекс $j = 1$ получаем нечётные образующие.

Таким образом будем рассматривать следующие токовые образующие

$$\tilde{h}_{i,0,m}, \quad \tilde{h}_{i,1,m}, \quad \bar{h}_{i,0,m}, \quad \bar{h}_{i,1,m}, \quad x^{\pm}_{i,0,m}, \quad x^{\pm}_{i,1,m},$$

$i \in \{1, \dots, n-1\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, следующими формулами:

$$x^{\pm}_{i,0,m+1} = \pm\tfrac{1}{2}[h_{i,1}, x^{\pm}_{i,m}], \quad x^{\pm}_{i,1,2m+k} = (-1)^{k+1}\tfrac{1}{2}[h_{i+1,1} - h_{i-1,1}, x^{\pm}_{i,1,2m+k-1}], \tag{5.5.1}$$

$$\tilde{h}_{i,1,m+1} = \tfrac{1}{2}[h_{i+1,0,1} - h_{i-1,0,1}, h_{i,1,m}], \quad \tilde{h}_{i,0,m} = [x^{+}_{i,m}, x^{-}_{i,0}], \tag{5.5.2}$$

$$\bar{h}_{i,j,m} = \tfrac{1}{n}(-\textstyle\sum_{r=0}^{i-1}(-r)h_{r,j,m} + \sum_{r=i}^{n-1}(n-r)h_{r,j,m}). \tag{5.5.3}$$

Теорема 5.5.1. *Янгиан* $Y(Q_{n-1})$ *порождается образующими* $\bar{h}_{1,j,m}$, $\tilde{h}_{i,j,m} = \bar{h}_{i,j,m} - \bar{h}_{i+1,j,m}$, $x^{\pm}_{i,j,m}$, $i \in I = \{1, \dots, n-1\}$, $m \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, *которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[\tilde{h}_{i_1,0,m_1}, \tilde{h}_{i_2,0,m_2}] = 0, \tag{5.5.4}$$

$$[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2}] = 0, \tag{5.5.5}$$

$$\begin{gathered}[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+t}, \tilde{h}_{i_2,1,2m_2+t}] = (-1)^t 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,0,2(m_1+m_2+t)} + \bar{h}_{i_1+1,0,2(m_1+m_2+t)}) - \\ 2(-1)^t(\delta_{i_1+1,i_2} + \delta_{i_1-1,i_2})\bar{h}_{i_2,0,2(m_1+m_2+t)},\end{gathered} \tag{5.5.6}$$

$$\begin{gathered}[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+1}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2}] = [\tilde{h}_{i_1,1,2m_1}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2+1}] = \\ 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,1,2(m_1+m_2)+1} + \bar{h}_{i_1+1,1,2(m_1+m_2)+1}) - 2(\delta_{i_1+1,i_2} + \delta_{i_1-1,i_2})\bar{h}_{i_2,0,2(m_1+m_2)+1},\end{gathered} \tag{5.5.7}$$

$$\begin{gathered}[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+1}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2+1}] = \\ 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,1,2(m_1+m_2+1)} + \bar{h}_{i_1+1,1,2(m_1+m_2+1)}) - 2(\delta_{i_1+1,i_2} + \delta_{i_1-1,i_2})\bar{h}_{i_2,0,2(m_1+m_2+1)},\end{gathered} \tag{5.5.8}$$

$$[\bar{h}_{i_1,1,2m_1+1}, \bar{h}_{i_2,1,2m_2}] = [\bar{h}_{i_1,1,2m_1}, \bar{h}_{i_2,1,2m_2+1}] = 0, \tag{5.5.9}$$

$$[x^{+}_{i_1,j_1,m_1}, x^{-}_{i_2,j_2,m_2}] = \delta_{i_1,i_2}\tilde{h}_{i_1,j_1+j_2,m_1+m_2}, \tag{5.5.10}$$

$$[\tilde{h}_{i_1,0,m_1+1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}] = [\tilde{h}_{i_1,0,m_1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2+1}] \pm (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})(\tilde{h}_{i_1,0,m_1}x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2} + x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}\tilde{h}_{i_1,0,m_1}), \tag{5.5.11}$$

$$[x^{\pm}_{i_1,0,m_1+1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}] = [x^{\pm}_{i_1,0,m_1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2+1}] \pm (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})(x^{\pm}_{i_1,0,m_1}x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2} + x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}x^{\pm}_{i_1,0,m_1}), \tag{5.5.12}$$

$$[x^{\pm}_{i,1,m+1}, x^{\pm}_{j,1,r}] - [x^{\pm}_{i,1,m}, x^{\pm}_{j,1,r+1}] = \pm\frac{\alpha_j(h_i)}{2}(x^{\pm}_{i,1,m}x^{\pm}_{j,1,r} - x^{\pm}_{j,1,r}x^{\pm}_{i,1,m}) \tag{5.5.13}$$

$$[\tilde{h}_{i_1,1,m_1+1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}] = [h_{i_1,1,m_1}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2+1}] \pm (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})_2(\tilde{h}_{i_1,1,m_1}x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2} + x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}\tilde{h}_{i_1,1,m_1}), \tag{5.5.14}$$

$$[[x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}], x^{\pm}_{i_3,j_3,m_3}] + [x^{\pm}_{i_1,j_1,0}, [x^{\pm}_{i_2,j_2,m_2}, x^{\pm}_{i_3,j_3,m_3}]] = 0, \tag{5.5.15}$$

$$[[x^{\pm}_{i_1-1,0,t_1}, x^{\pm}_{i_1,1,0}], [x^{\pm}_{i_1,1,0}, x^{\pm}_{i_1+1,0,t_1}]] = 0, \quad t_1 \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.5.16}$$

Перепишем соотношения предыдущей теоремы в в более подробной, развёрнутой форме. Получаем следующую теорему, эквивалентную теореме 5.5.1.

Теорема 5.5.2. *Янгиан $Y(Q_{n-1})$ порождается образующими*

$$\bar{h}_{1,j,m}, \quad \tilde{h}_{i,j,m} = \bar{h}_{i,j,m} - \bar{h}_{i+1,j,m}, \quad x^{\pm}_{i,j,m},$$

$i \in I = \{1, \ldots, n-1\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$,

которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[\tilde{h}_{i_1,0,m_1}, \tilde{h}_{i_2,0,m_2}] = 0, \tag{5.5.17}$$

$$[x^{+}_{i,0,m}, x^{-}_{j,s,0}] = \delta_{ij}\tilde{h}_{i,s,m}, \quad s \in \{0,1\} \tag{5.5.18}$$

$$[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+s}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2+s}] = 0, \quad s \in \{0,1\} \tag{5.5.19}$$

$$\begin{gathered}[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+s}, \tilde{h}_{i_2,1,2m_2+s}] = (-1)^s 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,0,2(m_1+m_2+s)} + \\ \bar{h}_{i_1+1,0,2(m_1+m_2+s)}) + (-1)^s 2(\delta_{i_1+1,i_2} + \delta_{i_1-1,i_2})\bar{h}_{i_2,0,2(m_1+m_2+s)}, \quad s \in \{0,1\}\end{gathered} \tag{5.5.20}$$

$$\begin{gathered}[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+1}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2}] = [\tilde{h}_{i_1,1,2m_1}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2+1}] = \\ 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,1,2(m_1+m_2)+1} + \bar{h}_{i_1+1,1,2(m_1+m_2)+1}) - 2(\delta_{i_1+1,i_2} + \delta_{i_1-1,i_2})\bar{h}_{i_2,0,2(m_1+m_2)+1},\end{gathered} \tag{5.5.21}$$

$$[\bar{h}_{i_1,1,2m_1+1}, \bar{h}_{i_2,1,2m_2}] = [\bar{h}_{i_1,1,2m_1}, \bar{h}_{i_2,1,2m_2+1}] = 0, \tag{5.5.22}$$

$$[\tilde{h}_{i,0,2m+1}, h_{j,1,r}] = 2((\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1})\bar{h}_{i,1,2m+r+1} + (\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})\bar{h}_{i+1,1,2m+r+1}); \tag{5.5.23}$$

$$[\tilde{h}_{i,0,2m}, \tilde{h}_{j,1,2r+1}] = 0; \tag{5.5.24}$$

$$[\tilde{h}_{i,1,2k}, \tilde{h}_{j,0,2l}] = 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1})\bar{h}_{i,0,2(k+l)} + 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})\bar{h}_{i+1,0,2(k+l)}; \tag{5.5.25}$$

$$[\tilde{h}_{i,1,2m+1}, \tilde{h}_{j,1,2r}] = 0; \tag{5.5.26}$$

$$[x^{+}_{i,1,m}, x^{-}_{j,1,2k}] = [x^{+}_{i,1,2k}, x^{-}_{j,1,m}] = \delta_{ij}h_{i,0,m+2k}, \tag{5.5.27}$$

$$-[x^{+}_{i,1,m}, x^{-}_{j,1,2k+1}] = [x^{+}_{i,1,2k+1}, x^{-}_{j,1,m}] = \delta_{ij}(\bar{h}_{i,0,m+2k+1} + \bar{h}_{i+1,0,m+2k+1}), \tag{5.5.28}$$

$$[\tilde{h}_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,0,l}] = \pm\alpha_j(h_i)x^{\pm}_{j,0,l}, \tag{5.5.29}$$

$$[\tilde{h}_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,1,l}] = \pm\alpha_j(h_i)x^{\pm}_{j,1,l}, \tag{5.5.30}$$

$$[\tilde{h}_{i,0,n+1}, x^{\pm}_{j,r,l}] = [\tilde{h}_{i,0,n}, x^{\pm}_{j,r,l+1}] \pm \frac{\alpha_j(h_i)}{2}(\tilde{h}_{i,0,n}x^{\pm}_{j,r,l} + x^{\pm}_{j,r,l}\tilde{h}_{i,0,n}), \tag{5.5.31}$$

$$[\tilde{h}_{i,1,n+1}, x^{\pm}_{j,r,l}] = [\tilde{h}_{i,1,n}, x^{\pm}_{j,r,l+1}] \pm \frac{(\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{2}(\tilde{h}_{i,1,n}x^{\pm}_{j,r,l} + (-1)^r x^{\pm}_{j,r,l}\tilde{h}_{i,1,n}), \tag{5.5.32}$$

$$[x^{\pm}_{i,1,m+1}, x^{\pm}_{j,0,r}] - [x^{\pm}_{i,1,m}, x^{\pm}_{j,0,r+1}] = \pm\frac{(\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{2}(x^{\pm}_{i,1,m}x^{\pm}_{j,0,r} + x^{\pm}_{j,0,r}x^{\pm}_{i,1,m}), \tag{5.5.33}$$

$$[x^{\pm}_{i,1,m+1}, x^{\pm}_{j,1,r}] - [x^{\pm}_{i,1,m}, x^{\pm}_{j,1,r+1}] = \pm\frac{\alpha_j(h_i)}{2}(x^{\pm}_{i,1,m}x^{\pm}_{j,1,r} - x^{\pm}_{j,1,r}x^{\pm}_{i,1,m}), \tag{5.5.34}$$

$$\begin{gathered}[h_{i,1,m+1}, x^{\pm}_{j,0,r}] - [h_{i,1,m}, x^{\pm}_{j,0,r+1}] = \pm\alpha_j(h_i)/2(h_{i,1,m}x^{\pm}_{j,0,r} + x^{\pm}_{j,0,r}h_{i,1,m}) + \\ (\pm\delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j})((\bar{h}_{i,0,m} + \bar{h}_{i+1,0,m})x^{\pm}_{j,1,r} + x^{\pm}_{j,1,r}(\bar{h}_{i,0,m} + \bar{h}_{i+1,0,m})),\end{gathered} \tag{5.5.35}$$

$$\sum_{\sigma \in S_2}[x^{\pm}_{i,r,\sigma(s_1)}, [x^{\pm}_{i,r,\sigma(s_2)}, x^{\pm}_{j,r,s_3}]] = 0; \quad r \in \{0,1\}, i \in I, \tag{5.5.36}$$

$$[[x^{\pm}_{i_1-1,0,t_1}, x^{\pm}_{i_1,1,0}], [x^{\pm}_{i_1,1,0}, x^{\pm}_{i_1+1,0,t_1}]] = 0, \quad t_1 \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.5.37}$$

Отметим, что соотношение (5.5.35) является частным случаем соотношения (5.5.32), а соотношения (5.5.27) – (5.5.28) можно заменить следующим соотношением

$$(-1)^k[x^{+}_{i,1,m}, x^{-}_{j,1,k}] = [x^{+}_{i,1,k}, x^{-}_{j,1,m}] = \delta_{ij}(h_{i,0,m+k} - (-1)^k h_{i+1,0,m+k}). \tag{5.5.38}$$

5.5.2 Доказательства основных результатов

Доказательство данной теоремы 5.5.2 распадается на несколько этапов, аналогично доказательству теоремы, описывающей токовую систему образующих и соотношений янгиана $Y(A(m,n))$ из второй главы, а также аналогичной теоремы для янгиана базисной супералгебры Ли из предыдущей главы. Мы при доказательстве данной теоремы опустим часть этапов доказательства аналогичных проведённым выше аналогичным доказательствам во второй и четвёртой главах.

Доказательство. Схема доказательства теоремы 5.5.2 близка к схеме доказательства теоремы об эквивалентности токовых систем образующих и определяющих соотношений и образующих и соотношений полученных в результате квантования, для янгианов базисных супералгебр Ли. Можно считать, что $\bar{Y}(\mathfrak{g})$ порождается образующими $\tilde{x}^{\pm}_{i,j,k}$, $\tilde{h}_{i,j,k}$, $\quad i \in I, \quad j \in \mathbb{Z}_2, \quad k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющими порождающим соотношениям (5.4.26)– (5.4.48) при $\hbar = 1$ или соотношениям (5.4.61) – (5.4.80), (5.4.83) – (5.4.85).

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что соотношения (5.5.17 – 5.5.37) вытекают из соотношений (5.4.61) – (5.4.80), (5.4.83) – (5.4.85), и наоборот, соотношения (5.4.61) – (5.4.80), (5.4.83) – (5.4.85) вытекают из соотношений (5.5.17 – 5.5.37). Последнее, впрочем, почти очевидно. Действительно, соотношения (5.4.61) – (5.4.80) просто содержатся среди соотношений (5.5.17 – 5.5.37). Что же касается соотношений (5.4.83), (5.4.84), то они, по существу, следуют из определения $\tilde{h}_{i,0,1}$, $\tilde{h}_{i,1,1}$.

Существенную роль ниже будут играть соотношения в терминах производящих функций и новые, "логарифмические"образующие $\bar{h}_{i,j,k}$. Пусть

$$h_{i,j}(t) = \textstyle\sum_{k\geq -1} h_{i,j,k}t^{-k-1}, \quad h_{i,j,-1} = 1, \quad , \tag{5.5.39}$$

$$x^{\pm}_{i,j}(t) = \textstyle\sum_{k\geq 0} x^{\pm}_{i,j,k}t^{-k-1}, \tag{5.5.40}$$

Определим образующие $\bar{h}_{i,j,k}$, $j \in \mathbb{Z}_2$ формулой:

$$\bar{h}_{i,j}(t) = \textstyle\sum_{k\geq 0} \bar{h}_{i,j,k}t^{-k-1} = \ln(h_{i,j}(t)). \tag{5.5.41}$$

Пусть A — унитальная алгебра (или алгебра с единицей) с образующими $h_{j,k}$, $x_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z}_2$ и определяющими соотношениями:

$$[h_{0,k_1}, h_{0,k_2}] = 0, \tag{5.5.42}$$

$$[h_{1,2k_1}, h_{1,2k_2}] = h_{0,2k_1+2k_2}, \tag{5.5.43}$$

$$[h_{0,2k_l+1}, h_{1,k_2}] = h_{1,2k_1+k_2+1}, \tag{5.5.44}$$

$$[h_{0,0}, x_{j,r}] = 2\gamma x_{j,r}, \tag{5.5.45}$$

$$[h_{1,0}, x_{0,r}] = 2\gamma_1 x_{0,r}, \tag{5.5.46}$$

$$[h_{1,0}, x_{1,r}] = 0, \tag{5.5.47}$$

$$[h_{0,k}, x_{j,l}] = [h_{0,k-1}, x_{j,l+1}] + \gamma(h_{0,k-1}x_{j,l} + x_{j,l}h_{0,k-1}), \tag{5.5.48}$$

$$[h_{1,r}, x_{0,l}] = [h_{1,r-1}, x_{0,l+1}] + \gamma_1(h_{1,k-1}x_l + x_l h_{1,k-1}), \tag{5.5.49}$$

$$[h_{1,r}, x_{1,l}] = 0, \tag{5.5.50}$$

где $h_{j,-1} = 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть как и выше:

$$h_j(t) = \sum_{k\geq -1} h_{j,k}t^{-k-1},$$

$$x_j(t) = \sum_{k\geq 0} x_{j,k} t^{-k-1},$$

$j \in \mathbb{Z}_2$ и определим $\bar{h}_{j,k} \in A \ \ (k \in \mathbb{Z}_+)$ равенством:

$$\bar{h}_j(t) = \textstyle\sum_{k\geq 0} \bar{h}_{j,k} t^{-k-1} = \ln(h_j(t)). \tag{5.5.51}$$

Имеет место следующая

Лемма 5.5.1. *Пусть (5.5.42) выполняется для $k \leq p$, $l \leq p$ и пусть (5.5.48) имеет место для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_+$ имеет место соотношение:*

$$[\bar{h}_{0,k}, x_{j,l}] = 2\gamma \cdot x_{j,k+l} + 2 \cdot \sum_{\substack{0\leq s\leq k-2 \\ s\in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{\gamma^{k+1-s}}{k+1} C^s_{k+1} x_{j,l+s}, \tag{5.5.52}$$

$$[\bar{h}_{1,k}, x_{0,l}] = 2\gamma \cdot x_{1,k+l} + 2 \cdot \sum_{\substack{0\leq s\leq k_2 \\ \in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{\gamma^{k+1-s}}{k+1} C^s_{k+1} x_{1,l+s}, \tag{5.5.53}$$

$$[\bar{h}_{1,k}, x_{1,l}] = 0. \tag{5.5.54}$$

Отметим, что доказываемая лемма, выводится из следующей леммы, являющейся её частным случаем.

Лемма 5.5.2. *Пусть ассоциативная унитальная алгебра $\mathbb{A}$ порождается образующими $\{h_k, x_k : \quad k \in \mathbb{Z}_+\}$. Пусть соотношение*

$$[h_{k_1}, h_{k_2}] = 0 \tag{5.5.55}$$

выполняется в алгебре для $k \leq p$, $l \leq p$ и пусть соотношение

$$[h_k, x_l] = [h_{k-1}, x_{l+1}] + \gamma\{h_{k-1}, x_l\} = [h_{k-1}, x_{l+1}] + \gamma(h_{k-1}x_l + x_l h_{k-1}) \tag{5.5.56}$$

имеет место для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Пусть также $\{\bar{h}_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ новая система образующих, определяемая соотношением

$$\exp(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k u^{-k-1}) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_m u^{-m-1}. \tag{5.5.57}$$

Тогда для $k \leq p$, $l \in Z_+$ имеет место соотношение:

$$[\bar{h}_k, x_l] = 2\gamma \cdot x_{k+l} + 2 \cdot \sum_{0\leq s\leq k-2, s\in 2\mathbb{Z}_+} \frac{\gamma^{k+1-s}}{k+1} C^s_{k+1} x_{l+s}. \tag{5.5.58}$$

Доказательство. При $n = 1$ доказываемые формулы (5.5.58) следуют из определения образующих и коммутационных соотношений (5.5.56) (они просто совпадают с ними в этом случае). Действительно,

$$[\bar{h}_1, x_l] = [h_1 - \frac{1}{2}h_0^2, x_l] = [h_1, x_l] + \frac{1}{2}[h_0^2, x_l] =$$

$$[h_0, x_{l+1}] + \gamma(h_0 x_l + x_l h_0) - \frac{1}{2}(h_0[h_0, x_l] + [h_0, x_l]h_0) =$$

$$2\gamma x_{l+1} + \gamma(h_0 x_l + x_l h_0) - \frac{1}{2} 2\gamma(h_0 x_l + x_l h_0) = 2\gamma x_{l+1}.$$

Пусть доказываемые формулы справедливы при $n = k$ докажем их справедливость при $n = k + 1$. Отметим, что доказательство этих формул дословно повторяет аналогичное доказательство, проведенное выше в главе 2. Доказательство использует несложные свойства функций Шура, вытекающие, по существу, из их определения. Напомним, что два набора образующих картановской подалгебры связаны следующим соотношением для их производящих функций:

$$\exp(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k u^{-k-1}) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_m u^{-m-1}. \tag{5.5.59}$$

Или, эквивалентным предыдущему, следующим соотношением

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_k u^{-k-1} = \ln(1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_m u^{-m-1}). \tag{5.5.60}$$

Как и выше, будем считать, что степень образующих $h_k, \bar{h}_k$ равна $k+1$: $deg(h_k) = deg(\bar{h}_k) = k + 1$. Рассуждения по индукции отдельно проведём для чётных и нечётных степеней. Пусть сначала утверждение леммы справедливо для всех $n \leq 2m$. Докажем справедливость леммы при $n = 2m$.

Для простоты рассмотрим сначала случай $m = 1$. Легко проверить, что $\bar{h}_2 = h_2 - h_0 h_1 + \frac{1}{3}{}_0^3$. Или $\bar{h}_2 = h_2 - h_0(h_1 - \frac{1}{2}h_1^2) - \frac{1}{6}h_0^3 = h_2 - h_0\bar{h}_1 - \frac{1}{6}h_0^3$. Тогда

$$[\bar{h}_2, x_l] = [h_2 - h_0\bar{h}_1 - \frac{1}{6}h_0^3, x_l] =$$

$$[h_2, x_l] - [h_0\bar{h}_1, x_l] - [\frac{1}{6}h_0^3, x_l] = 2\gamma x_{l+2} + \gamma(\{h_0, x_{l+1}\} + \{h_1, x_l\}) -$$

$$\gamma x_l \bar{h}_1 - \gamma h_0 x_{l+1} + \gamma(x_l h_0^2 + h_0 x_l h_0 + h_0^2 x_l) =$$

$$2\gamma x_{l+2} + \gamma(\{h_0, x_{l+1}\} + \{\bar{h}_1, x_l\} + \frac{1}{2}\{h_0^2, x_l\}) -$$

$$-2\gamma x_l \bar{h}_1 - 2\gamma h_0 x_{l+1} + \gamma(x_l h_0^2 + h_0 x_l h_0 + h_0^2 x_l) =$$

$$2\gamma x_{l+2} - \gamma[h_0, x_{l+1}] + \gamma[\bar{h}_1, x_l] + \frac{1}{2}\{h_0^2, x_l\}) - \gamma(x_l h_0^2 + h_0 x_l h_0 + h_0^2 x_l) =$$

$$2\gamma x_{l+2} + \frac{2\gamma^3}{3} x_l$$

Рассмотрим теперь общий случай. Прежде всего отметим, что

$$[\bar{h}_1, x_l] = 2\gamma x_{l+1}, \tag{5.5.61}$$

$$[\bar{h}_2, x_l] = 2\gamma x_{l+2} + \tfrac{2\gamma^3}{2} x_l, \tag{5.5.62}$$

$$[\bar{h}_3, x_l] = 2\gamma x_{l+3} + 2\gamma^3 x_{l+1}. \tag{5.5.63}$$

Пусть утверждение леммы справедливо при $k \leq 2m - 1$. Докажем, что отсюда следует его справедливость и при $k = 2m$. Выражение будем преобразовывать в соответствии с реализованным выше планом в случае $n = 2$ (или $m = 1$). Легко проверить, что выражения содержащие x_{2m-1} сокращаются, поскольку этих выражений чётное число и они попарно входят с противоположными знаками. Следовательно их сумма равна 0. Действительно, поскольку

$$\bar{h}_{2m} = h_{2m} - \bar{h}_0\bar{h}_{2m-1} + \bar{h}_1\bar{h}_{2m-2} + \ldots + \bar{h}_{m-1}\bar{h}_m + \ldots,$$

а

$$[h_{2m}, x_l] = 2\gamma x_{l+2m} + \gamma(\{h_0, x_{l+2m-1}\} + \ldots \{h_{2m-1}, x_l\}),$$

мы имеем следующее равенство

$$[\bar{h}_{2m}, x_l] = [h_{2m} - \bar{h}_0\bar{h}_{2m-1} + \bar{h}_1\bar{h}_{2m-2} + \ldots + \bar{h}_{m-1}\bar{h}_m + \ldots, x_l] =$$

$$[h_{2m}, x_l] - [\bar{h}_0\bar{h}_{2m-1}, x_l] - [\bar{h}_1\bar{h}_{2m-2}, x_l] - \ldots - [\bar{h}_{m-1}\bar{h}_m, x_l] =$$

$$2\gamma x_{l+2m} + \gamma(\{h_0, x_{l+2m-1}\} + \ldots \{h_{2m-1}, x_l\}) -$$

$$-[\bar{h}_0, x_l]\bar{h}_{2m-1} - \bar{h}_0[\bar{h}_{2m-1}, x_l] - [\bar{h}_1, x_l]\bar{h}_{2m-2} - \bar{h}_1[\bar{h}_{2m-2}, x_l] - \ldots$$

$$-[\bar{h}_{m-1}, x_l]\bar{h}_m - \bar{h}_{m-1}[\bar{h}_m, x_l] - \ldots =$$

$$2\gamma x_{l+2m} + \gamma(\{h_0, x_{l+2m-1}\} + \ldots \{h_{2m-1}, x_l\}) -$$

$$2\gamma x_l\bar{h}_{2m-1} - \bar{h}_0(2\gamma x_{l+2m-1} + 2\sum_{0\leq s\leq 2m-3, s\in 2\mathbb{Z}} \frac{\gamma^{2m-s}}{2m} C^s_{2m} x_{l+s}) - 2\gamma x_{l+1}\bar{h}_{2m-2} -$$

$$\bar{h}_1(2\gamma x_{l+2m-2} + 2\sum_{0\leq s\leq 2m-4, s\in 2Z} \frac{\gamma^{2m-1-s}}{2m-1} C^s_{2m-1} x_{l+s}) - \ldots$$

$$[\bar{h}_{m-1}, x_l]\bar{h}_m - \bar{h}_{m-1}[\bar{h}_m, x_l] - \ldots =$$

$$2\gamma x_{l+2m} - \gamma[h_0, x_{l+2m-1}] + 2\gamma^2 x_{l+2m-1} - \gamma[h_1, x_{l+2m-2}] + 2\gamma^2 x_{l+2m-1} + \ldots.$$

Таким образом, выражения, содержащие член x_{l+2m-2} сокращаются. Выражения же, дающие в результате преобразований выражения пропорциональные x_{l+2m-2} уже не сокращаются. Используя индукцию вычисляем выражение, содержащее x_{l+2m-2}. Получаем, что оно равно $\frac{\gamma^2(2m-1)}{2}x_{l+2m-2}$. Остальные вычисления проводятся по той же схеме.

Будем сначала упрощать выражения содержащие наибольшее число сомножителей наименьшей степени. Используя рассуждения по индукции нетрудно вывести отсюда утверждение леммы. Но можно получить этот же результат используя явные комбинаторные формулы, использующие свойства функций Шура.

Лемма доказана. ☐

Следствие 5.4.1. В $Y(Q_{n-1})$ имеют место следующие соотношения:

$$[\bar{h}_{i,0,k}, x^{\pm}_{j,0,l}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)\cdot x^{\pm}_{j,0,k+l} \pm \sum_{\substack{0\leq s\leq k-2\\ 0\leq s\in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{2^{s-k}\cdot(\alpha_i,\alpha_j)^{k+l-s}}{k+1} C^s_{k+1} x^{\pm}_{j,0,l+s}. \tag{5.5.64}$$

$$[\bar{h}_{i,1,r}, x^{\pm}_{j,0,l}] = \pm\widetilde{(\alpha_i, \alpha_j)}\cdot x^{\pm}_{j,1,r+l} \pm \sum_{\substack{0\leq s\leq r-2\\ 0\leq s\in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{2^{s-r}\cdot\widetilde{(\alpha_i,\alpha_j)}^{r+l-s}}{r+1} C^s_{r+1} x^{\pm}_{j,1,l+s}. \tag{5.5.65}$$

$$[\bar{h}_{i,0,k}, x^{\pm}_{j,1,l}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) \cdot x^{\pm}_{j,1,k+l} \pm \sum_{\substack{0 \le s \le k-2 \\ 0 \le s \in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{2^{s-k} \cdot (\alpha_i, \alpha_j)^{k+l-s}}{k+1} C^s_{k+1} x^{\pm}_{j,1,l+s}. \tag{5.5.66}$$

$$[\bar{h}_{i,1,r}, x^{\pm}_{j,1,l}] = \pm\widetilde{(\alpha_i, \alpha_j)} \cdot x^{\pm}_{j,0,r+l} \pm \sum_{\substack{0 \le s \le r-2 \\ 0 \le s \in 2\mathbb{Z}_+}} \frac{2^{s-r} \cdot \widetilde{(\alpha_i, \alpha_j)}^{r+l-s}}{k+1} C^s_{k+1} x^{\pm}_{j,0,l+s}. \tag{5.5.67}$$

Приступим к доказательству теоремы 5.5.2.

В силу сделанного выше замечания достаточно показать, что соотношения (5.5.17 – 5.5.37) вытекают из соотношений (5.4.61) – (5.4.80), (5.4.83) – (5.4.85). Покажем это. Вначале мы проверим соотношения (5.5.17) – (5.5.37) для малых значений второго индекса (≤ 2), подготовив таким образом базу индукции (A). После чего последовательно докажем по индукции соотношения (5.5.17) – (5.5.25) для $i = j$ (B), потом соотношения (5.5.37)(C), после соотношения (5.5.17) – (5.5.35), (5.5.23) для $i \neq j$ и соотношения (5.5.36), (5.5.37)(D).

A). Из (5.4.26)– (5.4.48) и определения $x^{\pm}_{i_1,0,1}$, $h_{{}_2i,j,k}$, $x^{\pm}_{i,1,1}$, следует, (5.5.17) – (5.5.23) для $k = 0$. Коммутируя обе части равенства

$$h_{i,0,1} = [x^{+}_{i,0,1}, x^{-}_{i,0,0}] = [x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{i,0,1}]$$

с $\bar{h}_{i,0,1}$, получим, что

$$h_{i,0,2} := [x^{+}_{i,0,2}, x^{-}_{i,0,0}] = [x^{+}_{i,0,1}, x^{-}_{i,0,1}] = [x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{i,0,2}]. \tag{5.5.68}$$

Из определяющих соотношений (5.4.61) – (5.4.80) и определения $h_{i,0,1} = \bar{h}_{i,0,1} + \dfrac{1}{2} h^2_{i,0,0}$ вытекает, что

$$[h_{i,0,1}, x^{\pm}_{j,0,0}] = [h_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,0,1}] + b_{ij}(h_{i,0,0} x^{\pm}_{j,0,0} + x^{\pm}_{j,0,0} h_{i,0,0}). \tag{5.5.69}$$

Из (5.5.69) следует также, что (5.4.79) эквивалентно равенству $[h_{i,0,2}, h_{i,0,1}] = 0$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 5.5.3. *Пусть* $s, p \in \mathbb{Z}_+$ *и*

$$[h_{i,0,l}, h_{i,0,k}] = 0 \quad \text{\textit{для}} \quad k + l \le s \tag{5.5.70}$$

а $\bar{h}_{i,0,0}, \bar{h}_{i,0,1}, \ldots, \bar{h}_{i,s}$ *определяются формулой (5.5.41). Пусть также (5.5.70) имеет место для* $k \le s$ *и* $l \in \mathbb{Z}_+$ *и выполняется следующее соотношение*

$$[x^{\pm}_{i,0,p+1}, x^{\pm}_{i,0,p}] = \pm b_{ii} x^{\pm 2}_{i,0,p}. \tag{5.5.71}$$

Тогда (5.5.34), (5.5.35) имеют место для $k = p + s$ *и* $l = p$*:*

$$[x^{\pm}_{i,0,p+s+1}, x^{\pm}_{i,0,p}] = [x^{\pm}_{i,0,p+s}, x^{\pm}_{i,0,p+1}] \pm b_{ii}(x^{\pm}_{i,0,p+s} x^{\pm}_{i,0,p} + x^{\pm}_{i,0,p} x^{\pm}_{i,0,p+s}).$$

Доказательство. Пусть $d^i_{kr} = \dfrac{2^{s-k} \cdot (\alpha_i, \alpha_j)^{k+l-s}}{k+1}$. Заметим, что (5.5.48) для $i = j$ можно переписать в виде :

$$[\bar{h}_{i,0,k}, x^{\pm}_{i,j,l}] = \pm 2 \cdot x^{\pm}_{i,j,k+l} \pm \sum_{0 \le r \le k-2} d^i_{kr} C^s_{k+1} x^{\pm}_{i,j,l+s} \tag{5.5.72}$$

Здесь $j \in \{0,1\}$. Пусть $\tilde{h}'_{i,0,0} = h_{i,0,0}$, и определим по индукции:

$$\tilde{h}'_{i,0,k} = h_{i,0,k} - (1/2) \sum_{0 \le s \le k-2} d_{k,s} \tilde{h}'_{2,0,s}, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Ясно, что

$$[\tilde{h}'_{i,0,k}, x^{\pm}_{i,j,l}] = \pm 2 x^{\pm}_{i,j,k+l}, \quad k = 0, 1, \ldots, s, \quad l \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.5.73}$$

Окончательно получаем, что

$$[x^{\pm}_{i,j,p+s+1}, x^{\pm}_{i,j,p}] = \pm(1/2)[[\tilde{h}'_{i,0,k}, x^{\pm}_{i,j,p+1}], x^{\pm}_{i,j,p}] = [x^{\pm}_{i,j,p+s}, x^{\pm}_{i,j,p+1}] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}[\tilde{h}'_{i,0,k}, [x^{\pm}_{i,j,p+1}, x^{\pm}_{i,j,p}]] = [x^{\pm}_{i,j,p+s}, x^{\pm}_{i,j,p+1}] + \frac{1}{2}[\tilde{h}'_{i,j,k}, x^{\pm 2}_{i,j,p}(\pm 1)] =$$

$$= [x^{\pm}_{i,j,p+s}, x^{\pm}_{i,j,p+1}] \pm (x^{\pm}_{i,j,p+s} x^{\pm}_{i,j,p} + x^{\pm}_{i,p} x^{\pm}_{i,j,p+s}).$$

□

Отметим, что условия предыдущей леммы выполняются для $s \le 1$, $p = 0$. Поэтому из этой леммы следует, что

$$[x^{\pm}_{i,0,2}, x^{\pm}_{i,0,0}] = \pm b_{ii}(x^{\pm}_{i,0,1} x^{\pm}_{i,0,0} + x^{\pm}_{i,0,0} x^{\pm}_{i,0,1}).$$

Поэтому

$$[[x^{+}_{i,0,2}, x^{+}_{i,0,0}], x^{-}_{i,0,0}] = [h_{i,0,2}, x^{+}_{i,0,0}] + (-1)^{p(i)p(i)}[x^{+}_{i,0,2}, h_{i,0,2}].$$

Отсюда следует, что

$$[h_{i,0,2}, x^{+}_{i,0,0}] + [x^{+}_{i,0,2}, h_{i,0,0}] = (h_{i,0,1} x^{+}_{i,0,0} + x^{+}_{i,0,0} h_{i,0,1} + x^{+}_{i,0,1} h_{i,0,0} + h_{i,0,0} x^{+}_{i,0,1}) =$$

$$= [h_{i,0,1}, x^{+}_{i,0,1}] - [h_{i,0,0}, x^{+}_{i,0,2}] + (h_{i,0,1} x^{+}_{i,0,0} + x^{+}_{i,0,0} h_{i,0,1}).$$

Выбирая в этих формулах вначале знак + и коммутируя с $x^{-}_{i,0}$, получаем:

$$[h_{i,0,2}, x^{+}_{i,0,0}] = [h_{i,0,1}, x^{+}_{i,0,1}] + (h_{i,0,1} x^{+}_{i,0,0} + x^{+}_{i,0,0} h_{i,0,1}).$$

Аналогично, $[h_{i,0,2}, x^{-}_{i,0,0}] = [h_{i,0,1}, x^{-}_{i,0,1}] + (h_{i,0,1} x^{-}_{i,0,0} - x^{-}_{i,0,0} h_{i,0,1})$. Так как

$$[\tilde{h}'_{i,0,1}, h_{i,0,2}] = 0, \quad \text{то} \quad [h_{i,0,2}, x^{\pm}_{i,0,l}] = [h_{i,0,1}, x^{\pm}_{i,0,l+1}] \pm (h_{i,0,1} x^{\pm}_{i,0,l} - x^{\pm}_{i,0,l} h_{i,0,1}),$$

$$[h_{m,0,2}, x^{\pm}_{m,0,0}] = -[h_{m,0,0}, [\tilde{h}'_{m,0,2}, x^{\pm}_{m,0,1}]] = 0. \tag{5.5.74}$$

Коммутируя это равенство с $\tilde{h}'_{m+1,0,1}$ получим, что

$$[h_{m,0,2}, x^{\pm}_{m,0,l}] = 0. \tag{5.5.75}$$

Аналогично доказывается также следующая лемма.

Лемма 5.5.4. *Пусть $s, p \in \mathbb{Z}_+$, и*

$$[h_{i,0,l}, h_{i,1,s}] = 0 \quad \text{для} \quad k + l \le s \tag{5.5.76}$$

для $l - s \in 2\mathbb{Z}$. Пусть также $\bar{h}_{i,0,0}, \bar{h}_{i,0,1}, \ldots, \bar{h}_{i,0,s}$ определяются формулой (5.5.41), и (5.5.76) имеет место для $k \le s$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ и также выполняется следующее равенство

$$[x^{\pm}_{i,0,p+1}, x^{\pm}_{i,1,p}] = \pm \tilde{b}_{ii} x^{\pm 2}_{i,1,p}. \tag{5.5.77}$$

Тогда (5.5.34), (5.5.35) имеют место для $k = p + s$ и $l = p$:

$$[x^{\pm}_{i,0,p+s+1}, x^{\pm}_{i,1,p}] = [x^{\pm}_{i,0,p+s}, x^{\pm}_{i,1,p+1}] \pm \tilde{b}_{ii}(x^{\pm}_{i,0,p+s} x^{\pm}_{i,1,p} + x^{\pm}_{i,1,p} x^{\pm}_{i,0,p+s}).$$

Доказательство. Сначала проверим первый шаг индукции. Из определяющих соотношений янгиана следует, что

$$[h_{i,0,0}, h_{i,1,0}] = 0, \quad [h_{i,0,1}, h_{i,1,1}] = 0.$$

Воспользуемся соотношением,

$$h_{i,1,1} = [x^+_{i,0,1}, x^-_{i,1,0}].$$

Тогда

$$[h_{i,0,1}, h_{j,1,1}] = [h_{i,0,1}, [x^+_{j,0,1}, x^-_{j,1,0}]] = [[h_{i,0,1}, x^+_{j,0,1}], x^-_{j,1,0}] + [x^+_{j,0,1}, [h_{i,0,1}, x^-_{j,1,0}]] =$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)[x^+_{j,0,2} + \frac{1}{2}(h_{i,0,0}x^+_{j,0,1} + x^+_{j,0,1}h_{i,0,0}), x^-_{j,1,0}]$$

$$-(\alpha_i, \alpha_j)[x^+_{j,0,1}, x^-_{j,1,1} + \frac{1}{2}(h_{i,0,0}x^-_{j,0,0} + x^-_{j,1,0}h_{i,0,0}) =$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)(h_{i,1,2} - h_{i,1,2} + \frac{1}{2}(h_{i,0,0}h_{j,1,1} + h_{j,1,1}h_{i,0,0} - h_{i,0,0}h_{j,1,1} - h_{j,1,1}h_{i,0,0})+$$

$$\frac{1}{2}(-(\alpha_i, \alpha_j)(x^-_{i,1,0}x^+_{i,0,1} + x^+_{i,0,1}x^-_{i,0,0} - x^-_{i,1,0}x^+_{i,0,1} - x^+_{i,0,1}x^-_{i,1,0})) = 0.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся последовательно по индукции.

□

В)

Лемма 5.5.5. *Формулы (5.5.34), (5.5.35) имеют место при* $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $i = j$.

Доказательство. Пусть

$$x^\pm(i,k,l) := [x^\pm_{i,1,k+1}, x^\pm_{i,1,l}] - [x^\pm_{i,1,k}, x^\pm_{i,1,l+1}] \mp b_{ii}(x^\pm_{i,1,k}x^\pm_{j,l} - x^\pm_{j,1,l}x^\pm_{i,1,k}),$$

$b_{ij} = \dfrac{a_{ii}}{2}$.

Отметим, что $x^\pm(i,k,l) = 0$ для $0 \le l < k \le 2$. Прокоммутируем $x^\pm(m,k,l)$ с $\tilde{h}'_{i+1,0,1}$ и получим

$$[\tilde{h}'_{i+1,0,1}, x^\pm(i,k,l)] = \mp x^\pm(i,k+1,l) \mp x^\pm(i,k,l+1) = 0.$$

Ещё раз прокоммутировав с $\tilde{h}'_{i+1,0,1}$ получим:

$$x^\pm(i,k+2,l) + 2x^\pm(i,k+1,l+1) + x^\pm(i,k,l+2) = 0.$$

С другой стороны, после коммутации с $\tilde{h}'_{i+1,0,2}$ получим:

$$x^\pm(i,k+2,l) + x^\pm(i,k,l+2) = 0.$$

Решая эту систему, получим, что: $x^\pm(i,k+1,l+1) = 0$. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $x^\pm(i,p,l) = 0 \Rightarrow$

$$x^\pm(i,k+2,l) + 2x^\pm(i,k+1,l+1) + x^\pm(i,k,l+2) = 0. \tag{5.5.78}$$

$$x^\pm(i,k+2,l) + x^\pm(i,k,l+2) = 0. \tag{5.5.79}$$

Получаем, что

$$x^{\pm}(j,p,l) = 0 \ \Rightarrow \ x^{\pm}(j,p+2,l) + x^{\pm}(j,p,l+2) = 0, \tag{5.5.80}$$

$$x^{\pm}(j,p,l) = 0 \ \Rightarrow \ x^{\pm}(j,p+1,l+1) = 0. \tag{5.5.81}$$

Из (5.5.80), (5.5.81) и предыдущих рассуждений получаем, что $x^{\pm}(j,p,l) = 0$ для $0 \leq l \leq p \leq 2$. Пусть равенство $x^{\pm}(j,p,l) = 0$ имеет место для $0 \leq l \leq p \leq s$, где $s \geq 2$. Применяя предыдущие рассуждения получаем, что $x^{\pm}(j,p,l) = 0$ для $0 \leq l \leq p \leq s+1$. Лемма доказана. □

C) Сейчас мы докажем формулы

$$[h_{i,1,2k+1}, h_{j,1,l}] = 0, \quad 2k+l+1 \leq s, \quad 2k+1 \geq l, \tag{5.5.82}$$

$$[x^{+}_{i,1,2s+1}, x^{-}_{i,0,0}] = [x^{+}_{i,1,2s-1}, x^{-}_{i,0,2}] = \ldots = [x^{+}_{i,1,0}, x^{-}_{i,1,2s+1}], \tag{5.5.83}$$

$$[h_{i,0,k}, x^{\pm}_{j,1,l}] = [h_{i,0,k-1}, x^{\pm}_{j,1,l+1}] \pm \tilde{b}_{ij}(h_{i,0,k}x^{\pm}_{j,1,l} + x^{\pm}_{j,1,l}h_{i,0,k}). \tag{5.5.84}$$

При этом мы будем использовать индукцию по s. Для $s = 3$ эти формулы уже доказаны ранее. Предположим, что они выполняются для $2s+1 = r$ и пусть $r = 2p-1$, то есть $s = p$. Так как $[h_{i,1,2k}, h_{j,1,l}] = 0$ для $l \leq p$, то коммутируя (5.5.84) с $\tilde{h}'_{i,0,1}$, получим, что эти формулы справедливы для $k \leq p$, $l \in \mathbb{Z}_{+}$. С другой стороны:

$$0 = [h_{i,1,2p+1}, h_{i,1,2p+1}] = [h_{i,1,2p+1}, \tilde{h}'_{i,1,2p+1}] = [[x^{+}_{i,1,2p+1}, x^{-}_{i,0,0}], \tilde{h}'_{i,1,2p+1}]$$

$$= -2([x^{+}_{i,0,4p+2}, x^{-}_{i,0,0}] - [x^{+}_{i,1,2p+1}, x^{-}_{i,1,2p+1}]). \tag{5.5.85}$$

Коммутируя $\tilde{h}'_{i,0,1}$ с обеими частями (5.5.83) при $2s-1 = 2p-1$, получим:

$$[x^{+}_{i,0,4p+2}, x^{-}_{i,0,0}] - [x^{+}_{i,1,4p+1}, x^{-}_{i,1,1}] = [x^{+}_{i,0,4p+2}, x^{-}_{i,0,0}]$$

$$- [x^{+}_{i,0,4p}, x^{-}_{i,0,2}] = \ldots = [x^{+}_{i,1,1}, x^{-}_{i,1,4p+1}] - [x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{i,0,4p+2}]. \tag{5.5.86}$$

Аналогично (5.5.86) имеем

$$0 = [h_{i,1,2p+1}, h_{j,1,2p+1}] = [h_{i,1,2p+1}, \tilde{h}'_{j,1,2p+1}] = [[x^{+}_{i,1,2p+1}, x^{-}_{i,0,0}], \tilde{h}'_{j,1,2p+1}] = [x^{+}_{i,0,4p+2}, x^{-}_{i,0,0}]$$

$$- [x^{+}_{i,1,2p+1}, x^{-}_{i,1,2p+1}] \tag{5.5.87}$$

при $|i-j| = 1$. Сравнивая (5.5.85) – (5.5.87), получаем, что (5.5.87) выполняется для $s = 2p = r+1$.

Для $q < p$ имеют место следующие равенства:

$$[h_{i,1,2r+1-q}, h_{j,1,q+1}] = [[x^{+}_{i,1,2r+1-q}, x^{-}_{i,0,0}], \tilde{h}'_{j,1,q+1}] = [x^{+}_{i,0,2r+2}, x^{-}_{i,0,0}]$$

$$-[x^{+}_{i,1,2r+1-q}, x^{-}_{i,1,q+1}] = 0.$$

Отсюда следует, что (5.5.82) выполняется для $s = r+1$. Для доказательства индукционного шага, относящегося к формулам (5.5.84) достаточно прокоммутировать $\tilde{h}'_{i,0,1}$, с этими формулами при $s \leq r+1$, получим (5.5.84) с $s = r+1$. Таким образом, индукционный шаг в случае нечётного $r = 2p-1$ обоснован.

Пусть теперь $r = 2p$ — чётно. Коммутируя $\tilde{h}'_{i,0,1}$ с

$$[h_{i,1,2k}, h_{j,1,2l}] = \delta_{i,j} h_{i,0,2(k+l)}, \quad 2k + l + 1 \leq s, \quad 2k + 1 \geq l \tag{5.5.88}$$

при $s = 2p$, получим:

$$[x^+_{i,1,2p}, x^-_{i,1,1}] - [x^+_{i,1,2p}, x^-_{i,1,1}] = [x^+_{i,1,2p}, x^-_{i,1,0}] -$$
$$- [x^+_{i,0,2p-1}, x^-_{i,0,2}] = \ldots = [x^+_{i,1,1}, x^-_{i,1,2p}] - [x^+_{i,0,0}, x^-_{i,0,2p+1}]. \tag{5.5.89}$$

Из (5.5.82) следует, что $[h_{i,1,p}, h_{j,1,l}] = 0$, $l \leq p$, следовательно можно определить $\tilde{h}'_{i,1,p}$. Нетрудно видеть, что:

$$[h_{i,1,p+1}, h_{i,1,p}] = [h_{i,1,p+1}, \tilde{h}'_{i,1,p}] = [[x^+_{i,1,p+1-q}, x^-_{i,1,q}], \tilde{h}'_{i,p}]$$
$$= -(\alpha_i, \alpha_i)([x^+_{i,1,2p+1-q}, x^-_{i,1,q}] - [x^+_{i,1,p+1-q}, x^-_{i,1,p+q}]). \tag{5.5.90}$$

С другой стороны:

$$[h_{i,1,p+1}, h_{j,1,p}] = [h_{i,1,p+1}, [x^+_{j,1,p-1}, x^-_{j,0,1}]]$$
$$= [[h_{i,1,p+1}, x^+_{j,1,p-1}], x^-_{j,0,1}]] + [x^+_{j,1,p-1}, [h_{i,1,p+1}, x^-_{j,0,1}]].$$

Применяя (5.5.84) несколько раз, получим, что последнее равенство совпадает с

$$[h_{i,0,0}, x^+_{j,1,2p}], x^-_{j,1,1}]] + (\alpha_i, \alpha_j)/2 \left[\sum_{0 \leq l \leq p} (h_{i,1,p-l} x^+_{j,1,p+l-1} + x^+_{j,1,p+l-1} h_{i,1,p-l}), x^-_{j,0,1} \right]$$

$$+ [x^+_{j,1,p-1}, [h_{i,0,0}, x^-_{j,1,p+2}]] = \left[x^+_{j,1,p-1}, \sum_{0 \leq l \leq p} (h_{i,1,p-l} x^-_{j,1,p+l-1} + x^-_{j,1,p+l-1} h_{i,1,p-l}) \right]$$
$$= (\alpha_i, \alpha_j)([x^+_{j,1,2p}, x^-_{j,0,1}] - [x^+_{j,1,p-1}, x^-_{j,0,p+2}])$$
$$+ \sum_{0 \leq t \leq p} ([h_{i,1,p-t} x^+_{j,1,p+t-1} + x^-_{j,1,p+t-1} h_{i,1,p-t}, x^-_{i,0,1}]$$
$$+ [x^+_{j,1,p-1}, h_{i,1,p-t} x^-_{j,1,t+1} + x^-_{j,1,t+1} h_{i,1,p-t}]).$$

В $Y(Q_{n-1})$ левая часть последнего равенства равна 0, равно как и первый член правой части. Значит равна нулю и сумма, стоящая в правой части. С другой стороны в $\bar{Y}(Q_{n-1})$ она также равна 0, так как у элементов этой суммы, суммы вторых индексов мономов этой суммы меньше $2p$ и по индукционной гипотезе такие элементы в $Y(Q_{n-1})$ и в $\bar{Y}(Q_{n-1})$ совпадают. Последнее равенство в $\bar{Y}(Q_{n-1})$ может быть переписано в виде:

$$[h_{i,1,p+1}, h_{j,1,p}] = (\alpha_i, \alpha_j)([x^+_{i,1,2p}, x^-_{i,0,1}] - [x^+_{i,1,p-1}, x^-_{j,0,p+2}]).$$

Сравнивая с (5.5.90), получаем, что

$$[h_{i,1,2(p+1)}, h_{j,1,p}] = -[h_{i,1,2(p+1)}, h_{j,1,p}] = 0.$$

Таким образом, индукционный шаг $s = 2p + 1 = r + 1$ для формулы (5.5.82) совершён. Отсюда следует и доказательство индукционного шага для формулы (5.5.82). Из формул (5.5.82), (5.5.83) следует формула (5.5.84).

D) Нам осталось доказать формулы (5.5.34), (5.5.31) – (5.5.35) при $i \neq j$, а также (5.5.39). Их доказательства аналогичны. Докажем, например, (5.5.35).

Пусть

$$x^{\pm}(i,j;k,l) = [x^{\pm}_{i,1,2k+1}, x^{\pm}_{j,0,l}] - [x^{\pm}_{i,1,2k}, x^{\pm}_{j,0,l+1}] \mp b_{ij}(x^{\pm}_{i,1,2k}x^{\pm}_{j,0,l} + x^{\pm}_{j,0,l}x^{\pm}_{i,1,2k}).$$

Прокоммутируем это равенство с $\tilde{h}'_{i,0,1}$ и потом независимо с $\tilde{h}'_{j,0,p}$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{ii}x^{\pm}(i,j;k+1,l) - a_{ij}x^{\pm}(i,j;k,l+1) = 0, \\ a_{ji}x^{\pm}(i,j;k+1,l) - a_{jj}x^{\pm}(i,j;k,l+1) = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля то отсюда следует, что $x^{\pm}(i,j;k+1,l) = 0$, $x^{\pm}(i,j;k,l+1) = 0$. Так как $x^{\pm}(i,j;0,0) = 0$ то отсюда следует справедливость (5.5.35) для всех k,l при $i \neq j$.

Докажем теперь по индукции соотношение (5.5.19), то есть покажем, что

$$[\tilde{h}_{i_1,1,2m_1+s}, \tilde{h}_{i_2,0,2m_2+s}] = 0, \quad s \in \{0,1\}.$$

Доказательство проведём по индукции. Пусть сначала $m = 0, s = 0$. Тогда данное соотношение совпадает с соотношением в странной супералгебре Ли Q_n. Пусть теперь $m = 0, s = 1$. Получаем соотношение

$$\begin{gathered}
[[x^+_{i_1,0,1}, x^-_{i_1,1,0}], \tilde{h}_{i_2,0,1}] = [[x^+_{i_1,0,1}, \tilde{h}_{i_2,0,1}], x^-_{i_1,1,0}] \\
+[x^+_{i_1,0,1}, [x^-_{i_1,1,0}, \tilde{h}_{i_2,0,1}]] = [[x^+_{i_1,0,2}, h_{i_2,0,0}], x^-_{i_1,1,0}] \\
-\frac{1}{2}\alpha_{i_1}(h_{i_2})[(x^+_{i_1,0,1}h_{i_2,0,0} + h_{i_2,0,0}x^+_{i_1,0,1}), x^-_{i_1,1,0}] + [x^+_{i_1,0,1}, [x^-_{i_1,1,1}, h_{i_2,0,0}]] \\
-\frac{1}{2}\alpha_{i_1}(h_{i_2})[x^+_{i_1,0,1}, (x^-_{i_1,1,0}h_{i_2,0,0} + h_{i_2,0,0}x^-_{i_1,1,0})] \\
= -[[h_{i_2}, x^+_{i_1,0,2}] + \frac{1}{2}\alpha_{i_1}(h_{i_2})(x^+_{i_1,0,1}h_{i_2,0,0} + h_{i_2,0,0}x^+_{i_1,0,1}), x^-_{i_1,1,0}] \\
-[x^+_{i_1,0,1}, [h_{i_2,0,0}, x^-_{i_1,1,1}]] - -\frac{1}{2}\alpha_{i_1}(h_{i_2})[x^+_{i_1,0,1}, (x^-_{i_1,1,0}h_{i_2,0,0} + h_{i_2,0,0}x^-_{i_1,1,0})] \\
= -\alpha_{i_1}(h_{i_2})\tilde{h}_{i_1,1,2} + \frac{1}{2}(\alpha_{i_1}(h_{i_2}))^2(x^-_{i_1,1,0}x^+_{i_1,0,1} + x^+_{i_1,0,1}x^-_{i_1,1,0}) \\
-\frac{1}{2}\alpha_{i_1}(h_{i_2})(\tilde{h}_{i_1,1,0}h_{i_2,0,1} + h_{i_2,0,1}\tilde{h}_{i_1,1,0}) \\
+\alpha_{i_1}(h_{i_2})\tilde{h}_{i_1,1,2} - \frac{1}{2}(\alpha_{i_1}(h_{i_2}))^2(x^-_{i_1,1,0}x^+_{i_1,0,1} + x^+_{i_1,0,1}x^-_{i_1,1,0}) \\
+\frac{1}{2}\alpha_{i_1}(h_{i_2})(\tilde{h}_{i_1,1,0}h_{i_2,0,1} + h_{i_2,0,1}\tilde{h}_{i_1,1,0}) = 0.
\end{gathered}$$

После несложных преобразований получили, что данное выражение равно нулю. Также легко проверить, что

$$\begin{gathered}
[\tilde{h}_{i_1,0,2}, h_{i_2,1,0}] = [[x^+_{i_1,0,1}, x^-_{i_1,0,1}], h_{i_2,1,0}] = \\
-\alpha_{i_2}(h_{i_1})[x^+_{i_1,1,1}, x^-_{i_1,0,1}] + \alpha_{i_2}(h_{i_1})[x^+_{i_1,1,1}, x^-_{i_1,0,1}] = 0.
\end{gathered}$$

База индукции готова. Теперь мы можем провести индукционный шаг. Пусть теперь данное выражение равно нули при $m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2$ и произвольном s. Покажем, что доказываемое равенство (5.5.19) справедливо при $m_1 = n_1 + 1, m_2 = n_2 + 1$. В этом случае левая часть соотношения (5.5.19) принимает следующий вид:

$$[\tilde{h}_{i_1,1,2(n_1+1)}, \tilde{h}_{i_2,0,2(n_2+1)}] = [[x^+_{i_1,0,2(n_1+1)}, x^-_{i_1,1,0}], \tilde{h}_{i_2,0,2(n_2+1)}]. \tag{5.5.91}$$

Будем использовать доказанные выше соотношения (5.5.35) между образующими $h_{i,0,r}$ и $x^{\pm}_{j,s,t}$.

Докажем теперь соотношение

$$\begin{aligned}[\tilde{h}_{i_1,1,2n_1}, \tilde{h}_{i_2,0,2n_2+1}] = 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,1,2(n_1+n_2)+1} + \bar{h}_{i_1,1,2(n_1+n_2)+1}) - \\ 2\delta_{i_1+1,i_2}\bar{h}_{i_2,1,2(n_1+n_2)+1}.\end{aligned} \tag{5.5.92}$$

Это соотношение также будем доказывать по индукции. При $n_1 = n_2 = 0$ этот соотношение совпадает с соотношение в странной супералгебре Ли $\mathfrak{q}_n$, а также с соответствующим соотношением в Q_{n-1}. Проведём сначала индукцию по n_1, а потом и по n_2.

Рассмотрим теперь последнее соотношение, которое осталось доказать:

$$\begin{aligned}[h_{i_1,1,2n_1+s}, h_{i_2,1,2n_2+s}] = (-1)^s 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,0,2(n_1+n_2+s)} + \bar{h}_{i_1+1,0,2(n_1+n_2+s)}) - \\ (-1)^s 2\delta_{i_1+1,i_2}\bar{h}_{i_2,0,2(n_1+n_2+s)},\end{aligned} \tag{5.5.93}$$

где $s \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+, i_1, i_2 \in I = \{0,1,2,\ldots,n-1$.

Так же, как и предыдущие соотношения будем доказывать это соотношение по индукции. При $n_1 = n_2 = 0$ и $s = 0$ доказываемое соотношение совпадает с определяющими соотношениями в супералгебре Q_{n-1}. Проверим это соотношение при $n_1 = n_2 = 0$ и $s = 1$ (отметим, что в квазиклассическом пределе доказываемое соотношение в этом случае совпадает с соотношением в супералгебре Ли $A(n-1,n-1)$).

Итак покажем, что

$$\begin{aligned}[h_{i_1,1,1}, h_{i_2,1,1}] = -2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,0,2} + \bar{h}_{i_1+1,0,2}) + \\ +2\delta_{i_1+1,i_2}\bar{h}_{i_2,0,2},\end{aligned} \tag{5.5.94}$$

Напомним, что

$$\begin{gathered}[x^{+}_{i_1,0,1}, x^{-}_{i_2,1,0}] = [x^{+}_{i_1,0,0}, x^{-}_{i_2,1,1}] = \\ \delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,1,1} + \bar{h}_{i_1+1,1,1} + \tfrac{1}{2}h_{i_1,0,1}h_{i_1,1,0}) = \tilde{h}_{i_1,1,0}.\end{gathered}$$

Вычислим сначала чему равняется выражение

$$[\tilde{h}_{i_1,1,1}, h_{i_2,1,1}]$$

Получим, что

$$\begin{gathered}[\tilde{h}_{i_1,1,1}, h_{i_2,1,1}] = [[x^{+}_{i_1,0,1}, x^{-}_{i_1,1,0}], h_{i_2,1,1}] = \\ -[[h_{i_2,1,1}, x^{+}_{i_1,0,1}], x^{-}_{i_1,1,0}] + [x^{+}_{i_1,0,1}, [h_{i_2,1,1}, x^{-}_{i_1,1,0}]] = \\ -\alpha_{i_1}(h_{i_2})[x^{+}_{i_1,1,2}, x^{-}_{i_1,1,0}]] + (\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})[x^{+}_{i_1,0,1}, x^{-}_{i_1,0,1}] + \\ -\alpha_{i_1}(h_{i_2})(\bar{h}_{i_1,0,2} + \bar{h}_{i_1+1,0,2}) + (\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})(\bar{h}_{i_1,0,2} - \bar{h}_{i_1+1,0,2}) = \\ 2\delta_{i_1,i_2}(\bar{h}_{i_1,0,2} + \bar{h}_{i_1+1,0,2}) - 2\delta_{i_1+1,i_2}\bar{h}_{i_2,0,2}.\end{gathered}$$

Покажем, что

$$[\tilde{h}_{i_1,1,1}, h_{i_2,1,1}] = [\tilde{h}_{i_1,1,1}, \tilde{h}_{i_2,1,1}].$$

Для этого достаточно проверить следующее очевидное равенство

$$-\frac{1}{2}[[h_{i_2,0,0}h_{i_2,1,0}, x^{+}_{i_0,1}], x^{-}i_1, 1, 0] + \frac{1}{2}[x^{+}_{i_1,0,1}, [h_{i_2,0,1}, x^{-}_{i_1,1,0}]] = 0.$$

Таким образом мы проверили первые два шага индукции.

Проведём теперь общий шаг индукции. Пусть соотношение (5.5.93) выполняется при всех $n_1 \leq m_1, \quad n_2 \leq m_2$ и при $s = 0, 1$. Покажем, что соотношение (5.5.93) выполняется при $n_1 \leq m_1 + 1, \quad n_2 \leq m_2$ и при $s = 0$. Потом покажем, что соотношение выполняется $n_1 \leq m_1 + 1, \quad n_2 \leq m_2$ и при $s = 1$. Таким образом мы докажем истинность шага индукции, то есть докажем истинность соотношения (5.5.93).

□

Введем порождающие функции образующих – следующие токи:
$e_{i,j}(u), f_{i,j}(u), h_{i,j}(u), \quad i \in I = \{1, 2, \ldots, n-1\}, j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ формулами:

$$e_{i,j}(u) = \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} x^{+}_{i,j,r} u^{-r-1}, \tag{5.5.95}$$

$$f_{i,j}(u) = \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} x^{-}_{i,j,r} u^{-r-1}, \tag{5.5.96}$$

$$h_{i,j}(u) = 1 + \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{h}_{i,j,r} u^{-r-1}. \tag{5.5.97}$$

Теорема 5.5.3. *Янгиан $Y(Q_{n-1})$ изоморфен унитальной ассоциативной супералгебре над C, порождённой коэффициентами следующих порождающих функций*

$$e_{i,j}(u), \quad f_{i,j}(u), \quad h_{i,j}(u), \quad i \in I = \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad j \in \{0, 1\},$$

удовлетворяющими следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_{i,0}(u), h_{j,0}(v)] = 0, \tag{5.5.98}$$

$$\begin{aligned}[h_{i,1}(u), h_{j,1}(v)] = 2\delta_{i,j} \frac{\bar{h}_{i,0}(v) + \bar{h}_{i+1,0}(v) - \bar{h}_{i,0}(-u) - \bar{h}_{i+1,0}(-u)}{v+u} +\\ 2\delta_{i+1,j} \frac{\bar{h}_{j,0}(u) - \bar{h}_{j,0}(-v)}{u+v},\end{aligned} \tag{5.5.99}$$

$$\begin{aligned}[h_{i,0}(u), h_{j,1}(v)] = 2\delta_{i,j} \frac{\bar{h}_{i,1}(v) + \bar{h}_{i+1,1}(v) - \bar{h}_{i,1}(u) - \bar{h}_{i+1,1}(u)}{v^2 - u^2}\\ +2\delta_{i+1,j} \frac{\bar{h}_{j,1}(u) - \bar{h}_{j,1}(v)}{u^2 - v^2},\end{aligned} \tag{5.5.100}$$

$$[e_{i,0}(u), f_{j,0}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h_{i,0}(u) - h_{i,0}(v)]}{u - v}, \tag{5.5.101}$$

$$[h_{i,0}(u), e_{j,0}(v)] = -\frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j) \frac{h_{i,0}(u)(e_{j,0}(u) - e_{j,0}(v)) + (e_{j,0}(u) - e_{j,0}(v))h_{i,0}(u)}{u - v} +$$

$$[e_{i,0}(u), f_{j,0}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h_{i,0}(u) - h_{i,0}(v)}{u - v}, \tag{5.5.102}$$

$$[e_{i,1}(u), f_{j,1}(v)] = [e_{i,1}(u), f_{j,1}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{(\bar{h}_{i,0}(u) + \bar{h}_{i+1}(u) - \bar{h}_{i,0}(v) - \bar{h}_{i+1}(v))}{u - v}, \tag{5.5.103}$$

$$\begin{aligned}[e_{i,s}(u), e_{j,r}(v)] + [e_{j,r}(u), e_{i,s}(v)] =\\ \frac{1}{2}(2\delta_{i,j} - (-1)^{s+r}\delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}) \frac{((e_{i,s}(u) - e_{i,r}(v)))(e_{j,r}(u) - e_{j,s}(v))}{u - v},\end{aligned} \tag{5.5.104}$$

$$\begin{aligned}[\tilde{h}_{i,0}(u), h_{j,1}(v)] = 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}) \frac{\bar{h}_{i,1}(u) - \bar{h}_{i,1}(v)}{u^2 - v^2} +\\ 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \frac{\bar{h}_{i+1,1}(u) - \bar{h}_{i+1,1}(v)}{u^2 - v^2},\end{aligned} \tag{5.5.105}$$

$$[h^{0}_{i,1}(u), h_{j,1}(v)] = 0. \tag{5.5.106}$$

Доказательство. Теорема доказывается простыми и явными, но громоздкими вычислениями. Докажем, например соотношение (5.5.102).

$$[h_{i,0}(u), e_{j,0}(v)](u-v) = [\sum_{k=0}^{\infty} h_{i,0,k}u^{-k-1}, \sum_{l=0}^{\infty} x^{+}_{j,0,l}v^{-l-1}](u-v) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}[h_{i,0,k}, x^{+}_{j,0,l}]u^{-k-1}v^{-l-1}(u-v) = \sum_{k=-1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}[h_{i,0,k+1}, x^{+}_{j,0,l}]u^{-k-2}v^{-l-1}(u-v) =$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}([h_{i,0,k+1}, x^{+}_{j,0,l}] - [h_{i,0,k}, x^{+}_{j,0,l+1}]u^{-k-1}v^{-l-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[h_{i,0,k}, x^{+}_{j,0,0}]u^{-k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_j(h_i)(h_{i,0,k}x^{+}_{j,0,l} + x^{+}_{j,0,l}h_{i,0,k})u^{-k-1}v^{-l-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[h_{i,0,k}, x^{+}_{j,0,0}]u^{-k-1} =$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)(h_{i,0}(u)e_{j,0}(v) + e_{j,0}(v))h_{i,0}(u)) + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)(h_{i,0}e_{j,0}(u) + e_{j,0}(u)h_{i,0}).$$

Таким образом, соотношение (5.5.102) доказано. Проверим теперь соотношение (5.5.99).

$$[h_{i,1}(u), h_{j,1}(v)] = [\sum_{k=0}^{\infty} h_{i,1,k}u^{-k-1}, \sum_{l=0}^{\infty} h_{j,1,l}]v^{-l-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}[h_{i,1,k}, h_{j,1,l}]u^{-k-1}v^{-l-1}(u+v)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(2\delta_{i,j}(\bar{h}_{i,0,k+l} - \bar{h}_{i+1,0,k+l}) + 2\delta_{i+1,j}(\bar{h}_{j,0,k+l}))u^{-k-1}v^{-l-1}(u+v)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2\delta_{i,j}(\bar{h}_{i,0,n} - \bar{h}_{i+1,0,k+l}) + 2\delta_{i+1,j}(\bar{h}_{j,0,n}))u^{n-1}$$

$$-(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}(2\delta_{i,j}(\bar{h}_{i,0,n} + (-1)^n\bar{h}_{i+1,0,k+l}) - 2\delta_{i+1,j}(\bar{h}_{j,0,n}))v^{n-1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$[h_{i,1}(u), h_{j,1}(v)](u+v) = 2\delta_{i,j}(\bar{h}_{i,0}(v) + \bar{h}_{i+1,0}(v) - \bar{h}_{i,0}(-u) - \bar{h}_{i+1,0}(-u))$$

$$= 2\delta_{i+1,j}(\bar{h}_{j,0}(u) - \bar{h}_{j,0}(-v)).$$

Соотношение (5.5.99) доказано.

Аналогично проверяются и остальные соотношения.

□

5.6 Янгиан супералгебры Ли Q_2

В этом параграфе мы рассмотрим частный случай супералгебры Ли типа Q_2. Отметим, что в этом частном случае многие наши рассуждения значительно упрощаются и формулы становятся более обозримыми.

Теорема 5.6.1. *Супералгебра Хопфа $Y(Q_2)$ над $\mathbb{C}$ порождается образующими*

$$h_{0,0}, \quad x_{0,0}^{\pm}, \quad h_{1,0}, \quad x_{1,0}^{\pm}, \quad h_{0,1}, \quad x_{0,1}^{\pm}, \quad h_{1,1}, \quad x_{1,1}^{\pm},$$

$h_{0,i}, x_{0,i}^{\pm}$ – чётные образующие, $h_{1,i}, x_{1,i}^{\pm}$ – нечётные образующие. Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_{0,i}, h_{0,j}] = 0, \quad , i, j = 0, 1, \tag{5.6.1}$$

$$[h_{1,i}, h_{1,j}] = 0, \quad i \neq j, \tag{5.6.2}$$

$$[h_{1,1}, h_{1,0}] = -(2\bar{h}_{1,0,1} + \bar{h}_{2,0,1}), \tag{5.6.3}$$

$$[h_{0,0}, x_{i,j}^{\pm}] = \pm 2x_{i,j}^{\pm}, \tag{5.6.4}$$

$$[h_{0,1}, x_{i,0}^{\pm}] = \pm 2x_{i,1}^{\pm}, \tag{5.6.5}$$

$$[h_{1,i}, x_{1,j}^{\pm}] = 0 \tag{5.6.6}$$

$$[h_{1,0}, x_{0,j}^{\pm}] = \pm 2x_{1,j}^{\pm}, \tag{5.6.7}$$

$$[x_{0,0}^{+}, x_{1,0}^{-}] = [x_{1,0}^{+}, x_{0,0}^{-}] = h_{1,0}, \tag{5.6.8}$$

$$[x_{0,1}^{+}, x_{1,0}^{-}] = h_{1,1} + \tfrac{1}{2}h_{0,0}h_{1,0}, \tag{5.6.9}$$

$$[x_{0,1}^{+}, x_{0,0}^{-}] = h_{0,1} = \tfrac{1}{2}h_{0,0}^{2}, \tag{5.6.10}$$

$$[x_{1,0}^{+}, x_{1,0}^{-}] = 2(\bar{h}_{1,0,0} + \bar{h}_{2,0,0}), \tag{5.6.11}$$

$$[x_{1,1}^{+}, x_{1,0}^{-}] = 2(\bar{h}_{1,1,0} + \bar{h}_{2,1,0}) + (\bar{h}_{1,0,0} + \bar{h}_{2,0,0})^2, \tag{5.6.12}$$

$$[[h_{0,1}, x_{1,1}^{+}], x_{1,1}^{-}] + [x_{1,1}^{+}, [h_{0,1}, x_{1,1}^{-}]] = 0, \tag{5.6.13}$$

$$[[h_{1,1}, x_{0,1}^{+}], x_{0,1}^{-}] + [x_{0,1}^{+}, [h_{1,1}, x_{0,1}^{-}]] = 0. \tag{5.6.14}$$

Доказательство. Данная теорема является частным случаем доказанной выше теоремы, описывающей янгиан $Y(Q_n)$. ☐

5.7 Квантовый дубль

Опишем квантовый дубль $DY(Q_n)$ янгиана $Y(Q_n)$. Определение квантового дубля дано выше.

Если A – супералгебра Хопфа, то мы, как и выше, будем обозначать через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Напомним, что квантовым дублем DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA \otimes DA$; линейное отображение $A \otimes A^0 \to DA, a \otimes b \to ab$ - биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием квантованием классического дубля $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем коумножение в классическом дубле определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}} \oplus (-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Отметим, что при получении явных соотношений в квантовом дубле играет понятие хопфова спаривания. Действительно, поскольку операция умножения в суперальгебре Хопфа естественно определяет операцию коумножения в двойственной суперальгебре Хопфа, а операция коумножения определяет операцию умножения в двойственной суперальгебре Хопфа, естественное требовать, чтобы спаривание уважало эти операции и мы приходим к следующему определению хопфова спаривания:

$$\langle a, b \cdot c\rangle = \langle \Delta(a), b \otimes c\rangle. \tag{5.7.1}$$

Здесь $a \in A$, $b, c \in A^*$. Эта же формула (5.7.1) определяет и спаривание между суперальгебрами Хопфа A и A^0. Отметим, что соотношения между элементами суперальгебры Хопфа и двойственной суперальгебры Хопфа A^0 с противоположным коумножением определяются однозначно и явные формулы, выражающиеся через структурные константы приведены выше в главе 2. Мы будем их использовать.

Так как янгиан является квантованием бесконечномерной бисуперальгебры Ли, то при определении как самого янгиана, так и его квантового дубля требуется работать в категории топологических суперальгебр Хопфа. В частности, деформацию следует понимать в категории топологических суперальгебр Хопфа с топологией, задаваемой градуировкой, а тензорное произведение следует понимать как топологическое тензорное произведение.

Пусть $C(Q_n)$ суперальгебра, порождённая образующими

$$h_{i,0,k}, \quad x^{\pm}_{i,0,k}, \quad h_{i,1,k}, \quad x^{\pm}_{i,1,k}, \quad i \in I, \quad k \in \mathbb{Z},$$

которые удовлетворяют вышеприведенным соотношениям, таким же как и определяющие соотношения для янгиана, только значения второго индекса могут принимать произвольные целые значения, а не только неотрицательные целые значения. Если определить степень элементов в $C(\mathfrak{g}$ формулой: $deg(h_{i,j,k}) = deg(x^{\pm}_{i,j,k}) = k$, то получаем фильтрацию на $C(\mathfrak{g})$:

$$\ldots C_{-n} \subset \ldots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset \ldots \subset C_m \subset \ldots C(\mathfrak{g}), \tag{5.7.2}$$

где $C_k = \{x \in C(\mathfrak{g}) : deg(x) \leq k\}$.

Пусть $\bar{C}(Q_n)$ формальное пополнение $C(Q_n)$ относительно этой фильтрации. Образующие $x^{\pm}_{i,0,k}, \quad h_{i,0,k}, \quad h_{i,1,k}, \quad x^{\pm}_{i,1,k}, \quad i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}_+$ порождают подсуперальгебру Хопфа $Y^+(Q_n)$ в $\bar{C}(Q_n)$, изоморфную $Y(Q_n)$. Пусть $Y^-(Q_n)$ замкнутая подсуперальгебра в $\bar{C}(Q_n)$, порождёная образующими $x^{\pm}_{i,0,k}, \quad h_{i,0,k}, \quad h_{i,1,k}, \quad x^{\pm}_{i,1,k}, \quad i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}, k < 0$.

Теорема 5.7.1. *Суперальгебра Хопфа $Y^0(Q_n)$ изоморфна $Y^-(Q_n)$.*

Доказательство. Доказательство состоит в прямой проверке совпадения систем определяющих соотношений для $Y^0(Q_n)$ и $Y^-(Q_n)$. Другими словами доказательство сводится к прямому вычислению, которое мы здесь опускаем. □

Отметим также, что сформулированная выше теорема будет вытекать из приводимых ниже результатов. Из доказанных ранее теорем о квантовании вытекает, что суперальгебра Хопфа $Y^-(Q_n)$ является квантованием бисуперальгебры Ли $t^{-1}(A(n-1, n-1)[[t^{-1}]])^{\tilde{\sigma}}$.

Для описания $DY(Q_n)$ удобно ввести следующие порождающие функции

$$e^+_{i,0}(u) := \sum_{k \geq 0} x^+_{i,0,k} u^{-k-1}, \quad e^-_{i,0}(u) := -\sum_{k<0} x^+_{i,0,k} u^{-k-1},$$

$$f^+_{i,0}(u) := \sum_{k \geq 0} x^-_{i,0,k} u^{-k-1}, \quad f^-_{i,0}(u) := -\sum_{k<0} x^-_{i,0,k} u^{-k-1},$$

$$h^+_{i,0}(u) := 1 + \sum_{k\geq 0} h_{i,0,k} u^{-k-1}, \quad h^-_{i,0}(u) := 1 - \sum_{k<0} h_{i,0,k} u^{-k-1},$$

$$e^+_{i,1}(u) := \sum_{k\geq 0} x^+_{i,1,k} u^{-k-1}, \quad e^-_{i,1}(u) := -\sum_{k<0} x^+_{i,1,k} u^{-k-1},$$

$$f^+_{i,1}(u) := \sum_{k\geq 0} x^-_{i,1,k} u^{-k-1}, \quad f^-_{i,1}(u) := -\sum_{k<0} x^-_{i,1,k} u^{-k-1},$$

$$h^+_{i,1}(u) := 1 + \sum_{k\geq 0} h_{i,1,k} u^{-k-1}, \quad h_{i,1}(u) := 1 - \sum_{k<0} h_{i,1,k} u^{-k-1}.$$

Предложение 5.7.1. *Определяющие соотношения в супералгебре $\bar{C}(Q_n)$ эквивалентны следующим соотношениям для порождающих функций*

$$[h^\pm_{i,0}(u), h^\pm_{j,0}(v)] = 0, \tag{5.7.3}$$

$$\begin{aligned}[h^\pm_{i,1}(u), h^\pm_{j,1}(v)] = 2\delta_{i,j} \frac{\bar{h}^\pm_{i,0}(v) + \bar{h}^\pm_{i+1,0}(v) - \bar{h}^\pm_{i,0}(-u) - \bar{h}^\pm_{i+1,0}(-u)}{v+u} + \\ 2\delta_{i+1,j} \frac{\bar{h}^\pm_{j,0}(u) - \bar{h}^\pm_{j,0}(-v)}{u+v},\end{aligned} \tag{5.7.4}$$

$$\begin{aligned}[h^\pm_{i,0}(u), h^\pm_{j,1}(v)] = 2\delta_{i,j} \frac{\bar{h}^\pm_{i,1}(v) + \bar{h}^\pm_{i+1,1}(v) - \bar{h}^\pm_{i,1}(u) - \bar{h}^\pm_{i+1,1}(u)}{v^2-u^2} + \\ 2\delta_{i+1,j} \frac{\bar{h}^\pm_{j,1}(u) - \bar{h}^\pm_{j,1}(v)}{u^2-v^2},\end{aligned} \tag{5.7.5}$$

$$[h^+_{i,0}(u), h^-_{j,0}(u)] = 0, \tag{5.7.6}$$

$$\begin{aligned}[h^\pm_{i,1}(u), h^\mp_{j,1}(v)] = 2\delta_{i,j} \frac{\bar{h}^\pm_{i,0}(v) + \bar{h}^\pm_{i+1,0}(v) - \bar{h}^\mp_{i,0}(-u) - \bar{h}^\mp_{i+1,0}(-u)}{v+u} + \\ 2\delta_{i+1,j} \frac{\bar{h}^\pm_{j,0}(u) - \bar{h}^\mp_{j,0}(-v)}{u+v},\end{aligned} \tag{5.7.7}$$

$$\begin{aligned}[h^\pm_{i,0}(u), h^\mp_{j,1}(v)] = 2\delta_{i,j} \frac{\bar{h}^\pm_{i,1}(v) + \bar{h}^\pm_{i+1,1}(v) - \bar{h}^\mp_{i,1}(u) - \bar{h}^\mp_{i+1,1}(u)}{v^2-u^2} + \\ 2\delta_{i+1,j} \frac{\bar{h}^\pm_{j,1}(u) - \bar{h}^\mp_{j,1}(v)}{u^2-v^2},\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

$$[e^\pm_{i,0}(u), f^\pm_{j,0}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h^\pm_i(u) - h^\pm_i(v)}{u-v}, \tag{5.7.9}$$

$$[e^\pm_{i,0}(u), f^\pm_{j,1}(v)] = [e^\pm_{i,1}(u), f^\pm_{j,0}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h^\pm_{i,1}(u) - h^\pm_{i,1}(v)}{u-v}, \tag{5.7.10}$$

$$[e^\pm_{i,0}(u), f^\mp_{j,0}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h^\mp_{i,0}(u) - h^\pm_{i,0}(v)}{u-v}, \tag{5.7.11}$$

$$[e^{\pm}_{i,0}(u), f^{\mp}_{j,1}(v)] = [e^{\pm}_{i,1}(u), f^{\mp}_{j,0}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h^{\mp}_{i,1}(u) - h^{\pm}_{i,1}(v)}{u-v}, \tag{5.7.12}$$

$$[e^{\pm}_{i,1}(u), f^{\pm}_{j,1}(v)] = [e^{\pm}_{i,1}(u), f^{\pm}_{j,1}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{\bar{h}^{\pm}_{i,0}(u) + \bar{h}^{\pm}_{i+1,0}(u) - h^{\pm}_{i,0}(v) - \bar{h}^{\pm}_{i+1,0}(v)}{u-v}, \tag{5.7.13}$$

$$[e^{\pm}_{i,1}(u), f^{\mp}_{j,1}(v)] = [e^{\pm}_{i,1}(u), f^{\mp}_{j,1}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{\bar{h}^{\mp}_{i,0}(u) + \bar{h}^{\mp}_{i+1,0}(u) - h^{\pm}_{i,0}(v) - \bar{h}^{\pm}_{i+1,0}(v)}{u-v}, \tag{5.7.14}$$

$$[h^{\pm}_{i,0}(u), e^{\pm}_{j,0}(v)] = -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,0}(u)(e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\pm}_{j,0}(v)) + (e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\pm}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,0}(u)}{u-v}, \tag{5.7.15}$$

$$[h^{\pm}_{i,1}(u), e^{\pm}_{j,0}(v)] = -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,0}(u)(e^{\pm}_{j,1}(u) - e^{\pm}_{j,1}(v)) + (e^{\pm}_{j,1}(u) - e^{\pm}_{j,1}(v))h^{\pm}_{i,0}(u)}{u-v}, \tag{5.7.16}$$

$$[h^{\pm}_{i,0}(u), e^{\mp}_{j,0}(v)] = -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,0}(u)(e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\mp}_{j,0}(v)) + (e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\mp}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,0}(u)}{u-v}, \tag{5.7.17}$$

$$[h^{\pm}_{i,1}(u), e^{\mp}_{j,0}(v)] = -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,1}(u)(e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\mp}_{j,0}(v)) + (e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\mp}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,1}(u)}{u-v}, \tag{5.7.18}$$

$$[h^{\pm}_{i,0}(u), f^{\pm}_{j,0}(v)] = \frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,0}(u)(f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\pm}_{j,0}(v)) + (f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\pm}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,0}(u)}{u-v}, \tag{5.7.19}$$

$$[h^{\pm}_{i,0}(u), f^{\mp}_{j,0}(v)] = \frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,0}(u)(f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\mp}_{j,0}(v)) + (f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\mp}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,0}(u)}{u-v}, \tag{5.7.20}$$

$$[h^{\pm}_{i,0}(u), f^{\pm}_{j,0}(v)] = \frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,0}(u)(f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\pm}_{j,0}(v)) + (f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\pm}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,0}(u)}{u-v}, \tag{5.7.21}$$

$$[h^{\pm}_{i,1}(u), f^{\mp}_{j,0}(v)] = \frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{h^{\pm}_{i,1}(u)(f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\mp}_{j,0}(v)) + (f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\mp}_{j,0}(v))h^{\pm}_{i,1}(u)}{u-v}, \tag{5.7.22}$$

$$\begin{gathered}[e^{\pm}_{i,0}(u), e^{\pm}_{j,0}(v)] + [e^{\pm}_{j,0}(u), e^{\pm}_{i,0}(v)] = \\ -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{(e^{\pm}_{i,0}(u) - e^{\pm}_{i,0}(v))(e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\pm}_{j,0}(v)) + (e^{\pm}_{j,0}(u) - e^{\pm}_{j,0}(v))(e^{\pm}_{i,0}(u) - e^{\pm}_{i,0}(v))}{u-v},\end{gathered} \tag{5.7.23}$$

$$\begin{gathered}[e^{+}_{i,0}(u), e^{-}_{j,0}(v)] + [e^{+}_{j,0}(u), e^{-}_{i,0}(v)] = \\ -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{(e^{+}_{i,0}(u) - e^{-}_{i,0}(v))(e^{+}_{j,0}(u) - e^{-}_{j,0}(v)) + (e^{+}_{j,0}(u) - e^{-}_{j,0}(v))(e^{+}_{i,0}(u) - e^{-}_{i,0}(v))}{u-v},\end{gathered} \tag{5.7.24}$$

$$\begin{gathered}[f^{\pm}_{i,0}(u), f^{\pm}_{j,0}(v)] + [f^{\pm}_{j,0}(u), f^{\pm}_{i,0}(v)] = \\ -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{(f^{\pm}_{i,0}(u) - f^{\pm}_{i,0}(v))(f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\pm}_{j,0}(v)) + (f^{\pm}_{j,0}(u) - f^{\pm}_{j,0}(v))(f^{\pm}_{i,0}(u) - f^{\pm}_{i,0}(v))}{u-v},\end{gathered} \tag{5.7.25}$$

$$\begin{gathered}[f^{+}_{i,0}(u), f^{-}_{j,0}(v)] + [f^{+}_{j,0}(u), f^{-}_{i,0}(v)] = \\ -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{(f^{+}_{i,0}(u) - f^{-}_{i,0}(v))(f^{+}_{j,0}(u) - f^{-}_{j,0}(v)) + (f^{+}_{j,0}(u) - f^{-}_{j,0}(v))(f^{+}_{i,0}(u) - f^{-}_{i,0}(v))}{u-v},\end{gathered} \tag{5.7.26}$$

$$\begin{gathered}[e^{\pm}_{i,1}(u), e^{\pm}_{j,1}(v)] + [e^{\pm}_{j,1}(u), e^{\pm}_{i,1}(v)] = \\ -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{(e^{\pm}_{i,1}(u) - e^{\pm}_{i,1}(v))(e^{\pm}_{j,1}(u) - e^{\pm}_{j,1}(v)) - (e^{\pm}_{j,1}(u) - e^{\pm}_{j,1}(v))(e^{\pm}_{i,1}(u) - e^{\pm}_{i,1}(v))}{u-v},\end{gathered} \tag{5.7.27}$$

$$\begin{gathered}[e^{+}_{i,1}(u), e^{-}_{j,1}(v)] + [e^{+}_{j,1}(u), e^{-}_{i,1}(v)] = \\ -\frac{\alpha_j(h_i)}{2} \frac{(e^{+}_{i,1}(u) - e^{-}_{i,1}(v)), (e^{+}_{j,1}(u) - e^{-}_{j,1}(v)) - (e^{+}_{j,1}(u) - e^{-}_{j,1}(v))(e^{+}_{i,1}(u) - e^{-}_{i,1}(v))}{u-v},\end{gathered} \tag{5.7.28}$$

$$[f^{\pm}_{i,1}(u), f^{\pm}_{j,1}(v)] + [f^{\pm}_{j,1}(u), f^{\pm}_{i,1}(v)] =$$
$$-\frac{\alpha_j(h_i)}{2}\frac{(f^{\pm}_{i,1}(u) - f^{\pm}_{i,1}(v))(f^{\pm}_{j,1}(u) - f^{\pm}_{j,1}(v)) - (f^{\pm}_{j,1}(u) - f^{\pm}_{j,1}(v))(f^{\pm}_{i,1}(u) - f^{\pm}_{i,1}(v))}{u-v}, \quad (5.7.29)$$
$$[f^{+}_{i,1}(u), f^{-}_{j,1}(v)] + [f^{+}_{j,1}(u), f^{-}_{i,1}(v)] =$$
$$-\frac{\alpha_j(h_i)}{2}\frac{(f^{+}_{i,1}(u) - f^{-}_{i,1}(v))(f^{+}_{j,1}(u) - f^{-}_{j,1}(v)) - (f^{+}_{j,1}(u) - f^{-}_{j,1}(v))(f^{+}_{i,1}(u) - f^{-}_{i,1}(v))}{u-v}, (5.7.30)$$

$$[e^{\epsilon_1}_{i,0}(u_1), [e^{\epsilon_2}_{i,0}(u_2), e^{\epsilon_3}_{j,0}(u_3)]] + [e^{\epsilon_2}_{i,0}(u_2), [e^{\epsilon_1}_{i,0}(u_1), e^{\epsilon_3}_{j,0}(u_3)]] = 0, \quad (5.7.31)$$
$$[f^{\epsilon_1}_{i,0}(u_1), [f^{\epsilon_2}_{i,0}(u_2), f^{\epsilon_3}_{j,0}(u_3)]] + [f^{\epsilon_2}_{i,0}(u_2), [f^{\epsilon_1}_{i,0}(u_1), f^{\epsilon_3}_{j,0}(u_3)]] = 0, \quad (5.7.32)$$

$$[e^{\epsilon_1}_{i,1}(u_1), [e^{\epsilon_2}_{i,1}(u_2), e^{\epsilon_3}_{j,1}(u_3)]] + [e^{\epsilon_2}_{i,1}(u_2), [e^{\epsilon_1}_{i,1}(u_1), e^{\epsilon_3}_{j,1}(u_3)]] = 0, \quad (5.7.33)$$
$$[f^{\epsilon_1}_{i,1}(u_1), [f^{\epsilon_2}_{i,0}(u_2), f^{\epsilon_3}_{j,0}(u_3)]] + [f^{\epsilon_2}_{i,0}(u_2), [f^{\epsilon_1}_{i,1}(u_1), f^{\epsilon_3}_{j,0}(u_3)]] = 0. \quad (5.7.34)$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы техничное, но, по существу, несложное и сводится к тождественным преобразованиям с порождающими функциями образующих. Отметим, что часть определяющих соотношений в квантовом дубле $DY(Q_n)$ совпадает с определяющими соотношениями в янгиане $Y(Q_n)$, которые были уже доказаны выше, при доказательстве теоремы 5.5.3. Кроме того, доказательства и остальных соотношений по существу похожи на доказательство определяющих соотношений в янгиане $Y(Q_n)$.

□

5.8 Треугольное разложение и формулы спаривания

5.8.1 Треугольное разложение.

В данном параграфе мы рассмотрим аналог гауссова разложения для алгебры Ли (а также супералгебры Ли), а также для её универсальной обёртывающей алгебры (супералгебры). Пусть $Y'_+, \quad Y'_0, \quad Y'_-$ – подсупералгебры (без единицы) в $Y(Q_n)$, порождённые, соответственно, элементами $x^+_{i,0,k} = x^+_{i,k}, \quad x^+_{i,1,k} = \hat{x}^+_{i,k}$, $h_{i,0,k} = h_{i,k}, \quad h_{i,1,k} = k_{i,k}$ и $x^-_{i,0,k} = x^-_{i,k}, \quad x^-_{i,1,k} = \hat{x}^-_{i,k}$ $((i \in I, k \in \mathbb{Z}_+))$. Пусть $Y_+, \quad Y_0, \quad Y_-$ – унитальные подсупералгебры, получающиеся присоединением к подсупералгебрам $Y'_+, \quad Y'_0, \quad Y'_-$, соответственно, единичного элемента.

Предложение 5.8.1. *Умножение в $Y(Q_n)$ индуцирует изоморфизм векторных суперпространств*

$$Y_+ \otimes Y_0 \otimes Y_- \to Y(Q_n). \quad (5.8.1)$$

Это предложение аналогично теореме 3 работы [54] (а также аналогичным теоремам из предыдущих глав 2, 4) и представляет собой, как было отмечено выше, упрощённый вариант теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ теоремы). Отметим, что далее мы уточним этот результат и докажем саму теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Обобщим это предложение на $DY(Q_n)$. Для этого нам потребуются некоторые простые свойства операции коумножения на $Y(Q_n)$, доказываемые по индукции, опираясь на формулы (5.5.95) – (**??**) и соотношения (5.7.3) – (5.7.34), а также тот факт, что операция коумножения является гомоморфизмом, то есть, что $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$.

Предложение 5.8.2. *1) Для произвольного* $x \in Y'_+$ *имеет место равенство*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 (mod Y \otimes Y'_+).$$

2) Для произвольного $y \in Y'_-$ *коумножение на этом элементе имеет следующий вид*

$$\Delta(y) = 1 \otimes y (mod Y'_- \otimes Y).$$

Доказательство. Данное предложение легко следует из теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта, которая доказывается ниже, и явных формул для коумножения на образующих первого порядка янгиана странной супералгебры Ли. Мы докажем это утверждение по индукции по порядку элементов порождающей системы, используя (5.8.1). Для образующих нулевого порядка данное утверждение очевидным образом следует из формул для коумножения для примитивных элементов, каковыми являются образующие нулевого порядка. Для образующих первого порядка доказываемое утверждение следует из формул (5.4.54), (5.4.56), (5.4.57), (5.4.59) для коумножения. Дальнейшие рассуждения проводятся по индукции и существенным образом используют тот факт, что коумножение является гомоморфизмом, то есть: $\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot \Delta(y)$. Опишем кратко схему доказательства данного предложения. Так же, как и при доказательстве теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта введём выпуклый порядок на корнях скрученной аффинной супералгебры Ли $A(n,n)^2$. Этот порядок индуцирует выпуклый порядок на мономах от корневых векторов. Определим степень такого монома как сумму степеней корневых образующих составляющих этот моном. Далее будем предполагать, что для всех предшествующих, относительно введённого выше выпуклого порядка, мономов предложение доказано. Рассмотрим произведение таких мономов $a \cdot b$. Тогда $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b) = (a \otimes 1 + a_1) \cdot (b \otimes 1 + b_1) = a \cdot b \otimes 1 + (a \otimes 1) \cdot b_1 + a_1 \cdot b_1$, где $a_1, b_1 \in Y \otimes Y'_+$. Далее, используя определение выпуклого порядка и вид коммутационных соотношений показываем, что $(a \otimes 1) \cdot b_1 + a_1 \cdot b_1 \in Y \otimes Y'_+$.

Подробно докажем пункт 2) предложения. Проверим формулу для образующих $f_{i,j,k}$ при $k = 0$ сначала, а потом при $k = 1$. Напомним, что в силу упомянутых выше формул (5.4.54), (5.4.56), (5.4.57), (5.4.59) и соотношения:

$$f_{i,j,1} = x^-_{i,j,1}, \tag{5.8.2}$$

$$\check{h}_{i,j,1} = h_{i,0,1} - \tfrac{1}{2} h^2_{i,1,0}, \tag{5.8.3}$$

имеем:

$$\Delta(f_{i,j,0}) = f_{i,j,0} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,j,0}, f_{i,j,0} \otimes 1 \in Y'_- \otimes Y, \tag{5.8.4}$$

$$\begin{aligned}\Delta(f_{i,j,1}) = f_{i,j,1} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,j,1} + f_{i,j,0} \otimes (\bar{h}_{i,0,0} - \bar{h}_{i+1,0,0}) -\\ \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta_+} 2([x^-_{\alpha,0,0}, x^-_{i,j,0}] \otimes x^+_{\alpha,j,0} + [x^-_{\alpha,1,0}, x^-_{i,j,0}] \otimes x^+_{\alpha,j,0}).\end{aligned} \tag{5.8.5}$$

Так как

$$f_{i,j,0} \otimes 1 + f_{i,j,0} \otimes (\bar{h}_{i,0,0} - \bar{h}_{i+1,0,0}) - \sum_{\alpha \in \Delta_+} 2([x^-_{\alpha,0,0}, x^-_{i,j,0}] \otimes x^+_{\alpha,j,0} + [x^-_{\alpha,1,0}, x^-_{i,j,0}] \otimes x^+_{\alpha,j,0}) \in Y'_- \otimes Y$$

то пункт 2) доказан при $n = 1$. Далее, будем доказывать по индукции. Предположим, что утверждение справедливо при $n = m$. Мы будем использовать следующее соотношение

$$f_{i,j,k+1} = \frac{1}{2}[h_{i,0,1}, f_{i,j,k}]. \tag{5.8.6}$$

По индукционному предположению имеем

$$\Delta(f_{i,j,k}) = 1 \otimes f_{i,j,k} + F_{i,j,k}, \quad F_{i,j,k} \in Y'_- \otimes Y. \tag{5.8.7}$$

Тогда

$$\Delta(f_{i,j,k+1}) = \frac{1}{2}[\Delta(\check{h}_{i,0,1}), \Delta(f_{i,j,k})] = \frac{1}{2}[\Delta(h_{i,0,1}), 1 \otimes f_{i,j,k} + F_{i,j,k}]$$

$$= \frac{1}{2}[\check{h}_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes \check{h}_{i,0,1} + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (f_{\alpha,0,0} \otimes e_{\alpha,0,0} + f_{\alpha,1,0} \otimes e_{\alpha,1,0}), 1 \otimes f_{i,j,k} + F_{i,j,k}]$$

$$= 1 \otimes f_{i,j,k+1} + \frac{1}{2}[h_{i,0,1} \otimes 1, F_{i,j,k}]$$

$$+[\sum_{\alpha \in \Delta_+} (f_{\alpha,0,0} \otimes e_{\alpha,0,0} + f_{\alpha,1,0} \otimes e_{\alpha,1,0}), 1 \otimes f_{i,j,k}]$$

$$+[\sum_{\alpha \in \Delta_+} (f_{\alpha,0,0} \otimes e_{\alpha,0,0} + f_{\alpha,1,0} \otimes e_{\alpha,1,0}), F_{i,j,k}].$$

Понятно, что $[h_{i,0,1} \otimes 1, F_{i,j,k}] \in Y'_- \otimes Y$, а

$$[\sum_{\alpha \in \Delta_+} (f_{\alpha,0,0} \otimes e_{\alpha,0,0} + f_{\alpha,1,0} \otimes e_{\alpha,1,0}), 1 \otimes f_{i,j,k}] \in Y'_- \otimes Y.$$

Простые вычисления показывают, что и

$$[\sum_{\alpha \in \Delta_+} (f_{\alpha,0,0} \otimes e_{\alpha,0,0} + f_{\alpha,1,0} \otimes e_{\alpha,1,0}), F_{i,j,k}] \in Y'_- \otimes Y.$$

Таким образом мы проверили справедливость пункта 2) в случае, когда y является одной из образующих. Пусть теперь y произвольный элемент базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта, принадлежащий Y'_-. Тогда y это просто полином от образующих $f_{i,j,k}$. Достаточно рассмотреть случай, когда y является мономов. Мы ограничимся случаем, когда $y = f_1 \cdot f_2$ является произведением двух образующих. Более аккуратные рассуждения проводятся так же как и выше по индукции по количеству корневых образующих входящих в моном. Предварительно также по индукции следует доказать справедливость утверждения для корневых образующих. Все рассуждения проводятся по одной и той же схеме. Получаем, что

$$\Delta(f_1 \cdot f_2) = \Delta(f_1)\Delta(f_2) = (1 \otimes f_1 + F_1)(1 \otimes f_2 + F_2),$$

где $F_1, F_2 \in Y'_- \otimes Y$. Раскрывая скобки получаем, что последнее произведение равно

$$(1 \otimes f_1 + F_1)(1 \otimes f_2 + F_2) = 1 \otimes f_1 \cdot f_2 + (1 \otimes f_1)F_2 + F_1(1 \otimes f_2).$$

Из определения вытекает, что все слагаемые $(1 \otimes f_1)F_2, F_1(1 \otimes f_2) \in Y'_- \otimes Y$. Пункт 2) в этом случае также доказан. В общем случае корневые образующие выражаются через коммутаторы и, в конечном счёте, через произведения корневых образующих. Поэтому в общем случае рассуждения также проводятся по приведённой выше схеме и используют индукцию по числу сомножителей. □

Следствие. 1) $\Delta(Y_+) \subset Y \otimes Y_+$;
2) $\Delta(Y_-) \subset Y_- \otimes Y$.

Таким образом, мы получаем, что $Y_+(Y_-)$ – является правым (левым) коидеалом в $Y = Y(\mathfrak{g})$.

Пусть также $BY'_\pm$ – подсупералгебра (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порожденная элементами $e_{i,0,k} = x^+_{i,0,k} = x^\pm_{i,k}, h_{i,0,r} = h_{j,r}, \quad (i, j \in I, \quad k, r \in \mathbb{Z}_+)$.

Предложение 5.8.3. *1) $\Delta(e) = e \otimes 1(modY \otimes BY'_+)$, для произвольного $e \in BY'_+$;*
2) $\Delta(f) = 1 \otimes f(modBY'_- \otimes Y)$, для произвольного $f \in BY'_-$;
3) $\Delta(h) = h \otimes 1(modY \otimes BY'_+) = 1 \otimes h(modBY'_- \otimes Y)$, для произвольного $f \in Y'_0$.

Доказательство. Свойства 1), 2) доказываются, по существу, также как и аналогичные свойства в предыдущем предложении, а свойство 3) вытекает из свойств 1), 2). Сначала предложение доказывается для образующих порядков 0 и 1. Этот факт уже доказан для образующих $e_{i,j,0}, f_{i,j,1}, e_{i,j,1}, f_{i,j,1}$ в предыдущем предложении. Для образующих $h_{i,j,0}, h_{i,j,1}$ предложение вытекает из явных формул для коумножения (5.4.54), (5.4.55) при $\hbar = 1$:

$$\begin{aligned}\Delta(h_{i,0,1}) = h_{i,0,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0,1} + h_{i,1,0} \otimes h_{i,1,0} + \\ + \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta_+} (\alpha_i, \alpha)(x^-_{\alpha,0,0} \otimes x^+_{\alpha,0,0} + x^-_{\alpha,1,0} \otimes x^+_{\alpha,1,0}),\end{aligned} \tag{5.8.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta(h_{i,1,1}) = h_{i,1,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1,1} + h_{i,0,0} \otimes h_{i,1,0} + h_{i,1,0} \otimes h_{i,0,0} \\ + \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta_+} (\alpha_i, \alpha)_1(x^-_{\alpha,1,0} \otimes x^+_{\alpha,0,0} - x^-_{\alpha,0,0} \otimes x^+_{\alpha,1,0}).\end{aligned} \tag{5.8.9}$$

Таким образом $\Delta(h_{i,j,1}) = h_{i,j,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,j,1} + H_{i,j,1}$, а $H_{i,j,1} = 1 \otimes h_{i,j,1} + h_{i,j+1,0} \otimes h_{i,1,0} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} (\alpha_i, \alpha)(x^-_{\alpha,j,0} \otimes x^+_{\alpha,0,0} + x^-_{\alpha,j+1,0} \otimes x^+_{\alpha,1,0}) \in BY'_+ \otimes BY'_+$. Таким образом пункт 3) для образующих порядка 0 и 1 доказан. Далее доказательство проводится по индукции. Так же как и выше ограничимся случаем произведения двух образующих. Пусть $h = h_1 \cdot h_2$ и для каждого из элементов h_1, h_2 пусть пункт 3) предложения справедлив, то есть $\Delta(h_i) = h_i \otimes 1 + H_i$, где $H_i \in Y \otimes BY'_+$ при $i = 1, 2$. Докажем его справедливость и для h. Действительно,

$$\Delta(h) = \Delta(h_1)\Delta(h_2) = (h_1 \otimes 1 + H_1)(h_2 \otimes 1 + H_2) = h_1 \cdot h_2 + 1 + (h_1 \otimes 1)H_2 + H_1(h_2 \otimes 1).$$

Поскольку, по определению $(h_1 \otimes 1)H_2, H_1(h_2 \otimes 1) \in Y \otimes BY'_+$, то пункт 3 предложения доказан. Предложение доказано. □

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y(Q_n) \otimes Y^0(Q_n) \to C$ – каноническое билинейное спаривание $Y(Q_n)$ и его двойственной супералгебры Хопфа $Y^*(Q_n)$ с противоположным коумножением. (Мы обозначаем через $Y^0(Q_n)$ $Y^*(Q_n)$ с противоположным коумножением.) Мы изучим ниже это спаривание подробно. Отметим, что это (супер)хопфово спаривание (то есть спаривание уважающее структуру суперралгебры Хопфа). E

Из определения вытекают следующие свойства этого спаривания.

$$\langle xy, x'y' \rangle = \langle \Delta(xy), x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle y \otimes x, \Delta(x'y') \rangle,$$
$$\langle x \otimes y \rangle \langle x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle,$$

для $\forall x, y \in Y(\mathfrak{g}), \quad \forall x', y' \in Y^0(\mathfrak{g})$.

Пусть A, B – подсупералгебры в $Y(\mathfrak{g})$. Ниже мы будем использовать обозначение $\mathfrak{g} = Q_{n-1}$. Определим, как и ранее, аннулятор произведения супералгебр A, B формулой:

$$(AB)_\perp := \{x' \in Y^0(\mathfrak{g}) : \langle ab, x' \rangle = 0, \forall a \in A, b \in B\}.$$

Отметим, что

$$(Y\cdot BY'_-)_\perp, (BY'_+\cdot Y)_\perp, (Y\cdot Y'_-)_\perp, (Y'_+\cdot Y)_\perp$$

являются подсупералгебрами в $Y^0(\mathfrak{g})$. Пусть

$$Y^*_+ := (Y\cdot BY'_-)_\perp, BY^*_+ := (Y\cdot Y'_-)_\perp, Y^*_- := (BY'_+\cdot Y)_\perp,$$

$$(BY)^*_- := (Y'_+\cdot Y)_\perp, Y^*_0 := BY^*_+\bigcap BY^*_-.$$

Имеет место следующее

Предложение 5.8.4. *1) Для любых* $x\in Y_+,\quad h\in Y_0,\quad y\in Y_-,\quad x'\in Y^*_+,\quad h'\in Y^*_0,\quad y'\in Y^*_-$ *каноническое спаривание факторизуется*

$$\langle xhy, x'h'y'\rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)}\langle x,x'\rangle\langle h,h'\rangle\langle y,y'\rangle.$$

2) Умножение в $Y^0(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных пространств:*

$$Y^*_+\otimes Y^*_0\otimes Y^*_-\to Y^0(\mathfrak{g}).$$

3) Имеет место теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для $Y^0(Q_n)$.

Доказательство. Докажем 1).

$$\langle xhy, x'h'y'\rangle = \langle\Delta(xh)\cdot\Delta(y), x'h'\otimes y'\rangle = \langle\Delta(x)\Delta(h)\Delta(y), x'h'\otimes y'\rangle =$$

$$\langle(x\otimes 1+\sum a_n\otimes x_n)(h\otimes 1+\sum\tilde{a}_s\otimes\tilde{x}_s)(1\otimes y+\sum y_m\otimes a'_m), x'h'\otimes y'\rangle =$$

$$\langle xh\otimes y, x'h'\otimes y'\rangle + \langle\sum c_r\otimes d_r, x'h'\otimes y'\rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)}\langle xh, x'h'\rangle\langle y,y'\rangle.$$

Отметим, что $\langle\sum c_r\otimes d_r, x'h'\otimes y'\rangle = \sum_r(-1)^{deg(x')deg(d_r)}\langle c_r, x'h'\rangle\langle d_r, y'\rangle = 0$. Так как $\langle d_r, y'\rangle = 0$ в силу того, что $d_r\in Y'_+Y, y'\in(BY'_+Y)_\perp$. С другой стороны

$$\langle xh, x'h'\rangle = \langle(x\otimes 1+\sum a_n\otimes x_n)(1\otimes h+\sum y_m\otimes b_m), x'\otimes h'\rangle =$$

$$\langle x\otimes h, x'\otimes h'\rangle + 0 = \langle x,x'\rangle\langle h,h'\rangle.$$

Отсюда и вытекает доказываемое утверждение пункта 1).

Отметим, что 2) вытекает из 3). Докажем 3). Мы будем использовать теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана $Y(Q_n)$, которую мы доказываем ниже. Выберем ПБВ базис (базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта) в $Y(Q_n)$, существование которого будет доказано после (его описание также приведено в следующем параграфе). Каждый вектор этого базиса имеет вид: $x\cdot h\cdot y$, где $x\in Y_+, h\in H, y\in Y_-$. Тогда биортогональные векторы, в соответствии с 1), будут иметь вид: $x'h'y'$, где $x'\in Y^*_+, h\in H^*,\quad y\in Y^*_-$. Эти векторы также образуют базис в $Y^0(\mathfrak{g})$. Это и доказывает 3). Предложение доказано. ☐

Изучим это спаривание более детально. Сначала более подробно опишем базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ-базис) для $Y(Q_n)$. Пусть как и выше Δ, Δ_+ обозначает множество корней, соответственно, множество положительных корней, супералгебры Ли $A(n-1,n-1)$. Рассмотрим также $\hat{\Delta}^{re}$ множество вещественных корней соответствующей аффинной скрученной супералгебры Ли $A(n-1,n-1)^{(2)}$ (см. [140]). Для образующих $x^\pm_{i,k}$ квантового дубля $DY(Q_n)$ будем использовать следующие обозначения:

$$x_{\alpha_i+k\delta,0} = x_{\alpha_i+k\delta} := x^+_{i,k},\quad x_{-\alpha_i+k\delta,0} = x_{-\alpha_i+k\delta} := x^-_{i,k},$$

$$x_{\alpha_i+k\delta,1} = x_{\tilde{\alpha}_i+k\delta} := \hat{x}^{+}_{i,k},$$

$$x_{-\alpha_i+k\delta,1} = x_{-\tilde{\alpha}_i+k\delta} := x^{-}_{i,k}, i \in I, k \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \Delta_+.$$

Здесь (как и выше) мы через $\tilde{\alpha}$ обозначаем нечётный корень в корневой системе Q_n, являющийся нечётным двойником чётного корня α.

Отметим, что в этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{re}$. Пусть $\Xi \subset \hat{\Delta}^{re}$. Линейный порядок $\precneqq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$ и таких, что $\gamma = \alpha + \beta$ имеет место одно из следующих двух отношений порядка:
$\alpha \precneqq \gamma \precneqq \beta$ или $\beta \precneqq \gamma \precneqq \alpha$.
Введем подмножества Ξ_+, Ξ_- множества $\hat{\Delta}^{re}$:

$$\Xi_{\pm} := \{\pm\gamma + k\delta : \gamma \in \hat{\Delta}^{re}_{+}\}.$$

Введем на Ξ_+, Ξ_- выпуклые порядки $\precneqq_+, \precneqq_-$, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma + k\delta \precneqq_+ \gamma + l\delta \qquad \text{и} - \gamma + l\delta \precneqq_- -\gamma + k\delta,$$

если$k, l,$для$\forall\gamma \in \Delta_+$.

Определим теперь корневые векторы

$$x_{\pm\beta}, \beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$$

по индукции следующим образом. Пусть векторы x_{β_1}, x_{β_2} уже построены. Если корень x_{β_3} таков, что:

$$x_{\beta_1} \precneqq x_{\beta_3} \precneqq x_{\beta_2}$$

и в интервале $(x_{\beta_1}, x_{\beta_2})$ нет корней для которых уже построены корневые векторы, то определим корневые векторы $x_{\pm\beta_3}$ формулами:

$$x_{\beta_3} = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}], \quad x_{-\beta_3} = [x_{-\beta_2}, x_{-\beta_1}].$$

Отметим, что выпуклый (нормальный) порядок связан с естественным упорядочиванием элементов аффинной группы Вейля. Нам потребуется следующее описание $Y(Q_n)$, являющееся аналогом описания скрученной квантованной аффинной супералгебры. Сначала зафиксируем следующий нормальный порядок на $A(n, n)$:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_1 - \epsilon_{2n+2}), (\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_4, \ldots, \epsilon_2 - \epsilon_{2n+2}), \ldots (\epsilon_{2n+1} - \epsilon_{2n+2}).$$

Здесь $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$.

К простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n-1}$ добавим еще аффинный корень $\alpha_0 = \delta - \theta, \theta := \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n-1} = \epsilon_1 - \epsilon_{2n-1}$ – старший корень, δ – минимальный мнимый корень. Рассмотрим следующий нормальный порядок на множестве $\hat{\Delta}^{re}$ аффинных вещественных корней:

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \delta, \alpha_1 + 2\delta, \ldots, \alpha_1 + n\delta, \ldots), (\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + n\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$(\ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + n\delta, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \delta, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \ldots, (\ldots \alpha_{2n-1} + n\delta, \ldots, \alpha_{2n-1} + \delta, \alpha_{2n-1}).$$

5.8.2 Вычисление формул спаривания

Здесь мы фактически опишем двойственную к янгиану $Y(Q_n)$ супералгебру Хопфа $Y^*(Q_n)$ с противоположным коумножением, которую мы, как отмечено ранее, мы будем обозначать через $Y^0(Q_n)$. Мы опишем сначала структуру ассоциативной супералгебры на $Y^0(Q_n)$. В основе такого описания будут лежать формулы спаривания между корневыми образующими супералгебры $Y(Q_n)$, образующими базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта и двойственными образующими супералгебры $Y^0(Q_n)$. Но сначала мы проведём вычисление между двойственными образующими супералгебры Хопфа $Y(Q_n)$ и двойственной ей супералгебры $Y^0(Q_n)$. Отметим, что спаривание между упомянутыми супералгебрами является хопфовым и свойства хопфова спаривания лежат в основе проводимых ниже вычислений. Вычислим формулы спаривания для корневых векторов. Пусть $h^*_{i,0,k}, \quad e^*_{i,0,k}, \quad f^*_{i,0,k}, h^*_{i,1,k}, \quad e^*_{i,1,k}, \quad f^*_{i,1,k}$ – образующие подалгебры $Y^* = Y_-$. Пусть $e_{i,0,k} := x^+_{i,0,k}, f_{i,0,k} := x^-_{i,0,k}, \quad e_{i,1,k} := x^+_{i,1,k}, f_{i,1,k} := x^-_{i,1,k}$.

Предложение 5.8.5. *Следующие два условия равносильны.*
1)

$$\langle e_{i,0,k}, e^*_{j,0,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l}; \tag{5.8.10}$$

$$\langle f_{i,0,k}, f^*_{j,0,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l}; \tag{5.8.11}$$

$$\langle h_{i,0,k}, h^*_{j,0,-l-1}\rangle = -\frac{a_{ij}k!}{l!(k-l)!}; \tag{5.8.12}$$

$$\langle e_{i,1,k}, e^*_{j,1,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l}; \tag{5.8.13}$$

$$\langle f_{i,1,k}, f^*_{j,1,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l}; \tag{5.8.14}$$

$$\langle h_{i,1,k}, h^*_{j,1,-l-1}\rangle = -\frac{a_{ij}s!}{l!(s-l)!} \qquad \text{для} \quad s \geq l \geq 0. \tag{5.8.15}$$

2)

$$[h^*_{i,0,-k}, h^*_{j,0,-l}] = 0, \tag{5.8.16}$$

$$[h^*_{i,1,-k}, h^*_{j,0,-l}] = 0, \quad k-l \in 2\mathbb{Z}, \tag{5.8.17}$$

$$[h^*_{i,0,k}, h^*_{j,1,l}] = [h^*_{i,1,k}, h^*_{j,0,l}] =$$

$$(\delta_{ij})(-1)^k(\bar{h}^*_{i,1,k+l} + \bar{h}_{i+1,1,k+l}) + \delta i+1, j\bar{h}^*_{j,1,k+l}, \quad k-l \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{5.8.18}$$

$$[h^*_{i,1,k}, h^*_{j,1,l}] = \delta_{ij}(-1)^k(\bar{h}^*_{i,0,k+l} + \bar{h}_{i+1,0,k+l}) + \delta_{i+1,j}\bar{h}^*_{j,0,k+l}, \quad k-l \in 2\mathbb{Z}, \tag{5.8.19}$$

$$[h^*_{i,1,k}, h^*_{j,1,l}] = 0, \quad k-l \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{5.8.20}$$

$$\delta_{i,j}h^*_{i,0,-k-l} = [e^*_{i,0,-k}, f^*_{j,0,-l}], \tag{5.8.21}$$

$$[h^*_{i,0,-k-1}, e^*_{j,0,-l}] = [h^*_{i,0,-k}, e^*_{j,0,-l-1}] + (a_{ij}/2)(h^*_{i,0,-k}e_{j,0,-l} + e^*_{j,0,-l}h^*_{i,0,-k}), \tag{5.8.22}$$

$$[h^*_{i,0,-k-1}, f^*_{j,0,-l}] = [h^*_{i,0,-k}, f^*_{j,0,-l-1}] - (a_{ij}/2)(h^*_{i,0,-k}f_{j,0,-l} + f^*_{j,0,-l}h^*_{i,0,-k}), \tag{5.8.23}$$

$$[h^*_{i,1,-k-1}, e^*_{j,0,-l}] = [h^*_{i,1,-k}, e^*_{j,0,-l-1}] + (a_{ij}/2)(h^*_{i,1,-k}e_{j,0,-l} + e^*_{j,1,-l}h^*_{i,1,-k}), \tag{5.8.24}$$

$$[h^*_{i,1,-k-1}, f^*_{j,0,-l}] = [h^*_{i,1,-k}, f^*_{j,0,-l-1}] - (a_{ij}/2)(h^*_{i,0,-k}f_{j,0,-l} + f^*_{j,0,-l}h^*_{i,1,-k}), \tag{5.8.25}$$

$$[h^*_{i,0,0}, e^*_{j,r,l}] = a_{ij}e^*_{j,r,l}, \tag{5.8.26}$$

$$[h^*_{i,0,0}, f^*_{j,r,l}] = -a_{ij}f^*_{j,r,l}, \tag{5.8.27}$$

$$[h^*_{i,1,0}, e^*_{j,0,l}] = a_{ij}e^*_{j,1,l}, \tag{5.8.28}$$

$$[h^*_{i,1,0}, f^*_{j,0,l}] = -a_{ij}f^*_{j,1,l}, \tag{5.8.29}$$

$$[e^*_{i,0,-k+1}, e^*_{j,0,-l}] = [e^*_{i,0,-k}, e^*_{j,0,-l+1}] + (a_{ij}/2)(e^*_{i,0,-k}e^*_{j,0,-l} + e^*_{j,0,-l}e^*_{i,0,-k}), \tag{5.8.30}$$

$$[f^*_{i,0,-k+1}, f^*_{j,0,-l}] = [f^*_{i,0,-k}, f^*_{j,0,-l+1}] - (a_{ij}/2)(f^*_{i,0,-k}f^*_{j,0,-l} + f^*_{j,0,-l}f^*_{i,0,-k}), \tag{5.8.31}$$

$$[e^*_{i,1,-k+1}, e^*_{j,1,-l}] = [e^*_{i,1,-k}, e^*_{j,1,-l+1}] + (a_{ij}/2)(e^*_{i,1,-k}e^*_{j,1,-l} + e^*_{j,1,-l}e^*_{i,1,-k}), \tag{5.8.32}$$

$$[f^*_{i,1,-k+1}, f^*_{j,1,-l}] = [f^*_{i,1,-k}, f^*_{j,1,-l+1}] - (a_{ij}/2)(f^*_{i,1,-k}f^*_{j,1,-l} + f^*_{j,1,-l}f^*_{i,1,-k}), \tag{5.8.33}$$

$$[e^*_{i,1,-k+1}, e^*_{j,0,-l}] = [e^*_{i,1,-k}, e^*_{j,0,-l+1}] + (a_{ij}/2)(e^*_{i,1,-k}e^*_{j,0,-l} + e^*_{j,0,-l}e^*_{i,1,-k}), \tag{5.8.34}$$

$$[f^*_{i,1,-k+1}, f^*_{j,0,-l}] = [f^*_{i,1,-k}, f^*_{j,0,-l+1}] - (a_{ij}/2)(f^*_{i,1,-k}f^*_{j,0-l} + f^*_{j,0-l}f^*_{i,1,-k}), \tag{5.8.35}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [e^*_{i,0,-k_{\sigma(1)}}, \ldots [e^*_{i,0,-k_{\sigma(r)}}, e^*_{j,0,-l}] \ldots] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2, \tag{5.8.36}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [f^*_{i,0,-k_{\sigma(1)}}, \ldots [f^*_{i,0,-k_{\sigma(r)}}, f^*_{j,-l}] \ldots] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2, \tag{5.8.37}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [e^*_{i,1,-k_{\sigma(1)}}, [e^*_{i,0,-k_{\sigma(1)}} \cdots [e^*_{i,0,-k_{\sigma(r)}}, e^*_{j,0,-l}] \ldots]] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2, \tag{5.8.38}$$

$$\textstyle\sum_\sigma [f^*_{i,1,-k_{\sigma(1)}}, [f^*_{i,0,-k_{\sigma(1)}} \cdots [f^*_{i,0,-k_{\sigma(r)}}, f^*_{j,0,-l}] \ldots]] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2. \tag{5.8.39}$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение по индукции по значениям индексов k, l. По индукции легко доказываются следующие равенства.

$$\Delta(e_{i,0,k}) = e_{i,0,k} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,0,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,0,r} \otimes e_{i,0,k-r} (mod YY_- \otimes Y'_+);$$

$$\Delta(f_{i,0,k}) = f_{i,0,k} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,0,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,0,r} \otimes e_{i,0,k-r} (mod Y'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(e_{i,1,k}) = e_{i,1,k} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,1,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,1,r} \otimes e_{i,0,k-r} (mod YY_- \otimes Y'_+);$$

$$\Delta(f_{i,1,k}) = f_{i,1,k} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,1,k} + \sum_{r=0}^{k-1} e_{i,0,r} \otimes h_{i,1,k-r} (mod Y'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(h_{i,0,k}) = h_{i,0,k} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,0,r} \otimes h_{i,0,k-r} (mod YY'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(h_{i,1,r}) = h_{i,1,r} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1,r} + \sum_{s=0}^{r-1} h_{i,1,s} \otimes h_{i,0,r-s} (mod YY'_- \otimes Y'_+ Y)$$

Из этих формул вытекают следующие равенства:

$$\Delta(e_{i,t,k}e_{j,t_1,l}) = e_{i,t,k}e_{j,t_1,l} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,t,k}e_{j,t_1,l} + e_{i,t,k} \otimes e_{j,t_1,l} + (-1)^{deg(e_{i,t,k}) deg(e_{j,t_1,l})} e_{j,t_1,l} \otimes e_{i,t,k} (mod YY'_- \otimes Y'_+);$$

$$\Delta(f_{i,t,k}f_{j,t_1,l}) = f_{i,t,k}f_{j,t_1,l} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,t,k}f_{j,t_1,l} + f_{i,t,k} \otimes f_{j,t_1,l} + (-1)^{deg(f_{i,t,k}) deg(f_{j,t_1,l})} f_{j,t_1,l} \otimes f_{i,t,k} (mod Y'_- \otimes Y'_+ Y);$$

$$\Delta(h_{i,t,k}h_{j,t_1,l}) = h_{i,t,k}h_{j,t_1,l} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,t,k}h_{j,t_1,l} + h_{i,t,k} \otimes h_{j,t_1,l} + h_{j,t_1,l} \otimes h_{i,t,k} (mod YY'_- \otimes Y'_+ Y).$$

Из полученных формул и следует доказываемое утверждение. Проверим, например, соотношение (5.8.22). Воспользуемся определением хопфова спаривания

$$\langle ab, cd \rangle = \langle \Delta(a)\Delta(b), c \otimes d \rangle = \langle b \otimes a, \Delta(d)\Delta(c) \rangle,$$

где $a, b \in Y_+$, $c, d \in Y^0$. Используя это определение мы получим коммутационные соотношения в двойственной супералгебре Хопфа Y^0 коммутационные соотношения. Действительно, получим, что

$$\langle h_{i,0,k} f_{j,0,k}, h^*_{i,0,-k-1} f^*_{j,0,-l} \rangle =$$

$$\langle \Delta(h_{i,0,k})\Delta(f_{j,0,k}), h^*_{i,0,-k-1} \otimes f^*_{j,0,-l} \rangle =$$

$$\langle h_{i,0,k} f_{j,0,l} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,0,k} f_{j,0,l} + h_{i,0,k} \otimes f_{j,0,l} + F, h^*_{i,0,-k-1} \otimes f^*_{j,0,-l} \rangle$$

Отметим, что левая часть последнего равенства рассматривается по модулю $(modYY'_- \otimes Y'_+Y)$, точнее $F \in (modYY'_- \otimes Y'_+Y)$. Используя выписанные выше равенства, вычислим коммутатор

$$[h^*_{i,0,-k-1}, f^*_{j,0,-l}].$$

Вычислим теперь коммутатор

$$[e^*_{i_1,j_1,-k-1}, f^*_{i_2,j_2,-l-1}].$$

Рассмотрим спаривание

$$\langle e_{i_1,j_1,k} f_{i_2,j_2,l}, e^*_{i_1,j_1,-k-1} f^*_{i_2,j_2,-l-1} \rangle =$$

$$\langle (e_{i_1,j_1,k} \otimes 1 + \sum_i y_i \otimes e_i)(1 \otimes f_{i_2,j_2,l} + \sum_s f_s \otimes y_s), e^* i_1, j_1, -k-1 \otimes f^*_{i_2,j_2,-l-1} \rangle =$$

$$\langle e_{i_1,j_1,k}, e^*_{i_1,j_1,-k-1} \rangle \langle f_{i_2,j_2,l}, f^*_{i_2,j_2,-l-1} \rangle.$$

Здесь мы записали формулы коумножения в общем виде. Здесь $y_i \in E'$, а E' – борелевская подалгебра, порождённая элементами $\{e_{i,j,k}, i \in I, j \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Аналогичные структурные формулы для коумножения по модулю подсупералгебр можно выписать и для произвольных элементов янгиана. Собственно вид этих структурных формул и позволяет явно вычислить формулы спаривания в квантовом дубле янгиана. Вычислим теперь коммутатор

$$[h^*_{i_1,j_1,-k-1}, h^*_{i_2,j_2,-l-1}].$$

Рассмотрим отдельно случаи $j_1 = j_2$ и $j_1 \neq j_2$.

□

Пусть, как и выше

$$h_{i,0}(u) = h_i(u), \quad h_{i,1}(u) = k_i(u), \tag{5.8.40}$$

$$x^{\pm}_{i,0}(u) = x^{\pm}_i(u), \quad x^{\pm}_{i,1}(u) = \hat{x}^{\pm}_i(u), \tag{5.8.41}$$

$$e_{i,j}(u) = x^{+}_{i,j}(u), \quad f_{i,j}(u) = x^{-}_{i,j}(u). \tag{5.8.42}$$

Теорема 5.8.1. *1) Подсупералгебры Y^*_+, H^*, Y^*_- супералгебры Y_- порождаются коэффициентами полей*

$$e^-_i(u), \quad \hat{e}^-_i(u), \quad h^-_i(u), k^-_i(u), \quad f^-_i(u), \hat{f}^-_i(u),$$

соответственно, или, что то же самое, коэффициентами полей

$$e^-_{i,j}(u), \quad f^-_{i,j}(u), \quad h^-_{i,j}.$$

Здесь $i \in I = \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad j \in \{0, 1\}$
2) Спаривание образующих подсупералгебр Y_+, Y_- супералгебры $DY(\mathfrak{g})$ задается следующими соотношениями для $|v| << 1 << |u|$:

$$\langle e^+_{i,0}(u), f^-_{j,0}(v) \rangle = \langle f^+_{i,0}(u), e^-_{j,0}(v) \rangle = \frac{\delta_{i,j}}{u-v}; \tag{5.8.43}$$

$$\langle e^+_{i,1}(u), f^-_{j,1}(v)\rangle = \langle f^+_{i,1}(u), e^-_{j,1}(v)\rangle = \frac{\delta_{i,j}}{u-v}; \tag{5.8.44}$$

$$\langle e^+_{i,1}(u), f^-_{j,0}(v)\rangle = \langle f^+_{i,1}(u), e^-_{j,0}(v)\rangle =$$
$$\langle e^+_{i,0}(u), f^-_{j,1}(v)\rangle = \langle e^-_{i,1}(u), f^+_{j,0}(v)\rangle = 0; \tag{5.8.45}$$

$$\langle h^+_{i,0}(u), h^-_{j,0}(v)\rangle = \frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}, \tag{5.8.46}$$

$$\langle h^+_{i,1}(u), h^-_{j,1}(v)\rangle = \frac{u-v+\frac{1}{2}\widetilde{(\alpha_i,\alpha_j)}}{u-v-\frac{1}{2}\widetilde{(\alpha_i,\alpha_j)}}, \tag{5.8.47}$$

$$\langle h^+_{i,1}(u), h^-_{j,0}(v)\rangle = \frac{u-v+\frac{1}{2}\widetilde{(\alpha_i,\alpha_j)}}{u-v-\frac{1}{2}\widetilde{(\alpha_i,\alpha_j)}}, \tag{5.8.48}$$

$$\langle e^+_{i,r}(u), f^-_{j,r+1}(v)\rangle = 0. \tag{5.8.49}$$

Доказательство. Теорема следует из предложения 5.8.5. Первый пункт проверяется совсем просто. Например, Y^*_+, порождается, очевидно, очевидно, коэффициентами поля $e^-_i(u) = e^-_{i,0}, \hat{e}_i = e^-_{i,1}(u)$. Для остальных подалгебр (подсупералгебр) утверждение проверяется аналогично прямым сравнением определения подсупералгебры и условия теоремы. Для доказательства же второго пункта теоремы достаточно просто переписать результаты предыдущего предложения 5.8.5, которые формулируются в терминах образующих, в терминах производящих функций образующих.

Покажем, как из соотношения (5.8.10) выводится соотношение (5.8.43). Как отмечено выше, поставим в соответствие образующим $e^*_{j,0,-l-1}$ образующие $f^-_{j,0,-l-1}$: $e^*_{j,0,-l-1} \to f^-_{j,-l-1}$. Таким образом, порождающая функция $f^-_{j,0}(v)$ имеет следующий вид:

$$f^-_{j,0}(v) = \sum_{l\geq 0} f^-_{j,0,-l-1} v^l = \sum_{l\geq 0} e^*_{j,0,-l-1}\cdot v^l.$$

Прямые вычисления показывают:

$$\langle e^+_{i,0}(u), f^-_{j,0}(v)\rangle = \langle \sum_{m\geq 0} e^+_{i,0,m}\cdot u^{-m-1}, \sum_{l\leq 0} f^-_{j,0,-l-1}\rangle =$$

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{l\geq 0}\langle e^+_{i,0,m}, f^-_{j,0,-l-1}\rangle u^{-m-1}v^l = \sum_{m\geq 0}\sum_{l\geq 0}\langle e^+_{i,0,m}, e^*_{j,0,-l-1}\rangle u^{-m-1}v^l =$$

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{l\geq 0} -\delta_{i,j}\delta_{m,l}u^{-m-1}v^l = \sum_{l,m\geq 0} -\delta_{i,j}u^{-l-1}v^l = \frac{\delta_{i,j}}{u-v}.$$

Таким образом, мы вывели из соотношения (5.8.10) соотношение (5.8.43). Обратный вывод из соотношения (5.8.43) производится переписыванием выписанных выше соотношений в обратном порядке. Отметим, что некоторые из соотношений выводятся не столь коротко и просто, но все прямыми вычислениями. Вывод формул спаривания для остальных образующих (чётных и нечётных) аналогичен. Отметим также, что из приведённых выше формул следует, что спаривание образующих разной чётности, то есть чётных с нечётными – нулевое. Теорема доказана. □

5.9 Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта

5.9.1 Формулировка теоремы

Мы будем использовать токовую систему образующих и соотношений для янгиана и его квантового дубля в рамках этого раздела. Нашей целью будет доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта (ПБВ-теоремы) для янгиана странной супералгебры Ли $Y(Q_{n-1})$. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта утверждает, что существует изоморфизм векторных пространств между универсальной обёртывающей алгеброй и её присоединённой градуированной алгеброй, которая естественно изоморфна алгебре многочленов. В нашем случае ПБВ-теорема сводится к построению изоморфизма янгиана на универсальную обёртывающую супералгебру супералгебры Ли скрученных полиномиальных (супер)токов. Последняя, в силу классической ПБВ-теоремы, изоморфна алгебре многочленов от коммутирующих и антикоммутирующих переменных. Аналогичную теорему с необходимыми уточнениями мы формулируем и для квантового дубля янгиана. Перейдём к точным формулировкам.

В этом параграфе мы сформулируем теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана странной супералгебры Ли. Этот результат – квантовый аналог соответствующей теоремы для универсальных обёртывающих алгебр ([106]). В обоих случаях конструируется некий бесконечный линейный базис (то есть базис в векторном пространстве). Пусть ниже $\mathfrak{g} = A(n-1, n-1), \mathfrak{g}_0 = Q_{n-1}$.

Будем называть степенью образующих $a_{i,j,k}$, $a_{i,j,k} \in \{x^+_{i,j,k}, x^-_{i,j,k}, h_{i,j,k} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$, их третий индекс. Степенью монома от образующих будем называть сумму степеней сомножителей. Степенью многочлена от образующих будем называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Степенью тензорного произведения мономов будем называть сумму степеней тензорных сомножителей. Степенью тензорного полинома будем как и выше называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g}_0) = Y(Q_{n-1})$ степени не выше чем k через $Y_k = Y_k(\mathfrak{g}_0) = Y_k(Q_{n-1})$. Получаем на $Y(\mathfrak{g}_0)$ фильтрацию:

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_n \subset \ldots.$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{g}_0) = Y(Q_{n-1})$. Пусть $\Delta_+ = \Delta_+(n-1)$ – множество положительных корней супералгебры Ли $A(n-1, n-1)$. Рассмотрим также множество $\hat{\Delta}_+ = \hat{\Delta}_+(n-1)$ положительных корней аффинной супералгебры Ли $A^{(2)}(n-1, n-1)$ и $\Delta^0_+ = \Delta^0_+(n-1)$ – множество положительных корней простой алгебры Ли $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n)$ (которая совпадает с корневой системой странной супералгебры Ли Q_{n-1}). Соответствующие значки без нижнего индекса "$+$"будут обозначать множества всех корней соответствующих супералгебр Ли. Идея упорядочения состоит в том, чтобы зафиксировать определяемый ниже порядок на множестве положительных корней скрученной токовой аффинной супералгебры Ли типа $A^{(2)}(n-1, n-1)$. Этот порядок индуцирует порядок на соответствующих корневых образующих. Используя тот факт, что в присоединённой градуированной супералгебре янгиана $Y(Q_{n-1})$ (а также и его квантового дубля) коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями скрученной токовой супералгебры Ли (являющейся подалгеброй скрученной аффинной супералгебры Ли $A^{(2)}(n-1, n-1)$), мы можем определить такой же порядок и на корневых образующих янгиана $Y(Q_{n-1})$ (а также его квантового дубля). Перейдём к определению выпуклого порядка. Определим на введённых выше множествах положительных корней выпуклые порядки по индукции. Сначала зафиксируем упорядочение на множестве простых корней, соответствующее их нумерации: $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots \prec \ldots$. Если $\alpha, \beta \in \Delta_+(\hat{\Delta}_+, \Delta^0_+)$, $\alpha \prec \beta$ и определена их сумма $\alpha + \beta$, то будем считать, что $\alpha \prec \alpha + \beta \prec \beta$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением выпуклого порядка на множестве Δ_+.

Зафиксируем монотонное отображение, сохраняющее порядок: $\alpha : [1, 2, \ldots, N] \to \Delta_+, \alpha(k) \prec \alpha(s)$, если $k < s$. (Отметим, что $N = 4(n-1)^2 - 2$.) Это отображение индуцирует порядок на корнях $A(n-1, n-1)_0$ и на корнях, соответствующих образующим из $A(n-1, n-1)_1$. Отметим также, что эти порядки определяют монотонные отображения $\alpha_0 : [1, 2, \ldots, N_0] \to \Delta^0_+(n-1), \alpha_1 : [1, 2, \ldots, N_1] \to \Delta^0_+(n-1)$, где $N_0 = N_1 = (n-1)^2 - 1$. Отметим также, что на множестве чётных и на множестве нечётных корней сужение этого отображения индуцирует также монотонные отображения.

Пусть $\overline{(i,k)} = (i_1, k_1, i_2, k_2, \ldots, i_{2n-1}, k_{2n-1})$ – вектор, $|\overline{(i,m)}| = \sum_{j=1}^{n}(i_j + m_j)$ – сумма компонент этого вектора. Опишем сначала базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в $Y(\mathfrak{g}) = Y(A(n-1, n-1))$.

Пусть $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_r), k_i \geq 0$, – вектор $k = |\overline{k}| = \sum_{i=1}^{r} k_i$. Пусть также

$$\begin{gathered}
x(\overline{k}, \overline{w}, \overline{l}, \overline{v}; \overline{s}, \overline{p}, \overline{i}, \overline{q}; \overline{r}, \overline{t}, \overline{j}, \overline{u}) = \\
(x^+_{\alpha(1),0,k_1})^{w_1} \cdot \ldots \cdot (x^+_{\alpha(N),0,k_N})^{w_N} \cdot (x^+_{\alpha(1),1,l_1})^{v_1} \cdot \ldots \cdot (x^+_{\alpha(N),1,l_N})^{v_N} \cdot \\
(h_{1,0,s_1})^{p_1} \cdot \ldots \cdot (h_{2n-1,0,s_{2n-1}})^{p_{2n-1}} \cdot (h_{1,1,i_1})^{q_1} \cdot \ldots \cdot (h_{2n-1,1,i_{2n-1}})^{q_{2n-1}} \cdot \\
(x^-_{\alpha(1),0,r_1})^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^+_{\alpha(N),0,r_N})^{t_N} \cdot (x^-_{\alpha(1),1,j_1})^{u_1} \cdot \ldots \cdot (x^+_{\alpha(N),1,j_N})^{u_N}.
\end{gathered}$$

На множестве векторов $\{x(\overline{k}, \overline{w}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{r}, \overline{t})\}$ определим лексикографический порядок.

Пусть $\alpha = \alpha_s + \alpha_{s+1} + \ldots + \alpha_t; \alpha, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_t \in \Delta_+$, а $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_t$ – простые корни, $s < t$, $l = t - s + 1$. Пусть $x^{\pm}_{s,k_1}, \ldots, x^{\pm}_{t,k_l} \in Y(\mathfrak{g})$, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$. Определим корневые векторы янгиана $Y(\mathfrak{g}_0) = Y(Q_{n-1})$ формулами:

$$x_{\alpha,j,k} = [x^{\pm}_{s,j_1,k_1}, [x^{\pm}_{s+1,j_2,k_2}, [\ldots, x^{\pm}_{t,j_l,k_l}] \ldots]].$$

Нетрудно проверить, что если $(k'_1, \ldots, k'_l)$ – другое разложение числа k, а $j = j'_1 + \ldots + j'_l$ другое разложение числа $j \in \mathbb{Z}_2$, то корневые векторы, определяемые этими соотношениями совпадают.

На множестве векторов $\{x(\overline{k}, \overline{w}; \overline{l}, \overline{v}; \overline{s}, \overline{p}; \overline{i}, \overline{q}; \overline{r}, \overline{t}; \overline{j}, \overline{u})\}$ определим, как и выше, лексикографический порядок, индуцированный порядком на корнях простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$.

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (то есть по модулю $Y(\mathfrak{g}_0)_{k-1}$ коммутационные соотношения в $\oplus_{k=1}^{\infty} Y(\mathfrak{g}_0)_k / Y(\mathfrak{g}_0)_{k-1} \oplus Y(\mathfrak{g}_0)_0$ аналогичны коммутационным соотношениям универсальной обёртывающей скрученной супералгебры Ли токов $U(\mathfrak{g}[t])^{\sigma}$.

Для каждого числа k зафиксируем вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_l), k = k_1 + \ldots + k_l$, определяющий разбиение этого числа.

Из формул для коумножения сразу следует, что

$$deg(\Delta(x^{\pm}_{i,j,k}) - x^{\pm}_{i,j,k} \otimes 1 - 1 \otimes x^{\pm}_{i,j,k}) < k;$$

$$deg(\Delta(h_{i,j,k}) - h_{i,j,k} \otimes 1 - 1 \otimes h_{i,j,k}) < k.$$

Выберем произвольный порядок $\prec$ на множестве $\{x^+_{\alpha,j_1,k_1}, x^-_{\beta,j_2,k_2}, h_{i,j_3,k_3} = h_{\alpha_i,j_3,k_3}\}$ и обозначим через $(\Omega, \prec)$ множество лексикографически упорядоченных мономов от образующих $\{x^+_{\alpha,j_1,k_1}, x^-_{\beta,j_2,k_2}, h_{i,j_3,k_3}\}$.

Теорема 5.9.1. $(\Omega, \prec)$ – *базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в янгиане* $Y(\mathfrak{g}_0) = Y(Q_{n-1})$.

5.9.2 Доказательство теоремы

Доказательство ПБВ-теоремы 5.9.1

Доказательство ПБВ-теоремы для янгиана $Y(Q_{n-1})$ странной супералгебры Ли проводится по той же схеме, что и доказательство приведённого выше аналогичного результата для янгиана $Y(A(m,n))$, а также для янгиана произвольной базисной суперaлгебры Ли. Доказательство распадается на две части. Первая часть – это доказательство полноты ПБВ-базиса, а вторая часть доказательство линейной независимости элементов ПБВ-базиса. Доказательство полноты, хотя на первый взгляд, кажется, что использует специфику коммутационных соотношений, основано, по существу, только на том, что эти соотношения уважают порядок и градуировку.

Доказательство. Докажем сначала полноту $(\Omega, \prec)$. Опуская детали приведём схему доказательства. По существу мы здесь, так же как и ранее, используем тот факт, что корневые образующие образуют выпуклый базис. Для монома M из $(\Omega, \prec)$ определим его длину $l(M)$ как число множителей — образующих входящих в M. При переупорядочивании сомножителей в силу коммутационных соотношений в $Y(Q_{n-1}))$ мы будем получать дополнительные слагаемые либо меньшей степени, либо той же степени и меньшей длины. Используя индукцию получаем, что $Y(Q_{n-1})$ совпадает с линейной оболочкой $(\Omega, \prec)$. Доказательство этой части хоть и громоздко, но стандартно. Оно, по существу, повторяет все элементы доказательства аналогичной теоремы для случая янгиана базисной суперaлгебры Ли.

Докажем теперь линейную независимость мономов из $(\Omega, \prec)$. Это доказательство основано на существовании представления ρ янгиана $Y(Q_{n-1})$, которое обладает тем свойством, что $\rho(x^+_{i,j,0})$, $\rho(x^-_{i,j,0})$, $\rho(h_{i,j,0})$, $j \in \mathbb{Z}_2$ линейно независимы. Этот факт может быть выведен из результатов работ [228], [230]. Но также такое представление может быть построено и непосредственно. Действительно, можно построить исходя из вида определяющих соотношений в янгиане представление ρ, обладающее тем свойством, что $\rho\Big|_{U(Q_{n-1})}$ — фундаментальное представление. Более того, можно показать, что существует гомоморфизм $\varphi : U(Q_{n-1}) \to Y(Q_{n-1})$, обладающий тем свойством, что $\varphi\Big|_{U(Q_{n-1})}$ — тождественное отображение. Если ρ_0 — представление $U(Q_{n-1})$, обладающее отмеченным выше свойством, то этим же свойством будет обладать и представление $\rho = \rho_0 \circ \varphi$ янгиана $Y(\mathfrak{g}_0)$.

Предположим, что мономы из $(\Omega, \prec)$ не являются линейно независимыми. Тогда найдутся такие числа $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и мономы $M_1, \dots, M_s \in (\Omega, \prec)$, что

$$\sum_{1 \le j \le s} c_j M_j = 0. \tag{5.9.1}$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию. При дальнейшем изложении нам потребуются автоморфизмы

$$\tau_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

аналогичные определённым ранее(см. главы 2, 4, а также [106], [107]). На образующих они определяются формулами:

$$\tau_\alpha(h_{i,j,k}) = \sum_{0 \le r \le k} C_k^r a^{k-r} h_{i,j,r}, \quad j \in \{0,1\},$$

$$\tau_\alpha(x^\pm_{i,j,k}) = \sum_{0 \le r \le k} C_k^r a^{k-r} x^\pm_{i,j,r}, \quad j \in \{0,1\}.$$

Нетрудно показать что τ_α корректно определены. Пусть $\rho_0 = \rho \circ \varphi : Y(Q_{n-1}) \to End\, V$ — такое представление $Y(Q_{n-1})$, что $\rho_0(x^+_{\alpha,j,0})$, $\rho_0(x^-_{\alpha,j,0})$, $\rho_0(h_{i,j,0})$, $j \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ — линейно независимы. Пусть L — максимальная из длин мономов $M_1, \dots, M_s$. Рассматривая тензорную степень представления ρ_0 достаточно большого порядка, мы можем сконструировать такое представление

$$\rho = \rho_0^n : Y(Q_{n-1}) \to End(V),$$

что все мономы от $\rho(x^{\pm}_{\alpha,0,0})$, $\rho(x^{\pm}_{\alpha,1,0})$, $\rho(h_{i,0,0})$, $\rho(h_{i,1,0})$ с $l(M) \leq L$ линейно независимы. Определим представление

$$\tilde{\rho}: \; Y(Q_{n-1}) \to End(\tilde{V}) := End(V \otimes \mathbb{C}[a]).$$

формулой $\tilde{\rho}(x)(a) = (\rho \circ \tau_\alpha)(x)$, $x \in Y(Q_n)$. Применяя $\tilde{\rho}$ к обеим частям (5.9.1) и выбирая в (5.9.1) члены старшей степени, соответствующей a, видим, что (5.9.1) должно иметь место для некоторых одночленов такой же степени $d = d(M_j)$. Если

$$M_j = \prod_{\alpha \in \Delta_+} M^+_{j,\alpha} \cdot \prod_{r=1}^{n} M^0_{i,r} \cdot \prod_{\alpha \in \Delta_+} M^-_{r,\alpha},$$

где $M^{\pm}_{j,\alpha} = \prod\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} x^{\pm^{m^{\pm}(\alpha,k,j)}}_{\alpha,k}$, $M^0_{j,r} = \prod\limits_{k \in Z_+} h^{m^0(r,k,j)}_{r,k}$ с конечным множеством ненулевых показателей. Легко проверить, что множества $m^{\pm}(i,j) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} m^{\pm}(\alpha,k,j)$, $m^0(i,j) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)$ — не зависят от j. Поэтому можно считать, что множества $I^{\pm}_j = \{i \big| m^{\pm}(i,j) > 0\}$, $I^0_j = \{i \big| m^0(i,j) > 0\}$ не зависят от j. Обозначим их через $I^{\pm}$, I^0, соответственно. Пусть $p = \operatorname{card} I^+ + \operatorname{card} I^- + \operatorname{card} I^0$. Используя индукцию по p покажем, что это предположение приводит к противоречию. Пусть $p = 1$. Тогда, либо $M_j = M^0_{j,i}$, $M_j = M^+_{j,i}$, либо $M_j = M^-_{j,i}$. Пусть $M_j = \prod\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} h^{m^0(r,k,j)}_{r,k}$ с $d = d(M_j) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)k$ и $m = m^0(i,j) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} m^0(r,k,j)$ не зависят от j. Рассмотрим действие $Y(\mathfrak{g}_0)$ на $(V \otimes \mathbb{C}[a_1]) \otimes (V \otimes \mathbb{C}[a_2]) \otimes \ldots \otimes (V \otimes \mathbb{C}[a_m])$. Используя определение коумножения, автоморфизмов τ_α и выбирая члены старшей степени, получаем, что

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} (ha_1^k \otimes 1^{\otimes(m-1)} + ha_2^k \otimes 1^{\otimes(m-2)} + \ldots + 1^{\otimes(m-1)} \otimes ha_m^k)^{m_{kj}} = 0,$$

где $h = \rho(h_{i0})$, $m_{kj} = m^0(i,k,j)$. Переставляя круглые скобки соберём члены в форме $f(a_1, \dots, a_m)h^{\otimes m}$, где f — моном от $a_1, \dots, a_m$. Из этих членов выберем члены с наибольшей a_1-степенью; из отобранных членов выберем члены с наибольшей a_2-степенью и так далее. В конце концов получим член в котором степени $\{m(i,k,j) \big| k \in \mathbb{Z}_+\}$, $1 \leq j \leq s$ взаимно различны. Следовательно, равенство (5.9.1) с которого мы начали рассуждения, не может иметь места.

Предположим теперь, что линейная независимость доказана для всех мономов с $p \leq l$, где $l \geq 1$ и имеет место равенство (5.9.1) с $c_j \neq 0$ и $p(M_j) = l + 1$. Применяя Δ к (5.9.1), переставим круглые скобки и выберем члены старшей степени. После чего, предполагая, что нашлось такое i, что $M^+_{ji} = I$ (другие случаи рассматриваются аналогично), мы выберем все члены в форме

$$\sum_{r \leq j \leq s} c_j M^+_{ji} \otimes \prod_{\substack{r \neq i \\ 1 \leq r \leq N}} M^+_{jr} \prod_{1 \leq q \leq N} M^0_{qr} \prod_{1 \leq r \leq N} M^-_{jr}.$$

Обозначая правые тензорные сомножители через N_{ji} получим

$$\sum_{1\leq j\leq s} c_j M_{ji}^{+} \otimes N_{ji} = 0. \tag{5.9.2}$$

Так как $M_1, \ldots, M_s$ взаимно различны, то таковы либо $M_{1i}^{+}, \ldots, M_{si}^{+}$ либо $N_{1i}, \ldots, N_{si}$. Но $p(M_{1i}^{+}) = \ldots = p(M_{si}^{+}) = 1 \leq p$ и $p(N_{1i}) = \ldots = p(N_{si}) = p$, следовательно, согласно индукционному предположению, из (5.9.2) следует, что $c_1 = \ldots = c_s = 0$. Теорема доказана.

□

5.10 Вычисление универсальной R-матрицы квантового дубля $DY(Q_n)$

5.10.1 Вычисление универсальной R-матрицы квантового дубля $\tilde{DY}(Q_n)$ с "дринфельдовским"коумножением

Определение квантового дубля было дано выше (см. главу 2). Здесь мы рассмотрим две структуры суперaлгебры Хопфа на $Y(Q_n)$ и исследуем связь между этими двумя структурами. Мы будем использовать формулу для универсальной R-матрицы квантового дубля топологической суперaлгебры Хопфа:

$$R = \sum_i e_i \otimes e^i, \tag{5.10.1}$$

здесь $\{e_i\}$ – базис в топологической суперaлгебре Хопфа A, а $\{e^i\}$ – двойственный базис в суперaлгебре Хопфа A^0. Сходимость понимается здесь $\hbar$-адической топологии. Мы будем также использовать описанное выше треугольное разложение янгиана и, индуцированное им разложение квантового дубля янгиан $DY(Q_n)$:

$$DY(Q_n) \cong Y_+ \hat{\otimes} Y_0 \hat{\otimes} Y_- \hat{\otimes} Y_-^0 \hat{\otimes} Y_0^0 \hat{\otimes} Y_+^0, \tag{5.10.2}$$

здесь изоморфизм индуцируется просто умножением в квантовом дубле. А тензорное произведение – это топологическое тензорное произведение.

5.10.2 Вычисление универсальной R-матрицы

Сначала переформулируем данное выше определение квантового дубля $DY(Q_n)$ в более удобной для нас форме. В этом параграфе, так же, как и выше мы иногда, для краткости, будем использовать обозначение

$$(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j) := \delta_{i-1,j} - \delta_{i+1,j}. \tag{5.10.3}$$

Для описания $DY(Q_n)$ удобно использовать следующие порождающие функции

$$x_{i,j}^{\pm +}(u) = \sum_{k\geq 0} x_{i,j,k}^{\pm} u^{-k-1}, \quad x_{i,j}^{\pm -}(u) = -\sum_{k<0} x_{i,j,k}^{\pm} u^{-k-1},$$

$$h_{i,j}^{+}(u) = 1 + \sum_{k\geq 0} h_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad h_{i,j}^{-}(u) = 1 - \sum_{k<0} h_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad j \in \mathbb{Z}_2.$$

В терминах этих порождающих функций (используя разложение Гаусса и двойственную реализацию янгиана) можно получить формулы для коумножения и определяющие соотношения. Пока не удалось получить явные формулы для коумножения. Но доказанных соотношений оказывается достаточно для вычисления формул спаривания в квантовом дубле янгиана $Y(Q_n)$ странной супералгебры Ли и получения явной формулы для универсальной R-матрицы квантового дубля. Выше мы определили ПБВ-базис для янгиана $Y(Q_n)$. Аналогично можно определить и ПБВ-базис для квантового дубля $DY(Q_n)$ янгиана $Y(Q_n)$. Пусть $Y^{\pm}_{\mp}, Y^{\pm}_{0}$ – супералгебры, порождённые полями $x^{\pm\mp}_{i,0}(u), x^{\pm\mp}_{i,1}(u)$ и $h^{\pm}_{i,0}(u), h^{\pm}_{i,1}(u)$, $i \in I$, соответственно.

Сначала сформулируем теорему, дающую представление об общей структуре мультипликативной формулы универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли. Отметим, что здесь мы понимаем тензорное произведение супералгебр, как тензорное топологическое произведение. Мы также будем работать в категории топологических супералгебр. Саму формулу мы понимаем как формальный ряд.

Теорема 5.10.1. *Пусть $G = Q_n$. Тогда универсальная R-матрица R квантового дубля $DY(G)$ может быть представлена в следующей факторизованной форме*

$$R = R_+ R_0 R_-, \tag{5.10.4}$$

где

$$R_+ = \overrightarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \tag{5.10.5}$$

$$R_- = \overleftarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \tag{5.10.6}$$

где произведение берётся в соответствии с определёнными выше нормальными порядками $\precneqq_+, \precneqq_-$.

Средний член R_0 имеет более сложную структуру.

Теорема 5.10.2. *Пусть $\varphi^{\pm}_i(u) = \ln(h^{\pm}_{i,0}(u))$, $\tilde{\varphi}^{\pm}_i(u) = \ln(h^{\pm}_{i,1}(u))$, $A = (a_{ij})^n_{i,j=1}$ – симметризуемая матрица для A_n, $A = a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = \dfrac{q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}}}{q - q^{-1}}, A(q) = (a_{ij}(q))^n_{i,j=1}$. Пусть $C(q) = (c_{ij}(q))^n_{i,j=1}$ – матрица пропорциональная матрице $A(q)^{-1}$ и T – оператор сдвига: $Tf(v) = f(v-1)$. Аналогично, $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}})^n_{i,j=1}, \tilde{a}_{ij} = (\alpha_i \widetilde{,} \alpha_j), \tilde{a}_{ij}(q) = [\tilde{a}_{ij}]_q = \dfrac{q^{\tilde{a}_{ij}} - q^{-\tilde{a}_{ij}}}{q - q^{-1}}, \tilde{A}(q) = (\tilde{a}_{ij}(q))^n_{i,j=1}$, $\tilde{C}(q) = (\tilde{c}_{ij}(q))^n_{i,j=1}$ – матрица пропорциональная матрице $\tilde{A}(q)^{-1}$. Тогда*

$$\begin{aligned} R_0 = \textstyle\prod_{m\geq 0}(\exp \sum_{1\leq i,j\leq n} Res_{u=v}(\varphi^{+}_i(u))' \otimes c_{ji}(T^{-1/2})\varphi^{-}_j(v + (n+1/2)h) \cdot \\ \exp(\textstyle\sum_{1\leq i,j\leq n} Res_{u=v}(\tilde{\varphi}^{+}_i(u))' \otimes \tilde{c}_{ji}(T^{-1/2})\tilde{\varphi}^{-}_j(v + (n+1/2)h)), \end{aligned} \tag{5.10.7}$$

где h – некоторая константа, $T^{-1/2}$ подставляет $c_{ji}(q)$, $\tilde{c}_{ji}(q)$, соответственно, вместо q.

Выше было дано определение универсальной R- матрицы квазитругольной топологической супералгебры Хопфа.

Напомним, что если A является квантовым дублем супералгебры Хопфа A^+, то есть $A \cong A^+ \otimes A^-$, $A^- := A^0$ является двойственной к A супералгеброй Хопфа с противоположным коумножением, то A является квазитреугольной супералгеброй Хопфа с универсальной R-матрицей для A допускающей следующее каноническое представление:

$$R = \sum e_i \otimes e^i,$$

где $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные базисы в A^+, A^-, соответственно.

Так же как и выше будем предполагать по аналогии со случаем контраградиентных супералгебр Ли, что корневая система Δ странной супералгебры Ли Q_n является объединением двух экземпляров корневых систем алгебры Ли A_{n-1}, одна из которых параметризует чётные корни странной супералгебры Ли, а другая – нечётные: $\Delta = \Delta^{ev}(A_{n-1}) \bigcup \Delta^{od}(A_{n-1})$. Корневые образующие также будем параметризовать корнями этой расширенной системы корней. Пусть $Y_+^{\pm}, Y_0^{\pm}, Y_-^{\pm}$ – супералгебры в $DY(\mathfrak{g})$, порождённые полями (коэффициентами порождающих функций) $e_{i,0}^{\pm}(u), e_{i,1}^{\pm}(u)$; $h_{i,0}^{\pm}(u), h_{i,1}^{\pm}(u)$;
$f_{i,0}^{\pm}(u), f_{i,1}^{\pm}(u)$, соответственно. Здесь $i \in I$.

Теорема 5.10.3. *1) Универсальная R-матрица квантового дубля янгиана $DY(Q_n)$ может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in Y_+^+ \otimes Y_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes Y_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes Y_+^-$.
2)Спаривание на базисных элементах вычисляется в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{gathered}\langle e_{\beta_0}^{n_0} e_{\beta_1}^{n_1} \dots e_{\beta_k}^{n_k}, e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} \dots e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \rangle = \\ (-1)^{n_0+\dots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \dots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0} \dots \alpha(\gamma_k)^{n_k} (-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)}; \quad (5.10.8) \\ \langle e_{-\beta_k}^{n_k} \dots e_{-\beta_1}^{n_1} e_{\beta_0}^{n_0}, e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \dots e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} \rangle = \\ (-1)^{n_0+\dots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \dots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \dots n_k! \cdot \alpha(\gamma_0)^{n_0} \dots \alpha(\gamma_k)^{n_k} (-1)^{\theta(\beta_0)+\dots+\theta(\beta_k)}. \quad (5.10.9)\end{gathered}$$

Здесь $\beta_k = (\tilde{\beta}_k, j)$ $\tilde{\beta}_k = \beta_k' + n_k'\delta$, $deg(\beta_k) = j$ и коэффициенты $\tilde{\alpha}(\tilde{\beta})$ могут быть вычислены из условия $[e_{\tilde{\beta}}, e_{-\tilde{\beta}}] = \tilde{\alpha}(\tilde{\beta}) h_{\beta'}$.

Из этой теоремы следует

Теорема 5.10.4. *Элементы R_+, R_- в разложении универсальной R-матрицы янгианного дубля $DY(\mathfrak{g})$ могут быть представлены в следующей форме*

$$R_+ = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \quad (5.10.10)$$

$$R_- = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes e_{-\beta}), \quad (5.10.11)$$

где произведение берётся в соответствии с определённым выше нормальным упорядочиванием $\precneqq_+, \precneqq_-$, которое строится по по корневой системе аффинной супералгебры Ли $A(n,n)^{(2)}$. Кроме того это упорядочивание является выпуклым порядком.

Нормализующие константы $a(\beta)$ могут быть найдены из следующих условий:

$$[e_\beta, e_{-\beta}] = (a(\beta))^{-1} h_\gamma \quad \text{если} \quad \beta = \gamma + n\delta \in \Xi_+, \gamma \in \Delta_+(A(n,n)^{(2)}),$$

$$[e_{-\beta}, e_\beta] = (a(\beta))^{-1} h_\gamma \quad \text{если} \quad \beta = -\gamma + n\delta \in \Xi_-, \gamma \in \Delta_+(A(n,n)^{(2)}),$$

и $\theta(\beta) = deg(e_\beta) = deg(e_{-\beta})$ обозначает чётность элемента $e_{\pm\beta}$.

Опишем теперь член R_0. Мы покажем, что он в свою очередь факторизуется и может быть представлен в форме произведения $R_0 = R_0^{even} \cdot R_0^{odd}$. Доказательство этого факта основано на том, что спаривание между чётными образующими картановской подсупералгебры $h_{i,0,k}$ и нечётными образующими $h_{1,k}^i, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$ в двойственной в квантовом дубле картановской подсупералгебре является нулевым. Поэтому можно отдельно провести вычисления для членов R_0^{even} и R_0^{odd}. Схема рассуждений в обеих случаях весьма похожа и по существу совпадает со схемой вычислений, реализованных в предыдущих главах, хотя сами формулы и несколько отличаются.

Для описания членов R_0^{even} и R_0^{odd} введём следующие понятия.

Сначала определим логарифмические образующие (см. главу 7, также) $\phi^{\pm}_{i,j}(u)$, $i = 1,\ldots,r, \quad j = 0, 1$ формулами

$$\phi^{+}_{i,j}(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,j,k} u^{-k-1} = \ln(h^{+}_{i,j}(u)); \quad \phi^{-}_{i,j}(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,j,-k-1} u^{k} = \ln(h^{-}_{i,j}(u)). \tag{5.10.12}$$

Определим следующие вектор-функции:

$$\phi^{\pm}_{i,j}(u) = \begin{pmatrix} \phi^{\pm}_{i,j,1}(u) \\ \phi^{\pm}_{i,j,2}(u) \\ \cdots \\ \phi^{\pm}_{i,j,r}(u) \end{pmatrix}, h^{\pm}_{i,j}(u) = \begin{pmatrix} h^{\pm}_{i,j,1}(u) \\ h^{\pm}_{i,j,1}(u) \\ \cdots \\ h^{\pm}_{i,j,r}(u) \end{pmatrix}.$$

Из доказанной выше теоремы следует, что формулы спаривания могут быть следующим образом переписаны в терминах этих вектор-функций

$$\langle((h^{+}_{i,0}(u))^T, h^{-}_{j,0}(v))\rangle = \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} \right)_{i,j=1}^{r}, \tag{5.10.13}$$

$$\langle((h^{+}_{i,1}(u))^T, h^{-}_{j,1}(v))\rangle = \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)} \right)_{i,j=1}^{r}. \tag{5.10.14}$$

Следовательно, для порождающих функций образующих $\phi^{+}_{i}(u), \phi^{-}_{j}(u), \hat{\phi}^{+}_{i}(u), \hat{\phi}^{-}_{j}(u)$ формула спаривания может записана в следующем виде

$$\langle \phi^{+}_{i,0}(u), \phi^{-}_{j,0}(v) \rangle = \ln \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} \right), \tag{5.10.15}$$

$$\langle \phi^{+}_{i,1}(u), \phi^{-}_{j,1}(v) \rangle = \ln \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)} \right). \tag{5.10.16}$$

Полученную формулу мы можем переписать в следующей форме

$$\langle (\phi^{+}(u)_{i,0})^T, \phi^{-}_{j,0}(v) \rangle = \left(\ln \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} \right) \right)_{i,j=1}^{r}, \tag{5.10.17}$$

Аналогично,

$$\langle (\phi^{+}_{i,1}(u))^T, \phi^{-}_{j,1}(v) \rangle = \left(\ln \left(\frac{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)} \right) \right)_{i,j=1}^{r}. \tag{5.10.18}$$

Дальнейшие вычисления будут следовать плану, осуществлённому в главе 2.

Наряду с янгианным дублем $DY(\mathfrak{g})$ рассмотрим и введённую выше супералгебру Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, изоморфную как ассоциативная супералгебра квантовому дублю $DY(\mathfrak{g})$, но с другой структурой косупералгебры, определяемой следующими простыми формулами:

$$\tilde{\Delta}(h^{\pm}_{i,j}(u)) = h^{\pm}_{i,j}(u) \otimes h^{\pm}_{i,j}(u), \tag{5.10.19}$$

$$\tilde{\Delta}(e_{i,j}(u)) = e_{i,j}(u) \otimes 1 + h^{-}_{i,j}(u) \otimes e_{i,j}(u), \tag{5.10.20}$$

$$\tilde{\Delta}(f_{i,j}(u)) = 1 \otimes f_{i,j}(u) + f_{i,j}(u) \otimes h^{+}_{i,j}(u). \tag{5.10.21}$$

Здесь мы используем следующие обозначения

$$e_{i,j}(u) := e^{+}_{i,j}(u) - e^{-}_{i,j}(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{i,j,k}u^{-k-1},$$

$$f_{i,j}(u) := f^{+}_{i,j}(u) - f^{-}_{i,j}(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{i,j,k}u^{-k-1}.$$

Используя коммутационные соотношения нетрудно проверить, что коумножение Δ и $\tilde{\Delta}$ сопрягаются следующим оператором

$$\hat{t}^{\infty} := lim_{n\to\infty}\hat{t}^{n},$$

$$\hat{t}(e_{i,j,k}) = e_{i,j,k+1}, \quad \hat{t}(f_{i,j,k}) = f_{i,j,k-1},$$

$$\hat{t}(h_{i,j,k}) = h_{i,j,k}, \quad j \in \{0,\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами,

$$\tilde{\Delta}(x) = lim_{n\to\infty}(\hat{t}^{n}\otimes\hat{t}^{n})\Delta(\hat{t}^{-n}(x)), \tag{5.10.22}$$

для $\forall x \in DY(\mathfrak{g})$. Напомним, что сходимость здесь понимается в подходящей $\hbar$-адической топологии на $DY(\mathfrak{g})\otimes DY(\mathfrak{g})$, которая была определена ранее в главе 1.

Пусть $\widehat{DY}^{+}(\mathfrak{g})$, $\widehat{DY}^{-}(\mathfrak{g})$ – подсуперагебры Хопфа супералгебры Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, порождённые элементами

$$e_{i,0,k}, e_{i,1,k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad h_{i,0,m}, h_{i,1,m}, \quad m \in \mathbb{Z}_{+},$$

$$f_{i,0,k}, f_{i,1,k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad h_{i,0,m}, h_{i,1,m}, \quad m < 0,$$

соответственно. Тогда $\widehat{DY}^{-}(\mathfrak{g})$ изоморфна двойственной супералгебре Хопфа $(\widehat{DY}^{-}(\mathfrak{g}))^{*}$. Из вида формул для коумножения (5.10.19) следует, что элементы $\phi^{\pm}_{i,k}$ являются примитивными в $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$. Пусть

$$\Phi^{+} = \langle\phi^{+}_{i,0,k} : i \in I = \{1,\dots,r\}, k \in \mathbb{Z}_{+}\rangle,$$

$$\Phi^{-} = \langle\phi^{-}_{i,0,-k-1} : i \in I = \{1,\dots,r\}, k \in \mathbb{Z}_{+}\rangle,$$

$$\hat{\Phi}^{+} = \langle\phi^{+}_{i,1,k} : i \in I = \{1,\dots,r\}, k \in \mathbb{Z}_{+}\rangle,$$

$$\hat{\Phi}^{-} = \langle\phi^{-}_{i,1,-k-1} : i \in I = \{1,\dots,r\}, k \in \mathbb{Z}_{+}\rangle$$

линейные подпространства (порождённые, указанными в скобках векторами).

Пусть также $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}, \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ – взаимно двойственные базисы в суперпространствах Φ^{+}, Φ^{-}, соответственно, относительно формы (5.10.16), а $\{\tilde{\hat{\phi}}_{i,m}\}, \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ – взаимно двойственные базисы в суперпространствах $\hat{\Phi}^{+}, \hat{\Phi}^{-}$.

Имеет место следующее предложение

Предложение 5.10.1. *Элемент R_0 может быть представлен в следующей форме*

$$R_0 = \exp(\sum_{i,m}\tilde{\phi}_{i,m}\otimes\tilde{\phi}^{i,m} - \tilde{\hat{\phi}}_{i,m}\otimes\tilde{\hat{\phi}}^{i,m}). \tag{5.10.23}$$

Доказательство. Пусть $B_+ = C[\Phi^+], \quad B_- = C[\Phi^-]$ – коммутативные алгебры функций на $\Phi^+, \quad \Phi^-$, соответственно, и $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}, \quad \{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ – упомянутые выше двойственные базисы.

Зафиксируем выпуклый линейный порядок на базисе. Будем использовать следующее обозначение $\{\tilde{\phi}_a\}, \{\tilde{\phi}^a\}, a \in \mathbb{N}$.

Докажем по индукции следующую формулу

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}^{n_1} \dots \tilde{\phi}_{i_k}^{n_k}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{m_1} \dots (\tilde{\phi}^{i_k})^{m_k} \rangle = \delta_{n_1,m_1} \dots \delta_{n_k,m_k} n_1! \dots n_k! \tag{5.10.24}$$

Легко проверяется база о индукции для $k = 1, n_1 = 1$:

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}, \tilde{\phi}^{i_1} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{\phi}_{i_1}, 1 \rangle = 0.$$

Далее, пусть

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}^{n}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{n} \rangle = n!.$$

Покажем, что

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}^{n+1}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{n+1} \rangle = (n+1)!.$$

Действительно,

$$\langle \tilde{\phi}_{i}^{n+1}, (\tilde{\phi}^{i})^{n+1} \rangle = \langle \Delta(\tilde{\phi}_i) \Delta((\tilde{\phi}_i)^n), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}_i)^n \rangle =$$

$$\langle (\tilde{\phi}_i \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\phi}_i)(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\tilde{\phi}_i)^k (\tilde{\phi}_i)^{n-k}), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}_i)^n \rangle = (n+1) \langle \tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}^i \rangle \langle (\tilde{\phi}_i)^n, (\tilde{\phi}^i)^n \rangle = (n+1)!.$$

Используя доказанную по индукции по k формулу получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Пусть сейчас $(f(u))' = \frac{d}{du}(f(u))$. Давайте продифференцируем равенство (5.10.16) по параметру u. Получаем

$$\frac{d}{du} \langle \phi_i^+(u), \phi_j^-(u) \rangle = \langle (\phi_i^+(u))', \phi_j^-(u) \rangle = \frac{1}{u - v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)} - \frac{1}{u - v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}.$$

Пусть

$$\tilde{\phi}_i^+(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,k} u^{-k-1}, \quad \tilde{\phi}_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,-k-1} u^{k}.$$

Тогда в терминах порождающих функций спаривание

$$\langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}_{j,l} \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl}$$

может быть переписано в следующей форме:

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v) \rangle = \sum_{k,l} \langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}^{j,l} \rangle u^{-k-1} v^l = (v < 1 < u) = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} u^{-1} (\frac{v}{u})^k = \frac{\delta_{ij}}{u - v}.$$

Таким образом, получаем следующее равенство

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{u - v} \tag{5.10.25}$$

Введём следующие порождающие вектор-функции
$\tilde{\phi}^{\pm}(u) = (\tilde{\phi}_1^{\pm}(u), \tilde{\phi}_2^{\pm}(u) \dots \tilde{\phi}_r^{\pm}(u))^t$.

Тогда спаривание (5.10.25) мы можем переписать следующим образом в виде матричного равенства (понимаемого в обычном смысле как равенство матричных элементов):

$$\langle(\tilde{\phi}^{+}(u))^{T}, \tilde{\phi}^{-}(u)\rangle = \frac{E_r}{u-v}. \tag{5.10.26}$$

Здесь E_r – единичная $r \times r$-матрица.

Пусть $T : f(v) \to f(v-1)$ – оператор сдвига. Ясно, что

$$\langle(\phi_i^{-}(v))', \phi_j^{+}(v)\rangle = \frac{1}{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} - \frac{1}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} =$$

$$(id \otimes (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}}))\frac{\delta_{ij}}{u-v} = \langle\tilde{\phi}_i^{-}(v), (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}})\tilde{\phi}_j^{+}(u)\rangle.$$

Здесь $b_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)$. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ – матрица, которая строится по матрице Картана алгебры Ли A_n, так же как матрица, задающая систему определяющих соотношений в странной супералгебре Ли. Удобно её матричные элементы представлять в следующей форме $a_{ij} = (\alpha_i,\alpha_j)$. Пусть также $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^{r}$ – её q-аналог, где $a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = [(\alpha_i,\alpha_j)]_q = \frac{q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}}}{q-q^{-1}}$.

Пусть также $D(q)$ – обратная к $A(q)$ матрица, а через A^T обозначим её транспонированную матрицу A. Тогда предыдущее равенство можно переписать в следующей форме

$$\langle(\phi^{+}(v))^{T}, \phi^{-}(u)\rangle = \langle(\tilde{\phi}^{+}(u))^{T}, A(T^{-\frac{1}{2}})(T - T^{-1})\tilde{\phi}^{-}(v)\rangle.$$

Таким образом мы приходим к равенству

$$\langle(\tilde{\phi}^{-}(v))^{T}, \tilde{\phi}^{+}(u)\rangle = \langle((T-T^{-1})^{-1}D(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^{-}(v))^{T}, (\phi^{+}(u))'\rangle. \tag{5.10.27}$$

Окончательно получаем равенство

$$\frac{E_r}{u-v} = \langle((T-T^{-1})^{-1}D(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^{-}(v)), ((\phi^{+}(u))')^{T}\rangle. \tag{5.10.28}$$

Таким образом мы диагонализовали спаривание. Представим матрицу $D(q)$ в следующей форме

$$D(q) = \frac{1}{[l(\mathfrak{g})]}C(q),$$

где $C(q)$ – матрица с матричными коэффициентами, являющимися многочленами от q и q^{-1} с целыми (положительными) коэффициентами (то есть $c_{ij} \in Z[q,q^{-1}]$). Пусть также $l(\mathfrak{g}) = \check{h}(\hat{\mathfrak{g}})$ – дуальное число Коксетера. В этих обозначениях предыдущая формула может быть переписана в следующей форме.

$$\frac{E_r}{u-v} = \langle((T^{l(\mathfrak{g})} - T^{-l(\mathfrak{g})})^{-1}C(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^{-}(v)), ((\phi^{+}(u))')^{T}\rangle. \tag{5.10.29}$$

Аналогично, рассмотрим матрицу $\tilde{A} = \Big((\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)\Big)_{i,j=1}^{r}$, а также её q-аналог – матрицу $\tilde{A}(q)$. Легко видеть, что матрица $\tilde{A}(q)$ обратима. Так же как и выше обозначим через $\tilde{D}(q)$ обратную к ней матрицу. Представим эту матрицу в форме: $\tilde{D}(q) = \frac{1}{[r]}\tilde{C}(q)$, где $C(q)$ – матрица с матричными коэффициентами, являющимися многочленами от q и q^{-1} с целыми (положительными) коэффициентами.

Из последнего равенства мы получаем описание сомножителя R_0^{even}, R_0^{odd} в факторизованной формуле для универсальной R-матрицы.

Теорема 5.10.5.

$$R_0 = R_0^{even} R_0^{odd} =$$
$$\prod_{n\geq 0} \exp \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{k\geq 0}((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi_j^-(v+(n+\tfrac{1}{2})l(A_n)))_{-k-1} \cdot$$
$$\prod_{n\geq 0} \exp \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{k\geq 0}((\hat{\phi}_i^+(u))')_k \otimes \tilde{c}_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\hat{\phi}_j^-(v+(n+\tfrac{1}{2})l(A_n)))_{-k-1}. \quad (5.10.30)$$

5.11 Вычисление универсальной R- матрицы янгиана $Y(Q_n)$

Прежде всего рассмотрим классический аналог проводимых ниже рассуждений. Классическая $r-$матрица $r(u,v)$ классического дубля

$$(\mathfrak{g}((u^{-1})), u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]], \mathfrak{g}[u])$$

алгебры токов $\mathfrak{g}[u]$ имеет следующий вид:

$$r(u,v) = \sum_{i,k} e_{i,k} \otimes e^{i,k},$$

где $\{e_{i,k} = e_i u^k\}, \{e^{i,k} = e^i u^{-k-1}\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{g}[u]), u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]]$, соответственно, относительно спаривания

$$\langle f, g\rangle = res(f(u), g(u)),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$, а $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные относительно этой формы базисы в $\mathfrak{g}$. Ниже мы будем рассматривать случай скрученной супералгебры токов со значениями в супералгебре Ли типа $A(n,n)$.

Покажем, что

$$r_\sigma(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2} \frac{(\sigma^k \otimes id)(\mathfrak{t})}{v - \varepsilon^k u},$$

где $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$ – оператор Казимира.

Легко видеть, что

$$r = \sum e_{i,k} \otimes e^{i,k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_i (e_i \cdot v^{2k} \otimes e^i \cdot u^{-2k-1} + e^i \cdot v^{2k+1} \otimes e_i \cdot u^{-2k-2}) = \sum_{k=0}^{\infty}((\sum e_i \otimes e^i)\cdot u^{-1}(\frac{v}{u})^{2k} +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}((\sum e^i \otimes e_i)\cdot u^{-1}(\frac{v}{u})^{2k+1}) = \mathfrak{t}_0 \frac{u^{-1}}{(1-(v/u)^2)} + \mathfrak{t}_1 \frac{u^{-1}(v/u)}{1-(v/u)^2} = \frac{\mathfrak{t}_0 \cdot u}{(u^2 - v^2)} + \frac{\mathfrak{t}_1 \cdot v}{u^2 - v^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{u-v} + \frac{1}{u+v})\mathfrak{t}_0 + (1/2)(\frac{1}{u-v} - \frac{1}{u+v})\mathfrak{t}_1 = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1}{u-v} + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1}{u+v}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2} \frac{(\sigma^k \otimes id)(\mathfrak{t})}{u - \varepsilon^k \cdot v}.$$

Таким образом получили, что

$$r_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2} \frac{(\sigma^k \otimes id)(\mathfrak{t})}{v - \varepsilon^k u}. \quad (5.11.1)$$

Отметим, что полученная классическая r-матрица не принадлежит $\mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$. Введем следующий оператор сдвига $T_\lambda : f(u) \to f(u+\lambda)$. Подействуем оператором $id \otimes T_\lambda$ на r. Получим

$$(id \otimes T_\lambda) r_\sigma(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2} \frac{(\sigma^k \otimes id)(\mathfrak{t})}{\lambda - (\varepsilon^k u - v)} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2} \frac{(\sigma^k \otimes id)(\mathfrak{t})}{\lambda(1 - \lambda^{-1}(\varepsilon^k u - v))} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2} \sum_{s=0}^{\infty} (\sigma^k \otimes id)\mathfrak{t}((\varepsilon^k u - v)^s \lambda^{-s-1}) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s \lambda^{-s-1},$$

где $r_s \in \mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$.

Проведем теперь эти же рассуждения другим, эквивалентным способом.

$$(id \otimes T_\lambda) r(u,v) \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot (v+\lambda)^{-k-1} =$$

$$\sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot \frac{1}{(\lambda(1-(-v/\lambda)))^{k+1}} = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot (-1)^m C_{m+k}^k v^m \lambda^{-m-k-1} = (n = m+k) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i (-1)^{n-k} C_n^k e_i u^k \otimes e^i v^{n-k} \lambda^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i e_i \otimes e^i (u-v)^n \lambda^{-n-1}.$$

Проведенные выше рассуждения попробуем повторить и в квантовом случае, имея в виду, что янгиан является квантованием бисуператгебры полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t]$, его дубль – квантование классического дубля $\mathfrak{g}((t))$, универсальная R-матрица дубля является квантовым аналогом классической r-матрицы r, а рассмотренная выше r-матрица $(id \otimes T_\lambda) r(u,v)$ и есть тот классический объект, аналогом которого и является универсальная R- матрица янгиана, которую мы и будем ниже вычислять. Наши рассуждения здесь аналогичны прведённым выше рассуждениям в нескрученном случае (см. главы 2 и 4).

Напомним определение гомоморфизма T_λ в квантовом случае. Пусть

$$T_\lambda : Y(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$$

гомоморфизм, задаваемый формулами: $T_\lambda(x) = x$ для $x \in \mathfrak{g}$, $T_\lambda(a_{i,j,1}) = a_{i,j,1} + \lambda a_{i,j,0}$ для $a \in \{e, f, h\}$.

Предложение 5.11.1. *Действие T_λ на образующих $a_{i,j,n}, a \in \{e,f,h\}, n \in \mathbb{Z}$ дубля янгиана $DY(\mathfrak{g})$ определяется формулами:*

$$T_\lambda a_{i,j,n} = \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{i,j,k} \lambda^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.11.2}$$

$$T_\lambda a_{i,j,-n} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} a_{i,j,k} \lambda^{-n-k-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11.3}$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по последнему индексу и, по существу, ничем не отличается от проведённого выше доказательства для янгиана базисной суперэлгебры Ли.

□

Замечание 4. *Отметим, что ряд, определяющий значение оператора T_λ на образующих $a_{i,j,-n}$ сходится при достаточно больших значениях λ.*

Теперь мы можем вычислить универсальную R-матрицу $R(\lambda)$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$ формулой:

$$R(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})R, \tag{5.11.4}$$

где R – универсальная R-матрица в дубле $DY(\mathfrak{g})$. Так как $R = R_+R_0R_-$, то действуя оператором $id \otimes T_\lambda$ на R и пользуясь тем, что T_λ – гомоморфизм, а следовательно и $id \otimes T_\lambda$ – гомоморфизм, получаем

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda), \tag{5.11.5}$$

где $R_+(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})(R_+), \quad R_0(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})(R_0), \quad R_-(\lambda) = (id \otimes T_{-\lambda})(R_-)$.

Отметим, что

$$R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^{-k-1}, \tag{5.11.6}$$

где 1 – единичный элемент в $Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, а $R_k \in Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g})$. Но такая форма не очень удобно, так как коэффициенты R_k имеют трудно обозримый вид. Поэтому окончательный ответ мы представим в другом более обозримом виде. Подействуем оператором $id \otimes T_{-\lambda}$ на правую часть формулы 5.10.10. Получим

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_\beta \otimes T_{-\lambda} e_{-\beta}), \tag{5.11.7}$$

Вычислим отдельно элемент $T_{-\lambda}e_{-\beta}$. Так как $\beta = \beta' + n\delta$, то в силу формулы 5.11.3 получаем

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) (\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}). \tag{5.11.8}$$

Аналогично вычисляется элемент $R_-(\lambda)$. Суммируя сказанное выше получаем следующее

Предложение 5.11.2. *Члены $R_+(\lambda)$, $R_-(\lambda)$ универсальной R матрицы янгиана имеют следующий вид*

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) (\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}), \tag{5.11.9}$$

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) (\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}) \tag{5.11.10}$$

Пусть $ord(\beta) := n$, если $\beta = \beta' + n\delta, \beta' \in \Delta_+(\mathfrak{g})$. Тогда формулы (5.11.9), (5.11.10) предыдущего предложения 5.11.2 можно переписать в виде следующих формул

$$R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_+} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) (\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+ord(\beta)-1}^{ord(\beta)-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(ord(\beta)+k)\delta}) \lambda^{-ord(\beta)-k-1})),$$

$$R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod}_{\beta \in \Xi_-} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) (\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+ord(\beta)-1}^{ord(\beta)-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(ord(\beta)+k)\delta}) \lambda^{-ord(\beta)-k-1})).$$

Вычислим теперь член $R_0(\lambda)$. Для этого нам потребуется вспомогательное

Предложение 5.11.3. *Оператор сдвига действует на производящую функцию картановских образующих по следующей формуле:*

$$T_\lambda(h_{i,j}^-(u)) = h_{i,j}^+(u + \lambda). \tag{5.11.11}$$

Доказательство.

$$T_\lambda(h^-_{i,j}(u)) = T_\lambda(1 - \textstyle\sum_{k=0}^\infty h_{i,j,-k-1}u^k) = 1 - \textstyle\sum_{k=0}^\infty T_\lambda(h_{i,j,-k-1})u^k =$$
$$1 - \textstyle\sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty C^k_{m+k} h_{i,j,m})\lambda^{-m-k-1}u^k = 1 + \textstyle\sum_{m=0}^\infty h_{i,j,m}(\lambda^+ u)^{-m-1} = h^+_{i,j}(u+\lambda).$$

Предложение доказано.

□

Следствие 5.10.1. $T_\lambda(\varphi^-_i(u)) = \varphi^+_i(u+\lambda)$, $T_\lambda(\hat{\varphi}^-_i(u)) = \hat{\varphi}^+_i(u+\lambda)$.

Доказательство. $T_\lambda(\varphi^-_i(u)) = T_\lambda(\ln(h^-_{i,0}(u))) = \ln(T_\lambda(h^-_{i,0}(u))) = \ln(h^+_{i,0}(u+\lambda)) = \varphi^+_i(u+\lambda)$. Для $\widehat{\varphi^-_i}(u)$ доказательство аналогично. □

Теперь мы можем вычислить член $R_0(\lambda)$.

Предложение 5.11.4. *Член $R_0(\lambda)$ имеет следующий вид*

$$R_0(\lambda) =$$
$$\textstyle\prod_{n\geq 0} \exp(\sum_{i,j\in I} \sum_{k\geq 0}((\phi^+_i(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^+_j(v + (n+\frac{1}{2})l(\mathfrak{g}) + \lambda))_k)$$
$$\textstyle\prod_{n\geq 0} \exp(\sum_{i,j\in I} \sum_{k\geq 0}((\hat{\phi}^+_i(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\hat{\phi}^+_j(v + (n+\frac{1}{2})l(\mathfrak{g}) + \lambda))_k). \quad (5.11.12)$$

Пример 5.10.1 В случае супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(1,1), \mathfrak{g}^0 = Q_2$ формула 5.11.12 допускает следующую простую форму

$$R_0(\lambda) = \prod_{n\geq 0} \exp(-\sum_{k\geq 0}((\phi^+(u))')_k \otimes (\phi^+(v-2n-1+\lambda))_k \prod_{n\geq 0} \exp(-\sum_{k\geq 0}((\hat{\phi}^+(u))')_k \otimes (\hat{\phi}^+(v-2n-1+\lambda))_k$$

Мы можем представить главный итоговый результат этого параграфа в виде следующей теоремы, в которой приводится мультипликативная формула для универсальной R-матрицы янгиана странной супералгебры Ли.

Теорема 5.11.1. *Универсальная R-матрица янгиана $Y(Q_{n-1})$ имеет следующий вид*

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda), \quad (5.11.13)$$

где члены $R_+(\lambda), R_0(\lambda), R_-(\lambda)$ описываются, соответственно, членами (5.11.11), (5.11.11), (5.11.12).

Глава 6

Квантованные универсальные обёртывающие аффинных алгебр Каца-Муди

6.1 Введение

В работе В.Г.Дринфельда [121] (см. также [120]) была поставлена задача явного вычисления универсальной R-матрицы квантованной универсальной обёртывающей алгебры. Для квантованной универсальной обертывающей простой алгебры Ли эта задача была решена последовательно самим В.Г. Дринфельдом (см. [120], [24]), в случае $\mathfrak{sl}_2$, М. Россо ([242]), в случае $\mathfrak{sl}_n$, С.Левендорским, Я.Сойбельманом ([38]) и, независимо, А.Кирилловым и Н.Решетихиным, в случае произвольной простой алгебры Ли. В случае квантовых аффинных алгебр эта задача была решена автором вместе с Я. Сойбельманом и С. Левендорским и независимо С. Хорошкиным и В. Толстым. Решение этой задачи потребовало развития новых методов, развитие которых дало толчок интенсивному развитию теории квантовых групп и привело к введению и осмыслению многих новых понятий, являющихся квантовыми аналогами классических понятий теории простых алгебр Ли и теории алгебраических групп. Одной из наиболее интересных концепций, возникшей на этом пути, была, на наш взгляд, концепция квантовой группы Вейля. Эта концепция связана, отчасти, с идеей геометризации, присутствовавшей в теории квантовых групп, с самого момента ее возникновения. В случае аффинных квантовых алгебр задача нахождения мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы была решена в работе [204] на основе конструкции аффинной квантовой группы Вейля. Существует тесная связь между квантовыми аффинными группами Вейля и аффинными алгебрами Гекке. Соотношения между квантовой аффинной алгеброй и квантовой группой Вейля и между квантовой аффинной алгеброй и аффинной алгеброй Гекке являются проявлением глубоких закономерностей, проявляющихся в геометрической двойственности Ленглендса, интенсивно исследующихся в последнее время. Эти связи аналогичны соотношениям между вырожденной аффинной алгеброй Гекке и янгианом. В этой главе мы попытаемся обсудить эти связи с наивной точки зрения. Ниже мы опишем конструкцию построения аффинной квантовой группы Вейля для алгебры Каца-Муди, обобщающей конструкцию, впервые предложенную в работе [204]. Следует, также упомянуть работы [89], [90], в которых были получены некоторые обобщения конструкций, предложенных в [204]. Основной результат этой главы – мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантовой аффинной алгебры, полученная для для квантовой аффинной алгебры $U_q(A_1^{(1)}$ впервые в работе [204]. Следует отметить, что вычисление универсальной R-матрицы для квантовой аффинной алгебры $U_q(A_1^{(1)}$ имело важное значение для теории точно решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. Наличие этой формулы позволило Т. Миве и М. Джимбо (см. [9], [172]) получить на её основе явные формулы для корреляционных функций XXZ модели Гейзенберга сразу для бесконечной цепочки и на уровне математической строгости без предельного перехода, используемого в алгебраическом анзаце Бёте (см. [51], [77]). Этот подход также применим и к шестивершинной модели ([2]) статистической механики (см. [171]). Помимо этого мы также постараемся в этой главе прояснить связь между и янгианами (или скорее их квантовыми дублями) и квантовыми аффинными алгебрами, включая связь между квазитреугольными структурами на них.

6.2 Квантованная универсальная обёртывающая аффинной алгебры Ли типа $A_1^{(1)}$

6.2.1 Определение квантованной универсальной обертывающей алгебры Ли-Каца-Муди

В этом параграфе мы напомним определение квантованной универсальной обертывающей алгебры Каца-Муди следуя В.Г. Дринфельду (см. [120]). Квантованные универсальные обёртывающие алгебры Ли связаны с квантованиями структур биалгебр Ли (или троек Манина), определенных на аффинных алгебрах Каца-Муди, следующего специального вида.

Пусть $\mathfrak{G}$ алгебра Каца-Муди в смысле [180] с фиксированным инвариантным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра, $\mathfrak{b}^{\pm}$ – борелевские подалгебры. Положим $\wp = \mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$, $\wp_1 = \{(x,y)\in\mathfrak{G}\times\mathfrak{G} : x = y\} \cong \mathfrak{G}$, $\wp_2 = \{(x,y)\in\mathfrak{b}_-\times\mathfrak{b}_+ : x_{\mathfrak{h}} + y_{\mathfrak{h}} = 0\}$. В качестве скалярного произведения элементов $(x_1,y_2)\in\wp,(x_2,y_2)\in\wp$ возьмем $\langle x_1,x_2\rangle - \langle y_1,y_2\rangle$. Так как $(\wp,\wp_1,\wp_2)$ - тройка Манина, то $\mathfrak{G}$ имеет структуру биалгебры Ли. В этом случае кокоммутатор $\varphi : \mathfrak{G}\to\bigwedge^2\mathfrak{G}$ можно описать в терминах канонических образующих: x_i^+, x_i^-, h_i:

$$\varphi(h_i) = 0, \varphi(x_i^{\pm}) = \frac{1}{2}x_i^{\pm}\bigwedge h_i.$$

Отметим, что $\mathfrak{b}_+,\mathfrak{b}_-$ подбиалгебры в $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ будет аффинная алгебра Каца-Муди типа $A_1^{(1)}$. Квантованная универсальная обёртывающая алгебра $U_q(\mathfrak{G})$ определяется как алгебра Хопфа, которая является топологически свободным модулем над кольцом $C[[\hbar]]$ формальных степенных рядов и порождается образующими $x^{\pm}_{,}x_1^{\pm}, h_0, h_1, d$, которые удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_i, x_i^{\pm}] = \pm 2x_i^{\pm}, \tag{6.2.1}$$

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \mp 2x_i^{\pm}, i\neq j, \tag{6.2.2}$$

$$[h_i, h_j] = [d, h_i] = 0, \tag{6.2.3}$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij}\frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}, \tag{6.2.4}$$

$$\begin{gathered}(x_i^{\pm})^3x_j^{\pm} + (q^2+1+q^{-2})(x_i^{\pm})^2x_j^{\pm}x_i^{\pm} + \\ (q^2+1+q^{-2})x_i^{\pm}x_j^{\pm}(x_i^{\pm})^2 + x_j^{\pm}(x_i^{\pm})^3 = 0,\end{gathered} \tag{6.2.5}$$

где $q = e^{\hbar/2}, i, j = 0, 1, i\neq j$.

Коумножение определяется на образующих следующими формулами:

$$\Delta(h_i) = h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i, \tag{6.2.6}$$
$$\Delta(x_i^{\pm}) = x_i^{\pm} \otimes q^{h_i/2} + q^{-h_i/2} \otimes x_i^{\pm}. \tag{6.2.7}$$

Зафиксируем также инвариантное скалярное произведение на картановской подалгебре $Ch_0 \oplus CH_1 \oplus Cd$ формулами :
$(h_i, h_i) = 2, (h_i, h_j) = -2, (d, d) = 0, (d, c) = 1$, здесь $c = h_0 + h_1$.

Я.С. Сойбельман в серии работ (см. [52], [53]) определил квантовую группу Вейля в случае простой алгебры Ли как подмножество в сопряженном пространстве к пространству квантованной алгебры функций на соответствующей группе Ли. Опишем эту конструкцию более подробно. Пусть $\mathfrak{a}$ – комплексная простая конечномерная алгебра Ли, $U(\mathfrak{a})$ – её универсальная обёртывающая алгебра. Рассмотрим следующее расширение $\widetilde{U(\mathfrak{a})}$ алгебры $U(\mathfrak{a})$ при помощи "квантовых отражений"$\{\bar{s}_i\}_{i=1}^r, r = rank\mathfrak{a}$. Именно, пусть $\widetilde{U(\mathfrak{a})}$ такая подалгебра Хопфа двойственной алгебры Хопфа $C[\mathfrak{A}]_q^*$ к квантованной алгебре функций $C[\mathfrak{A}]_q$ на простой односвязной группе Ли $\mathfrak{A}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Для каждого $\{\bar{s}_i\}_{i=1}^r$ можно определить автоморфизм $T_i : U_q(\mathfrak{a}) \to U_q(\mathfrak{a}), T_i(x) = \bar{s}_i x \bar{s}_i^{-1}$. Эти автоморфизмы удовлетворяют соотношениям группы кос и совпадают, с точностью до множителя с автоморфизмами, введенными Дж. Люстигом (см. [205]). Ниже, мы распространим эту конструкцию на аффинную группу Вейля. В нашем изложении мы будем следовать работе [204] с небольшими изменениями и усовершенствованиями. Отметим, что на перенесение изложенных выше эскизно конструкций на случай бесконечномерных алгебр Каца-Муди требует аккуратности и некоторых дополнительных рассуждений и обоснований. Именно, требуется также как и выше ввести понятие на квантовой аффинной алгебре структуру топологической алгебры Хопфа, определив предварительно на ней $\hbar$-адическую топологию. После чего следует проследить, что все вводимые конструкции непрерывны относительно этой топологии.

6.2.2 Квантовая аффинная группа Вейля

Следуя Дж. Люстигу, введем новые образующие. Пусть $E_i = x_i^+ q^{-h_i/2}, F_i = x_i^- q^{h_i/2}, i = 0, 1$ новые образующие $U_q(A_1^{(1)})$. Рассмотрим два присоединенных действия в алгебре Хопфа $U_q(A_1^{(1)})$ (см. [26]):

$$ad_{q,a}(\cdot) = \Delta(a) \circ (\cdot), \tag{6.2.8}$$
$$ad'_{q,a}(\cdot) = \Delta^{op}(a) \circ (\cdot), \tag{6.2.9}$$

где Δ^{op} – противоположное коумножение, а значок $\circ$, введенный В.Г. Дринфельдом, обозначает следующую операцию:

$$(a \otimes b) \circ x := a \cdot x \cdot S(b), \tag{6.2.10}$$

где S – антипод в $U_q(A_1^{(1)})$.

Определим автоморфизмы T_i алгебры $U_q(A_1^{(1)})$ следующими формулами на образующих алгебры.

$$T_i(E_i) = -q^{-h_i} \cdot F_i, \tag{6.2.11}$$
$$T_i(F_i) = -E_i \cdot q^{h_i}, \tag{6.2.12}$$
$$T_i(h_i) = -h_i, \tag{6.2.13}$$
$$T_i(h_j) = h_i + 2H_j, i \neq j, \tag{6.2.14}$$
$$T_i(E_j) = q^{-3} \cdot [2]_q^{-1} \cdot ad^2_{q,E_i}(E_j), i \neq j, \tag{6.2.15}$$
$$T_i^{-1}(E_j) = q^{-1} \cdot [2]_q^{-1} \cdot ad^2_{q^{-1},E_i}(E_j), i \neq j, \tag{6.2.16}$$
$$T_i(F_j) = q^{-1} \cdot [2]_q^{-1} \cdot (ad'_{q^{-1},F_i})^2(F_j), i \neq j, \tag{6.2.17}$$
$$T_i^{-1}(F_j) = q \cdot [2]_q^{-1} \cdot (ad'_{q^{-1},F_i})^2(F_j), i \neq j. \tag{6.2.18}$$

Здесь, как обычно, $[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$.

Предложение 6.2.1. *Автоморфизмы* $T_i, T_i^{-1}, i = 0, 1, id$ *порождают подалгебру в алгебре всех автоморфизмов, в которой как в векторном пространстве они образуют базис.*

6.2.3 Определение корневых векторов при помощи квантовой группы Вейля

Напомним, что квантовые аналоги корневых векторов в случае квантованной универсальной обертывающей алгебры простой алгебры Ли определяются при помощи элемента наибольшей длины в квантовой группе Вейля (см. [199]). В аффинном случае вместо этого элемента мы имеем бесконечное произведение, которому еще следует придать смысл. Здесь мы будем следовать подходу работы [204]. Нашей целью будет прояснение связи между янгианами и квантованными аффинными универсальными обёртывающими (супер)алгебрами. Определим два старших элемента в аффинной группе Вейля алгебры $A_1^{(1)}$. Пусть сначала $\mathfrak{a}$ — конечномерная простая алгебра Ли. Тогда для определения квантовых корневых векторов и базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта в $U_q(\mathfrak{a})$ используют элемент наибольшей длины в группе Вейля и автоморфизмы T_i. В случае квантовой аффинной группы Вейля мы имеем два элемента наибольшей длины.

$$w^0_{max} = s_0 \cdot s_1 \cdot \dots, \tag{6.2.19}$$
$$w^1_{max} = s_1 \cdot s_0 \cdot s_1 \cdot \dots, \tag{6.2.20}$$

Другая трудность состоит в том, что в случае аффинной группы Вейля мы не можем определить мнимые корни, используя группу Вейля, поскольку она оставляет их на месте. Мы определим мнимые корни следующим образом.

Определение 6.2.1. *Введём корневые векторы следующими формулами:*

$$E_{\alpha_i} = E_i, \quad , F_{\alpha_i} = F_i, \tag{6.2.21}$$

$$E_{\alpha_i+k\delta} = \underbrace{T_iT_jT_iT_j\dots T_\nu}_{k}(E_\mu), \quad \nu \neq \mu, i \neq 1, \tag{6.2.22}$$

$$E_{\alpha_i+k\delta} = \underbrace{T_i^{-1}T_j^{-1}T_i^{-1}T_j^{-1}\dots T_\nu^{-1}}_{k}(E_\mu), \quad \nu \neq \mu, i = 0, \tag{6.2.23}$$

$$F_{\alpha_i+k\delta} = \underbrace{T_iT_jT_iT_j\dots T_\nu}_{k}(F_\mu), \quad \nu \neq \mu, i \neq 0, \tag{6.2.24}$$

$$F_{\alpha_i+k\delta} = \underbrace{T_i^{-1}T_j^{-1}T_i^{-1}T_j^{-1}\dots T_\nu^{-1}}_{k}(F_\mu), \quad \nu \neq \mu, i = 0, \tag{6.2.25}$$

$$E^i_{k\delta} = [E_{i+(k-1)\delta}, E_j]_{q^2}, \quad i \neq j \tag{6.2.26}$$

$$F^i_{k\delta} = [F_{i+(k-1)\delta}, F_j]_{q^2}, \quad i \neq j. \tag{6.2.27}$$

Здесь $k > 0$, $[a, b]_{q^2} = a \cdot b - q^2 b \cdot a$, δ *– минимальный мнимый корень.*

Предложение 6.2.2. *Имеют место следующие равенства:*

$$E_{\alpha_i+k\delta} = (q^{-3}[2]^{-1})^k[\dots[[E_i, E^i_\delta], E^i_\delta], \dots, E^i_\delta], \tag{6.2.28}$$

$$F_{\alpha_i+k\delta} = (q^{-1}[2]^{-1})^k[\dots[[F_i, F^i_\delta], F^i_\delta], \dots, F^i_\delta], \tag{6.2.29}$$

$$\tag{6.2.30}$$

Здесь $[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$

Рассмотрим следующие подмножества $\Delta^i_+ \subset \Delta_+$ множества положительных корней аффинной алгебры Каца-Муди $A_1^{(1)}$, определяемые элементами $w^{(i)}_{max}$, определёнными выше.

$$\Delta^0_+ = \{\alpha_0, s_0\alpha_1, s_0s_1\alpha_0, \dots\} \tag{6.2.31}$$

$$\Delta^1_+ = \{\alpha_1, s_1\alpha_0, s_1s_0\alpha_1, \dots\} \tag{6.2.32}$$

Заметим, что $\Delta^0_+ \bigcup \Delta^1_+$ – множество вещественных положительных корней. Мы имеем также множество положительных мнимых корней:

$$\Delta^{im}_+ = \{\delta, 2\delta, 3\delta, \dots\}$$

Таким образом множество всех положительных корней Δ_+ является объединением следующих трёх множеств:

$$\Delta_+ = \Delta^0_+ \bigcup \Delta^{im}_+ \bigcup \Delta^1_+.$$

Определим следующий порядок на множестве положительных корней Δ_+:

$$\alpha_0 < \alpha_0 + \delta < \dots < \dots < k\delta < \dots < 2\delta < \delta < \dots < \alpha_1 + \delta < \alpha_1. \tag{6.2.33}$$

Отметим, что многие формулы, связанные с факторизацией, основаны на так называемых нормальных упорядочиваниях (нормальных порядках) на множестве положительных корней. Нормальное упорядочивание означает, что упорядочивание $\alpha < \beta$ влечёт упорядочивание $\alpha < \alpha + \beta < \beta$:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \alpha + \beta < \beta, \tag{6.2.34}$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta_+$. Отметим, что все порядки происходящие из приведённого разложения старшего элемента в группе Вейля в случае конечномерной алгебры Ли являются нормальными. Заметим, что наш порядок (6.2.33) не является нормальным на множестве Δ_+, поскольку оно включает множество мнимых корней $\Delta_+^{(im)} = \{k\delta\}_{k=1}^{\infty}$. Можно показать, что вообще нет нормальных порядков (то есть порядков вида 6.2.34 на всём множестве Δ_+ положительных корней. Но наш порядок (6.2.33) является почти нормальным поскольку он является нормальным на множестве Δ_+ за исключением множества мнимых корней $\Delta_+^{(im)}$, то есть на множестве $\Delta_+ \backslash \Delta_+^{(im)}$.

Ниже нам потребуются некоторые коммутационные соотношения между корневыми векторами. Для произвольного $k > 0$ мы имеем:

$$T_j(E^i_{k\delta}) = E^i_{k\delta}, \quad T_j(F^i_{k\delta}) = F^i_{k\delta}, i \neq j. \tag{6.2.35}$$

Более того мнимые корневые векторы коммутируют:

$$[E^i_{k\delta}, E^i_{l\delta}] = [F^i_{k\delta}, F^i_{l\delta}] = 0. \tag{6.2.36}$$

Имеют место также следующие полезные формулы: =

$$[E_{\alpha_i + l\delta}, E^i_{k\delta}] = q^{-2} E_{\alpha_i + (l+1)\delta} E^i_{(k-1)\delta} - q^2 E^i_{(k-1)\delta} E_{\alpha_i + (l+1)\delta}, \tag{6.2.37}$$

$$[F_{\alpha_i + l\delta}, F^i_{k\delta}] = q^{-2} F_{\alpha_i + (l+1)\delta} F^i_{(k-1)\delta} - q^2 F^i_{(k-1)\delta} F_{\alpha_i + (l+1)\delta}, \tag{6.2.38}$$

$$[E_{\alpha_i + k\delta}, E_{\alpha_i + l\delta}]_{q^2} = (q^2 - 1) \textstyle\sum_{i+j=k+l, l+1 \leq i \leq k-1} E_{\alpha_i + i\delta} \cdot E_{\alpha_i + j\delta}, \quad k \geq l + 1. \tag{6.2.39}$$

Заметим, что последняя формула – это формула следующего вида

$$[E_\alpha, E_\beta]_{q^{-(\alpha,\beta)}} = \sum_{\beta < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k < \alpha} C_\gamma E_{\gamma_1}^{m_1} \ldots E_{\gamma_k}^{m_k} \tag{6.2.40}$$

для $\beta < \alpha$ в соответствии с линейным порядком на Δ_+.

Отметим, что используя написанные выше формулы можно доказать теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта для квантованной универсальной обёртывающей алгебры $U_q(\mathfrak{b}_+)$.

Я напомню, что квантовая нескрученная (см. [12]) аффинная алгебра $U_q(\mathfrak{g}^{(1)})$, как и янгиан, является деформацией универсальной обёртывающей (супер)алгебры $U(\mathfrak{g}^{(1)})$ бисупералгебры Ли аффинной бисупералгебры Ли-Каца-Муди $\mathfrak{g}^{(1)}$. Зафиксируем на $\mathfrak{g}^{(1)}$ инвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть также $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра, $\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+$ – борелевские подалгебры. Положим $\mathfrak{P} = \mathfrak{g}^{(1)} \times \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{P}_1 = \{(x,y) \in \mathfrak{g}^{(1)} \times \mathfrak{g}^{(1)} : x = y\}$, $\mathfrak{P}_2 = \{(x,y) \in \mathfrak{b}_- \times \mathfrak{b}_+ : x_\mathfrak{h} + y_\mathfrak{h} = 0\}$. В качестве скалярного произведения элементов $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathfrak{P}$ возьмём $\langle x_1,x_2\rangle - \langle y_1,y_2\rangle$. Так как $(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2)$ – тройка Манина, то $\mathfrak{g}^{(1)}$ наделяется структурой биалгебры Ли.

При этом структура биалгебры Ли определяется коциклом $\varphi : \mathfrak{g}^{(1)} \to \mathfrak{g}^{(1)} \bigwedge \mathfrak{g}^{(1)}$

$$\varphi(h_i) = 0, \varphi(x_i^\pm) = \frac{1}{2} x_i^\pm \wedge h_i, \tag{6.2.41}$$

где $x_i^\pm, h_i, i \in I$ – образующие Картана-Вейля аффинной алгебры Каца-Муди.

Другими словами, пусть $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные относительно этого скалярного произведения базисы в $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$. Ниже, пусть $\mathfrak{g} = A_n$ или $\mathfrak{g} = A(m,n)$. $\mathfrak{g}^{(1)}$ как и всякая аффинная алгебра Каца-Муди определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Её ненулевые элементы имеют следующий вид: $a_{i,i} = 2, a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, i < n-1, a_{n-1,n} = a_{n,n-1} = -2, i \in I = \{1, \cdots, n\}$. $\mathfrak{g}$ порождается образующими: $h_i, x_i^\pm, i \in I$.

Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{m+n+1}\}$ - множество простых корней, $\Delta(\Delta_+)$ – множество всех корней (положительных корней). Пусть также $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}, \alpha \in \Delta_+$ – базис Картана-Вейля, нормализованный условием $(x_\alpha, x_{-\alpha}\}) = 1$.

Ниже, если не оговорено противное, мы будем использовать обозначение $\mathfrak{g} := A_n$.

Нам также потребуются новая система образующих В.Г. Дринфельда. Здесь мы её опишем для частного случая квантовой аффинной алгебры $U_q(A_1^{(1)})$.

Определение 6.2.2. *Квантовая нескрученная аффинная алгебра $U_q(A_1^{(1)})$ – это алгебра Хопфа на $\mathcal{C}$, порождённая как ассоциативная алгебра, образующими*

$$h_r := h_{\alpha_1,r}, \quad K_i^{\pm 1}, \quad C^{\pm 1/2}, \quad x_k^\pm := x_{\alpha_1,k}^\pm, \quad r,k \in \mathbb{Z}_+,$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[h_r, h_s] = \delta_{r,-s} \tfrac{1}{r} [2r]_{q_1} \frac{C^r - C^{-r}}{q - q^{-1}}, \tag{6.2.42}$$

$$KK^{-1} = 1, \quad C^{1/2} C^{-1/2} = 1 \tag{6.2.43}$$

$$[K, h_r] = 0 \tag{6.2.44}$$

$$K x_r^\pm K^{-1} = q_i^{\pm 2} x_r^\pm \tag{6.2.45}$$

$$[h_r, x_s^\pm] = \pm \tfrac{1}{r} [2r]_{q_1} C^{\mp |r|/2} x_{r+s}^\pm, \tag{6.2.46}$$

$$x_{r+1}^\pm x_s^\pm - q^{\pm 2} x_s^\pm x_{r+1}^\pm = q^{\pm 2} x_r^\pm x_{s+1}^\pm - q^{\pm 2} x_{s+1}^\pm x_r^\pm \tag{6.2.47}$$

$$[x_r^+, x_s^-] = \frac{C^{(r-s)/2} \Phi_{r+s}^+ - C^{-(r-s)/2} \Phi_{r+s}^-}{q_1 - q_1^{-1}}. \tag{6.2.48}$$

Здесь

$$\sum_{r=0}^\infty \Phi_{\pm r}^\pm u^{\pm r} = K_i^{\pm 1} \exp(\pm(q_i - q_i^{-1}) \sum_{s=0}^\infty h_{\pm s} u^{\pm s}).$$

Сумма берется по всем перестановкам σ множества $\{1, \ldots, r\}$.

Коумножение на образующих $h_k, x_k^\pm$, определяется следующими формулами:

Отметим, что универсальная обёртывающая алгебра $U(\mathfrak{g}^{(1)})$ естественно изоморфна $U_1(\mathfrak{g}^{(1)})$.

Заметим, что на $U_q(\mathfrak{g}^{(1)})$ есть структура квантового дубля квантовой алгебры $U_q(B_+)$, где B_+ – борелевская подалгебра аффинной алгебры Каца-Муди $\mathfrak{g}^{(1)}$. Я напомню определение квантового дубля (см. [24]). Пусть A – алгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда квантовым дублем DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подалгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA \otimes DA$; линейное отображение $A \otimes A^0 \to DA, a \otimes b \to ab$ – биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием квантованием классического дубля $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем коумножение в классическом дубле определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}} \oplus (-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Так как квантовая аффинная алгебра является квантованием бесконечномерной бисупералгеброй Ли то при определении её квантового дубля требуется некоторая аккуратность. Точнее говоря, квантовый дубль следует определять как топологическую квазитреугольную алгебру Хопфа, используя конструкцию $\hbar$-адического пополнения (см. главу 1).

Предложение 6.2.3. *Упорядоченные мономы*

$$\prod k \geq 0 E^{m_k}_{\alpha_0+k\delta} \prod_{l\geq 0} (E^{1}_{(l+1)\delta})^{n_1} \prod_{l\geq 0} E^{l_p}_{\alpha_1+p\delta} H_0^{a_0} H_1^{a_1} d^{a_3}, \tag{6.2.49}$$

$m_k, l_k, n_k, a_k \geq 0$ *образуют базис в* $U_q(\mathfrak{b}_+)$ *над* $C[[\hbar]]$.

Доказательство. Схема доказательства теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта такая же, как в случае янгианов, разобранном ранее. Используя введённое ранее упорядочение корневых векторов и, основанное на нём упорядочение мономов, мы, используя коммутационные соотношения между корневыми векторами, показываем, что любой моном можно представить в виде суммы упорядоченных мономов. Отсюда следует полнота построенного семейства упорядоченных мономов. Линейная независимость семейства мономов доказывается построением точного представления квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Каца-Муди. Например таким точным представлением является вершинное представление, построенное Джингом. Теперь приступим к более аккуратному доказательству теоремы. Отметим, что можно также строить изоморфизм исходной квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Ли на её присоединённую градуированную алгебру. Нетрудно показать, что последняя изоморфна универсальной обёртывающей (классической) аффинной алгебры Ли. Проведём подробно это доказательство для $U_q(A_1^{(1)})$. Зададим сначала порядок на корнях аффинной алгебры Каца-Муди $A_1^{(1)})$. Именно, будем считать, что $\alpha_1 + k\delta < \alpha_1 + m\delta$ при $k < m$.

□

Опишем теперь более детально базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта для квантованной аффинной алгебры $A_n^{(1)}$. Случай $n = 1$ мы рассмотрим отдельно. Определим корневые векторы x_α для $\alpha \in \Xi_- \cup \Xi_+$ следующими формулами. Введем сначала корневые векторы для простых корней, соответствующих конечной части диаграммы Дынкина. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – множество простых корней простой алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, а $\hat{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ – множество простых корней аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}} = A_n^{(1)}$, Δ_+ – множество положительных корней простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\hat{\Delta}_+^{re}$ – множество вещественных корней аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$,

$$\Xi_+ = \{\gamma + k\delta : \gamma \in \Delta_+, k \geq 0\}, \Xi_- = \{-\gamma + k\delta : \gamma \in \Delta_+, k \geq 0\}.$$

Определение 6.2.3. *Порядок $\prec$ на множестве корней будем называть нормальным, если он удовлетворяет условию: для $\alpha \prec \beta$ если существует $\alpha+\beta$, то $\alpha \prec \alpha+\beta \prec \beta$.*

Далее, определим явно порядок на множестве аффинных корней. Наше определение будет повторять данное выше определение для порядка для образующих янгиана.

Упомянём также некоторые, полезные при вычислениях формулы для коумножения.

$$\Delta(E_{\alpha_i+k\delta}) - E_{\alpha_i+k\delta}\otimes 1 - q^{-H\alpha_1+k\delta}\otimes E_{\alpha_i+k\delta} \in U_q(\mathfrak{b}_+)\otimes U_q(\mathfrak{b}_+).$$

Опишем теперь алгебру $U_q(\mathfrak{b}_+)^*$ двойственную алгебре $U_q(\mathfrak{b}_+)$. Определим функционалы $\Lambda_0, \xi_i, \eta_i \in U_q(\mathfrak{b}_+)^*, i=0,1$ следующими формулами:

$$(\Lambda_0, d) = 1, \quad (\Lambda_0, X) = 0,$$

где X – произвольный моном, отличный от d,

$$(\xi_i, H_i) = 1, \quad (\xi_i, X) = 0, \quad i = 0,1,$$

здесь X – моном, отличный от ξ_i,

$$(\eta_i, E_i) = 1, \quad (\eta_i, X) = 0, \quad i = 0,1,$$

здесь X – моном, отличный от η_i. Здесь мы рассматриваем мономы из определённого выше ПБВ базиса (базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта) в $U_q(\mathfrak{b}_+)$.

Предложение 6.2.4. *Формулы*

$$\varphi(\Lambda_0) = \frac{\hbar}{2}c, \qquad \varphi(\eta_i) = (1-q^{-2})F_i, \tag{6.2.50}$$

$$\varphi(\xi_1) = \frac{\hbar}{4}H_i + \frac{\hbar}{2}d, \qquad \varphi(\xi_0) = \frac{\hbar}{2}d. \tag{6.2.51}$$

определяют изоморфизм

$$\varphi : U_q(\mathfrak{b}_+)^* \to U_q(\mathfrak{b}_-). \tag{6.2.52}$$

Доказательство. Доказательство основано на явных вычислениях с использованием приведённых выше формул. ☐

6.2.4 Вычисление универсальной R- матрицы

Сначала напомним определение универсальной R- матрицы для квазитреугольной топологической суперaлгебры Хопфа (сравни с [24], [126]).

Универсальной R- матрицей для квазитреугольной суперaлгебры Хопфа A называется обратимый элемент R, лежащий в некотором расширении тензорного произведения $A\hat{\otimes}A$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}, \qquad \forall x \in A;$$
$$(\Delta\otimes id)R = R^{13}R^{23}, (id\otimes\Delta)R = R^{13}R^{12},$$

где $\Delta^{op} = \sigma\circ\Delta, \sigma(x\otimes y) = y\otimes x$.

Если A является квантовым дублем супералгебры Хопфа A^+, то есть $A \cong A^+ \otimes A^-$, $A^- := A^0$ двойственная к A супералгебра Хопфа с противоположным коумножением, то A квазитреугольная супералгебра Хопфа и универсальная R- матрица в A допускает следующее каноническое представление:

$$R = \sum e_i \otimes e^i,$$

где $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные базисы в A^+, A^-, соответственно.

Сначала поясним основную идею доказательства формулы для универсальной R-матрицы. В основе доказательства, по существу, лежит следующий технический приём, основанный на вычислении формул спаривания в квантованной универсальной обёртывающей алгебре, которая представляется как квантовый дубль над борелевской подалгеброй. При этом важную роль в доказательстве играет следующая формула коумножения:

$$\Delta(X_k) = \sum_{i=0}^{k} X_i \otimes X_{k-i} + \ldots, \tag{6.2.53}$$

где точками обозначены неважные для дальнейших рассуждений члены, а $X_0 = 1$, $X_p = E^1_{p\delta}$. В силу формулы (6.2.53) X_k выглядят как многочлены Шура. В силу этого факта мы можем ввести новые образующие, которые и играют важную роль в дальнейших вычислениях.

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k q^{-4}(1-q^2)E^1_\delta = \exp(\sum_{k \geq 0} t^k E_{k\delta}), \tag{6.2.54}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k q^{-2}(1-q^2)F^1_\delta = \exp(\sum_{k \geq 0} t^k F_{k\delta}). \tag{6.2.55}$$

Используя новые образующие мы можем сформулировать следующий важный для дальнейшего результат.

Теорема 6.2.1. *1) Универсальная R-матрица дубля может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in U_+^+ \otimes U_-^-, R_0 \in U_0^+ \otimes U_0^-, R_- \in U_-^+ \otimes U_+^-$.

2)Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:

$$< e^{n_0}_{\beta_0} e^{n_1}_{\beta_1} \cdots e^{n_k}_{\beta_k}, e^{m_0}_{-\beta_0-\delta} e^{m_1}_{-\beta_1-\delta} \cdots e^{m_k}_{-\beta_k-\delta} >=$$
$$(-1)^{n_0+\cdots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \cdots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \cdots n_k!;$$

3) Имеет место следующая формула для универсальной R-матрицы:

$$R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \exp_{q_\alpha^{-2}}(c_\alpha(q) E_\alpha \otimes F_\alpha) q^{\mathrm{t}_0}. \tag{6.2.56}$$

Здесь $c_\alpha(q) = 1 - q_\alpha^{-2}$, Δ_+ *– множество положительных корней,* $\mathfrak{t}_0$ *– тензор, соответствующий инвариантному скалярному произведению на картановской подалгебре,*

$$\exp_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_t!},$$

а $(n)_t! = (1)_t \cdot (2)_t \dots (n)_t, (m)_t = \dfrac{t^m - 1}{t - 1}$.

Доказательство. Доказательство теорема основывается на следующих вспомогательных утверждениях.

Предложение 6.2.5. *Имеют место следующие формулы для коумножения в двойственной алгебре Хопфа* $U_q(\mathfrak{b}_+)$ *:*

$$\bar{\Delta}(\xi) = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi, \tag{6.2.57}$$

$$\bar{\Delta}(\Lambda) = \Lambda \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda, \tag{6.2.58}$$

$$\bar{\Delta}(\eta_i) = \eta_i \otimes 1 + e^{2(\xi_i - \xi_0)} \otimes \eta_i, \quad , i \neq 0, \tag{6.2.59}$$

$$\bar{\Delta}(\eta_0) = \eta_0 \otimes 1 + e^{\Lambda_0 - 2\sum_{i=0}^{n}(\xi_i - \xi_0)} \otimes \eta_0. \tag{6.2.60}$$

Доказательство этого утверждения основано на явных вычислениях, использующих соотношения в квантовой группе Вейля.

□

Напомним теперь конструкцию универсальной R-матрицы для квантованной универсальной обёртывающей алгебры, основанной на квантовом дубле из работы [120]. Напомним, что

$$D(U_q(\mathfrak{b}_+)) \approxeq U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_+)^* \tag{6.2.61}$$

Пусть

$$T_\lambda : U_q(A_1^{(1)}) \to U_q(A_1^{(1)})$$

автоморфизм, определяемый формулами:

$$T_\lambda(E_i) = \lambda E_i, \quad T_\lambda(F_i) = \lambda^{-1} E_i, \quad T_\lambda(d) = d.$$

Здесь $\lambda \in C$. Тогда образ R – это $R_\rho(\lambda) = (\rho \otimes \rho)(T_\lambda \otimes id)(R)$, где ρ – представление $U_q(A_1^{(1)})$. Когда ρ – конечномерное представление, $R_\rho(\lambda)$ является рациональной матрицей-функцией. Её обычно и называют квантовой R-матрицей. Собственно, она и находит применение в квантовой теории поля и статистической механике при исследовании интегрируемых моделей при помощи алгебраического анзаца Бёте.

Пример Рассмотрим пример точного вычисления образа универсальной R-матрицы R квантовой аффинной алгебры $U_q(A_1^{(1)})$ в двумерном представлении. Пусть

$$\pi : U_q(A_1^{(1)}) \to End(C^2) - -$$

неприводимое двумерное представление, определяемое следующими формулами:

$$\pi(E_1) = q^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(E_0) = q^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(F_1) = q^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(F_0) = q^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(H_1) = -\pi(H_0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\pi(d) = 0.$$

Вычисляя получим

$$\pi(E^1_\delta) = q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -q^2\end{pmatrix}, \quad \pi(F^1_\delta) = q\begin{pmatrix}-q^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\pi(E_{\alpha_1+k\delta}) = (-1)^k q^{-k+1/2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(F_{\alpha_1+k\delta}) = (-1)^k q^{k+1/2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(E_{\alpha_0+k\delta}) = q^{-k+1/2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(F_{\alpha_0+k\delta}) = q^{k+1/2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi(E^1_{(k+1)\delta}) = (-1)^k q^{-k+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -q^2\end{pmatrix},$$

$$\pi(F^1_{(k+1)\delta}) = (-1)^k q^{k+1}\begin{pmatrix}-q^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

Пусть

$$\pi(E_{k\delta}) = \begin{pmatrix}a_k & 0\\ 0 & b_k\end{pmatrix},$$

а

$$\pi(F_{k\delta}) = \begin{pmatrix}c_k & 0\\ 0 & d_k\end{pmatrix},$$

Заметим, что

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k q^{-4}(1-q^2)E^1_{k\delta} = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} t^k E_{k\delta}),$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k q^{-2}(1-q^2)F^1_{k\delta} = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} t^k F_{k\delta}).$$

Отсюда находим, что

$$\ln(\frac{1+q^{-3}t}{1+q^{-1}t}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k,$$

$$\ln(\frac{1+qt}{1+q^{-1}t}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k,$$

$$\ln(\frac{1+q^{3}t}{1+qt}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k,$$

$$\ln(\frac{1+q^{-1}t}{1+qt}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^k.$$

Из написанных формул легко получаем, что

$$a_k = (-1)^{k-1} q^{-2k} (\frac{q^{-k}-q^{k}}{k}),$$

$$b_k = (-1)^{k-1} (\frac{q^{k}-q^{k}}{-k}),$$

$$c_k = (-1)^{k-1} q^{2k} (\frac{q^{k}-q^{k}}{-k}),$$

$$d_k = (-1)^{k-1} (\frac{q^{-k}-q^{k}}{k}).$$

Теперь мы можем легко вычислить образ универсальной R-матрицы в представлении π. Пусть

$$T_\lambda : U_q(A_1^{(1)}) \to U_q(A_1^{(1)})$$

– автоморфизм алгебр, определённый формулами:

$$T_\lambda(E_i) = \lambda E_i, \quad T_\lambda(F_i) = \lambda^{-1} F_i, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Вычислим

$$R_\pi(\lambda) = (\pi \otimes \pi)(T_\lambda \otimes id)(R).$$

Легко видеть, что

$$R_\pi(\lambda) = R_0(\lambda) R_{im}(\lambda) R_1(\lambda) q^{(\pi\otimes\pi)(\mathfrak{t}_0)},$$

где $R_i(\lambda), \quad i = 0, 1$, соответствуют корням типа $\alpha_i + k\delta$, $k \geq 0$, $R_{im}(\lambda)$ соответствует корням типа $(k+1)\delta, \quad k \geq 0$.

Легко видеть, что

$$R_0(\lambda) = I \otimes I + \frac{\lambda(q-q^{-1})}{1-\lambda^2} E_{21} \otimes E_{12};$$

$$R_1(\lambda) = I \otimes I + \frac{\lambda(q-q^{-1})}{1-\lambda^2} E_{12} \otimes E_{21}.$$

Здесь I – тождественный оператор, а E_{ij} так же, как и выше обозначает матричную единицу. Легко вычисляется также R_{im}:

$$R_{im}(\lambda) = A(q,\lambda)\left(I\otimes I + \frac{\lambda^2(q^{-2}-1)}{1-\lambda^2 q^{-2}}E_{11}\otimes E_{22}\right)\left(I\otimes I + \frac{\lambda^2(1-q^2)}{1-\lambda^2}E_{22}\otimes E_{11}\right),$$

где

$$A(q,\lambda) = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{q^k - q^{-k}}{k(q^k+q^{-k})}\lambda^{2k}\right).$$

Так же легко получаем, что

$$q^{(\pi\otimes\pi)(\mathfrak{t}_0)} = q^{1/2}E_{11}\otimes E_{11} + q^{1/2}E_{22}\otimes E_{22} + q^{-1/2}E_{11}\otimes E_{22} + q^{-1/2}E_{22}\otimes E_{11}.$$

Окончательно получаем,

$$\begin{aligned} R_\pi(\lambda) &= A(q,\lambda)\cdot \\ [q^{1/2}E_{11}\otimes E_{11} + q^{1/2}E_{22}\otimes E_{22} &+ \frac{(1-\lambda^2)q^{-1/2}}{1-\lambda^2 q^{-2}}(E_{11}\otimes E_{22}+E_{22}\otimes E_{11}) \\ &+ \frac{(1-\lambda^{-2})q^{1/2}}{1-\lambda^2 q^{-2}}(E_{11}\otimes E_{22}+E_{22}\otimes E_{11})]. \end{aligned} \tag{6.2.62}$$

Отметим, что в квазиклассическом пределе мы получаем, что

$$A(q,\lambda) = 1 + \frac{\hbar}{2}\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} + O(\hbar^2),$$

где $\hbar = 2\ln q \to 0$.

Следовательно, в квазиклассическом пределе получаем следующую формулу, согласующуюся с хорошо известной формулой для классической r-матрицы ([18]):

$$R_\pi(\lambda) = I\otimes I + \hbar r_\pi(\lambda) + O(\hbar^2),$$

где $r_\pi(\lambda)$ – хорошо известная, классическая матрица (см. [18]).

6.3 Квантованная универсальная обёртывающая аффинной алгебры Ли типа $A_n^{(1)}$

6.3.1 Новая система образующих для квантовой аффинной нескрученной алгебры

Я напомню, что квантовая нескрученная (см. [12]) аффинная алгебра $U_q(\mathfrak{g}^{(1)})$, как и янгиан, является деформацией универсальной обёртывающей (супер)алгебры $U(\mathfrak{g}^{(1)})$ бисуперальгебры Ли аффинной бисуперальгебры Ли-Каца-Муди $\mathfrak{g}^{(1)}$. Зафиксируем на $\mathfrak{g}^{(1)}$ инвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть также $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра, $\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+$ – борелевские подалгебры. Положим $\mathfrak{P} = \mathfrak{g}^{(1)}\times\mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{P}_1 = \{(x,y)\in\mathfrak{g}^{(1)}\times\mathfrak{g}^{(1)} : x = y\}$, $\mathfrak{P}_2 = \{(x,y)\in\mathfrak{b}_-\times\mathfrak{b}_+ : x_\mathfrak{h} + y_\mathfrak{h} = 0\}$. В качестве скалярного произведения элементов $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathfrak{P}$ возьмём $\langle x_1,x_2\rangle - \langle y_1,y_2\rangle$. Так как $(\mathfrak{P},\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2)$ – тройка Манина, то $\mathfrak{g}^{(1)}$ наделяется структурой биалгебры Ли.

При этом структура биалгебры Ли определяется коциклом $\varphi : \mathfrak{g}^{(1)} \to \mathfrak{g}^{(1)}\bigwedge\mathfrak{g}^{(1)}$

$$\varphi(h_i) = 0, \varphi(x_i^{\pm}) = \frac{1}{2} x_i^{\pm} \wedge h_i, \tag{6.3.1}$$

где $x_i^{\pm}, h_i, i \in I$ – образующие Картана-Вейля аффинной алгебры Каца-Муди.

Другими словами пусть $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные относительно этого скалярного произведения базисы в $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$. Ниже, пусть $\mathfrak{g} = A_n$ или $\mathfrak{g} = A(m,n)$. $\mathfrak{g}^{(1)}$ как и всякая аффинная алгебра Каца-Муди определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Её ненулевые элементы имеют следующий вид: $a_{i,i} = 2, a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, i < n-1, a_{n-1,n} = an, n-1 = -2, i \in I = \{1, \ldots, n\}$. $\mathfrak{g}$ порождается образующими: $h_i, x_i^{\pm}, i \in I$.

Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – множество простых корней алгебры Ли типа A_n, $\Delta(\Delta_+)$ – множество всех корней (положительных корней) этой алгебры Ли. Пусть также $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}, \alpha \in \Delta_+$ – базис Картана-Вейля, нормализованный условием $(x_\alpha, x_{-\alpha}\}) = 1$.

Ниже, если не оговорено противное, мы будем использовать обозначение $\mathfrak{g} := A_n$.

Определение 6.3.1. *Квантовая аффинная алгебра* $U_q(A_n^{(1)})$ *– это алгебра Хопфа над* $\mathcal{C}$*, порождённая как ассоциативная алгебра, образующими* $e_{\pm,\alpha_i}, \quad k_{\alpha_i}^{\pm}, \quad d$*, где* $i = 0, 1, 2, \ldots, n$*, которые удовлетворяют следующей системе определяющих коммутационных соотношений:*

$$k_{\alpha_i} e_{\alpha_j} k_{\alpha_i}^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}} e_{\alpha_j}, \tag{6.3.2}$$

$$[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = \delta_{ij} \frac{k_{\alpha_i} - k_{\alpha_i}^{-1}}{q - q^{-1}}, \tag{6.3.3}$$

$$[d, e_{\pm\alpha_i}] = \pm\delta_{i,0} e_{\pm\alpha_i}, \tag{6.3.4}$$

$$e_{\pm\alpha_i}^2 e_{\pm\alpha_j} + [2]_q e_{\pm\alpha_i} e_{\pm\alpha_j} + e_{\pm\alpha_i} e_{\pm\alpha_j}^2 = 0, \tag{6.3.5}$$

Формулы для коумножения имеют следующий вид:

$$\Delta(e_{\alpha_i}) = e_{\alpha_i} \otimes 1 + k_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_i}, \tag{6.3.6}$$

$$\Delta(e_{-\alpha_i}) = 1 \otimes e_{-\alpha_i} + e_{-\alpha_i} \otimes k_{\alpha_1}^{-1}, \tag{6.3.7}$$

$$\Delta(k_{\alpha_i}) = k_{\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}, \quad , \tag{6.3.8}$$

$$\Delta(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d. \tag{6.3.9}$$

Коединица ε *и антипод* S *определяются следующими формулами:*

$$\varepsilon(e_{\pm\alpha_i}) = \varepsilon(d) = 0, \tag{6.3.10}$$

$$\varepsilon(k_{\alpha_i}^{\pm 1}) = 1, \tag{6.3.11}$$

$$S(e_{\alpha_i}) = -k_{\alpha_i}^{-1} e_{\alpha_i}, \tag{6.3.12}$$

$$S(e_{-\alpha_i}) = -e_{-\alpha_i} k_{\alpha_i}, \tag{6.3.13}$$

$$S(k_{\alpha_i}^{\pm 1}) = k_{\alpha_i}^{\mp 1}, \quad S(d) = -d, \tag{6.3.14}$$

Нам также потребуются новая система образующих В.Г. Дринфельда. Пусть $\mathfrak{g} = A_n$.

Определение 6.3.2. *Квантовая нескрученная аффинная алгебра* $U_q(\mathfrak{g}^{(1)})$ *– это алгебра Хопфа над* $\mathbb{C}$*, порождённая как ассоциативная алгебра, образующими*

$$h_{i,r} := h_{\alpha_i,r}, \quad K_i^{\pm 1}, \quad C^{\pm 1/2}, \quad x_{i,k}^{\pm} := x_{\alpha_i,k}^{\pm}, \quad i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = \delta_{r,-s}\tfrac{1}{r}[ra_{ij}]_{q_i}\frac{C^r - C^{-r}}{q^j - q^{-j}}, \tag{6.3.15}$$

$$K_iK_i^{-1} = 1, \quad C^{1/2}C^{-1/2} = 1 \tag{6.3.16}$$

$$[K_i, K_j] = [K_i, h_{j,r}] = 0 \tag{6.3.17}$$

$$K_i x^{\pm}_{j,r} K_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,r} \tag{6.3.18}$$

$$[h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm\tfrac{1}{r}[ra_{ij}]_{q_i} C^{\mp|r|/2} x^{\pm}_{j,r+s}, \tag{6.3.19}$$

$$x^{\pm}_{i,r+1}x^{\pm}_{j,s} - q^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r+1} = q^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{i,r} x^{\pm}_{j,s+1} - q^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,s+1} x^{\pm}_{i,r} \tag{6.3.20}$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij}\frac{C^{(r-s)/2}\Phi^{+}_{i,r+s} - C^{-(r-s)/2}\Phi^{-}_{i,r+s}}{q_i - q_i^{-1}} \tag{6.3.21}$$

$$\textstyle\sum_{\pi\in\Sigma_m}\sum_{k=0}^{m}[\frac{m}{k}]_{q_i} x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}} \cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(k)}} x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r_{\pi(k+1)}} \cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(m)}} = 0, \quad i \neq j. \tag{6.3.22}$$

Здесь $m = 1 - a_{ij}$,

$$\sum_{r=0}^{\infty}\Phi^{\pm}_{i,\pm r}u^{\pm r} = K_i^{\pm 1} exp(\pm(q_i - q_i^{-1})\sum_{s=0}^{\infty} h_{i,\pm s}u^{\pm s})$$

Сумма берется по всем перестановкам σ *множества* $\{1, ..., r\}$.

Коумножение на образующих $h_{i,k}, x^{\pm}_{i,k}, i \in I, k = 0, 1$ *определяется следующими формулами:*

$$\Delta(x^{+}_{i,k}) = x^{+}_{i,k} \otimes 1 + q^{h_{i,k}} \otimes x^{+}_{i,k}, \tag{6.3.23}$$

$$\Delta(x^{-}_{i,k}) = x^{-}_{i,k} \otimes q^{-h_{i,k}} + 1 \otimes x^{-}_{i,k}, \tag{6.3.24}$$

$$\Delta(q^{h_{i,k}}) = q^{h_{i,k}} \otimes q^{h_{i,k}}. \tag{6.3.25}$$

Отметим, что универсальная обёртывающая алгебра $U(\mathfrak{g}^{(1)})$ естественно изоморфна $U_1(\mathfrak{g}^{(1)})$.

Заметим, что на $U_q(\mathfrak{g}^{(1)})$ есть структура квантового дубля квантовой алгебры $U_q(B_+)$, где B_+ – борелевская подалгебра аффинной алгебры Каца-Муди $\mathfrak{g}^{(1)}$. Я напомню определение квантового дубля (см. [24]). Пусть A – алгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда квантовым дублем DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подалгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA \otimes DA$; линейное отображение $A \otimes A^0 \to DA, a \otimes b \to ab$ – биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием квантованием классического дубля $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем коумножение в классическом дубле определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}} \oplus (-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Так как квантовая аффинная алгебра является квантованием бесконечномерной бисупералгеброй Ли то при определении её квантового дубля требуется некоторая аккуратность. Точнее говоря, квантовый дубль следует определять как топологическую квазитреугольную алгебру Хопфа, используя конструкцию $\hbar$-адического пополнения (см. главу 1).

6.3.2 Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта

Опишем более детально базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта для квантованной аффинной алгебры $A_n^{(1)}$. Случай $n = 1$ мы рассмотрим отдельно несколько позднее.

Определим сначала корневую образующую $x_{\pm\delta} = x_\delta^\pm$ формулой:

$$x_\delta^\pm = [x_{\alpha_0}^\pm, [x_{\alpha_1}^\pm, \ldots, x_{\alpha_n}^\pm]_{q^2} \ldots]_{q^2}. \tag{6.3.26}$$

Определим корневые векторы x_α для $\alpha \in \Xi_- \cup \Xi_+$ следующими формулами.

Введем сначала корневые векторы для простых корней, соответствующих конечной части диаграммы Дынкина. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – множество простых корней простой алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, а $\hat{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ – множество простых корней аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}} = A_n^{(1)}$, Δ_+ – множество положительных корней простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\hat{\Delta}_+^{re}$ – множество вещественных корней аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$,

$$\Xi_+ = \{\gamma + k\delta : \gamma \in \Delta_+, k \geq 0\}, \Xi_- = \{-\gamma + k\delta : \gamma \in \Delta_+, k \geq 0\}.$$

Определение 6.3.3. *Порядок $\prec$ на множестве корней будем называть нормальным, если он удовлетворяет условию: для $\alpha \prec \beta$ если существует $\alpha + \beta$, то $\alpha \prec \alpha + \beta \prec \beta$.*

Далее, определим явно порядок на множестве аффинных корней. Наше определение будет повторять данное выше определение для порядка для образующих янгиана.

Введём теперь корневые векторы следующими формулами. Определим корневые векторы $x_\alpha^\pm$, где α – аффинный корень, следующими формулами. Рассмотрим разложение корня α в виде суммы простых корней

$$\alpha = k\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + k\delta.$$

Предложение 6.3.1. *Упорядоченные мономы*

$$\prod_{k\geq 0} E_{\alpha_0+k\delta}^{m_k} \prod_{l\geq 0} (E_{(l+1)\delta}^l)^{n_l} \prod_{p_1\geq 0} E_{\alpha_{i_1}+p\delta}^{l_{p_1}} \cdots \prod_{p_n\geq 0} E_{\alpha_{i_n}+p_n\delta}^{l_{p_n}} H_0^{a_0} H_1^{a_1} \ldots H_n^{a_n} d^{a_3}, \tag{6.3.27}$$

$m_k, l_{p_i}, n_k, a_k \geq 0$, образуют базис в $U_q(\mathfrak{b}_+)$ над $C[[\hbar]]$. Здесь мы предполагаем, что простые корни алгебры Ли A_n: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ упорядочены в соответствии с нормальным порядком: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$

Доказательство. Схема доказательства теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта такая же, как в случае янгианов, разобранном ранее. Используя введённое ранее упорядочение корневых векторов и, основанное на нём упорядочение мономов, мы, используя коммутационные соотношения между корневыми векторами, показываем, что любой моном можно представить в виде суммы упорядоченных мономов. Отсюда следует полнота построенного семейства упорядоченных мономов. Линейная независимость семейства мономов доказывается построением точного представления квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Каца-Муди. Например таким точным представлением является вершинное представление, построенное Джингом. Второй способ доказательство основан на построении изоморфизма квантованной универсальной обёртывающей алгебры Ли в свою присоединённую градуированную алгебру. Последняя, как можно видеть из структуры коммутационных соотношений, естественно изоморфна универсальной обёртывающей соответствующей аффинной алгебры Каца-Муди. Для последней теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта является доказанной. (Её доказательство совершенно аналогично доказательству для универсальной обёртывающей конечномерной алгебры Ли и основано на построении изоморфизма в симметрическую алгебру). Таким образом, теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Каца-Муди-Ли сводится к доказательству аналогичной теоремы для классического случая $q \to 1$ или $\hbar \to 0$. Теперь приступим к более аккуратному изложению доказательства теоремы. Опишем явно градуировку и соотношения в присоединённой градуированной алгебре.

$\square$

Отметим, что по аналогии с предложением 6.3.1 может быть аналогично доказана теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта и для $U_q(\mathfrak{b}_-)$. Собственно, из этих двух теорем и вытекает общая теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для квантованной универсальной обёртывающей алгебры $U_q(A_n^{(1)}$. Последнее уже является несложным упражнением.

Упомянём также некоторые полезные при вычислениях формулы для коумножения.

$$\Delta(E_{\alpha_i+k\delta}) - E_{\alpha_i+k\delta} \otimes 1 - q^{-H\alpha_1+k\delta} \otimes E_{\alpha_i+k\delta} \in U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_+).$$

Опишем теперь алгебру $U_q(\mathfrak{b}_+)^*$ двойственную алгебре $U_q(\mathfrak{b}_+)$. Определим функционалы $\Lambda_0, \xi_i, \eta_i \in U_q(\mathfrak{b}_+)^*, i = 0, 1$ следующими формулами:

$$(\Lambda_0, d) = 1, \quad (\Lambda_0, X) = 0,$$

где X – произвольный моном, отличный от d,

$$(\xi_i, H_i) = 1, \quad (\xi_i, X) = 0, \quad i = 0, 1,$$

здесь X – моном, отличный от ξ_i,

$$(\eta_i, E_i) = 1, \quad (\eta_i, X) = 0, \quad i = 0, 1,$$

здесь X – моном, отличный от η_i. Здесь мы рассматриваем мономы из определённого выше ПБВ базиса (базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта) в $U_q(\mathfrak{b}_+)$.

6.3.3 Структура квантового дубля

Опишем структуру квантового дубля на $U_q(A_n^{(1)})$. Мы будем использовать представление

$$U_q(A_n^{(1)}) = U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-). \tag{6.3.28}$$

Как и в предыдущем параграфе мы построим изоморфизм

$$U_q(\mathfrak{b}_+)^\star \to U_q(\mathfrak{b}_-). \tag{6.3.29}$$

Пусть $U_q(\mathfrak{b}_+)^0$ – это $U_q(\mathfrak{b}_+)^\star$ с противоположным коумножением. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. Супералгебра Хопфа $U_q(\mathfrak{b}_+)^0$ изоморфна $U_q(\mathfrak{b}_-)$.

Эта теорема будет вытекать из формулируемых ниже результатов. Легко видеть (см. параграф 1 этой главы), что супералгебра Хопфа $U_q(\mathfrak{b}_-)$ является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{b}_-$ (с коциклом (2.0)).

Будем использовать следующие обозначения:

$$U_e = U_q(\mathfrak{b}_+), \quad U_f = U_q(\mathfrak{b}_-) \tag{6.3.30}$$

Для описания $U_q(A_n^{(1)})$ удобно ввести порождающие функции

$$e_{\pm\alpha_i}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{\pm\alpha_i,k} z^{-k}, \tag{6.3.31}$$

$$\psi_{\alpha_i}^{\pm}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k_{\alpha_i}^{\pm}(z) \exp\left((q-q^{-1}) \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{i,\pm k} z^{\mp k}\right), \tag{6.3.32}$$

Лемма 6.3.1. *Определяющие соотношения в алгебре* $U_q(A_n^{(1)})$ *эквивалентны следующим соотношениям для порождающих функций*

$$q^d x(z) q^{-d} = x(q\cdot z), \quad x(z) = e_{\pm\alpha_i}, \quad x(z) = \psi^{\pm}_{\alpha_i}, \tag{6.3.33}$$

$$(z - q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)}w)e_{\alpha_i}(z)e_{\alpha_j}(w) = e_{\alpha_j}(w)e_{\alpha_i}(z)(q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)}z - w), \tag{6.3.34}$$

$$\frac{q^{\pm c/2}z - q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)}w}{q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)\pm c/2}z - w}\psi^+_{\alpha_i}(z)e_{\pm\alpha_j}(w) = e_{\alpha_j}(w)\psi^+_{\pm\alpha_i}(z), \tag{6.3.35}$$

$$\psi^-_{\alpha_i}(z)e_{\pm\alpha_j}(w) = \frac{q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)\mp c/2}z - w}{q^{\mp c/2}z - q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)}w}e_{\pm\alpha_j}(w)\psi^-_{\alpha_i}(z), \tag{6.3.36}$$

$$\frac{(z - q^{(\alpha_i,\alpha_j)-c}w)(z - q^{-(\alpha_i,\alpha_j)+c}w)}{(q^{(\alpha_i,\alpha_j)+c}z - w)((q^{-(\alpha_i,\alpha_j)-c}z - w))}\psi^+_{\alpha_i}(z)\psi^-_{\alpha_j}(w) = \psi^-_{\alpha_j}(w)\psi^+_{\alpha_i}(z), \tag{6.3.37}$$

$$\psi^{\pm}_{\alpha_i}(z)\psi^{\pm}_{\alpha_j}(w) = \psi^{\pm}_{\alpha_j}(w)\psi^{\pm}_{\alpha_i}(z), \tag{6.3.38}$$

$$[e_{\alpha_i}(z), e_{-\alpha_j}(w)] = \tfrac{\delta_{ij}}{q-q^{-1}}(\delta(z/q^c w)\psi^+_{\alpha_i}(zq^{-c/2}) - \delta(zq^c/w)\psi^-_{\alpha_i}(wq^{-c/2})), \tag{6.3.39}$$

Выполняются также соотношения Серра:

$$\sum_{r=0}^{n_{ij}}(-1)^r \begin{bmatrix} n_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_{\alpha_i}} Sym_{z_1,\ldots,z_{n_{ij}}} e_{\pm\alpha_i}(z_1)\ldots e_{\pm\alpha_i}(z_r)e_{\pm\alpha_j}(w)e_{\pm\alpha_i}(z_{r+1})\ldots e_{\pm\alpha_i}(z_{n_{ij}}), \tag{6.3.40}$$

для любых корней $\alpha_i \neq \alpha_j$. Здесь также $\delta(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z^k$, $n_{ij} = 1 - a_{ij}$,

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!},$$

$[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \ldots [n]_q$, $[n]_q = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$, $q_\alpha = q^{\frac{(\alpha,\alpha)}{2}}$.

Соотношения (6.3.35 – 6.3.37) эквивалентны следующим соотношениям

$$[a_{i,n}, e_{\pm\alpha_j}(z)] = \frac{[(\alpha_i,\alpha_j)n]_q}{n} q^{\mp c|n|/2} z^n e_{\pm\alpha_j}(z), \tag{6.3.41}$$

$$[a_{i,n}, a_{j,m}] = \delta_{n+m,0}\frac{[(\alpha_i,\alpha_j)n]_q[cn]_q}{n}. \tag{6.3.42}$$

Опишем также структуру алгебры Хопфа на квантовой аффинной алгебре.

Пусть U'_e, U'_0, U'_f – подалгебры (без единицы) в $U_q(A_n^{(1)})$, порожденные элементами $e_{ik}, \psi^{\pm}_{ik}, f_{ik}, (i \in I, k \in \mathbb{Z}_+)$, соответственно. Пусть U_e, U_0, U_f – тоже подсуперазгебры U'_e, U'_0, U_f с единичным элементом.

Предложение 6.3.2. *Умножение в* $U_q(A_n^{(1)})$ *индуцирует изоморфизм векторных суперпространств*

$$U_e \otimes U_0 \otimes U_f \to U_q(A_n^{(1)}) \tag{6.3.43}$$

Нам потребуются некоторые простые свойства операции коумножения на $U_q(\mathfrak{g})$, доказываемые по индукции, опираясь на формулы (6.3.6 – 6.3.8) и определяющие соотношения, а также тот факт, что операция коумножения является гомоморфизмом, то есть, что $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$.

Предложение 6.3.3. *1)* $\Delta(x) = x \otimes 1(modU \otimes U'_e)$*, для произвольного* $x \in U'_e$*;*
2) $\Delta(y) = 1 \otimes y(modU'_f \otimes U)$*, для произвольного* $y \in U'_f$*.*

Следствие. 1) $\Delta(U_e) \subset U \otimes U_e$;
2) $\Delta(U_f) \subset U_f \otimes U$.

Таким образом, мы получаем, что $U_e(U_f)$ – является правым (левым) коидеалом в $U_q = U_q(\mathfrak{g})$.

Пусть также $BU'_e(BU'_f)$ – подсуperалгебра (без единицы) в $U_q(A_n^{(1)})$, порожденная элементами $e_{\alpha_i,k}, a_{j,r}, (f_{\alpha_i,k}, a_{j,-r})(i,j \in I, k \in Z, r \in Z_+)$.

Предложение 6.3.4. *1)* $\Delta(e) = e \otimes 1(modU \otimes BU'_e)$*, для произвольного* $e \in BU'_+$*;*
2) $\Delta(f) = 1 \otimes f(modBU'_f \otimes U)$*, для произвольного* $f \in BY'_-$*.*
3) $\Delta(a) = a \otimes 1(modU \otimes BU'_e) = 1 \otimes a(modBU'_e \otimes U)$*, для произвольного* $f \in U_q(\mathfrak{h})$*.*

Свойства 1), 2) также как и аналогичные свойства в предыдущем предложении, а свойство 3) вытекает из свойств 1), 2).

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : U_q(A_n^{(1)}) \otimes U^0(A_n^{(1)}) \to C$ – каноническое билинейное спаривание $U_q^+(A_n^{(1)})$ и его двойственной суперbegin алгебры Хопфа $(U_q^+(A_n^{(1)}))^*$ с противоположным коумножением, естественно изоморфной $U_q^-(A_n^{(1)})$. (Мы обозначаем через $U^0(A_n^{(1)})$ $U^*(A_n^{(1)})$ с противоположным коумножением.) Из определения вытекают следующие свойства этого спаривания.

$$\langle xy, x'y' \rangle = \langle \Delta(xy), x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle y \otimes x, \Delta(x'y') \rangle,$$
$$\langle x \otimes y >< x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

для $\forall x, y \in U_q^+(\mathfrak{g}), \forall x', y' \in U_q^-(\mathfrak{g})$.

Пусть A, B – подсупералгебры в $U_q(A_n^{(1)})$. Пусть также $(AB)_\perp := \{x' \in U^0(\mathfrak{g}) : \langle ab, x' \rangle = 0, \forall a \in A, b \in B\}$ – аннулятор произведения AB. Легко проверить, что $(U \cdot BU'_f)_\perp, (BU'_e \cdot U)_\perp, (U \cdot U'_f)_\perp, (U'_f \cdot U)_\perp$ – являются подсупералгебрами в $U^0(A_n^{(1)})$. Пусть

$$U_e^* := (Y \cdot BU'_f)_\perp, BU_e^* := (U \cdot U'_f)_\perp, U_f^* := (BU'_e \cdot U)_\perp,$$
$$(BU)_f^* := (U'_e \cdot U)_\perp, U_0^* := BU_e^* \bigcap BU_f^*.$$

Предложение 6.3.5. *1) Для любых* $x \in U_e, h \in U_0, y \in U_f, x' \in U_e^*, h' \in U_0^*, y' \in U_f^*$ *каноническое спаривание факторизуется*

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)} \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

2) Умножение в $U^0(A_n^{(1)})$ *индуцирует изоморфизм векторных пространств:*
$U_+^* \otimes U_0^* \otimes U_-^* \to U^0(A_n^{(1)})$*.*
3) Имеет место ПБВ теорема для $U^0(A_n^{(1)})$*.*

Доказательство. Докажем 1).

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = \langle \Delta(xh) \cdot \Delta(y), x'h' \otimes y' \rangle = \langle \Delta(x)\Delta(h)\Delta(y), x'h' \otimes y' \rangle =$$
$$\langle (x \otimes 1 + \sum a_n \otimes x_n)(h \otimes 1 + \sum \tilde{a}_s \otimes \tilde{x}_s)(1 \otimes y + \sum y_m \otimes a'_m), x'h' \otimes y' \rangle =$$
$$\langle xh \otimes y, x'h' \otimes y' \rangle + \langle \sum c_r \otimes d_r, x'h' \otimes y' \rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)}, xh, x'h' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

Отметим, что

$$\langle \sum c_r \otimes d_r, x'h' \otimes y' \rangle = \sum_r (-1)^{deg(x')deg(d_r)} \langle c_r, x'h' \rangle \langle d_r, y' \rangle = 0.$$

Отметим, что

$$\langle d_r, y' \rangle = 0$$

в силу того, что $d_r \in Y'_+Y, y' \in (BY'_+Y)_\perp$. С другой стороны

$$\langle xh, x'h' \rangle = \langle (x \otimes 1 + \sum a_n \otimes x_n)(1 \otimes h + \sum y_m \otimes b_m), x' \otimes h' \rangle =$$

$$\langle x \otimes h, x' \otimes h' \rangle + 0 = \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle.$$

Отсюда и вытекает доказываемое утверждение пункта 1).

Отметим также, что 2) вытекает из 3). Докажем 3). Выберем ПБВ базис в $U_q(A_n^{(1)})$. Каждый вектор этого базиса имеет вид: xhy, где $x \in U_e, h \in U^0, y \in U_f$. Тогда биортогональные векторы, в соответствии с 1), будут иметь вид: $x'h'y'$, где $x' \in U_e^*, h \in H^*, y \in U_f^*$. Эти векторы также образуют базис в $U_q^0(A_n^{(1)})$. Это и доказывает 3). ☐

Изучим это спаривание более детально. Сначала более подробно опишем ПБВ базис для $U_q(A_n^{(1)})$. Пусть как и выше Δ, Δ_+ обозначает множество корней, множество положительных корней, супералгебры Ли A_n. Рассмотрим также $\hat{\Delta}^{re}$ множество вещественных корней соответствующей аффинной суперелгебры Ли $A_n^{(1)}$. Для образующих $U_q(A_n^{(1)})$ $e_{\alpha_i,k}$ $(f_{\alpha_i,k})$ будем использовать следующие обозначения:

В этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{re}$. Пусть $\Xi \subset \hat{\Delta}^{re}$. Линейный порядок $\precneqq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$ и таких, что $\gamma = \alpha + \beta$ имеет место одно из следующих двух отношений порядка:
$\alpha \precneqq \gamma \precneqq \beta$ или $\beta \precneqq \gamma \precneqq \alpha$.
Введем подмножества Ξ_+, Ξ_- множества $\hat{\Delta}^{re}$:
$\Xi_\pm := \{\pm\gamma + k\delta : \gamma \in \hat{\Delta}_+^{re}\}$.

Введем на Ξ_+, Ξ_- выпуклые порядки $\precneqq_+, \precneqq_-$, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma + k\delta \precneqq_+ \gamma + l\delta \qquad \text{и} - \gamma + l\delta \precneqq_- -\gamma + k\delta,$$

если$k \leq l,$ для$\forall \gamma \in \Delta_+$.

Определим теперь корневые векторы $e_{\pm\beta}, \beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$ по индукции следующим образом. Пусть векторы e_{β_1}, e_{β_2} уже построены. Если корень e_{β_3} таков, что: $e_{\beta_1} \precneqq e_{\beta_3} \precneqq e_{\beta_2}$ и в интервале $(e_{\beta_1}, e_{\beta_2})$ нет корней для которых уже построены корневые векторы. то определим корневые векторы $e_{\pm\beta_3}$ формулами:

$$e_{\beta_3} = [e_{\beta_1}, e_{\beta_2}]_q, \quad f_{\beta_3} = [f_{\beta_2}, f_{-\beta_1}]_q.$$

Отметим, что приведённые рассуждения аналогичны проведённым в предыдущих главах аналогичных рассуждений для янгианов. Мы привели их здесь в форме подчёркивающей эту аналогию.

6.3.4 Вычисление универсальной R-матрицы

Вычисление мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы проводится по реализованной выше для случая $U_q(A_1^{(1)})$, схеме.

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 6.3.1. *Имеет место следующая факторизационная формула:*

$$R = \prod_{\alpha\in\hat{\Delta_+}} \prod_{n\in Z_+} exp_{q^2}((q^{-1}-q)e_{\alpha+n\delta}\otimes f_{\alpha-n\delta})\cdot K\cdot \prod_{\alpha\in\hat{\Delta_+}} \prod_{n\in N} exp_{q^2}((q^{-1}-q)f_{\alpha+n\delta}\otimes e_{\alpha-n\delta}). \tag{6.3.44}$$

Доказательство. Схема доказательства данной теоремы повторяет доказательство мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы квантованной универсальной обертывающей алгебры $U_q(A_n^{(1)})$ использует конструкцию квантового дубля и основано на вычислениях, использующих доказанные выше формулы спаривания. Целью является сворачивание общей формулы для универсальной R-матрицы:

$$R = \sum_i e_i\otimes e^i,$$

где $\{e_i\}$ – базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в квантованной универсальной обёртывающей алгебре $U_q(\mathfrak{b}_+)$ борелевской подалгебре аффинной алгебры Ли $A_n^{(1)}$, а $\{e^i\}$ – двойственный базис в двойственной алгебре Хопфа с противоположным коумножением: $U_q(\mathfrak{b}_+)^*\cong U_q(\mathfrak{b}_-)$. Нахождение этого двойственного базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта основано на использовании формул спаривания. Большая часть этой работы уже проделана в предыдущем пункте. Мы не будем подробно повторять приведённые выше рассуждения. Остановимся лишь коротко на отличиях от разобранного подробно выше частного случая, а также на изменениях в получаемой основной формуле для универсальной R-матрицы.

□

Замечание 5. *Заметим, что чуть более сложный пример, чем приведённый выше, вычисления образа универсальной R-матрицы в вершинном представлении лежит в основе вычисления корреляционных функций XXZ модели квантового магнетика Гейзенберга и в шестивершинной модели статистической механики осуществлённого М. Джимбо и Т. Мива ([9], [172]).*

6.4 Квантовая аффинная супералгебра $U_q(A^{(1)}(m,n))$

В этом параграфе мы распространим результаты предыдущих параграфов на квантованную универсальную обёртывающую аффинной супералгебры Ли $A^{(1)}(m,n))$. Эти результаты являются аналогами для случая квантовой аффинной супералгебры результатов главы 1 для янгианов.

6.4.1 Определение квантовой аффинной супералгебры $U_q(A^{(1)}(m,n))$

Определение квантованной универсальной обёртывающей аффинной супералгебры в является естественным обобщением определения квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры. Исходная бисупералгебра Ли – это аффинная супералгебра Ли со структурой коалгебры, аналогично введённой в предыдущем параграфе. Опишем эту структуру более подробно.

6.4.2 Новая система образующих для квантовой аффинной нескрученной супералгебры

В этом разделе мы дадим эквивалентное определение квантованной универсальной обёртывающей супералгебры в терминах токовой системы образующих и порождающих соотношений, естественного аналога новой системы образующих и определяющих соотношений В.Г. Дринфельда.

Определение 6.4.1. *Квантовая аффинная супералгебра* $U_q(A^{(1)}(m,n))$ *– это супералгебра Хопфа на* $\mathcal{C}$*, порождённая как ассоциативная супералгебра, образующими*

$$h_{i,r} := h_{\alpha_i,r}, \quad K_i^{\pm 1}, \quad C^{\pm 1/2}, \quad x^{\pm}_{i,k} := x^{\pm}_{\alpha_i,k}, \quad i \in I = \{1,2,\ldots,n\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

причём, $p(x^{\pm}_{i,m+1}) = 1$*,* $p(h_{i,r}) = p(C^{\pm 1/2}) = 0$*,* $i \in I = \{1,2,\ldots,m+n+1\}$*,* $k \in \mathbb{Z}_+$*,* $p(x^{\pm}_{i,k}) = 0, \quad i \in I\backslash\{m+1\}$*,* $p(x^{\pm}_{i,m+1}) = 1$*, которые удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = \delta_{r,-s}\tfrac{1}{r}[ra_{ij}]_{q_i}\frac{C^r - C^{-r}}{q^j - q^{-j}}, \tag{6.4.1}$$

$$K_iK_i^{-1} = 1, \quad C^{1/2}C^{-1/2} = 1 \tag{6.4.2}$$

$$[K_i, K_j] = [K_i, h_{j,r}] = 0 \tag{6.4.3}$$

$$K_i x^{\pm}_{j,r} K_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,r} \tag{6.4.4}$$

$$[h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm\tfrac{1}{r}[ra_{ij}]_{q_i} C^{\mp |r|/2} x^{\pm}_{j,r+s}, \tag{6.4.5}$$

$$x^{\pm}_{i,r+1}x^{\pm}_{j,s} - q^{\pm a_{ij}}x^{\pm}_{j,s}x^{\pm}_{i,r+1} = q^{\pm a_{ij}}x^{\pm}_{i,r}x^{\pm}_{j,s+1} - q^{\pm a_{ij}}x^{\pm}_{j,s+1}x^{\pm}_{i,r} \tag{6.4.6}$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij}\frac{C^{(r-s)/2}\Phi^{+}_{i,r+s} - C^{-(r-s)/2}\Phi^{-}_{i,r+s}}{q_i - q_i^{-1}} \tag{6.4.7}$$

$$\textstyle\sum_{\pi\in\Sigma_m}\sum_{k=0}^{m}[\frac{m}{k}]_{q_i} x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(k)}} x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r_{\pi(k+1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(m)}} = 0, \quad i \neq j,\ quad \tag{6.4.8}$$

$$[[x^{\pm}_{m,k}, x^{\pm}_{m+1,0}]_q, [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m+2,r}]_q]_q = 0. \tag{6.4.9}$$

Здесь $m = m_{ij} = 1 - \tilde{a}_{ij}$*, или* $m_{ij} = 0$*, если* $a^{sym}_{ii} = a^{sym}_{ij} = 0$*,* $m_{ij} = 1$*, если* $a^{sym}_{ii} = 0, a^{sym}_{ij} \neq 0$*,* $m_{ij} = -2a^{sym}_{ij}/a^{sym}_{ii}$*, если* $a^{sym}_{ii} \neq 0$*.*

$$\sum_{r=0}^{\infty}\Phi^{\pm}_{i,\pm r}u^{\pm r} = K_i^{\pm 1}exp(\pm(q_i - q_i^{-1})\sum_{s=0}^{\infty}h_{i,\pm s}u^{\pm s})$$

Сумма берется по всем перестановкам σ *множества* $\{1,\ldots,r\}$*.*

Коумножение на образующих $h_{i,k}, x^{\pm}_{i,k}, i \in I, k = 0,1$ *определяется следующими формулами:*

$$\Delta(x^{+}_{i,k}) = x^{+}_{i,k} \otimes 1 + q^{h_{i,k}} \otimes x^{+}_{i,k}, \tag{6.4.10}$$

$$\Delta(x^{-}_{i,k}) = x^{-}_{i,k} \otimes q^{-h_{i,k}} + 1 \otimes x^{-}_{i,k}, \tag{6.4.11}$$

$$\Delta(q^{h_{i,k}}) = q^{h_{i,k}} \otimes q^{h_{i,k}}. \tag{6.4.12}$$

Отметим, что универсальная обёртывающая супералгебра $U(A^{(1)}(m,n))$ естественно изоморфна $U_1(A^{(1)}(m,n))$.

Легко проследить аналогию при определении янгиана $Y(A(m,n))$ супералгебры Ли $A(m,n)$ и квантовой аффинной алгебры $U_q(A^{(1)}(m,n))$ в терминах токовых образующих (эквивалентных образующим новой системы образующих В.Г. Дринфельда).

6.4.3 Структура квантового дубля

Следуя схеме рассуждений, реализованной в предыдущем параграфе опишем структуру квантового дубля для квантованной универсальной обёртывающей супералгебры $U_q(A^{(1)}(A(m,n))$.

Мы будем использовать представление

$$U_q(A^{(1)}(m,n)) = U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-). \tag{6.4.13}$$

Как и в предыдущем параграфе мы построим изоморфизм

$$U_q(\mathfrak{b}_+)^\star \to U_q(\mathfrak{b}_-). \tag{6.4.14}$$

6.4.4 Формула для универсальной R-матрицы

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 6.4.1. *Имеет место следующая факторизационная формула:*

$$R = \prod_{\alpha\in\hat{\Delta}_+}\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1)^{p(e_\alpha)}\exp_{q^2}((q^{-1}-q)e_{\alpha+n\delta}\otimes f_{\alpha-n\delta})\cdot K\cdot$$

$$\prod_{\alpha\in\hat{\Delta}_+}\prod_{n\in\mathbb{N}}\exp_{q^2}((q^{-1}-q)(-1)^{p(f_\alpha)}f_{\alpha+n\delta}\otimes e_{\alpha-n\delta}). \tag{6.4.15}$$

Доказательство. Схема доказательства данной теоремы повторяет доказательство мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы квантованной универсальной обёртывающей алгебры $U_q(A_n^{(1)})$. В основе вычислений, как и выше, лежит формула для универсальной R-матрицы квантового дубля:

$$R = \sum_i e_i \otimes e^i.$$

Правда спаривание и тензорное произведение связаны соотношением, учитывающим чётность элементов. Вычисления основаны на превращении написанной выше аддитивной формулы в мультипликативную.

□

6.5 Связь между янгианами и квантовыми аффинными супералгебрами

Будем обозначать через $L\mathfrak{g}$ алгебру Ли (лорановских полиномиальных) петель со значениями в простой алгебре (базисной супералгебре) Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что это просто аффинная (супер)алгебра Каца-Муди без центрального элемента и градуировочного элемента d, задающего дифференцирование. В этом пункте мы построим гомоморфизм квантовой (супер)алгебры токов $U_\hbar(L\mathfrak{g})$ на квантовую (супер)алгебру $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ из которой янгиан $Y(\mathfrak{g})$ получается специализацией при $\hbar = 1$. При построении мы ограничимся рассмотрением частного случая базисной супералгебры Ли типа $A(m,n)$, то есть мы будем предполагать, что $\mathfrak{g}$ либо простая алгебра Ли, либо $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Для построения этого гомоморфизма нам потребуются описания квантовых аффинных алгебр (супералгебр) и янгианов в терминах производящих функций образующих. Пусть $\{1,2,\ldots,m,\ldots m+n-1\}$. Это множество мы будем отождествлять с множеством простых корней $I = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots \alpha_{m+n-1}\}$ базисной супералгебры Ли, причём, мы будем предполагать, что α_m – нечётный корень, то есть будем иметь дело с выделенной системой простых корней базисной супералгебры Ли $A(m,n)$.

Пусть $\{E_{i,r}, F_{i,r}, H_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}}$ – токовые образующие квантовой аффинной алгебры $U_\hbar((L\mathfrak{g})$, а $\{e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}\}_{i\in I, k\in\mathbb{Z}_+}$ – образующие янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$. Определим отображение

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}), \tag{6.5.1}$$

на образующих следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Phi(H_{i,r}) &= \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \textstyle\sum_{k\geq 0} t_{i,k}\frac{r^k}{k!}, \\ \Phi(E_{i,r}) &= e^{r\sigma_i^+} \textstyle\sum_{m\geq 0} g_{i,m}^+ e_{i,m}, \\ \Phi(F_{i,r}) &= e^{r\sigma_i^-} \textstyle\sum_{m\geq 0} g_{i,m}^- f_{i,m}. \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

Здесь, как и выше в этой главе, мы используем следующие обозначения: $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$ – элементы симметризующей матрицы для матрицы Картана (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Мы используем систему логарифмических образующих $\{t_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$ коммутативной подалгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{g})$ порождённую элементами $\{h_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$, аналогичную системе, логарифмических картановских образующих, ранее использованных для янгиана. Эти логарифмические образующие для квантованной универсальной обёртывающей супералгебры определяются следующим равенством для порождающих функций:

$$\hbar\sum_{r\geq 0} t_{i,r}u^{-r-1} = \log(1 + \sum_{r\geq 0} h_{i,r}u^{-r-1}). \tag{6.5.3}$$

Элементы $\{g_{i,m}^{\pm}\}_{i\in I, m\in\mathbb{N}}$ лежат в пополнении алгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h})$ и определяются следующим образом. Рассмотрим следующий формальный степенной ряд:

$$G(v) = \log(\frac{v}{e^{v/2} - e^{v/2}}) \in Q[[v]]$$

и определим $\gamma_i \in Y^{\hat{0}}[v]$ формулой:

$$\gamma_i(v) = \hbar\sum_{r\geq 0}\frac{t_{i,r}}{r!}(-\frac{d}{dv})^{r+1}G(v).$$

Тогда,

$$\sum_{m\geq 0} g_{i,m}^{\pm} v^m = (\frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}})^{1/2}\exp(\frac{\gamma_i(v)}{2})$$

Окончательно, $\sigma_i^{\pm}$ – это гомоморфизмы подсупералгебр

$$\sigma_i^{\pm} : Y_\hbar(\mathfrak{b}_{\pm})(\subset Y_\hbar(\mathfrak{g})) \to Y_\hbar(\mathfrak{b}_{\pm}),$$

которые задаются на образующих $\{h_{i,r}, e_{i,r}, f_{i,r}\}$ следующим образом. Они оставляют неподвижными образующие $h_{i,k}$, а на остальные образующие действуют сдвигами: $\sigma_i^+ : e_{j,r} \to e_{j,r+\delta_{ij}}$, $\sigma_i^- : f_{j,r} \to f_{j,r+\delta_{ij}}$. Эти гомоморфизмы являются небольшой модификацией рассмотренных ранее гомоморфизмов T_λ.

Нам потребуется одна геометрическая реализация янгиана (см. [150]). Зафиксируем натуральное число $d \in N$ и пусть $\mathfrak{F}$ будет многообразие n-флагов в C^d:

$$\mathfrak{F} = \{0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = C^d\}.$$

Кокасательное расслоение $T^*\mathfrak{F}$ может быть реализовано как:

$$T^*\mathfrak{F} = \{(V_\bullet, x) \in \mathfrak{F} \times End(C^d) : x(V_{i+1}) \subset V_i\}$$

и, следовательно, допускает морфизм $T^*\mathfrak{F} \to \mathfrak{N}$ проекции на второй сомножитель, где $\mathfrak{N} = \{x \in End(C^d) : x^n = 0\}$ – конус нильпотентных эндоморфизмов индекса нильпотентности n. Определим многообразие Стейнберга

$$Z = T^*\mathfrak{F} \times_{T^*\mathfrak{N}} T^*\mathfrak{F}.$$

Группа $GL(d) \times C^*$ действует на $T^*\mathfrak{F}$ и Z и определены сюръективные гомоморфизмы алгебр (см, также [150]):

$$\Psi_U : U_\hbar(L\mathfrak{gl}(n)) \to K^{GL(d)\times C^*}(Z),$$
$$\Psi_Y : Y_\hbar(L\mathfrak{gl}(n)) \to H^{GL(d)\times C^*}(Z),$$

Для того, чтобы яснее понять действие этих гомоморфизмов давайте рассмотрим действие свёрткой $K^{GL(d)\times C^*}(Z)$ на $K^{GL(d)\times C^*}(T^*\mathfrak{F})$ и действие $H^{GL(d)\times C^*}(Z)$ на $H^{GL(d)\times C^*}(T^*\mathfrak{F})$, которые согласованы. Используя эквивариантный характер Черна можно сконструировать гомоморфизм ассоциативных алгебр

$$\Phi : U_\hbar(L\mathfrak{gl}_n) \to Y_\hbar(\hat{\mathfrak{gl}_n}) \tag{6.5.4}$$

который сплетает эти два действия. Можно показать, что функтор $F = \Phi^*$ сходится для численных значений параметра $\hbar$ и, следовательно, определяет функтор

$$F_a = \Phi^* : Rep_{fd}(Y_a(\mathfrak{g})) \to Rep_{fd}(U_\epsilon(L\mathfrak{g})), \tag{6.5.5}$$

где $Y_a(\mathfrak{g})$ – специализация янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ в точке $\hbar = a \in C\backslash 2\pi Q$, $\epsilon = \exp(a/2)$, Rep_{fd} – категория конечномерных представлений.

Теперь опишем небольшую модификацию этой конструкции для янгиана $Y(A(m,n))$ супералгебры Ли $A(m,n)$. Рассмотрим супермногообразие (супер)флагов Зафиксируем пару натуральных чисел $\bar{d} = (d_1, d_2), d_i \in N$ и пусть $\mathfrak{F}$ будет многообразие (m|n)-суперфлагов в $C^{(d_1,d_2)}$:

$$\mathfrak{F} = \{0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_{m+n} = C^{(d_1|d_2)}\}.$$

Здесь мы предполагаем, что каждое из вложений подпространств – строгое, то есть $V_i \neq V_{i+1}$. Заметим теперь, что кокасательное расслоение $T^*\mathfrak{F}$ может быть реализовано как:

$$T^*\mathfrak{F} = \{(V_\bullet, x) \in \mathfrak{F} \times End(C^{(d_1,d_2)}) : x(V_{i+1}) \subset V_i\}$$

и, следовательно, допускает морфизм $T^*\mathfrak{F} \to \mathfrak{N}$ проекции на второй сомножитель, где $\mathfrak{N} = \{x \in End(C^d) : x^{n+m} = 0\}$ – конус нильпотентных эндоморфизмов индекса нильпотентности $n + m$. Определим многообразие Стейнберга

$$Z = T^*\mathfrak{F} \times_{T^*\mathfrak{N}} T^*\mathfrak{F}.$$

Группа $GL(d_1, d_2) \times C^*$ действует на $T^*\mathfrak{F}$ и Z и определены сюръективные гомоморфизмы супералгебр:

$$\Psi_U : U_\hbar(L\mathfrak{gl}(m,n)) \to K^{GL(d_1,d_2)\times C^*}(Z),$$
$$\Psi_Y : Y_\hbar(L\mathfrak{gl}(m,n)) \to H^{GL(d_1,d_2)\times C^*}(Z).$$

Теперь я более подробно рассмотрю коротко описанный выше изоморфизм квантовой аффинной алгебры на янгиан.

Пусть $\mathfrak{g}$ – комплексная полупростая алгебра Ли (базисная супералгебра Ли $A(m,n)$) и $(\cdot,\cdot)$ – невырожденная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\{\alpha_i\} \subset \mathfrak{h}^*$ – базис простых корней в $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ и $a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)$ – матричные элементы матрицы Картана A соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть также $d_i = (\alpha_i, \alpha_i)/2$, так что $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ для любых $i, j \in I$. Пусть

$$\nu : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^* \tag{6.5.6}$$

изоморфизм, определяемый внутренним произведением $(\cdot,\cdot)$ и положим, как обычно $h_i = \nu^{-1}(\alpha_i)/d_i$. Выберем корневые векторы $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}, f \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ так, чтобы $[e_i, f_i] = h_i$. Таким образом получаем систему образующих Шевалле-Серра, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{6.5.7}$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \tag{6.5.8}$$

$$ad(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \quad i \neq j, \tag{6.5.9}$$

$$ad(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \quad i \neq j \tag{6.5.10}$$

Теперь определим квантованную универсальную обёртывающую полупростой алгебры Ли.

Определение 6.5.1. *Пусть $U_\hbar(L\mathfrak{g})$ – (супер)алгебра над $C[[\hbar]]$ топологически порождённая элементами $\{E_{i,k}, F_{i,k}, H_{i,k}\}_{i \in I, k \in \mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*
1) Для произвольных $i, j \in I$ и $r, s \in \mathbb{Z}$

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0. \tag{6.5.11}$$

2) Для произвольных $i, j \in I$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$[H_{i,0}, E_{j,k}] = a_{i,j} E_{j,k}, \quad [H_{i,0}, F_{j,k}] = -a_{i,j} F_{j,k}. \tag{6.5.12}$$

3) Для произвольных $i, j \in I$ и $r, s \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

$$[H_{i,r}, E_{j,k}] = \frac{[r a_{i,j}]_{q_i}}{r} E_{j,r+k}, \quad [H_{i,r}, F_{j,k}] = -\frac{[r a_{i,j}]_{q_i}}{r} F_{j,r+k}. \tag{6.5.13}$$

4) Для произвольных $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{gathered} E_{i,k+1} E_{j,l} - q_i^{a_{ij}} E_{j,l} E_{i,k+1} = q_i^{a_{ij}} E_{i,k} E_{j,l+1} - E_{j,l+1} E_{i,k}, \\ F_{i,k+1} F_{j,l} - q_i^{-a_{ij}} F_{j,l} F_{i,k+1} = q_i^{-a_{ij}} F_{i,k} F_{j,l+1} - F_{j,l+1} F_{i,k}. \end{gathered} \tag{6.5.14}$$

5) Для произвольных $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

$$[E_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{i,j} \frac{\psi_{i,k+l} - \varphi_{i,k+l}}{q_i - q_i^{-1}}. \tag{6.5.15}$$

6) Пусть $i \neq j \in I$ и пусть $m = 1 - a_{ij}$. Для произвольных $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_{i,k_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot E_{i,k_{\pi(s)}} \cdot E_{j,l} \cdot E_{i,k_{\pi(s+1)}} \cdot \ldots \cdot E_{i,k_{\pi(m)}} = 0, \tag{6.5.16}$$

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\begin{bmatrix} m\\ s\end{bmatrix}_{q_i} F_{i,k_{\pi(1)}}\cdot\ldots\cdot F_{i,k_{\pi(s)}}\cdot F_{j,l}\cdot F_{i,k_{\pi(s+1)}}\cdot\ldots\cdot F_{i,k_{\pi(m)}}=0, \tag{6.5.17}$$

где элементы $\psi_{i,r},\varphi_{i,r}$ определяются следующими формулами:

$$\psi_i(z)=\sum_{r\geq 0}\psi_{i,r}z^{-r}=\exp(\frac{\hbar d_i}{2}H_{i,0})\exp((q_i-q_i^{-1})\sum_{s\geq 1}H_{i,s}z^{-s}),$$

$$\varphi_i(z)=\sum_{r\geq 0}\varphi_{i,r}z^{-r}=\exp(-\frac{\hbar d_i}{2}H_{i,0})\exp(-(q_i-q_i^{-1})\sum_{s\geq 1}H_{i,-s}z^{s}),$$

причём $\psi_{i,-k}=\varphi_{i,k}=0$ для $k\geq 1$. Кроме того, $p(H_{i,r})=0$ для $i\in I, r\in\mathbb{Z}_+$, а $p(X^{\pm}_{i,r})=0$ для $i\in I\backslash\{m\}, r\in\mathbb{Z}$, а $p(x^{\pm}_{m,r})=0$ для $r\in\mathbb{Z}$

Далее мы будем также обозначать через $U^0\subset U_\hbar(L\mathfrak{g})$ коммутативную подалгебру, порождённую элементами $\{H_{i,r}\}_{i\in I,r\in\mathbb{Z}}$.

Определение 6.5.2. *Пусть $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ – ассоциативная (супер)алгебра, порождённая элементами $\{x^{\pm}_{i,r},h_{i,r}\}_{i\in I,r\in\mathbb{Z}_+}$, причём, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*
1) Для произвольных $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$

$$[h_{i,r},h_{j,l}]=0. \tag{6.5.18}$$

2) Для произвольных $i,j\in I$ и $s\in\mathbb{Z}_+$

$$[h_{i,0},x^{\pm}_{j,s}]=\pm d_i a_{ij}x^{\pm}_{j,s}. \tag{6.5.19}$$

3) Для произвольных $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$

$$[h_{i,r+1},x^{\pm}_{j,s}]-[h_{i,r},x^{\pm}_{j,s+1}]=\pm\frac{d_i a_{ij}\hbar}{2}(h_{i,r}x^{\pm}_{j,s}+x^{\pm}_{j,s}h_{i,r}). \tag{6.5.20}$$

4) Для произвольных $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$

$$[x^{\pm}_{i,r+1},x^{\pm}_{j,s}]-[x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{j,s+1}]=\pm\frac{d_i a_{ij}\hbar}{2}(x^{\pm}_{i,r}x^{\pm}_{j,s}+x^{\pm}_{j,s}x^{\pm}_{i,r}). \tag{6.5.21}$$

5)Для произвольных $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$

$$[x^{+}_{i,r},x^{-}_{j,l}]=\delta_{i,j}h_{i,r+s}. \tag{6.5.22}$$

6) Пусть $i\neq j\in I$ и пусть $m=1-a_{ij}$. Для произвольных $k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}$ и $l\in\mathbb{Z}_+$

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m}[x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}},[x^{\pm}_{i,r_{\pi(2)}},\ldots,[x^{\pm}_{i,r_{\pi(m)}},x^{\pm}_{j,s}]\ldots]]=0. \tag{6.5.23}$$

Отметим, что $Y_\hbar$ является $\mathbb{Z}_+$-градуированной алгеброй определяемой заданием следующей градуировки на образующих: $deg(h_{i,r})=deg(x^{\pm}_{i,r})=r$ и $deg(\hbar)=1$. Кроме того, $p(h_{i,r})=0$ для $i\in I, r\in\mathbb{Z}_+$, а $p(x^{\pm}_{i,r})=0$ для $i\in I\backslash\{m\}$, а $p(x^{\pm}_{m,r})=0$ для $r\in\mathbb{Z}_+$.

Доказательство основного результата этого пункта существенным образом использует теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгианов, доказанную выше. Нам потребуется её следующая переформулировка.

Пусть $Y^0, Y^{\pm}$ – под(супер)алгебры ассоциативной (супер)алгебры $Y_\hbar(\mathfrak{g})$, порождённые элементами $\{h_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}, \{x_{i,r}^{\pm}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$, соответственно, а $\hat{Y}^{\pm}$ – под(супер)алгебры ассоциативной (супер)алгебры $Y_\hbar(\mathfrak{g})$, порождённые элементами $\{h_{i,r}, x_{i,r}^{\pm}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$.

Предложение 6.5.1. *Умножение индуцирует следующий изоморфизм векторных пространств:*

$$Y^- \otimes Y^0 \otimes Y^+ \longrightarrow Y_\hbar(\mathfrak{g}). \tag{6.5.24}$$

Напомним также определение операторов сдвига $T_i = T_i^+, T_i^-$, введённых ранее. Отображение:

$$T_i^{\pm} : x_{j,r}^{\pm} \mapsto x_{j,r+\delta_{i,j}}^{\pm}, \quad h_{j,r} \mapsto h_{j,r}$$

продолжается до гомоморфизма ассоциативных (супер)алгебр $\hat{Y}^{\pm} \to \hat{Y}^{\pm}$, который мы и обозначаем через $T^{\pm}$.

Сформулируем основной результат этого пункта

Теорема 6.5.1. *1) Отображение*

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}),$$

однозначно определяется формулами (6.5.1), (6.5.2) и является гомоморфизмом ассоциативных алгебр.
2) Отображение Φ единственным образом может быть продолжено до гомоморфизма топологических пополнений:

$$\hat{\Phi} : \widehat{U_\hbar(L\mathfrak{g})} \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})}, \tag{6.5.25}$$

причём отображение $\hat{\Phi}$ является изоморфизмом топологических ассоциативных (супер)алгебр.

Доказательство. Докажем теорему. Наше доказательство, является небольшой модификацией на случай супералгебр, доказательства аналогичного результата для квантовых аффинных алгебр и янгианов простых алгебр Ли (см. [141]) и распадается на несколько следующих шагов. Сначала мы перепишем определяющие соотношения в янгиане в терминах производящих функций образующих с использованием операторов сдвига. Именно, покажем сначала, что соотношения (6.5.19), (6.5.20) эквивалентны следующему соотношению, записанному в терминах производящих функций образующих с использованием операторов сдвига:

$$[h_i(u), x_{j,s}^{\pm}] = \frac{\pm\hbar d_i a_{i,j}}{u - T_j^{\pm} \pm \hbar d_i a_{i,j}} h_i(u) x_{j,s}^{\pm}. \tag{6.5.26}$$

Здесь

$$h_i(u) = 1 + \hbar \sum_{r\geq 0} h_{i,r} \cdot u^{-r-1} \in Y_\hbar(\mathfrak{g})[[u^{-1}]].$$

Правая часть в (6.5.26) понимается как разложение по степеням u^{-1}, а скобки понимаются как суперкоммутатор. Утверждение доказывается прямой проверкой. Проведём её. Для простоты записи положим $a = \pm\hbar d_i a_{i,j}/2$. Умножим правую часть соотношения (6.5.20) на $\hbar u^{-r-1}$ и просуммируем по всем $r \geq 0$. Получим

$$u[h_i(u) - 1 - \hbar u^{-1} h_{i,0}, x_{j,s+1}^{\pm}] - [h_i(u) - 1, x_{j,s+1}^{\pm}] = a\{x_{j,s}^{\pm}, h_i(u) - 1\}, \tag{6.5.27}$$

где $\{x, h\} = xh + (-1)^{p(h)p(x)}hx$ обозначает антисуперкоммутатор. Используя соотношение (6.5.19) и $[x, h] = [x, h] + 2(-1)^{p(h)p(x)}hx$ мы получим, что

$$(u - T_j^{\pm} + a)[h_i(u), x_{j,s}^{\pm}] = 2ah_i(u)x_{j,s}^{\pm}, \tag{6.5.28}$$

что и требовалось показать. Верно и обратное. Достаточно в правой части формулы (6.5.27) взять коэффициенты при $u^{-k}, k \geq 0$, чтобы получить формулы (6.5.19), (6.5.20).

Теперь таким же образом перепишем и соотношения (6.5.21), (6.5.23) в терминах производящих функций образующих. Мы будем использовать, введённое выше обозначение. Для оператора $B \in End(V)$ будем обозначать через $B_{(i)} \in End(V^{\otimes n}$ – оператор, определяемый формулой:

$$T_{(i)} = I^{\otimes i-1} \otimes B \otimes I^{\otimes n-i}.$$

Также для (супер)алгебры A определим $ad^{(m)} : A^{\otimes m} \to End(A)$ формулой:

$$ad^{(m)}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) = ad(a_1) \circ \ldots \circ ad(a_m)$$

Предложение 6.5.2. *1) Соотношение (6.5.21) для $i \neq j$ эквивалентно тому, что для произвольного $A(v_1, v_2) \in \mathbb{C}[[v_1, v_2]]$*

$$A(T_i^{\pm}, T_j^{\pm})(T_i^{\pm} - T_j^{\pm} \mp a\hbar)x_{i,0}^{\pm}x_{j,0}^{\pm} = A(T_i^{\pm}, T_j^{\pm})(T_i^{\pm} - T_j^{\pm} \pm a\hbar)x_{i,0}^{\pm}x_{j,0}^{\pm}, \tag{6.5.29}$$

где $a == \pm\hbar d_i a_{i,j}/2$.
2) Соотношение (6.5.21) для $i = j$ эквивалентно тому, что для произвольного $B(v_1, v_2) \in \mathbb{C}[[v_1, v_2]]$, такого, что $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1)$

$$\mu(B(T_{i,(1)}^{\pm}, T_{j,(2)}^{\pm})(T_{i,(1)}^{\pm} - T_{j,(2)}^{\pm} \mp d_i\hbar)x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm} = 0, \tag{6.5.30}$$

где $\mu : Y_\hbar(\mathfrak{g})^{\otimes 2} \to Y_\hbar(\mathfrak{g}$ – умножение в $Y_\hbar(\mathfrak{g}$.
3) Соотношение (6.5.23) для $i \neq j$ эквивалентно требованию, чтобы для произвольного $A(v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}[v_1, v_2, \ldots, v_m]^{\mathfrak{S}_m}$ имело место следующее равенство

$$ad^{(m)}(A(T_{i,(1)}^{\pm}, \ldots, T_{i,(m)}^{\pm})(x_{i,0}^{\pm})^{\otimes m})x_{j,l}^{\pm} = 0, \tag{6.5.31}$$

где $m = 1 - d_i a_{i,j}$ для $i \leq m$ и $m = m = 1 + d_i a_{i,j}$ для $i \geq m$.

1) Заметим, что соотношение (6.5.21)

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s+1}^{\pm}] = \pm\frac{d_i a_{ij}\hbar}{2}(x_{i,r}^{\pm}x_{j,s}^{\pm} + x_{j,s}^{\pm}x_{i,r}^{\pm})$$

может быть переписано в следующей форме:

$$T_i^{\pm r}T_j^{\pm s}(T_i^{\pm} - T_j^{\pm} \mp a\hbar)x_{i,0}^{\pm}x_{j,0}^{\pm} = T_i^{\pm r}T_j^{\pm s}(T_i^{\pm} - T_j^{\pm} \pm a\hbar)x_{i,0}^{\pm}x_{j,0}^{\pm}, \tag{6.5.32}$$

что и доказывает 1).

2) Если $i = j, a = d_i$, то заметим, что из (6.5.32) следует, что

$$\mu(T_{i,(1)}^{\pm r}T_{j,(2)}^{\pm s})(T_{i,(1)}^{\pm} - T_{j,(2)}^{\pm} \mp d_i\hbar)x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm} = \mu(T_{i,(1)}^{\pm s}T_{j,(2)}^{\pm r})(T_{i,(2)}^{\pm} - T_{j,(1)}^{\pm} \mp d_i\hbar)x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm}.$$

Отметим, что полученное соотношение эквивалентно соотношению

$$\mu(T_{i,(1)}^{\pm r}T_{j,(2)}^{\pm s} + T_{i,(1)}^{\pm s}T_{j,(2)}^{\pm s})(T_{i,(1)}^{\pm} - T_{j,(2)}^{\pm} \mp d_i\hbar)x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm} = 0,$$

что и доказывает 2).

3) Заметим, что (6.5.31) это просто переписанное тождество (6.5.21), что и доказывает 3).

Нам потребуется ещё одна, альтернативная система образующих подалгебры Y^0. Мы будем называть эту систему "логарифмической". Эта система аналогична системе образующих картановской подсуперменталгебры янгиана, которую мы ввели ранее и которую также назвали логарифмической системой образующих. Для произвольного $i \in I$ определим формальный степенной ряд

$$t_i(u) = \hbar \sum_{r\geq 0} t_{i,r} u^{-r-1} \in Y^0[[u^{-1}]]$$

следующей формулой:

$$t_i(u) = \log(h_i(u)) = \log(1 + \hbar \sum_{r\geq 0} h_{i,r} u^{-r-1}). \tag{6.5.33}$$

Далее мы будем предполагать, что Y^0 наделён этой другой системой образующих $\{t_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}_+}$ (см. также параграф 2.6 главы 2). Эта новая система образующих тоже однородна, причём $deg(t_{i,r}) = r$. Более того, $t_{i,0} = h_{i,0}$ и $t_{i,r} \equiv h_{i,r} mod\hbar$ для произвольного $r \geq 1$ в силу того, что

$$t_i(u) \equiv (\hbar \sum_{r\geq 0} h_{i,r} u^{-r-1}) mod\hbar^2.$$

Рассмотрим обратное преобразование Бореля $B_i(v) = B(t_i(u))$ формального степенного ряда $t_i(u)$:

$$B_i(v) = B(t_i(u)) = \hbar \sum_{r\geq 0} t_{i,r} \frac{v^r}{r!} \in Y^0[[v]]. \tag{6.5.34}$$

Лемма 6.5.1. *Для произвольных $i, j \in I$ имеет место следующее равенство*

$$[B_i(v), x^{\pm}_{j,s}] = \pm \frac{q_i^{a_{i,j}v} - q_i^{-a_{i,j}v}}{v} e^{T^{\pm}_j v} x^{\pm}_{j,s}. \tag{6.5.35}$$

Доказательство. Для простоты, пусть $a = \pm\hbar d_i a_{i,j}/2$, $e^a = q_i^{\pm a_{i,j}}$. Тогда в силу (6.5.26 имеем

$$h_i(u) x^{\pm}_{j,s} h_i(u)^{-1} = \frac{u - T^{\pm}_j + a}{u - T^{\pm}_j - a} x^{\pm}_{j,s}.$$

Отсюда получаем, что

$$[t_i(u), x^{\pm}_{j,s}] = \log\left(\frac{u - T^{\pm}_j + a}{u - T^{\pm}_j - a}\right) x^{\pm}_{j,s}.$$

Используя равенство

$$B(\log(1 - pu^{-1})) = \frac{1 - e^{pv}}{v}$$

получаем, что

$$[B_i(v), x^{\pm}_{j,s}] = B(\log(1 - (T^{\pm}_j - a)u^{-1}) - \log(1 - (T^{\pm}_j + a)u^{-1}))x^{\pm}_{j,s} =$$

$$(\frac{1 - e^{(T^{\pm}_j - a)v}}{v} - \frac{1 - e^{(T^{\pm}_j + a)v}}{v}) x^{\pm}_{j,s} = \frac{e^{av} - e^{-av}}{v} e^{T^{\pm}_j v} x^{\pm}_{j,s}.$$

Лемма доказана. □

Отметим, что из доказанной леммы и результатов главы 2 следует следующая точная формула для коммутатора

$$[t_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm d_i a_{i,j} \sum_{l=0}^{[r/2]} \binom{r}{2l} \frac{(\hbar d_i a_{i,j}/2)^{2l}}{2l+1} x^{\pm}_{j,r+s-2l}. \tag{6.5.36}$$

Введём теперь операторы $\lambda^{\pm}_{i,s} \in End(Y^0)$, который переводит мономы от образующих вида $x^{\pm}_{i,s}h, h \in Y^0$ в элементы $Y^0 \cdot Y^{\pm}$. Именно, покажем, что существуют такие операторы $\{\lambda^{\pm}_{i,s}\}_{i \in I, s \in \mathbb{Z}_+}$, действующие на Y^0, такие, что для произвольного $m \in \mathbb{Z}_+$

$$x^{\pm}_{j,m}\xi = \sum_{s \geq 0} \lambda^{\pm}_{i,s}(\xi) x^{\pm}_{j,m+s}, \tag{6.5.37}$$

причём этим условием операторы определяются однозначно. Покажем также, что определяемые условием (6.5.37) операторы обладают полезными в дальнейшем следующими свойствами. Именно, для произвольных $\xi, \eta \in Y^0$ имеет место равенство

$$\lambda^{\pm}_{i,s}(\xi\eta) = \sum_{k+l=s} \lambda^{\pm}_{i,k}(\xi)\lambda^{\pm}_{i,l}(\eta). \tag{6.5.38}$$

Пусть $\lambda^{\pm}_i(v) : Y^0 \to Y^0[v]$, отображение, определяемое формулой

$$\lambda^{\pm}_i(v)(\xi) = \sum_{s \geq 0} \lambda^{\pm}_{i,s}(\xi) v^s. \tag{6.5.39}$$

Тогда для произвольных $i, j \in I$

$$\lambda^{\pm}_i(v_1)(B_i(v_2)) = B_i(v_2) \mp \frac{q_i^{a_{i,j}v_2} - q_i^{a_{i,j}v_2}}{v_2} e^{v_1 v_2}. \tag{6.5.40}$$

Заметим, что (6.5.37), (6.5.38) сразу следуют из (6.5.26) когда ξ одна из образующих $h_{i,k}$ (супер)алгебры Y^0. Из формулы (6.5.34) следует (6.5.38), поскольку (6.5.38) выполняется для произведения $\xi\eta$ в том и только в том случае когда оно выполняется для произвольных $\xi, \eta \in Y^0$.

Отметим, что из (6.5.37) следует, что

$$x^{\pm}_{i,m}\xi = \lambda^{\pm}_i(T^{\pm}_i)(\xi) x^{\pm}_{i,m}. \tag{6.5.41}$$

Пусть, как и выше, $\widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})}$ – пополнение $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ относительно $\hbar$-адической топологии задаваемой N-градуировкой. Определим отображение Φ на образующих, то есть зададим соответствие

$$\Phi : \{H_{i,r}, E_{i,r}, F_{i,r}\} \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})} \tag{6.5.42}$$

и найдём необходимые и достаточные условия для того, чтобы Φ можно было продолжить до гомоморфизма (супер)алгебр

$$\Phi : U_\hbar(\mathfrak{g}) \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})}.$$

Определим

$$\Phi(H_{i,0}) = d_i^{-1} t_{i,0}$$

и для $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$\Phi(H_{i,r}) = \frac{B_i(r)}{q_i - q_i^{-1}} = \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \sum_{k \geq 0} t_{i,k} \frac{r^k}{k!},$$

где $B_i(v)$ – формальный степенной ряд, определяемый формулой (6.5.34). Определённое соответствие продолжается до гомоморфизма (супер)алгебр $U^0 \to \widehat{Y^0}$, который мы будем обозначать через Φ_0. Сейчас мы определим элементы $\{g^{\pm}_{i,m}\}_{i \in I, m \in \mathbb{Z}_+} \subset \widehat{Y^0}$ формулами:

$$\Phi(E_{i,0}) = \sum_{m \geq 0} g^+_{i,m} x^+_{i,m},$$

$$\Phi(F_{i,0}) = \sum_{m \geq 0} g^-_{i,m} x^-_{i,m}.$$

В терминах операторов сдвига $T_i^{\pm}$ написанные выше формулы мы можем переписать в следующей форме:

$$\Phi(E_{i,0}) = g_i^+(T_i^+) x^+_{i,0}, \tag{6.5.43}$$

$$\Phi(F_{i,0}) = g_i^-(T_i^-) x^-_{i,0}, \tag{6.5.44}$$

где

$$g_i^{\pm}(v) = \sum_{m \geq 0} g^{\pm}_{i,m} v^m \in \widehat{Y^0[v]},$$

где пополнение $Y^0[v]$ определяется Z_+-градуировкой, расширяющей градуировку на Y^0, заданием степени переменной условием $deg(v) = 1$. Покажем, что требование на то, что отображение Φ расширялось до гомоморфизма супералгебр $\Phi : U_{\hbar}(L\mathfrak{g}) \to \widehat{Y_{\hbar}(\mathfrak{g})}$ однозначно определяет его значение на образующих $E_{i,k}, F_{i,k}$.

Предложение 6.5.3. *Отображение Φ совместимо с соотношениями (6.5.12), (6.5.13) тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(E_{i,k}) = \exp(kT_i^+) g_i^+(T_i^+) x^+_{i,0}, \tag{6.5.45}$$

$$\Phi(F_{i,0}) = \exp(kT_i^-) g_i^-(T_i^-) x^-_{i,0}. \tag{6.5.46}$$

Предложение доказывается прямым вычислением.

Следующая теорема следует из доказанного предложения и приведённых выше рассуждений.

Теорема 6.5.2. *Отображение Φ может быть продолжено до гомоморфизма супералгебр $\Phi : U_{\hbar}(L\mathfrak{g}) \to \widehat{Y_{\hbar}(\mathfrak{g})}$ тогда и только тогда когда выполняются следующие условия:*
A) Для произвольных $i, j \in I$

$$g_i^+(u) \lambda_i^+(u)(g_j^-(v)) = g_j^-(v) \lambda_j^-(v)(g_i^+(u))$$

B) Для произвольных $i \in I$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$\exp(ku) g_i^+(u) \lambda_i^+(u)(g_i^-(u)) \mid_{u^m = h_{i,m}} = \Phi^0(\frac{\psi_{i,k} - \phi_{i,k}}{q_i - q_i^{-1}})$$

C) Для произвольных $i, j \in I$ и $a = d_i a_{i,j}/2$

$$g_i^{\pm}(u) \lambda_i^{\pm}(u)(g_j^{\pm}(v)) \left(\frac{\exp(u) - \exp(v \pm a\hbar)}{u - v \mp a\hbar} \right) = g_j^{\pm}(v) \lambda_j^{\pm}(v)(g_i^{\pm}(u))(\frac{\exp(v) - \exp(u \pm a\hbar)}{v - u \mp a\hbar}).$$

Лемма 6.5.2. Φ *совместимо с соотношением (6.5.15) тогда и только тогда, когда выполняются условия (A) и (B) теоремы 6.5.2.*

Данная лемма также доказывается прямыми вычислениями.

Лемма 6.5.3. Φ *совместимо с соотношением (6.5.14) в том и только в том случае, когда выполняется условие (C).*

Совместимость с соотношением (6.5.14) может быть переписана в виде следующего равенства:

$$\Phi(E_{i,k+1})\Phi(E_{j,l}) - q_i^{a_{i,j}}\Phi(E_{i,k})\Phi(E_{j,l}) = q_i^{a_{i,j}}\Phi(E_{j,l})\Phi(E_{i,k+1}) - \Phi(E_{j,l})\Phi(E_{i,k})$$

для произвольных $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$. Предположим сначала, что $i \neq j$ и положим $a = d_i a_{i,j}/2$ так, что $q_i^{a_{i,j}} = e^{a\hbar}$. Заметим теперь, что

$$\Phi(E_{i,r})\Phi(E_{j,s}) = \exp(rT_i^+)\exp(sT_j^+)g_i^+(T_i^+)\lambda_i^+(T_i^+)(g_j^+(T_j^+))x_{i,0}^+x_{j,0}^+.$$

Написанное равенство может быть переписано в следующей форме.

$$\exp(kT_i^+)\exp(lT_j^+)g_i^+(T_i^+)\lambda_i^+(T_i^+)(g_j^+(T_j^+))(\exp(T_i^+) - \exp(T_j^+ + a\hbar))x_{i,0}^+x_{j,0}^+ =$$

$$exp(kT_i^+)\exp(lT_j^+)g_j^+(T_j^+)\lambda_j^+(T_j^+)(g_i^+(T_i^+))(\exp(T_i^+ + a\hbar) - \exp(T_j^+))x_{i,0}^+x_{j,0}^+.$$

Нетрудно видеть, что

$$(\exp(T_i^+) - \exp(T_j^+ + a\hbar))x_{i,0}^+x_{j,0}^+ = \frac{(\exp(T_i^+) - \exp(T_j^+ + a\hbar))}{T_i^+ - T_j^+ - a\hbar}(T_i^+ - T_j^+ - a\hbar)x_{i,0}^+x_{j,0}^+ =$$

$$\frac{(\exp(T_i^+) - \exp(T_j^+ + a\hbar))}{T_i^+ - T_j^+ - a\hbar}(T_i^+ - T_j^+ - a\hbar)x_{j,0}^+x_{i,0}^+$$

Используя теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта мы получаем, что написанное выше равенство, эквивалентно (C).

□

Обсудим теперь единственность определённого выше гомоморфизма. Пусть $\mathfrak{L}$ – множество решений $g = \{g_i^\pm(u)\}_{i\in I}$ уравнений $A) - -C)$ предыдущей теоремы. Для данного набора $r = \{r_i^\pm(u)\}_{i\in I}$ обратимых элементов $\widehat{Y^0[u]}$ положим

$$r \cdot g = \{r_i^\pm(u) \cdot g_i^\pm(u)\}_{i\in I}$$

Лемма 6.5.4. *Пусть $g \in \mathfrak{L}$. Тогда $r \cdot g \in \mathfrak{L}$ в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия.*

A_0 *Для произвольных $i, j \in I$*

$$r_i^+(u)\lambda_i^+(u)(r_j^-(v)) = r_j^-(v)\lambda_j^-(v)(r_i^+(u))$$

B_0 *Для произвольного $i \in I$*

$$r_i^+(u)\lambda_i^+(u)(r_i^-(u)) = 1 = r_i^-(u)\lambda_i^-(u)(r_i^+(u))$$

$C_0^\pm$ *Для произвольных $i, j \in I$*

$$r_i^\pm(u)\lambda_i^\pm(u)(r_j^\pm(v)) = r_j^\pm(v)\lambda_j^\pm(v)(r_i^\pm(u)).$$

Доказательство. Пусть $h = r \cdot g$. Непосредственными вычислениями проверяются следующие утверждения.
i) h удовлетворяет (A) в том и только в том случае, когда r удовлетворяет A_0.
ii) h удовлетворяет (B) если r удовлетворяет B_0.
iii) h удовлетворяет (C) в том и только в том случае, когда r удовлетворяет C_0

Простые вычисления показывают, что что если $h \in \mathfrak{L}$, то r удовлетворяет B_0.

Для завершения доказательства положим

$$c_i(u) = r_i^+(u)\lambda_i^+(u)(r_i^-(u)) = r_i^-(u)\lambda_i^-(u)(r_i^+(u))$$

так, что $r_i^-(u) = c_i(u)\lambda_i^-(u)(r_i^+(u))^{-1}$. В силу (A_0) для произвольных $i, j \in I$ выполняется следующее равенство:

$$r_i^+(u)\lambda_i^+(u)(c_j(v)\lambda_j^-(v)(r_j^+(u))^{-1}) = c_j(v)\lambda_j^-(v)(r_j^+(v))^{-1}\lambda_j^-(v)(r_i^+(u))$$

Так как $\lambda_i^+(u)$ и $\lambda_j^-(v)$ коммутируют, мы получаем

$$\begin{aligned}\lambda_i^+(u)(c_j(v))(r_i^+(u)\lambda_j^-(v)(r_j^+(u))) &= c_j(v)\lambda_j^-(v)(r_i^+(u)\lambda_i^+(u)(r_j^+(v)))\\ = c_j(v)\lambda_j^-(v)(r_j^+(v)\lambda_j^+(v)(r_j^+(u))) &= c_j(v)(r_i^+(u)\lambda_j^-(v)(r_j^+(u)))\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $\lambda_i^+(u)(c_j(v)) = c_j(v)$ для произвольных $i, j \in I$. Отсюда вытекает, что коэффициенты $c_j(v)$ лежат в центре $Y_\hbar(\mathfrak{g})$, который тривиален, который для янгиана базисной супералгебры Ли – тривиален.

□

Из приведённых выше рассуждений и вытекает единственность гомоморфизма Φ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.5.3. *Гомоморфизм*

$$\Phi : U_\hbar(L\mathfrak{g}) \longrightarrow \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})}$$

единственен для $\mathfrak{g} = A(n, m)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

7.1 Заключение

Таким образом, в диссертационной работе построены основы теории янгианов супералгебр Ли. Основные результаты, полученные в диссертации, следующие.
1) Формула универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$.
2) Формула универсальной R-матрицы янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$.
3) Теорема о классификации неприводимых конечномерных представлений янгиана супералгебры Ли $A(m,n)$.
4) Определение янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$, как квантования бисупералгебры Ли полиномиальных токов.
5) Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана супералгебры Ли $A(m,n)$.
6) Доказательство существования псевдотреугольной структуры на янгиане $Y(A(m,n))$.
7) Построение токовой системы образующих и соотношений и эквивалентность её исходной системе образующих и порождающих соотношений.
8) Определение янгиана базисной супералгебры Ли.
9) Формула универсальной R-матрицы янгиана базисной супералгебры Ли.
10) Определение квантового дубля янгиана базисной супералгебры Ли.
11) Определение янгиана странной супералгебры Ли.
12) Определение квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли.
13) Теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $B(m,n)$.
14) Формула универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана базисной супералгебры Ли.
15) Структурная мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли.
16) Определение скрученных янгианов базисных супералгебр Ли. Доказательство существования и единственности деформации скрученных супералгебр токов.
17) Доказательство теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгиана странной супералгебры Ли.
18)Получена мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Ли Каца-Муди типа $A_1^{(1)}$.
19) Определение квантовой аффинной группы Вейля.
20) Определение псевдовыпуклых базисов Пуанкаре-Биркгофа-Витта для квантовой аффинной алгебры с использованием квантовой аффинной группы Вейля.
21) Доказательство изоморфизма пополнения квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры и подалгебры квантовой аффинной супералгебры типа $A^{(1)}(m,n)$.

Следует отметить, что теория янгианов базисных супералгебр Ли далека от окончательного завершения. Важным развитием теории было бы построении законченной теории представлений янгианов базисных супералгебр Ли, включающей теорию характеров, а также распространение построенной теории на янгианы аффинных супералгебр Ли. Тем не менее, уже полученные результаты могут найти и находят приложение в теории суперструн и при исследовании многих моделей статистической механики и квантовой теории поля. Самые важные приложения связаны с явными мультипликативными формулами для универсальных R-матриц квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Ли, а также квантового дубля янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Эти формулы были использованы при вычислении корреляционных функций модели XXY-магнетика Гейзенберга М. Джимбо и Т.Мивой (мультипликативная формула для универсальной R-матрицы квантованной аффинной алгебры), а также рядом авторов при исследовании струнных теорий в рамках AdS-гипотезы (была использована мультипликативная формула универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$). Важную роль для приложений в фундаментальной физике играют результаты по классификации неприводимых представлений янгианов базисных супералгебр Ли. Эти результаты, в числе прочего, могут быть использованы при классификации квантовых R-матриц, например, а также при нахождении явных формул для S-матрицы рассеяния спиновых цепочек. В силу AdS-гипотезы оператор дилатации суперсимметричной четырёхмерной теории полей Янга-Миллса может быть отображён в гамильтониан интегрируемой суперсимметричной цепочки, обобщающей XXZ-магнетик Гейзенберга. Отметим, что S-матрица спиновой цепочки может быть найдена с использованием формулы для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана $Y(A(n,n))$ и evaluation представления. Более того, формула для универсальной R-матрицы даёт возможность исследовать все возможные S-матрицы рассеяния, что является важным при исследовании асимптотических свойств в случае матриц большого размера, которое необходимо в рамках AdS-гипотезы. Кроме того, поскольку спиновая модель тесно связана со струнной суперсимметричной теорий типа IIB, эти результаты могут быть использованы при изучении моделей квантовой теории суперструн. Следовательно, формулы для неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли типа и формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана могут быть использованы при изучении реалистичных суперсимметричных калибровочных теорий полей Янга-Миллса, а также моделей квантовой теории суперструн. На наш взгляд, могут найти применение при изучении связи калибровочных и суперструнных теорий также введённые в данной работе скрученные янгианы в смысле В.Г. Дринфельда, поскольку при исследовании оператора дилатации могут быть использованы интегрируемые модели с более сложной симметрией, связанной с упомянутыми выше скрученными янгианами. Возможны приложения теории скрученных янгианов в теории разомкнутых струн, поскольку такие объекты возникают при решении задач с граничными условиями. Возможно, представляют интерес и методы, развитые при построении теории янгианов классических супералгебр Ли. Доказательство единственности и существования квантования, основанные на когомологических методах исследования. При доказательстве эквивалентности токовой системы образующих и порождающих соотношений исходной системе образующих и определяющих соотношений, полученной в результате квантования были получены явные соотношения, которые могут быть использованы при развитии теории янгианов при исследовании многих других задач. Важными представляются также результаты, относящиеся к описанию структуры квантового дубля янгианов супералгебр Ли, как базисных, так и странной супералгебры Ли. Помимо естественного использования этих формул для нахождения мультипликативных формул универсальных R-матриц квантовых дублей янгианов, они могут быть использованы и при нахождении квантового твиста, а также могут быть использованы и при построении вершинных представлений центральных расширений квантовых дублей янгианов. Отметим, что важной задачей является вычисление образа универсальной R-матрицы в тензорных произведениях конечномерных представлений, а также вычисление фазового множителя, являющегося скалярной S-матрицей. Решению этих задач не уделено достаточного внимания в данной работе, хотя их решение может быть получено развитыми здесь методами, как следствие полученных в данной работе результатов. Важное значение для приложений в теории янгианов может иметь теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Сконструированный при её доказательстве базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта был использован как при получении мультипликативных формул для универсальных R-матриц, так и при исследовании представлений янгианов. При доказательстве теоремы о классификации конечномерных неприводимых представлений янгианов были также использованы методы, дающие возможность начать исследование тензорных произведений неприводимых представлений. Определённое значение для развития теории квантовых алгебр имело также понятие аффинной квантовой группы Вейля введённое автором в соавторстве с С.З. Левендорским и Я.С. Сойбельманом. С его помощью естественным образом вводится и получает геометрическую интерпретацию понятие выпуклых базисов, развитое в дальнейшем Дж. Беком и Дж. Люстигом. В дальнейшем эти теории были глубоко развиты многими авторами и нашли многочисленные применения при решения разнообразных задач теории представлений. Следует также ещё раз подчеркнуть, что в данной работе построены лишь основы теории янгианов классических супералгебр Ли и многие интересные вопросы этой теории ещё ждут своего разрешения.

Приложение A

Скрученные янгианы базисных супералгебр Ли

A.1 Введение

Данное приложение содержит результаты, являющиеся естественным продолжением и обобщением результатов главы 5. Здесь мы рассматриваем общую конструкцию квантования скрученной супералгебры Ли полиномиальных токов со значениями в базисной супералгебре Ли и скручиванием, порождённым диаграммным автоморфизмом. В этом случае в ситуации общего положения супералгебра Ли токов не является косупералгеброй Ли, а лишь комодулем над нескрученной супералгеброй Ли токов. Мы обобщаем конструкцию квантования бисупералгебры Ли, рассмотренную выше на случай квантования пары – бисупералгебры Ли и комодульной супералгебры (то есть супералгебры Ли и комодуля). Это довольно общая конструкция, как нам кажется может быть полезна при рассмотрении точно решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля с граничными условиями. Отметим, что в случае когда комодульная супералгебра превращается бисупералгебру эта общая конструкция превращается в квантование, рассмотренное в предыдущей главе. К сожалению нам неизвестно других примеров за исключением, рассмотренного в предыдущей главе, когда ещё так может быть. Следует также отметить, что близкая по духу конструкция появилась ранее в работах Г.Ольшанского, М. Назарова, А. Молева (см. [220], [217]), в которых были введены так называемые скрученные янгианы, которые не являются алгебрами Хопфа, но наделены структурой комодуля. При их введении был использован РТФ-подход в теории янгианов, двойственный подходу В.Г. Дринфельда. Но эти авторы использовали автоморфизмы, связанные с полной линейной алгеброй. Мы вводим аналогичные объекты используя подход В.Г. Дринфельда и диаграммные автоморфизмы для произвольной базисной супералгебры Ли. Следует сказать, что, по существу, мы рассматриваем очень ограниченное число примеров такой конструкции. Построение общей теории таких объектов – дело будущего. Следует также сказать, что явное построение изоморфизма между объектами полученными на основе этих двух подходов является нетривиальной задачей основанной на треугольном (или гауссовском) разложении. Ещё раз отметим, что подход Дринфельда, являющийся более общим позволяет распространить даннную конструкцию на янгианы исключительных алгебр Ли. Как отмечено выше, мы будем рассматривать данные конструкции в ещё большей общности – в рамках классических супералгебр Ли.

Ещё раз отметим, что одним из примеров скрученного янгиана, который рассматривается в этой главе, является янгиан странной супералгебры Ли типа Q_n, рассмотренный в предыдущей главе. Мы здесь определяем скрученный янгиан, в случае диаграммного автоморфизма второго порядка на $A(n,n)$ и ещё раз получаем янгиан странной супералгебры Ли из этого скрученного янгиана.

Вообще говоря, вычисление универсальной R- матрицы для квантового дубля скрученного янгиана основано на идеях, использованных выше. Но в случае скрученного янгиана мы имеем дело уже не всегда с супералгеброй Хопфа. В общем случае само определение универсальной R-матрицы трансформируется. Это новое определение универсальной R-матрицы для скрученного янгиана мы обсуждаем ниже в данной главе. Здесь мы также основываемся на методах, развитых в предыдущих главах, и применяем их для случая янгианных деформаций скрученных алгебр токов. Основной результат данной главы – определение нового класса объектов, называемых "скрученными янгианами". Следуя подходу В.Г. Дринфельда ([120]) мы описываем некоммутативную (и некокоммутативную) деформацию скрученных супералгебр Ли полиномиальных токов (связанных с рациональными решениями уравнения Янга-Бакстера). В идейном плане такая деформация похожа на деформации однородных пространств, приводящие к квантовым однородным пространствам, что неудивительно ввиду тесной связи однородных пространств и скрученных алгебр токов ([125]). Заметим, что вопрос обоснования корректности определения (существования и единственности квантования) в общем случае требует вычисления когомологий Хохшильда ([192]). Мы также проводим такие вычисления, обосновывая таким образом корректность введения скрученного янгиана.

Важно отметить, что такой подход, основанный на явном построении деформаций скрученных алгебр токов, обладая большой общностью, возможно приводит к объектам, связанным со скрученными янгианами, введенными ранее Г.И. Ольшанским, М.Л. Назаровым и А.И. Молевым. Чтобы различать эти два типа объектов мы будем использовать термины "скрученные янгианы в смысле Дринфельда"и "скрученные янгианы в смысле Ольшанского-Назарова-Молева". Отметим, что "скрученные янгианы в смысле Дринфельда"можно пытаться определить для более широкого класса (супер)алгебр Ли чем "скрученные янгианы в смысле Ольшанского". Естественный вопрос состоит в том изоморфны ли эти объекты для тех супералгебр Ли для которых они оба определены. Гипотеза состоит в том, что они изоморфны. Интересно было бы найти явные формулы, задающие такой изоморфизм, в случае положительного ответа на предыдущий вопрос.

Мы также обсуждаем возможные подходы к решению задачи о вычислении универсальной R- матрицы для квантового дубля янгиана супералгебры Ли Q_2 (и скрученного янгиана супералгебры Ли $A(1,1)$). Мы рассматриваем также некоторые другие примеры скрученных янгианов, связанные с базисными супералгебрами Ли типов $A(n,n)$, $B(m,n)$, $C(n+1)$, $D(m,n)$, а также с диаграммными автоморфизмами этих супералгебр Ли. (Отметим, что мы рассматриваем скрученные янгианы для странной ортосимплектической супералгебр Ли.) Несколько подробнее мы рассматриваем случай супералгебры Ли типа $B(m,n)$ и соответствующего диаграммного автоморфизма второго порядка. Отметим, что интересный, но оставшийся не разобранным в рамках нашей работы, пример, это янгиан странной супералгебры Ли типа $P(n)$, который связан с супералгеброй Ли $A(n,n)$ и диаграммным её автоморфизмом специального вида, также вкладывается в предложенную схему.

Данное приложение организовано следующим образом. В первом параграфе мы определяем, так называемые четверки Манина и эквивалентные им объекты, которые мы называем полубиалгебрами Ли. Мы рассматриваем примеры четверок Манина (и полубиалгебр Ли) связанные со скрученными алгебрами полиномиальных токов. Вычисляем для них классическую r-матрицу и описываем структуру полубиалгебр Ли и структуры бисупералгебр Ли для некоторых частных случаев. Отметим, что в случае квантовых групп и квантовых алгебр, связанных с тригонометрическим решениями квантового уравнения

Янга-Бакстера квантования этих объектов приводят к квантовым однородным пространствам, а в нашем случае, связанном с рациональными решениями уравнения Янга-Бакстера мы получаем скрученные янгианы. Во втором и третьем параграфах мы описываем квантование структур бисуперaлгебр Ли (и полубиалгебр Ли) для примеров, рассмотренных в первом параграфе. Основной результат здесь - описание системы образующих и определяющих соотношений, для рассмотренных примеров. В четвертом параграфе мы получаем аналоги токовых систем образующих и соотношений для определенных перед этим скрученных янгианов. В пятом параграфе мы описываем квантовые дубли для скрученных янгианов, а в шестом треугольное разложение. В отмеченных выше примерах, связанных с супералгеброй Ли типа $A(n, n)$ и автоморфизмом второго порядка скрученные янгианы являются супералгебрами Хопфа и поэтому их квантовые дубли обладают структурами квазитреугольных супералгебр Хопфа. Как отмечено выше, скрученный янгиан, вообще говоря, не является (супер)алгеброй Хопфа, а только комодульной супералгеброй.

Пусть $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел и k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

A.2 Четверки Манина и их некоммутативные деформации

A.2.1 Супералгебра Ли скрученных токов

Мы будем использовать определения бисуперaлгебры Ли и тройки Манина из главы 1.

Нам потребуется также определение квазилиевой бисуперaлгебры.

Определение A.2.1. *Квазилиева бисуперaлгебра – это тройка* $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$*, где* $\mathfrak{g}$ *– супералгебра Ли,* δ *– это 1-коцикл* $\delta : \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$*,* $\varphi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$*, причём должны выполняться равенства:*

$$\frac{1}{2} Alt(\delta \otimes id)\delta(x) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x, \varphi], \quad x \in \mathfrak{g}, \tag{A.2.1}$$

$$Alt(\delta \otimes id \otimes id)(\varphi) = 0. \tag{A.2.2}$$

Следующее определение является важным для понимания утверждений данной главы.

Определение A.2.2. *Четверкой Манина называется четверка* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{H})$*, где* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ *– тройка Манина, а* $\mathfrak{H}$ *лагранжева подалгебра в* $\mathfrak{P}$*.*

Рассмотрим следующие два примера тройки и четверки Манина.

Пусть $\mathfrak{g}$ базисная супералгебра Ли. Рассмотрим следующую тройку Манина $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$:

$$(\mathfrak{P} = \mathfrak{g}((u^{-1})), \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u], \mathfrak{P}_2 = (u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])$$

Определим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{P}$ формулой:

$$\langle f, g \rangle = res_{\infty}(f(u), g(u))du, \tag{A.2.3}$$

где $res(\sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot u^k)du := a_{-1}$, $(\cdot, \cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$. (Как выше было отмечено, такая форма существует на базисной супералгебре Ли.) Ясно, что $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ – изотропные подсупералгебры относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Опишем структуры бисуперaлгебры Ли на $\mathfrak{g}[u]$. Пусть $\{e_i\}$ базис в $\mathfrak{g}$ а $\{e^i\}$, двойственный ему относительно формы $(\cdot, \cdot)$, базис в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{t} = \sum e_i \otimes e^i$. Давайте рассмотрим также базис $\{e_{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_1$ и двойственный ему относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ базис $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$ которые определяются следующими формулами:

$$e_{i,k} = e_i \cdot u^k, k \in \mathbb{Z}_+, \tag{A.2.4}$$

$$e^{i,k} = e^i \cdot u^{-k-1}, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{A.2.5}$$

Вычислим канонический элемент r, определяющий кокоммутатор в $\mathfrak{P}$.

$$r = \sum e_{i,k} \oplus e^{i,k} = \sum_{k \in Z_+} \sum_i e_i \cdot v^k \otimes e^i \cdot u^{-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum e_i \otimes e^i) \cdot u^{-1} (\frac{v}{u})^k = \mathfrak{t} \frac{u^{-1}}{(1-(v/u)} = \frac{\mathfrak{t}}{u-v}.$$

Обозначим $r(u,v) := r$. Тогда формула для кокоммутатора δ примет следующий вид:

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r(u,v)].$$

Предложение A.2.1. *Элемент $r(v,u)$ обладает следующими свойствами:*
1) $r(u,v) = -r^{21}(u,v)$;
2)

$$[r^{12}(u,v), r^{13}(u,w)] + [r^{12}(u,v), r^{23}(v,w)] + [r^{13}(u,w), r^{23}(v,w)] = 0.$$

Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли, а

$$\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

диаграммный автоморфизм m-го порядка, то есть $\sigma^m = id$, $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ – его собственные значения. Легко видеть, что $\varepsilon_k = \dfrac{2\pi k \mathrm{i}}{m}$. Пусть также

$$\mathfrak{g}_k = Ker(\sigma - \varepsilon_k I)$$

его собственные подпространства, так, что

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \mathfrak{g}_k.$$

Построим по $\mathfrak{g}$ и σ скрученную токовую супералгебру Ли $\mathfrak{g}^{(m)}$. Сначала продолжим действие автоморфизма σ на алгебру Ли $\mathfrak{g}((t^{-1}))$:

$$\tilde{\sigma} : \mathfrak{g}((t^{-1})) \to \mathfrak{g}((t^{-1}))$$

формулой:

$$\tilde{\sigma}(a \otimes t^k) = \sigma(a) \otimes (\varepsilon_1^{-1} t)^k. \tag{A.2.6}$$

Множество неподвижных точек этого автоморфизма и есть определяемая скрученная супералгебра Ли:

$$\mathfrak{g}^{(m)} = \mathfrak{g}((t))^{\tilde{\sigma}}.$$

Пусть также $\mathfrak{g}_1^{(m)} = \mathfrak{g}^{(m)} \bigcap \mathfrak{g}[t]$. Хорошо известно, что на базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ определена невырожденная инвариантная билинейная невырожденная форма (чётная или нечётная) (см., например, [32]). Хорошо известно, что собственные подпространства $\mathfrak{g}_k$,

$k = 0, 1, \ldots, m-1$ диаграммного автоморфизма σ спарены следующим образом (см. главу 1 нашей работы).

В случае, когда на супералгебре Ли форма Киллинга невырожденна $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) = 0$ при $k+l \neq \bar{0}$ и $\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l$ спарены невырожденно (относительно этой формы), при $k+l = \bar{0}$. В случае супералгебры Ли $A(n,n)$ и невырожденной формы, равной следу произведения матриц (в этом случае $m = 2$), спаривание относительно этой формы удовлетворяет следующим условиям $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) = 0$ при $k = l$, а $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$ спарены невырожденно.

A.2.2 Примеры скрученных токовых супералгебр Ли

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{g} = A(n,n))$. В этом случае мы определим сначала автоморфизм на $\tilde{A}(n,n)$. Мы рассмотрим два способа задания этого автоморфизма. В первом случае (рассмотренном ранее и приводящем к странной супералгебре Ли Q_n) зададим его на матричных единицах E_{ij} формулой: $\sigma'(E_{ij}) = E_{-i,-j}$. Так как $\sigma'(Z) = Z$, то определена проекция отображения σ' на $A(n-1, n-1)$, которую мы обозначаем через $\sigma : A(n-1,n-1) \to A(n-1,n-1)$.

Пусть $\mathfrak{g} = A(n-1,n-1)$. Нетрудно понять, что $\sigma^2 = id$ и, следовательно, собственные значения σ равны ± 1. Пусть $\epsilon = 1, j \in \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathfrak{g}^j = Ker(\sigma - \epsilon^j E)$ собственное подпространство линейного оператора σ. Имеет место разложение:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1,$$

где $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^\sigma$ множество неподвижных точек автоморфизма σ, образующих подсупералгебру Ли. Обозначим $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^\sigma$ через Q_{n-1}. Это и есть "странная"супералгебра Ли Q_{n-1}. Легко проверить, что прообраз Q_{n-1} относительно отображения $\tilde{A}(n-1,n-1) \to A(n-1,n-1)$, который мы обозначаем через $\tilde{Q}_{n-1}$ состоит из следующих матриц:

$$\tilde{Q}_{n-1} = \tilde{\mathfrak{g}}^0 = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A, B \in \mathfrak{sl}(n)\}, \tilde{\mathfrak{g}}^1 = \{\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} : C, D \in \mathfrak{sl}(n)\}.$$

Пусть $\mathfrak{g} = A(n-1,n-1)$, $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – автоморфизм 2-го порядка, определённый выше, $\epsilon = -1, \mathfrak{g}^j = Ker(\sigma - \epsilon^j E), \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$. Продолжим автоморфизм σ до автоморфизма $\tilde{\sigma} : \mathfrak{g}((u^{-1})) \to \mathfrak{g}((u^{-1}))$, лорановских рядов со значениями в $\mathfrak{g}$ по формуле ([12]):

$$\tilde{\sigma}(x \cdot u^j) = \sigma(x)(-u)^j. \tag{A.2.7}$$

Во втором случае зададим автоморфизм $\varsigma : A(n-1,n-1) \to A(n-1,n-1)$ на матричных единицах формулами:

$$\varsigma(E_{i,-j}) = E_{j,i}, \quad i,j \in \pm\{1,\ldots,n\}, \tag{A.2.8}$$

$$\varsigma(E_{i,j}) = -E_{j,i}, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{A.2.9}$$

$$\varsigma(E_{-i,-j}) = E_{-j,-i}, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{A.2.10}$$

Так же как и выше, определим автоморфизм соответствующей токовой супералгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g} = A(n-1,n-1)$, $\varsigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – автоморфизм 2-го порядка, определённый выше, $\epsilon = -1, \quad \mathfrak{g}^j = Ker(\varsigma - \epsilon^j E), \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$. Продолжим автоморфизм ς до автоморфизма $\tilde{\varsigma} : \mathfrak{g}((u^{-1})) \to \mathfrak{g}((u^{-1}))$, лорановских рядов со значениями в $\mathfrak{g}$ по формуле ([12]):

$$\tilde{\varsigma}(x \cdot u^j) = \varsigma(x)(-u)^j. \tag{A.2.11}$$

Определим теперь структуру тройки (четвёрки) Маниана на скрученной супералгебре Ли $\mathfrak{g}^{(m)}$. Рассмотрим следующую тройку $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$: $(\mathfrak{P} = \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}}, \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}, \mathfrak{P}_2 = (u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])^{\tilde{\sigma}}$.

Определим билинейную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{P}$ по формуле:

$$\langle f,g\rangle = res_{u=\infty}(f(u),g(u))du, \tag{A.2.12}$$

где $res_{u=\infty}(\sum_{k=-\infty}^{n} a_k\cdot u^k) := a_{-1}$, $(\cdot,\cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$.

Отметим, что определённая таким образом тройка, как отмечено ранее, является тройкой Манина.

Аналогично, определим тройку $(\tilde{\mathfrak{P}},\tilde{\mathfrak{P}}_1,\tilde{\mathfrak{P}}_2)$: $(\tilde{\mathfrak{P}}=\mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\varsigma}},\tilde{\mathfrak{P}}_1=\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\varsigma}},\tilde{\mathfrak{P}}_2=(u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])^{\tilde{\varsigma}}$.

Ясно, что $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2$ (а также $\tilde{\mathfrak{P}}_1,\tilde{\mathfrak{P}}_1$) – изотропные подсупералгебры относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Опишем теперь тройки и четвёрки Манина, связанные с определёнными выше скрученными токовыми супералгебрами Ли.

Рассмотрим сначала случай $\mathfrak{g}=A(n,n)$

Легко проверить также, что имеют место следующие разложения:

$$\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\mathfrak{g}^0\cdot u^{2k}\oplus\mathfrak{g}^1\cdot u^{2k+1}), \tag{A.2.13}$$

$$\mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}^0\cdot u^{2k}\oplus\mathfrak{g}^1\cdot u^{2k+1}). \tag{A.2.14}$$

В рамках данного параграфа мы будем использовать обозначение $\tilde{\sigma}$, как для автоморфизма $\tilde{\sigma}$, так и для автоморфизма $\tilde{\varsigma}$ токовой супералгебры Ли со значениями в базисной супералгебре Ли типа $A(n,n)$.

Опишем структуры бисупералгебры Ли на $\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}$. Пусть $\{e_i\}$ базис в $\mathfrak{g}^0$ а $\{e^i\}$ двойственный ему относительно формы $(\cdot,\cdot)$ базис в $\mathfrak{g}^1$. Пусть $\mathfrak{t}_0=\sum e_i\otimes e^i, t_1=\sum e^i\otimes e_i, \mathfrak{t}=\mathfrak{t}_0+\mathfrak{t}_1$. Давайте рассмотрим также базис $\{e_{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_1$ и двойственный ему относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ базис $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$, которые определяются следующими формулами:

$$e_{i,2k}=e_i\cdot u^{2k},\quad e_{i,2k+1}=e^i\cdot u^{2k+1},\quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{A.2.15}$$

$$e^{i,2k}=e^i\cdot u^{-2k-1},\quad e^{i,2k+1}=e_i\cdot u^{-2k-2},\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{A.2.16}$$

Вычислим канонический элемент r, определяющий кокоммутатор в $\mathfrak{P}$.

$$\begin{gathered}
r=\sum e_{i,k}\oplus e^{i,k}=\sum_{k\in Z}\sum_i(e_i\cdot v^{2k}\otimes e^i\cdot u^{-2k-1}+\\
e^i\cdot v^{2k+1}\otimes e_i\cdot u^{-2k-2})=\sum_{k=0}^{\infty}((\sum e_i\otimes e^i)\cdot u^{-1}(\frac{v}{u})^{2k}+\\
\sum_{k=0}^{\infty}((\sum e^i\otimes e_i)\cdot u^{-1}(\frac{v}{u})^{2k+1})=\mathfrak{t}_0\frac{u^{-1}}{(1-(v/u)^2)}+t_1\frac{u^{-1}(v/u)}{1-(v/u)^2}=\\
\frac{\mathfrak{t}_0\cdot u}{(u^2-v^2)}+\frac{\mathfrak{t}_1\cdot v}{u^2-v^2}=\tfrac{1}{2}(\frac{1}{u-v}+\frac{1}{u+v})\mathfrak{t}_0+(1/2)(\frac{1}{u-v}-\frac{1}{u+v})\mathfrak{t}_1=\\
\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0+\mathfrak{t}_1}{u-v}+\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0-\mathfrak{t}_1}{u+v}=\tfrac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(\sigma^k\otimes id)(\mathfrak{t})}{u-\epsilon^k\cdot v}.
\end{gathered}$$

Обозначим $r_\sigma(u,v):=r$. Тогда формула для кокоммутатора δ примет следующий вид:

$$\delta: a(u)\to[a(u)\otimes 1+1\otimes a(v), r_\sigma(u,v)].$$

Предложение A.2.2. *Элемент $r_\sigma(v,u)$ обладает следующими свойствами:*
1) $r_\sigma(u,v)=-r_\sigma^{21}(u,v)$;
2)$[r_\sigma^{12}(u,v),r_\sigma^{13}(u,w)]+[r_\sigma^{12}(u,v),r_\sigma^{23}(v,w)]+[r_\sigma^{13}(u,w),r_\sigma^{23}(v,w)]=0$.

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{t}_0^{21} = \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_1^{21} = \mathfrak{t}_0$. Тогда $r_\sigma^{21}(v,u) = \frac{1}{2}\dfrac{\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_0}{v-u} + \frac{1}{2}\dfrac{\mathfrak{t}_1 - \mathfrak{t}_0}{v+u} = -r_\sigma(u,v)$. Пункт 2) следует из того факта, что канонический элемент r удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE) $\langle r, r\rangle = 0$. Действительно, функция $r(u,v) = \dfrac{\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1}{u-v} = \dfrac{\mathfrak{t}}{u-v}$ удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера (CYBE) (см. [120]):

$$[r_{12}(u,v), r_{13}(u,w)] + [r_{12}(u,v), r_{23}(v,w)] + [r_{13}(u,w), r_{23}(v,w)] = 0. \tag{A.2.17}$$

Пусть $s = -id$. Применим к левой части (A.2.17) оператор $id \otimes s^k \otimes s^l (k, l \in \mathbb{Z}_2)$ и подставим $(-1)^k \cdot v, (-1)^l \cdot w$ вместо v, w, соответственно. Суммируя по $k, l \in \mathbb{Z}_2$ и используя тот факт, что $(s \otimes s)(\mathfrak{t}) = -\mathfrak{t}$ мы получим, что левая часть удовлетворяет пункту 2 данного предложения. ☐

Замечание 6. *Отметим, что и супералгебра Ли типа $B(m,n)$ может быть определена как множество неподвижных точек автоморфизма 2 порядка, задаваемого формулой:*

$$s : A(\in \mathfrak{gl}_\alpha(2m+1, 2n)) \longmapsto i^\alpha B A^T B^{-1}, \alpha \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} iE_{2m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что s – автоморфизм 2 порядка. В этом случае мы также можем определить скрученную супералгебру Ли токов.

A.2.3 Бисупералгебры Ли и полубисупералгебры Ли

Рассмотрим теперь общую конструкцию. Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная супералгебра Ли, $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – автоморфизм конечного порядка m, ϵ – примитивный корень m-ой степени из 1 (например, $\epsilon = \varepsilon_1$), $\mathfrak{g}^j = Ker(\sigma - \epsilon^j E), \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$. Продолжим автоморфизм σ до автоморфизма $\tilde{\sigma} : \mathfrak{g}((u^{-1})) \to \mathfrak{g}((u^{-1}))$, лорановских рядов со значениями в $\mathfrak{g}$ по формуле:

$$\tilde{\sigma}(x \cdot u^j) = \sigma(x)(-u)^j. \tag{A.2.18}$$

Рассмотрим следующую четверку Манина $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{H})$: $\mathfrak{P} = \mathfrak{g}((u^{-1}))$, $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u], \mathfrak{P}_2 = (u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]]), \mathfrak{H} = \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}}$.

Пусть $\mathfrak{H}_-$ – ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{P}$ в $\mathfrak{P}_2$.

Классификация автоморфизмов базисных супералгебр Ли получена впервые в работах [43], [44] (см. также работу [199]). Мы рассмотрим, связанные с ними скрученные супералгебры токов.

Отметим, что с нашей точки зрения наибольший интерес помимо странной супералгебры Ли типа Q_n и связанной с ней группы автоморфизмов супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,n)$ представляет вторая странная супералгебра Ли P_n и связанная с ней группа автоморфизмов супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,n)$. Но в данной работе мы подробно не рассматриваем янгиан этой второй странной супералгебры Ли.

Связь четверок Манина и пуассоновых однородных пространств описана в [125]. Напомним определение однородного пуассонова пространства. Если X – алгебраическое многообразие над полем k, $\mathfrak{O}_X$ – структурный пучок, то X называется пуассоновым многообразием если $\mathfrak{O}_X$ является пучком пуассоновых алгебр. Пуассоново однородное пространство это однородное пространство, являющееся пуассоновым многообразием (см. [125]).

Напомним, что понятие тройки Манина эквивалентно понятию биалгебры Ли (супербиалгебры Ли). Аналогом четверки Манина является полубиалгебра Ли (суперполубиалгебра Ли) и каждая четверка Манина определяет пуассоново однородное пространство.

Определение А.2.3. *Полубиалгеброй Ли (Lie Semibialgebra) будем называть пару таких алгебр Ли* (A_0, B_0)*, что:*
1) A_0 *– биалгебра Ли;*
2) B_0 *подалгебра Ли алгебры Ли* A_0*;*
3) задана такая коскобка $\delta_1 : B_0 \to A_0 \otimes B_0$*, что* δ_1 *– 1-коцикл на* B_0 *со значениями в* $A_0 \otimes B_0$.

Предполагается, что B_0 действует на $A_0 \otimes B_0$ по формуле

$$b_1 \cdot (a \otimes b_2) = [b_1 \otimes 1 + 1 \otimes b_1, a \otimes b_2] = [b_1, a] \otimes b_2 + a \otimes [b_1, b_2]. \tag{A.2.19}$$

Предложение А.2.3. *Четверка Манина эквивалентна полубиалгебре Ли.*

Доказательство. Отметим, что структура тройки Манина эквивалентна структуре биалгебры Ли (см. [120]). B_0 подалгебра, а условие 3 эквивалентно тому, $B_0 \oplus B_0^{ort}$, где B_0^{ort} – ортогональное дополнение B_0^{ort} в $\mathfrak{P}_2$, является лагранжевой подалгеброй Ли алгебры Ли $A_0 \oplus A_0^*$. $\triangle$

Предложение А.2.4. *(см. [12]). А) Пусть* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}_j$*– простая алгебра Ли,* $(\cdot|\cdot)$ *– невырожденная инвариантная билинейная форма на* $\mathfrak{g}$*. Тогда*
1)$(\mathfrak{g}_i|\mathfrak{g}_j) = 0$*, если* $i \neq j$*, и* $\mathfrak{g}_i$ *и* $\mathfrak{g}_j$ *невырожденно спарены, если* $\bar{i} + \bar{j} = \bar{0}$*;*
2)$\mathfrak{g}_0$ *– редуктивная подалгебра в* $\mathfrak{g}_0$*;*
3)централизатор подалгебры Картана $\mathfrak{h}_0$ *в* $\mathfrak{g}$ *является подалгеброй Картана в* $\mathfrak{g}$.
В) Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}_j$*– базисная супералгебра Ли,* $(\cdot|\cdot)$ *– невырожденная инвариантная билинейная форма на* $\mathfrak{g}$*. Тогда*
1)$\mathfrak{g}_0$ *– редуктивная подалгебра в* $\mathfrak{g}_0$*;*
2)централизатор подалгебры Картана $\mathfrak{h}_0$ *в* $\mathfrak{g}$ *является подалгеброй Картана в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. А), 1). Для $x \in \mathfrak{g}_i, \quad y \in \mathfrak{g}_j$ имеем

$$(x|y) = (\sigma(x)|\sigma(y)) = (\epsilon^i \cdot z|\epsilon^j \cdot y) = \epsilon^{i+j}(x|y).$$

Поэтому $i + j = m$. Пункт А), 1) доказан. В этом месте существенным является то, что $(\cdot|\cdot)$ – инвариантная билинейная форма. В случае, когда $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, эта инвариантная форма совпадает с формой Киллинга, которая также инвариантна относительно алгебры всех дифференцирований (внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре всех дифференцирований). Поэтому эта форма Киллинга инвариантна относительно группы внешних автоморфизмов. Отметим, что в случае (базисных) супералгебр Ли ситуация другая. Вообще говоря на базисной супералгебре Ли может не существовать невырожденная форма Киллинга. (Рассмотренный выше пример супералгебры Ли $A(n, n)$ и автоморфизма σ показывает, что пункт 1) из А) не переносится на базисные супералгебры Ли.) Пункты 2), 3) из А) доказаны в [12].

Пункты 1), 2) из В) доказываются аналогично. $\square$

A.3 Квантование. Определение скрученного янгиана

Определение A.3.1. *Квантованием полубиалгебры Ли* (A_0, B_0) *называется такая пара алгебр* A, B *над кольцом формальных степенных рядов* $k[[\hbar]]$*, что*
1) A *– алгебра Хопфа;*
2) B *– алгебра и комодуль над* A*;*
3)A, B *– свободные топологические* $k[[\hbar]]$*– модули;*
4) $A/\hbar A \cong U(A_0), B/\hbar B \cong U(B_0)$*;*
5)

$$(\Delta(a) - \Delta^{op}(a)) mod \hbar = \delta(a_0), \forall a \in A; \tag{A.3.1}$$

$$(\Delta_1(b) - \Delta_1^{op}(b)) mod \hbar = \delta_1(b_0), \forall b \in B. \tag{A.3.2}$$

6)Выполняется также условие однородности, из которого вытекает, что квантование является плоской деформацией. Именно, $A/\hbar A \cong U(A_0)$*,* $B/\hbar B \cong U(B_0)$ *как градуированные алгебры над* C*.*

Здесь $\Delta : A \to A \otimes A, \quad \Delta_1 : B \to A \otimes B$ *– морфизмы алгебр,* $a_0 = pr(a), \quad b_0 = pr_1(b)$*,* $pr : A \to A_0, \quad pr_1 : B \to B_0$ *– естественные проекции,* $U(\mathfrak{g})$ *универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$*.*

Пусть $HH^i(X, Y), i = 1, 2$ группа когомологий Хохшильда ассоциативной алгебры Ли X с коэффициентами в бимодуле Y. Для доказательства существования квантования надо показать, что вторые когомологии Хохшильда универсальной обертывающей алгебры исходной полубиалгебры Ли с коэффициентами в бимодуле, являющемся скрученной подалгеброй токов, равны 0 (см. [192]). Рассмотрим $HH^i(U(B_0), U(A_0)), i = 1, 2$. Явными вычислениями можно показать, что в случае полупростого модуля A_0 и $i = 1, 2$ каждый коцикл является кограницей в случае $B_0 = A(n, n)[t])$. Проведём эти рассуждения более строго.

Теорема A.3.1. *Квантование* $A_\hbar$ *полубисупералгебры Ли* $(G[u], G[u]^{\tilde{\sigma}})$ *существует и единственно.*

Доказательство теоремы A.3.1.

Доказательство. Пусть $HH^i(X, Y), i = 1, 2$ группа когомологий Хохшильда ассоциативной супералгебры X с коэффициентами в бимодуле Y. Мы будем рассматривать только чётные когомологии Хохшильда. Для доказательства существования квантования надо показать, что вторые когомологии Хохшильда универсальной обёртывающей алгебры исходной скрученной супералгебры Ли $U(B_0) = U(G[u]^{\tilde{\sigma}})$ с коэффициентами в бимодуле, являющемся тензорным квадратом исходной скрученной бисупералгебры Ли токов, равны 0. Рассмотрим $HH^i(U(B_0), U(B_0) \otimes U(B_0)), i = 1, 2$. Явными вычислениями можно показать, что в этом случае коцикл, задающий структуру бисупералгебры на $G[u]$, является кограницей. Аналогично доказываемое утверждение, по существу было доказано в предыдущей главе. Опишем схему доказательства данной теоремы. Будем использовать во время доказательства следующее обозначение $\mathfrak{g} = B_0$. Рассмотрим комплекс

$$0 \to k \to U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{\otimes 2} \to U(\mathfrak{g})^{\otimes 3} \to \dots \tag{A.3.3}$$

с дифференциалами $d_k : U(\mathfrak{g})^{\otimes k} \to U(\mathfrak{g})^{\otimes (k+1)}$, определяемыми формулами

$$d_k = \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i d_k^i, d_k^i(a_1 \otimes \dots a_k) = a_1 \otimes \dots a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \dots a_k, 1 < i < k,$$
$$d_k^0(x) = 1 \otimes x, d_k^k = x \otimes x. \tag{A.3.4}$$

Заметим, что когомологии H^k этого комплекса совпадают с когомологиями следующего комплекса (с теми же самыми дифференциалами):

$$0 \to D_0 \to D_1 \to D_2 \to \dots, \tag{A.3.5}$$

где $D_k = Kers_k^1 \bigcap Kers_k^2 \bigcap \dots Kers_k^k, s_k^i = \epsilon(a_i)a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \dots a_k$.

Последний факт обосновывается следующим образом. Сначала проверяется, сужение дифференциалов переводит коциклы в коциклы, а когpаницы в когpаницы, откуда следует корректность отображения когомологий одного комплекса на другой. Несложно проверяется биективность построенного отображения. Далее заметим, что $d_k(\mathfrak{g}^{\otimes k}) = 0$. Отсюда следует существование отображения $\mathfrak{g}^{\otimes k} \to H^k$. Его ограничение на $\bigwedge^k \mathfrak{g}$ обозначим через μ. Стандартными рассуждениями показывается, что μ – изоморфизм. Нетривиальным здесь является доказательство сюръективности.

Отметим, что доказательство сюръективности, в силу теоремы
Пуанкаре-Биркгофа-Витта для универсальных обёртывающих суперaлгебр Ли, сводится к сюръективности сужения для следующего комплекса, эквивалентного исходному:

$$0 \to k \to Sym^*(\mathfrak{g}) \to Sym^*(\mathfrak{g}) \otimes Sym^*(\mathfrak{g}) \to \dots. \tag{A.3.6}$$

Осталось показать, что первые и вторые когомологии последнего комплекса – нулевые. Последнее, может быть проверено непосредственно. Первый шаг состоит в вычислении когомологий с тривиальными коэффициентами, основанной на рассмотрении спектральной последовательности Серра-Хохшильда. Далее случай когомологий с коэффициентами в модуле коэффициентов сводится к случаю тривиальных когомологий тензорно умноженных на модуль инвариантов.

□

Отметим, что доказательство данной теоремы неконструктивно. Хотя теорема и гарантирует существование и единственность квантования, но не даёт ответ на вопрос как получить явное описание получающейся при квантовании суперaлгебры Хопфа. Ниже мы получим такое точное описание.

Предложение A.3.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ – суперaлгебра Ли с инвариантной билинейной формой $(\cdot,\cdot)$; $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные относительно этой билинейной формы базисы. Тогда для каждого элемента $g \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство:*

$$[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i] = -[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i]. \tag{A.3.7}$$

Доказательство. Из определения инвариантной билинейной формы вытекает следующее равенство:

$$([g,a],b) = -(-1)^{deg(g)deg(a)}([a,g],b) = -(-1)^{deg(g)deg(a)}(a,[g,b])$$

для $\forall a, b \in \mathfrak{A}$. Следовательно,

$$([g,e_i],e^i) = -(-1)^{deg(g)deg(a)}([e_i,g],e^i) = -(-1)^{deg(g)deg(a)}(e_i,[g,e^i]). \tag{A.3.8}$$

Скалярное произведение на векторном пространстве V определяет изоморфизм между V и V^*, и, следовательно, между $V \otimes V$ и $V \otimes V^*$. Суммируя по i равенство A.3.8 мы получаем

$$\sum_i([g,e_i],e^i) = \sum_i -(-1)^{deg(g)deg(a)}(e_i,[g,e^i]).$$

Заметим, что из равенства значений функционалов на элементах базиса следует равенство самих функционалов и ввиду упомянутого выше изоморфизма получаем следующее равенство:

$$\sum_i [g, e_i] \otimes e^i = \sum_i -(-1)^{deg(g)deg(a)} e_i \otimes [g, e^i]$$

или $[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i] = -[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i]$. Предложение доказано. □

Предложение А.3.2. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1$ – супералгебра Ли с невырожденной инвариантным скалярным произведением таким, что $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$ – изотропные подпространства, а $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$ невырожденно спарены, $\mathfrak{A}^0$ – подсупералгебра Ли, $\mathfrak{A}^1$ – модуль над $\mathfrak{A}^0$. Пусть также $\{e_i\}, \{e^i\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1$, соответственно, $\mathfrak{t}_0 = \sum_i e_i \otimes e^i, \mathfrak{t}_1 = \sum_i e^i \otimes e_i$. Тогда для всех $a \in \mathfrak{A}^0, b \in \mathfrak{A}^1$ имеют место следующие равенства:*

$$[a \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = -[1 \otimes a, \mathfrak{t}_0]; \quad [a \otimes 1, \mathfrak{t}_1] = -[1 \otimes a, \mathfrak{t}_1];$$

$$[b \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = -[1 \otimes b, \mathfrak{t}_1]; \quad [b \otimes 1, \mathfrak{t}_1] = -[1 \otimes b, \mathfrak{t}_0].$$

Сейчас мы вычислим значение δ на $h_i \cdot u$.

$$\delta(h_i \cdot u) = [h_i \cdot v \otimes 1 + 1 \otimes h_i \cdot u, \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1}{u - v} + \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1}{u + v}] =$$
$$[h_i \cdot v \otimes 1 - h_i \cdot u \otimes 1, \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1}{u - v}] + [h_i \cdot v \otimes 1 + h_i \cdot u \otimes 1, \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1}{u + v}] =$$
$$[h_i \otimes 1, \tfrac{1}{2}(\mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1)] + [h_i \otimes 1, \tfrac{1}{2}(\mathfrak{t}_0 - \mathfrak{t}_1)] = [h_i \otimes 1, \mathfrak{t}_0] = -[1 \otimes h_i, \mathfrak{t}_1].$$

Аналогично могут быть вычислены значения коцикла на других образующих.

Из условия однородности квантования следует, что

$$\Delta(h_{i,1}) = \Delta_0(h_{i,1}) + \hbar F(\{x_\alpha \otimes x_{-\alpha}, h_i \otimes h_j : \alpha \in \Delta, i, j \in I\}).$$

Из принципа соответствия (пункт 5) определения квантования) следует, что

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_{i,1}) - \Delta^{op}(h_{i,1}) = F - \tau F = [1 \otimes h^i, \mathfrak{t}_0].$$

Пусть $\bar{t}_0 = \sum_{\alpha \in \widehat{\Delta_+}} x_\alpha \otimes x^{-\alpha}$, $\widehat{\Delta_+}$ – множество орбит диаграммного автоморфизма на множестве положительных корней базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения, проведённые в предыдущей главе. Используя явную формулу для коумножения на образующих картановской подалгебры, мы получаем определяющие соотношения в квантованной супералгебре используя условие того, что коумножение является гомоморфизмом квантовой топологической супералгебры в её тензорный квадрат (в категории топологических супералгебр).Ниже мы подробнее остановимся на двух примерах диагрммного автоморфизма второго порядка.

Проверим, например, что что следующие соотношения сохраняются коумножением.

$$[h_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm \tilde{a}_{ij} x^{\pm}_{j,1}.$$

Проверим, что коумножение действительно сохраняет эти соотношения. Достаточно проверить одно из них. Проверим первое соотношение. Покажем, что

$$[\Delta(h_{i,1}), \Delta(x^{\pm}_{j,0})] = \pm \tilde{a}_{ij} \Delta(x^{\pm}_{j,1}).$$

Действительно,

$$[\Delta(h_{i,1}), \Delta(x^{\pm}_{j,0})] = [\Delta_0(h_{i,1}) + \hbar[1 \otimes h_i, \bar{\mathfrak{t}}_0], x^{\pm}_{j,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\pm}_{j,0}] =$$
$$[h_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] \otimes +1 \otimes [h_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] + \hbar[[1 \otimes h_i, \bar{\mathfrak{t}}_0], x^{\pm}_{j,0} \otimes 1] + \hbar[[1 \otimes h_i, \bar{\mathfrak{t}}_0], 1 \otimes x^{\pm}_{j,0}].$$

Таким образом, определенная выше операция коумножения действительно является корректно определенным гомоморфизмом ассоциативных супералгебр.

A.4 Скрученные янгианы и янгиан супералгебры Ли типа Q_n

Я напомню, что янгиан $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [140]) это деформация универсальной обертывающей супералгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ полиномиальных токов. При этом структура бисупералгебры Ли определяется коциклом $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \bigwedge \mathfrak{g}$

$$\delta : a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r(u, v)], \tag{A.4.1}$$

где

$$r(u, v) = \frac{\mathfrak{t}}{u - v},$$

а $\mathfrak{t}$ – оператор Казимира, определяемый невырожденным инвариантным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ (которое существует на базисной супералгебре Ли (см. [140])). Другими словами пусть $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные относительно этого скалярного произведения базисы в $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{t} = \sum_i e_i \otimes e^i$.

Сначала мы опишем скрученный янгиан, а потом покажем как из него получается янгиан странной супералгебры Ли Q_n.

Опишем квантовую деформацию скрученной бисупералгебры полиномиальных токов, введенную в предыдущем пункте. Мы будем использовать следующее обозначение $(\alpha_i, \alpha_j\tilde{)} := (\delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема A.4.1. *Супералгебра Хопфа $A = A_h$ над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ порождается образующими*

$$h_{i,0,0}, \quad x^{\pm}_{i,0,0}, \quad h_{i,1,0}, \quad x^{\pm}_{i,1,0}, \quad \bar{h}_{i,0,1}, \quad x^{\pm}_{i,0,1}, \quad h_{i,1,1}, \quad x^{\pm}_{i,1,1},$$

$1 \leq i \leq n$, *$\bar{h}_{i,0,j}, x^{pm}_{i,0,j}$ чётные образующие, $h_{i,1,j}, x^{\pm}_{i,1,j}$ нечётные образующие. Пусть также $h_{i,0,j} = \bar{h}_{i,0,j} - \bar{h}_{i+1,0,j}$. Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i,0,0}, h_{j,0,0}] = [h_{i,0,0}, h_{j,0,1}] = [h_{i,0,1}, h_{j,0,1}] = 0,$$
$$[h_{i,0,0}, h_{j,1,0}] = [h_{i,1,1}, h_{j,1,0}] = 0,$$
$$[h_{i,0,0}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)x^{\pm}_{j,0,0}, \quad [h_{i,0,1}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)x^{\pm}_{j,0,1},$$
$$[h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)x^{\pm}_{j,1,0}, \quad [h_{i,1,1}, x^{\pm}_{j,0,0}] = \pm(\alpha_i \tilde{,} \alpha_j)x^{\pm}_{j,1,1},$$
$$[h_{i,1,0}, x^{\pm}_{j,1,0}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j)x^{\pm}_{j,0,0},$$
$$[h_{i,1,0}, h_{j,1,0}] = 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1})\bar{h}_{i,0,0} + 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})\bar{h}_{i+1,0,0},$$
$$h_{i,1,1} = \tfrac{1}{2}[h_{i+1,0,1} - h_{i-1,0,1}, h_{i,1,0}],$$
$$[x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij}h_{i,0,0}, \quad [x^{+}_{i,0,1}, x^{-}_{j,0,0}] = \delta_{ij}(h_{i,0,1} + \tfrac{\hbar}{2}h^2_{i,0,0}),$$
$$[x^{+}_{i,1,0}, x^{-}_{j,0,0}] = [x^{+}_{i,0,0}, x^{-}_{j,1,0}] = \delta_{ij}h_{i,1,0},$$
$$[x^{+}_{i,0,1}, x^{-}_{j,0,0}] = \delta_{ij}(h_{i,0,1} + \tfrac{\hbar}{2}h^2_{i,0,0}),$$
$$[x^{+}_{i,1,1}, x^{-}_{j,0,0}] = [x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,1,1}] = \delta_{ij}h_{i,1,1},$$

$$[x^+_{i,0,1}, x^-_{j,1,0}] = -[x^+_{i,0}, x^-_{j,0,1}] = \delta_{ij}(\bar{h}_{i,1,1} + \bar{h}_{i+1,1,1}),$$
$$[x^\pm_{i,0,1}, x^\pm_{j,0,0}] - [x^\pm_{i,0,0}, x^\pm_{j,0,1}] = \pm\tfrac{\hbar}{2}((\alpha_i, \alpha_j)\{x^\pm_{i,0,0}, x^\pm_{j,0,0}\},$$
$$[x^\pm_{i,1,1}, x^\pm_{j,0,0}] - [x^\pm_{i,0,0}, x^\pm_{j,0,1}] = \pm\tfrac{\hbar}{2}(-\widetilde{(\alpha_i, \alpha_j})\{x^\pm_{i,1,0}, x^\pm_{j,0,0}\},$$
$$[x^\pm_{i,1,1}, x^\pm_{j,1,0}] - [x^\pm_{i,1,0}, x^\pm_{j,1,1}] = \pm\tfrac{\hbar}{2}(\widetilde{(\alpha_i, \alpha_j})\{x^\pm_{i,1,0}, x^\pm_{j,1,0}\},$$
$$(adx^\pm_{i,0})^{n_{ij}}(x^\pm_{j,0,0}) = 0, \quad i \neq j,$$
$$(adx^\pm_{i,1,0})^{n_{ij}}(x^\pm_{j,1,0}) = 0, \quad i \neq j,$$
$$(adx^\pm_{i,0,0})^{n_{ij}}(x^\pm_{j,1,0}) = 0, \quad i \neq j,$$
$$[[h_{i,0,1}, x^+_{i,0,1}], x^-_{i,0,1}] + [x^+_{i,0,1}, [h_{i,0,1}, x^-_{i,0,1}] = 0, \quad b_{ii} \neq 0,$$
$$[[h_{i,1}, \hat{x}^+_{i,1}], x^-_{i,1}] + [\hat{x}^+_{i,1}, [h_{i,1}, x^-_{i,1}] = 0,$$
$$[[h_{i,1,1}, x^+_{i,0,1}], x^-_{i,0,1}] + [x^+_{i,0,1}, [h_{i,1,1}, x^-_{i,0,1}]] = 0,$$
$$[[h_{i,1,1}, x^+_{i,1,1}], x^-_{i,0,1}] + [x^+_{i,1,1}, [h_{i,1,1}, x^-_{i,0,1}] = 0,$$
$$[h_{i,1,0}, h_{j,1,0}] = 2\delta_{ij}(\bar{h}_{i,0,0} + \bar{h}_{i+1,0,0}) + (\delta_{i-1,j} - \delta i + 1, j)(\bar{h}_{j,0,0}) =$$
$$\tfrac{2}{n+1}(2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}) \textstyle\sum_{k=1}^n h_{k,0,0} + 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}) \sum_{k=i}^n h_{k,0,0} + 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \sum_{k=i+1}^n h_{k,0,0}),$$
$$[h_{i,1,1}, h_{j,1,0}] = [h_{i,1,0}, h_{j,0,1}] + \tfrac{2}{n+1}(2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}) \textstyle\sum_{k=1}^n h_{k,0,0} +$$
$$2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}) \textstyle\sum_{k=i}^n h_{k,0,0} + 2(\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \sum_{k=i+1}^n h_{k,0,0}),$$
$$[x^+_{i,1,1}, x^-_{j,1,0}] = \delta_{ij}(\bar{h}_{i,0,1} + \bar{h}_{i+1,0,1}) =$$
$$\delta_{ij}(-\tfrac{2(n-1)}{n+1} \textstyle\sum_{k=i}^n (n+1-k)h_{k,1} + 2(-\tfrac{(n-1)}{n+1} \sum_{k=i}^n (n+1-k)h_{k,0})^2).$$

Коумножение задается следующими формулами:

$$\Delta(h_{i,j,0}) = h_{i,j,0} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,j,0},$$
$$\Delta(x^\pm_{i,j,0}) = x^\pm_{i,j,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^\pm_{i,j,0},$$
$$\Delta(h_{i,j,1}) = h_{i,j,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,j,1} + [h^{i,j,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_1]$$
$$\Delta(x^+_{i,j,1}) = x^+_{i,j,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{i,j,1} + [x^{i,j,+} \otimes 1, \mathfrak{t}_1]$$
$$\Delta(x^-_{i,j,1}) = x^-_{i,j,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^-_{i,j,1} + [1 \otimes x^{i,j,0,-}, \mathfrak{t}_0].$$

Заметим, что суперaлгебры Хопфа $A_{\hbar_1}$ и $A_{\hbar_2}$ для заданных значений $\hbar_1, \hbar_2 \neq 0$ (как супералгебры Хопфа над полем $\mathbb{C}$) изоморфны. Полагая $\hbar = 1$ получаем систему определяющих соотношений для скрученного янгиана $Y^t(A(n-1,n-1)^\sigma)$.

Ниже мы ограничимся рассмотрением случая $n = 2$. В этом случае, то есть в случае янгиана $Y^t(A(1,1)^\sigma)$ (и, следовательно, янгиана $Y(Q_2)$) система образующих и порождающих соотношений принимает особенно простой вид. Но сначала мы опишем скрученный янгиан $Y^t(A(1,1)^\sigma)$ супералгебры Ли $A(1,1)$ из которого янгиан $Y(Q_2)$ получается факторизацией по части определяющих соотношений. Отметим, что разница между Q_2 и $A(1,1)^0$ состоит в следующем. (Следует напомнить, что $A(1,1) = A(1,1)^0 \oplus A(1,1)^1, A(1,1)^0 = A(1,1)^\sigma$, где автоморфизм $\sigma : A(1,1) \to A(1,1), \sigma(E_{i,j}) = E_{-i,-j}$ был определен выше.) Нечётная часть Q_2 состоит из 2×2-матриц с нулевым следом, а нечётная часть $A(1,1)^0$ состоит из всех 2×2-матриц. Таким образом, в $A(1,1)^0$ появляется дополнительная образующая $\bar{k}$ по сравнению с $Y(Q_2)$. Имеет место следующий результат.

Теорема A.4.2. *Супералгебра Хопфа $Y^t(A(1,1)^\sigma)$ над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ порождается образующими*

$$h_{0,0}, \quad x^\pm_{0,0}, \quad h_{1,0}, \quad \bar{h}_{1,0}, \quad x^\pm_{1,0}, \quad h_{0,1}, \quad x^\pm_{0,1}, \quad h_{1,1}, \quad \bar{h}_{1,1}, x^\pm_{1,1},$$

образующие с первым индексом равным 0 *– чётные, а образующие с первым индексом равным* 1 *– нечётные. Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{0,0}, h_{j,1}] = 0, \quad [h_{1,0}, h_{0,1}] = \bar{h}_{1,1},$$
$$[h_{1,0}, h_{1,0}] = [h_{1,0}, h_{1,1}] = [h_{1,1}, h_{1,1}] = 0, \quad [h_{1,0}, \bar{h}_{1,0}] = h_{0,0}, \quad [h_{1,1}, \bar{h}_{1,0}] = h_{0,1},$$
$$[h_{0,0}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm 2x^{\pm}_{j,0}, \quad [h_{0,0}, x^{\pm}_{j,1}] = \pm x^{\pm}_{j,1}, \quad j \in \mathbb{Z}_2,$$
$$[h_{0,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm 2x^{\pm}_{0,1}, \quad j \in \mathbb{Z}_2,$$
$$[h_{1,0}, x^{\pm}_{0,0}] = \pm 2x^{\pm}_{1,0}, \quad [h_{1,0}, x^{\pm}_{1,0}] = \mp 2x_{0,}0^{\pm}, \quad [h_{1,0}, x^{\pm}_{j,1}] = \pm(-1)^j 2x^{\pm}_{j+1,1}, \quad j \in \mathbb{Z}_2$$
$$[h_{1,1}, x^{\pm}_{j}] = \pm(-1)^j 2x_{j+1,1}1^{\pm}, \quad j \in \mathbb{Z}_2, \quad [\bar{h}_{1,1}, x^{\pm}_{0,0}] = \mp 2\hat{x}^{\pm}_1 \mp \{h_{1,0}, x^{\pm}_{0,0}\},$$
$$[x^{+}_{0,0}, x^{-}_{1,0}] = [x^{+}_{1,0}, x^{-}_{0,0}] = h_{1,0}, \quad [x^{+}_{0,1}, x^{-}_{0,0}] = h_{0,1} + \tfrac{1}{2}h^2_{0,0},$$
$$[x^{\pm}_{0,1}, x^{\pm}_{0,0}] = \pm(x^{\pm}_{0,0})^2, \quad [x^{\pm}_{0,1}, x^{\pm}_{1,0}] = \pm\tfrac{1}{2}\{x^{\pm}_{0,0}, x^{\pm}_{1,0}\}, \quad [x^{+}_{0,1}, x^{-}_{1,0}] = h_{1,1},$$
$$[x^{\pm}_{1,1}, x^{\pm}_{1,0}] - [x^{\pm}_{1,0}, x^{\pm}_{1,1}] = \pm(x^{\pm}_{0,0})^2, \quad [x^{\pm}_{1,1}, x^{\pm}_{0,0}] = [x^{\pm}_{1,0}, x^{\pm}_{0,1}] \pm (x^{\pm}_{1,0})^2,$$
$$[[h_{0,1}, x^{+}_{1,1}], x^{-}_{1,1}] + [x^{+}_{1,1}, [h_{0,1}, x^{-}_{1,1}]] = 0, \quad [[h_{1,1}, x^{+}_{0,1}], x^{-}_{0,1}] + [x^{+}_{0,1}, [h_{1,1}, x^{-}_{0,1}]] = 0.$$

Коумножение задается следующими формулами:

$$\Delta(a_{i,0}) = a_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes a_{i,0}, a_0 \in \{h_{i,0}, x^{\pm}_{i,0},\},$$
$$\Delta(h_{0,1}) = h_{0,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{0,1} + \bar{h}_{1,0} \otimes h_{1,0} - 2x^{+}_{0,0} \otimes x^{-}_{0,0},$$
$$\Delta(x^{+}_{0,1}) = x^{+}_{0,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{0,1} + \bar{h}_{1,0} \otimes x^{+}_{1,0} + h_{0,0} \otimes x^{+}_{0,0},$$
$$\Delta(x^{-}_{0,1}) = x^{-}_{0,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{0,1} + \bar{h}_{1,0} \otimes x^{-}_{1,0} + x^{-}_{0,0} \otimes h_{0,0},$$
$$\Delta(\bar{h}_{1,1}) = \bar{h}_{1,1} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{h}_{1,1} - h_{1,0} \otimes h_{0,0} + 2x^{-}_{1,0} \otimes x^{+}_{0,0} + 2x^{-}_{0,0} \otimes x^{+}_{1,0},$$
$$\Delta(x^{+}_{1,1}) = x^{+}_{1,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{+}_{1,1} + 2h_{0,0} \otimes x^{+}_{1,0},$$
$$\Delta(x^{-}_{1,1}) = x^{-}_{1,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{-}_{1,1} + 2x^{-}_{0} \otimes h_0.$$

В качестве следствия из сформулированной теоремы мы получаем описание янгиана $Y(Q_2)$ странной супералгебры Ли, полученное уже в предыдущей главе.

Теорема A.4.3. *Супералгебра Хопфа* $Y(Q_2)$ *над* $\mathbb{C}$ *порождается образующими*

$$h_{0,j}, \quad x^{\pm}_{j,0}, \quad h_{j,1}, \quad x^{\pm}_{j,1}, \quad j = 0, 1,$$

$deg(a_j) = j$, $a_j \in \{h_{i,j}, x^{\pm}_{i,j}\}, i, j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. *Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = [h_{i,0}, h_{j,1}] = [h_{i,1}, h_{j,}1] = 0, \quad i, j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},$$
$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm(-1)^{ij} 2x^{\pm}_{i+j,0}, \quad [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] = \pm(-1)^{ij} x^{\pm}_{i+j,1}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_2,$$
$$[h_{0,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm 2x^{\pm}_{j,1}, \quad j \in \mathbb{Z}_2,$$
$$[h_{1,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm(-1)^j 2x_{j+1}1^{\pm}, \quad [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{j,0}] = [x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,1}] = h_{i+j,1},$$
$$[x^{\pm}_{1,1}, x^{\pm}_{1,0}] = 2 \pm (x^{\pm}_{0,0})^2, \quad [x^{\pm}_{1,1}, x^{\pm}_{0,0}] = [x^{\pm}_{1,0}, x^{\pm}_{0,1}] \pm (x^{\pm}_{0,0})^2,$$
$$[[h_{0,1}, x^{+}_{1,1}], x^{-}_{1,1}] + [x^{+}_{1,1}, [h_{0,1}, x^{-}_{1,1}]] = 0, \quad [[h_{1,1}, x^{+}_{0,1}], x^{-}_{0,1}] + [x^{+}_{0,1}, [h_{1,1}, x^{-}_{0,1}]] = 0.$$

A.5 Токовая система образующих

Пусть $G = Q_2$. Введем новую систему образующих (и определяющих соотношений), являющуюся аналогом токовой системы образующих для универсальной обертывающей супералгебры алгебры Ли токов $\wp_1 = G[u]^{\tilde{\sigma}}$. Введем образующие $\tilde{h}_{0,m}, h_{1,m}, x^{\pm}_{0,m}, x^{\pm}_{1,m}, m \in \mathbb{Z}_+$, следующими формулами:

$$x^{\pm}_{0,m+1} = \pm\tfrac{1}{2}[h_{0,1}, x^{\pm}_{0,m}]; \tag{A.5.1}$$

$$x^{\pm}_{1,2m+1} = \pm\tfrac{1}{2}[h_{0,1}, x^{\pm}_{1,2m}]; \quad x^{\pm}_{1,2m+2} = \pm\tfrac{1}{2}[h_{0,2}, x^{\pm}_{2m}]; \tag{A.5.2}$$

$$h_{1,m} = [x^{+}_{0,m}, x^{-}_{1,0}]; \quad \tilde{h}_{0,m} = [x^{+}_{0,m}, x^{-}_{0,0}]. \tag{A.5.3}$$

Теорема A.5.1. *Янгиан $Y(Q_2)$ изоморфен ассоциативной супералгебре Хопфа с единицей над $\mathbb{C}$, порожденной образующими $\tilde{h}_{0,m}$, $h_{1,m}$, $x^{\pm}_{j,m}$, $j = 0, 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$ (изоморфизм задается данными выше формулами (A.5.1)-(A.5.3)), удовлетворяющими следующей системе определяющих соотношений:*

$$[\tilde{h}_{j,m}, \tilde{h}_{0,n}] = 0; \quad j = 0, 1;$$
$$\tilde{h}_{0,m+n} = [x^{+}_{0,m}, x^{-}_{0,n}];$$
$$[x^{+}_{1,m}, x^{-}_{0,2k}] = [x^{+}_{0,2k}, x^{-}_{1,m}] = h_{1,m+2k};$$
$$[x^{+}_{1,m}, x^{-}_{0,2k+1}] = [x^{+}_{0,2k+1}, x^{-}_{1,m}] = 0;$$
$$[x^{\pm}_{0,n}, x^{\pm}_{1,0}] = \{x^{\pm}_{0,n-1}, \hat{x}^{\pm}_{1,0}\}, \quad [x^{\pm}_{0,n}, x^{\pm}_{1,1}] = 0;$$
$$[\tilde{h}_{0,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [\tilde{h}_{0,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] \pm (\tilde{h}_{0,k} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}\tilde{h}_{0,k});$$
$$[x^{\pm}_{0,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [x^{\pm}_{0,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] \pm (x^{\pm}_{0,k} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l} x^{\pm}_{0,k}), \quad j = 0, 1$$
$$[h_{1,m+2}, x^{\pm}_{j,l}] = [h_{1,m}, x^{\pm}_{j,l+2}] \pm (h_{1,m} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l} h_{1,m});$$
$$[x^{\pm}_{1,2k+1}, x^{\pm}_{0,l}] - [x^{\pm}_{1,2k-1}, x^{\pm}_{0,l+2}] = \pm\{x^{\pm}_{0,l}, x^{\pm}_{1,2k-1}\}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы техническое и сложное. Наметим только примерный план доказательства. Доказательство теоремы проводится по индукции. Сначала формулы проверяются при малых значениях индекса (n=0,1), а затем проверяется шаг индукции последовательно для написанных выше определяющих соотношений. При этом последовательность доказательства для определяющих соотношений следующая. Сначала выводятся коммутационные соотношения для h_m и $x^{\pm}_n$, и $x^{\pm}_k$ и $x^{\pm}_m$, используя определение h_n. Затем таким же образом получаются соотношения для k_m и $x^{\pm}_n$, а также для h_m и $\hat{x}^{\pm}_n$, используя соотношения для $\hat{x}^{\pm}_k$ и $x^{\pm}_m$. ☐

A.6 Квантовый дубль

Пусть $\mathfrak{g}$ – базисная суперaлгебра Ли с системой простых корней одинаковой длины (мы ограничимся случаем суперaлгебр Ли $A(n,n)$ и $D(m,n)$). Будем предполагать, что зафиксирован диаграммный автоморфизм второго порядка σ, действующий на суперaлгебре Ли, а суперaлгебра Ли $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^{\sigma}$ – множество неподвижных точек этого автоморфизма. Пусть $Y^t(\mathfrak{g})$ – скрученный янгиан, определяемый как специализация квантования скрученной суперaлгебры Ли полиномиальных токов. Отметим, что универсальная обёртывающая суперaлгебра $U(\mathfrak{g}^0)$ естественно вложена в $Y^t(\mathfrak{g})$.

Введем квантовый дубль $DY^t(\mathfrak{g})$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Я напомню определение квантового дубля (см. [120], а также главу 1 данной работы). Пусть A – суперaлгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную суперaлгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда квантовым дублем DA суперaлгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная суперaлгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подсуперaлгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA \otimes DA$; линейное отображение $A \otimes A^0 \to DA, a \otimes b \to ab$ – биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием "классического дубля"$\mathfrak{g}[u]^t \oplus (\mathfrak{g}[u])^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[u]^t$ скрученных токов, причем коумножение в "классическом дубле"определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}[u]^t} \oplus (-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Наиболее интересный случай рассмотрен выше – это скрученный янгиан связанный с супералгеброй Ли $A(n,n)$ и автоморфизмом второго порядка. В этом случае появляется янгиан странной супералгебры Ли.

Пусть $C^t(\mathfrak{g})$ (см. [28], [187]) – супералгебра, порожденная образующими $h_{i,j,k}, x^{\pm}_{i,j,k}, i \in I, j \in \mathbb{Z}_m, k \in \mathbb{Z}$, которые удовлетворяют вышеприведенным соотношениям в теореме A.4.2.

Если определить степень элементов в $C^t(\mathfrak{g})$ формулой: $deg(h_{i,j,r}) = deg(x^{\pm}_{i,j,r}) = r$, то получаем фильтрацию на $C^t(\mathfrak{g})$:

$$\dots C_{-n} \subset \dots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset \dots \subset C_m \subset \dots C(\mathfrak{g}), \tag{A.6.1}$$

где $C_k = \{x \in C^t(\mathfrak{g}) : deg(x) \leq k\}$.

Пусть $\bar{C}^t(\mathfrak{g})$ формальное пополнение $C^t(\mathfrak{g})$ относительно этой фильтрации. Образующие $x^{\pm}_{i,j,k}, h_{i,j,k}, i \in I, j \in \mathbb{Z}_m, k \in \mathbb{Z}_+$ порождают подсупералгебру Хопфа $Y^+(\mathfrak{g})$ в $\bar{C}^t(\mathfrak{g})$, изоморфную $Y^t(\mathfrak{g})$. Пусть $Y^-(\mathfrak{g})^t$ – замкнутая подсупералгебра в $\bar{C}^t(\mathfrak{g})$, порождённая образующими $x^{\pm}_{i,j,k}, h_{i,j,k}, i \in I, j \in \mathbb{Z}_m, k < 0$.

Теорема A.6.1. *Супералгебра Хопфа $Y^0(\mathfrak{g})^t$ изоморфна $Y^-(\mathfrak{g})^t$.*

Эта теорема будет вытекать из формулируемых ниже результатов. Из теоремы A.6.1 вытекает, что супералгебра Хопфа $Y^-(\mathfrak{g})$ является квантованием бисупералгебры Ли $t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$ (с коциклом (A.4.1)).

Для описания $DY^t(\mathfrak{g})$ удобно ввести порождающие функции

$$e^+_{i,j}(u) := \sum_{k \geq 0} x^+_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad e^-_{i,j}(u) := -\sum_{k<0} x^+_{i,j,k} u^{-k-1},$$

$$f^+_{i,j}(u) := \sum_{k \geq 0} x^-_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad h^+_{i,j}(u) := 1 + \sum_{k \geq 0} h_{i,j,k} u^{-k-1},$$

$$f^-_{i,j}(u) := -\sum_{k<0} x^-_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad h^-_{i,j}(u) := 1 - \sum_{k<0} h_{i,j,k} u^{-k-1}.$$

Предложение A.6.1. *Определяющие соотношения в супералгебре $\bar{C}(\mathfrak{g})$ эквивалентны следующим соотношениям для порождающих функций*

$$[h^{\pm}_{i,s}(u), h^{\pm}_{j,s}(v)] = 0,$$
$$[h^+_{i,s}(u), h^-_{j,s}(u)] = 0,$$
$$[e^{\pm}_{i,s}(u), f^{\pm}_{j,r}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h^{\pm}_{i,s+r}(u) - h^{\pm}_{i,s+r}(v)]}{u-v},$$

$$[e^{\pm}_{i,r}(u), f^{\mp}_{j,s}(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h^{\mp}_{i,r+s}(u) - h^{\pm}_{i,r+s}(v)]}{u-v},$$

$$[h_{i,s}^{\pm}(u), e_{j,r}^{\pm}(v)] = -\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{h_{i,s}^{\pm}(u)(e_{j,r}^{\pm}(u) - e_{j,r}^{\pm}(v)) + (e_{j,r}^{\pm}(u) - e_{j,r}^{\pm}(v))h_{i,s}^{\pm}(u)}{u-v},$$

$$[h_{i,s}^{\pm}(u), e_{j,r}^{\mp}(v)] = -\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{h_{i,s}^{\pm}(u)(e_{j,r}^{\pm}(u) - e_{j,r}^{\mp}(v)) + (e_{j,r}^{\pm}(u) - e_{j,r}^{\mp}(v))h_{i,s}^{\pm}(u)}{u-v},$$

$$[h_{i,s}^{\pm}(u), f_{j,r}^{\pm}(v)] = \frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{h_{i,s}^{\pm}(u)(f_{j,r}^{\pm}(u) - f_{j,r}^{\pm}(v)) + (f_{j,r}^{\pm}(u) - f_{j,r}^{\pm}(v))h_{i,s}^{\pm}(u)}{u-v},$$

$$[h_{i,s}^{\pm}(u), f_{j,r}^{\mp}(v)] = -\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{h_{i,s}^{\pm}(u)(f_{j,r}^{\pm}(u) - f_{j,r}^{\mp}(v)) + (f_{j,r}^{\pm}(u) - f_{j,r}^{\mp}(v))h_{i,s}^{\pm}(u)}{u-v},$$

$$[e_{i,s}^{\pm}(u), e_{j,r}^{\pm}(v)] + [e_{j,r}^{\pm}(u), e_{i,s}^{\pm}(v)] =$$

$$-\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{(e_{i,s}^{\pm}(u) - e_{i,s}^{\pm}(v))(e_{j,r}^{\pm}(u) - e_{j,r}^{\pm}(v)) + (e_{j,r}^{\pm}(u) - e_{j,r}^{\pm}(v))(e_{i,s}^{\pm}(u) - e_{i,s}^{\pm}(v))}{u-v},$$

$$[e_{i,s}^{+}(u), e_{j,r}^{-}(v)] + [e_{j,r}^{+}(u), e_{i,s}^{-}(v)] =$$

$$-\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{(e_{i,s}^{+}(u) - e_{i,s}^{-}(v))(e_{j,r}^{+}(u) - e_{j,r}^{-}(v)) + (e_{j,r}^{+}(u) - e_{j,r}^{-}(v))(e_{i}^{+}(u) - e_{i}^{-}(v))}{u-v},$$

$$[f_{i,s}^{\pm}(u), f_{j,r}^{\pm}(v)] + [f_{j,r}^{\pm}(u), f_{i,s}^{\pm}(v)] =$$

$$-\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{(f_{i,s}^{\pm}(u) - f_{i,s}^{\pm}(v))(f_{j,r}^{\pm}(u) - f_{j,r}^{\pm}(v)) + (f_{j,r}^{\pm}(u) - f_{j,r}^{\pm}(v))(f_{i,s}^{\pm}(u) - f_{i,s}^{\pm}(v))}{u-v},$$

$$[f_{i,s}^{+}(u), f_{j,r}^{-}(v)] + [f_{j,r}^{+}(u), f_{i,s}^{-}(v)] =$$

$$-\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}\frac{(f_{i,s}^{+}(u) - f_{i,s}^{-}(v))(f_{j,r}^{+}(u) - f_{j,r}^{-}(v)) + (f_{j,r}^{+}(u) - f_{j,r}^{-}(v))(f_{i,s}^{+}(u) - f_{i,s}^{-}(v))}{u-v},$$

$$[e_{i,s_1}^{\epsilon_1}(u_1), [e_{i,s_2}^{\epsilon_2}(u_2), e_{j,s_3}^{\epsilon_3}(u_3)]] + [e_{i,s_2}^{\epsilon_2}(u_2), [e_{i,s_1}^{\epsilon_1}(u_1), e_{j,s_3}^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0,$$
$$[f_{i,s_1}^{\epsilon_1}(u_1), [f_{i,s_2}^{\epsilon_2}(u_2), f_{j,s_3}^{\epsilon_3}(u_3)]] + [f_{i,s_2}^{\epsilon_2}(u_2), [f_{i,s_1}^{\epsilon_1}(u_1), f_{j,s_3}^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0,$$

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного результата для квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли в предыдущей главе. Оно громоздко, но, по существу, просто, и сводится к проверке соотношений с использованием общей структуры формул для коумножения. ☐

A.7 Треугольное разложение

В данном параграфе мы рассмотрим аналог гауссова разложения. Пусть Y'_+, Y'_0, Y'_- – подсупералгебры (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порожденные элементами $x_{i,j,k}^{+}, \quad h_{i,j,k}, \quad x_{i,j,k}^{-}, \quad i \in I, j \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}_+$, соответственно, а $(Y^t)'_+, (Y^t)'_0, (Y^t)'_-$ – аналогичные подсупералгебры Ли в соответствующем скрученном янгиане $Y^t(\mathfrak{g})$. Пусть $Y_+, Y_0, Y_-, Y_+^t, Y_0^t, Y_-^t$ – подсупералгебры $Y'_+, Y'_0, Y'_-, (Y^t)'_+, (Y^t)'_0, (Y^t)'_-$ с единичным элементом.

Предложение A.7.1. *Умножение в* $Y(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных суперпространств*

$$Y_+^t \otimes Y_0 \otimes Y_-^t \to Y^t(\mathfrak{g}) \tag{A.7.1}$$

Обобщим это предложение на $DY^t(\mathfrak{g})$. Для этого нам потребуются некоторые простые свойства операции коумножения на $Y^t(\mathfrak{g})$, доказываемые по индукции, опираясь на формулы для коумножения и систему определяющих соотношений, а также тот факт, что операция коумножения является гомоморфизмом, то есть, что $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$.

Предложение A.7.2. *1)* $\Delta(x) = x \otimes 1(modY^t \otimes Y_+')$, *для произвольного* $x \in Y_+'$;
2) $\Delta(y) = 1 \otimes y(mod(Y^t)_-' \otimes Y)$, *для произвольного* $y \in Y_-'$.

Следствие. 1)

$$\Delta(Y_+) \subset Y^t \otimes Y_+;$$

2)

$$\Delta(Y_-) \subset Y_- \otimes Y.$$

Таким образом, мы получаем, что $Y_+^t(Y_-^t)$ – является правым (левым) коидеалом в $Y = Y(\mathfrak{g})$.

Пусть также $BY_\pm', (BY^t)_\pm'$ – подсуперагебра (без единицы) в $Y(\mathfrak{g}), Y(\mathfrak{g})^t$, порожденная элементами соответствующими элементами $x_{ik}^\pm, \hat{x}_{ik}^\pm; h_{jr}, k_{jr}, (i, j \in I, k, r \in Z_+)$ (своими для каждой их упомянутых супералгебр).

Предложение A.7.3. *1)* $\Delta(e) = e \otimes 1(modY^t \otimes BY_+')$, *для произвольного* $e \in (BY^t)_+'$;
2) $\Delta(f) = 1 \otimes f(mod(BY^t)_-' \otimes Y)$, *для произвольного* $f \in (BY^t)_-'$.
3) $\Delta(h) = h \otimes 1(modY^t \otimes BY_+') = 1 \otimes h(mod(BY^t)_-' \otimes Y)$, *для произвольного* $f \in (Y^t)_0'$.

Доказательство. Свойства 1), 2) доказываются также, как и аналогичные свойства в предыдущем предложении, а свойство 3) вытекает из свойств 1), 2). ☐

Пусть

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : Y^t(\mathfrak{g}) \otimes Y^0(\mathfrak{g}) \to C$$

каноническое билинейное спаривание $Y^t(\mathfrak{g})$ и его двойственной косуперагебры $Y^*(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением. (Мы обозначаем через $Y^0(\mathfrak{g})$ двойственную косупералгебру $Y^*(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением.) Из определения вытекают следующие свойства этого спаривания:

$$\langle xy, x'y' \rangle = \langle \Delta(xy), x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle y \otimes x, \Delta(x'y') \rangle,$$
$$\langle x \otimes y \rangle \langle x' \otimes y' \rangle = (-1)^{p(x)p(y)} \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle,$$

для $\forall x, y \in Y^t(\mathfrak{g}), \forall x', y' \in Y^0(\mathfrak{g})$.

Пусть A, B – подсупералгебры в $Y^t(\mathfrak{g})$. Пусть также

$$(AB)_\perp := \{x' \in Y^0(\mathfrak{g}) : \langle ab, x' \rangle = 0, \quad \forall a \in A, b \in B\}.$$

Легко проверить, что

$$(Y^t \cdot BY_-')_\perp, ((BY^t)_+' \cdot Y)_\perp, (Y^t \cdot Y_-')_\perp, (Y_+' \cdot Y)_\perp$$

являются подкосуперaлгебрами в $Y^0(\mathfrak{g})$. Пусть

$$Y_+^* := (Y \cdot BY'_-)_\perp, BY_+^* := (Y \cdot Y'_-)_\perp, Y_-^* := (BY'_+ \cdot Y)_\perp,$$

$$(BY)_-^* := (Y'_+ \cdot Y)_\perp, Y_0^* := BY_+^* \bigcap BY_-^*.$$

Имеет место следующее утверждение, вытекающее из предложения А.7.3.

Предложение А.7.4. *1) Для любых* $x \in Y_+^t, \quad h \in Y_0^t, \quad y \in Y_-^t, \quad x' \in Y_+^*, \quad h' \in Y_0^*, \quad y' \in Y_-^*$ *каноническое спаривание факторизуется*

$$\langle xhy, x'h'y' \rangle = (-1)^{deg(x')deg(y)} \langle x, x' \rangle \langle h, h' \rangle \langle y, y' \rangle.$$

2) Умножение в $Y^0(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных пространств:*

$$Y_+^* \otimes Y_0^* \otimes Y_-^* \to Y^0(\mathfrak{g}).$$

3) Имеет место теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта для $Y^0(\mathfrak{g})$.

А.8 Дальнейшие результаты

Полученные выше результаты позволяют получить явные формулы для хопфова спаривания в дубле между элементами ПБВ базиса (и описать такой базис). Это позволит получить явную мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы янгианного дубля в случае скрученного янгиана супералгебры Ли типа $A(n-1, n-1)$ и янгиана странный супералгебры Ли типа Q_n (по крайней мере, в случае n=2). Этим вопросам будет посвящено продолжение данной работы. Рассмотрение других примеров скрученных янгианов и получение явного их описания представляется автору интересной задачей, особенно в случаях исключительных супералгебр Ли. Такое описание пока является открытой нерешённой проблемой.

А.8.1 Вычисление универсальной R- матрицы

Напомним, что выше было дано определение универсальной R- матрицы для квазитреугольной топологической супералгебры Хопфа, которое естественным образом обобщает понятия универсальной R- матрицы для квазитреугольной алгебры Хопфа (см. [120]) и универсальной R- матрицы для квазитреугольной топологической алгебры Хопфа (см. [125]). Ниже мы приведём определение квазитреугольной структуры для комодульной супералгебры (или универсальной R-матрицы). Мы будем использовать как обозначения Свидлера для тензорных произведений: $\Delta(h) = h^{(1)} \otimes h^{(2)}$, также и нижние индексы для обозначения компонент тензорных произведений: $R = R_1 \otimes R_2 \in A \otimes A$. Также будем пользоваться штрихами для различения свидлеровских компонент разных экземпляров одного и того же тензора: $RRR_{21} = R_1 R_{1'} R_{2''} \otimes R_2 R_{2'} R_{1''} \in A \otimes A$. Для универсальной R-матрицы R мы также будем использовать обозначения $R^+ = R$, $R^- = R_{21}^{-1}$. отметим, что $R^\pm$ можно рассматривать как отображение из A^* в A, действующее по правилу: $a \mapsto \langle a, R_1^\pm \rangle R_2^\pm$. Это отображение задаёт гомоморфизм бисупералгебры A^{*op} в A. Будем обозначать эти отображения через $R^\pm : A^{*op} \to A$. Рассмотрим композицию отображений:

$$\Delta : A^{*op} \to A^{*op} \otimes A^{*op}$$

и

$$R^+ \otimes R^- : A^{*op} \otimes A^{*op} \to A \otimes A$$

Будем обозначать эту композицию через

$$m_2 : A^{*op} \to A \otimes A \tag{A.8.1}$$

Начнём с напоминания определения универсальной R-матрицы для квазитреугольной супералгебры Хопфа.

Универсальной R-матрицей для квазитреугольной супералгебры Хопфа A называется обратимый элемент R, лежащий в некотором расширении тензорного произведения $A\hat{\otimes}A$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}, \qquad \forall x \in A;$$
$$(\Delta \otimes id)R = R^{13}R^{23}, (id \otimes \Delta)R = R^{13}R^{12},$$

где $\Delta^{op} = \sigma \circ \Delta, \sigma(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x$.

Если A является квантовым дублем супералгебры Хопфа A^+, то есть $A \cong A^+ \otimes A^-$, $A^- := A^0$ двойственная к A супералгебра Хопфа с противоположным коумножением, то A квазитреугольная супералгебра Хопфа и универсальная R- матрица в A допускает следующее каноническое представление:

$$R = \sum e_i \otimes e^i,$$

где $\{e_i\}, \{e^i\}$ двойственные базисы в A^+, A^-, соответственно.

Теперь модифицируем данное выше определение для случая комодульной супералгебры H, то есть ассоциативной супералгебры, являющейся также комодулем над некоторой супералгеброй Хопфа A. Ниже мы покажем, что универсальная R-матрица для скрученного янгиана является образом универсальной R-матрицы соответствующего нескрученного янгиана над которым данный скрученный янгиан является комодулем. Такая интерпретация, возможно, будет полезной и в некоторых приложениях развиваемой теории. Следуя аналогии со скрученными янгианами в смысле Г.И. Ольшанского, мы часто будем называть универсальную R-матрицу для скрученного янгиана S-матрицей. Отметим также, что имеет место также связь нашей S-матрицы с хорошо известными "уравнениями отражения"("reflection equation"). Именно рассмотрим уравнение:

$$R_{12}S_1R'_{12}S_2 = S_2(R')_{21}S_1R_{12}. \tag{A.8.2}$$

Отметим, что это уравнение (A.8.2) является следствием квантового уравнения Янга-Бакстера.

Рассмотрим решение $R \in A\otimes H$ уравнения (A.8.2). Мы покажем, что в качестве R можно выбрать образ универсальной R-матрицы $R_A \in A \otimes A$ янгиана A, являющегося супералгеброй Хопфа и такого, что скрученный янгиан H является комодульной супералгеброй над A. При этом уравнение (A.8.2) рассматривается в $A \otimes A \otimes H$. Это универсальное решение можно получить как образ элемента $R = R_H \in A \otimes H$, который определяется следующим условием:

$$(\Delta \otimes id)(R_H) = (R_H)_{13}R'_A(R_H)_{23}, \quad R'_A = (\tau \otimes id)R_A, \tag{A.8.3}$$

где $\tau : A \to A$ – антипод в A, а соотношение (A.8.3) понимается в $A \otimes A \otimes H$. Отметим, что если R_H удовлетворяет соотношению (A.8.2), то оно также удовлетворяет и уравнению (A.8.2). Элемент $R = R_H$ мы и будем называть универсальной R-матрицей комодульной супералгебры H (над супералгеброй Хопфа A).

Ниже мы будем также использовать обозначение S вместо R_H.

Предложение A.8.1. *Предположим, что γ – антипод квазитреугольной супералгебры Хопфа A, H – комодульная супералгебра над H с универсальной S-матрицей S. Тогда S обратимый элемент в $A \otimes H$ с обратным:*

$$S^{-1} = ((\gamma\tau)(R_1) \otimes 1)(\gamma \otimes id)(S)(R_2 \otimes 1) = (\tau(R_1) \otimes 1)(\gamma \otimes id)(S)(\gamma(R_2) \otimes 1) \tag{A.8.4}$$

Доказательство. Доказательство сводится к прямой проверке. Применим антипод к левой (правой) компоненте равенства

$$(\Delta \otimes id)(S) = S_1 R^{'}_{12} S_2, \tag{A.8.5}$$

Получим

$$((\gamma\tau)(R_1) \otimes 1)(\gamma \otimes id)(S)(R_2 \otimes 1)S = (\epsilon \otimes id)(S) =$$
$$= S(\tau(R_1) \otimes 1)(\gamma \otimes id)(S)(\gamma(R_2) \otimes 1)$$

Предложение доказано. ☐

Введём противоположную S-матрицу S^{op} формулой:

$$S^{op} = (R_2^{-1} \otimes 1)S(\tau(R_1^{-1}) \otimes 1) \in A \otimes H, \tag{A.8.6}$$

Полезным является следующее простое утверждение

Предложение A.8.2. *Элемент S^{op} является универсальной R-матрицей для комодульной супералгебры H над копротивоположной супералгеброй Хопфа A^{op} с универсальной R-матрицей R.*

Доказательство. Из уравнения (A.8.5) следует, что

$$(\Delta \otimes id)(S^{op}) =$$

$$(R_{2'}R_2) \otimes (R_{2'''}R_{2''})(S_1 R'_{12} S_2(\tau(R_{1''})\tau(R_1)) \otimes (\tau(R_{1'''})\tau(R_{1'}))$$

Здесь штрихи обозначают различные копии R-матриц. Заметим, что копия R-матрицы с одним штрихом сокращается с действием R-матрицы компоненты которой мы обозначаем двойным штрихом. Таким образом, мы получаем равенство

$$(\Delta \otimes id)(S^{op}) = S_1^{op} R'_{12} S_2^{op}.$$

Предложение доказано.

☐

Важной задачей является получение явных формул для универсальной R-матрицы скрученного янгиана. Эти формулы основаны на рассмотрении некоторой модификации конструкции квантового дубля супералгебры Хопфа. Мы рассматриваем аналог этой конструкции для комодульной супералгебры. Точнее говоря, мы строим функториальное соответствие между парой (A, H), A – супералгебра Хопфа, а H – комодульная супералгебра, являющаяся комодулем над A, и $DA, \tilde{H}$, где DA – квантовый дубль супералгебры Хопфа A, а $\tilde{H}$ – искомая комодульная супералгебра, являющаяся аналогом квантового дубля комодульной супералгебры H. Псевдотреугольная структура на H строится с использованием конструкции комодульной супералгебры $\tilde{H}$. Опишем эту конструкцию несколько подробнее. Опишем операцию умножения и комодульную структуру в терминах структурных констант, используя тензорные индексы. Пусть $m : H \otimes H \to H$ – отображение умножения в комодульной супералгебре, а $\Delta_1 : H \to A \otimes H$ – отображение, задающее комодульную структуру. Отметим, что двойственное к H векторное пространство H^* является модулем над A и коалгеброй, другими словами, определены отображения $\mu : A \otimes H^* \to H^*$ и $d : H^* \to H^* \otimes H^*$, задающие коумножение и структуру модуля. Выберем базисы $\{u_i\}$ в H и $\{u^i\}$ в H^*, а также базисы $\{e_i\}$ в A и двойственный базис $\{e^i\}$ в двойственной супералгебре Хопфа A^*. Для комодульной супералгебры можно определить понятие аналогичное понятию квантового дубля, именно комодульную супералгебру $H \otimes A^*$, а также двойственный её объект модульную косупералгебру $H^* \otimes A$ и противоположную ей модульную косупералгебру $A \otimes H^*$. Опишем несколько аккуратнее универсальную R-матрицу R_H квантового дубля комодульной супералгебры H. Нетрудно видеть, что универсальную S-матрицу R_H в $A \otimes H^*$ можно задать формулой:

$$R_H = \sum_i (1 \otimes e_i) \otimes (u^i \otimes 1) \tag{A.8.7}$$

Заметим, что любой оператор, действующий из конечномерного пространства в конечномерное может быть представлен как элемент тензорного произведения пространства в который действует оператор на пространство сопряжённое области определения оператора. В силу этого можно представлять, описанную выше универсальную R-матрицу как оператор. Будем пока для простоты предполагать, что мы работаем в категории конечномерных супералгебр Хопфа. Ниже мы распространим наши конструкции на случай топологических супералгебр. В этом случае требуется рассматривать пополненные тензорные произведения. Мы рассмотрим необходимые изменения основных определений для распространения их на бесконечномерный случай. Мы также обсудим связь этих конструкций с "уравнениями отражений"("reflection equation"или RE-уравнениями).

Пусть $\{e_i\}$ – базис в супералгебре Хопфа A, а $\{e^i\}$ – базис в двойственной супералгебре Хопфа A^*. Аналогично, пусть $\{u_i\}$ – базис в комодульной супералгебре H, рассматриваемой, как векторное пространство, а $\{u^i\}$ – двойственный базис в двойственной косупералгебре H^*. Отметим, что универсальная R-матрицу комодульной супералгебры мы также будем обозначать через R_H. Нетрудно видеть, что она имеет следующий вид:

$$R_H = \sum e_i \otimes u^i$$

Мы часто будем отождествлять универсальные R-матрицы комодульной супералгебры и её квантового дубля.

Опишем коммутационные соотношения в $(H \otimes A^{op}) \otimes A \otimes H^{op}$. Используя формулу для универсальной S-матрицы получаем:

$$u_s e^t = \mu_s^{ujn} m_{plk}^t \sigma_n^p e^l u_j$$

Отметим, что мы сначала получим общую структурную формулу для скрученного янгиана, после чего получим явную точную формулу для скрученного янгиана в частном случае квантования скрученной супералгебры Ли токов со значениями в супералгебре Ли $D(m, n)$. Отметим, что можно рассматривать скрученный янгиан как косупералгебру и модуль над супералгеброй A^*. Но в случае топологических супералгебр Хопфа это приводит к некоторым техническим трудностям, о которых, по существу, упоминалось в первой главе. Мы не будем пользоваться таким подходом. Мы также не будем обсуждать подробно его связь с используемым нами подходом. Заметим, что, в силу сказанного выше, вычисление универсальной R-матрицы в случае комодульных супералгебр в значительной степени сводится к вычислению универсальной R-матрицы над супералгеброй Хопфа над которой и определена комодульная структура данной комодульной супералгебры. В нашем случае это обычный янгиан базисной супералгебры Ли, а точнее, его квантовый дубль. Универсальная R-матрица для квантового дубля янгиана базисной супералгебры Ли была вычислена в предыдущей главе. Этой формулой мы будем пользоваться при вычислении формулы для универсальной R-матрицы скрученного янгиана.

В дальнейших рассуждениях мы существенным образом будем использовать понятие твиста ("twist") в бисупералгебре.

Далее мы будем использовать общее описание скрученного янгиана и пользоваться общей теоремой Пуанкаре-Биркгофа-Витта для скрученного янгиана (доказанной ранее). Используя ПБВ-теорему мы получим факторизованную формулу для универсальной R-матрицы комодульной супералгебры, причём, как мы увидим эта формула будет естественным образом согласована с формулой универсальной R-матрицы для квазитреугольной супералгебры Хопфа комодулем над которой и является заданная комодульная супералгебра. Строгой формулировке и доказательству этого результата и будет посвящена оставшаяся часть данного параграфа.

Для того, чтобы получить явные формулы для универсальной S-матрицы нам потребуются явные формулы для системы соотношений между элементами базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта в двойственной модульной косупералгебре $Y^{twist*}(\mathfrak{g})$ к скрученному янгиану. Эти формулы можно вывести из формул спаривания между элементами ПБВ базисов скрученного янгиана и двойственной ему модульной супералгебры.

Пусть $Y_+^{\pm}, Y_0^{\pm}, Y_-^{\pm}$ – подсупералгебры, в $Y^{tw}(\mathfrak{g}) \otimes Y^*(\mathfrak{g})$ $(DY(\mathfrak{g}))$ (причём верхний знак плюс означает, что супералгебра лежит в $Y^{tw}(\mathfrak{g})_+ \otimes Y^*(\mathfrak{g})+$, а знак минус, что в $Y^{tw}(\mathfrak{g})_- \otimes Y^*(\mathfrak{g})_-$, а $Y_0^{\pm} = Y^{tw}(\mathfrak{g})_0 \otimes Y^*(\mathfrak{g})_0)$, порождённые описанными выше полями $e_i^{\pm}(u), h_i^{\pm}(u), f_i^{\pm}(u), i \in I$, соответственно.

Имеет место следующее предложение.

Предложение A.8.3. *1) Универсальная R_H-матрица может быть представлена в следующей факторизованной форме:*

$$R_H = R_+ R_0 R_-,$$

где $R_+ \in Y_+^+ \otimes \tilde{Y}_-^-, R_0 \in Y_0^+ \otimes \tilde{Y}_0^-, R_- \in Y_-^+ \otimes \tilde{Y}_+^-$.
2)Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\langle e_{\beta_0}^{n_0} e_{\beta_1}^{n_1} \cdots e_{\beta_k}^{n_k}, \quad e_{-\beta_0-\delta}^{m_0} e_{-\beta_1-\delta}^{m_1} \cdots e_{-\beta_k-\delta}^{m_k} \rangle = \\ (-1)^{n_0+\cdots+n_k} \delta_{n_0,m_0} \cdots \delta_{n_0,m_0} \cdot n_0! n_1! \cdots n_k!; \qquad \text{(A.8.8)} \\ \langle h_{i,k}, \quad h_{j,l} \rangle = \qquad \text{(A.8.9)}\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем сначала формулу (A.8.8). Доказательство – это явное вычисление формулы спаривания между указанными в формулировке теоремы элементами базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта янгиана и двойственного ему базиса скрученного янгиана. Отметим, что сами вычисления проводятся в соответствии со схемой, реализованной выше для частного случая, когда янгиан является супералгеброй Хопфа. Здесь мы рассмотрим общий случай, когда скрученный янгиан является комодульной супералгеброй, а двойственный к нему скрученный янгиан – косупералгебра и модуль над супералгеброй Хопфа.

□

A.9 Скрученный янгиан супералгебры Ли типа $C(n) = \mathfrak{osp}(2, 2n)$

A.9.1 Супералгебра Ли типа $C(n)$ и её диаграммные автоморфизмы

Напомним определение базисной супералгебры Ли типа $C(n)$. Матрица Картана имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0\dots & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Определяющие соотношения, как обычно определяются Матрицей Картана.

A.9.2 Скрученная аффинная супералгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, 2n)^{(2)}$

Напомним определение скрученной аффинной супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, 2n)^{(2)}$. Матрица Картана этой супералгебры Ли имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0\dots & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A.10 Скрученный янгиан супералгебры Ли типа $D(m, n)$

В этом параграфе мы рассмотрим подробно конкретный пример скрученного янгиана, не являющегося супералгеброй Хопфа, а обладающего только структурой комодульной супералгебры. Мы рассмотрим квантование скрученной супералгебры Ли токов со значениями в супералгебре Ли типа $B(m, n)$ и строящейся по диаграммному автоморфизму второго порядка диаграммы Дынкина супералгебры Ли $B(m, n)$.

A.10.1 Скрученная супералгебра токов $D(m, n)^{tw}[t]$

Напомним определение скрученной супералгебры Ли токов со значениями в базисной супералгебре Ли типа $D(m, n)$. Помимо определения супералгебры Ли типа $D(m, n)$, данного выше, нам потребуется также определение диаграммного автоморфизма.

Пусть $D(m, n)^{tw}[t] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} D(m, n)_0 \otimes t^{2k} \oplus D(m, n)_1 \otimes t^{2k+1}$, где $B(m, n)_0$ – множество неподвижных точек диаграммного автоморфизма $\sigma : D(m, n) \longrightarrow D(m, n)$, а $DB(m, n)_1$ – собственное подпространство автоморфизма σ, соответствующее собственному значению, равному -1. Отметим также, что $D(m, n)_0 \simeq B(m, n)$.

Напомним, что супералгебра Ли $D(m, n)[t]$ порождается образующими: $x_i^{\pm} \otimes t^k, h_i \otimes t^k$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_i \otimes t^k, h_j \otimes t^m] = 0, \tag{A.10.1}$$
$$[h_i \otimes t^k, x_j^{\pm} \otimes t^m] = [h_i, x_j^{\pm}] \otimes t^{k+m} = \pm a_{ij} x_j^{\pm} \otimes t^{k+m}, \tag{A.10.2}$$
$$[x_i^{+} \otimes t^k, x_j^{-} \otimes t^m] = \delta_{ij} h_j \otimes t^{m+k}, \tag{A.10.3}$$
$$[x_i^{\pm} \otimes t^m, [x_i^{\pm} \otimes t^n, x_j^{\pm} \otimes t^r]] = 0, \qquad , \tag{A.10.4}$$
$$i \neq m+n-1, \quad j \neq m+n, \quad |i-j| = 1, \quad 1 \leq i, j < m+n$$
$$[x_{m+n-2}^{\pm} \otimes t^m, [x_{m+n-2}^{\pm} \otimes t^n, x_{m+n}^{\pm} \otimes t^r]] = 0, \tag{A.10.5}$$
$$[x_{m+n}^{\pm} \otimes t^m, [x_{m+n}^{\pm} \otimes t^n, x_{m+n-2}^{\pm} \otimes t^r]] = 0. \tag{A.10.6}$$

Супералгебра Ли $D(m,n)^{tw}[t]$ порождается образующими: $x_i^{\pm} \otimes t^k, h_i \otimes t^k$.

A.10.2 Скрученный янгиан $Y(D(m,n))^{tw}$

В этом пункте мы определим скрученный янгиан $Y(D(m,n))^{tw}$ как деформацию в классе комодульных супералгебр скрученной супералгебры токов $D(m,n)^{tw}[t]$. Сначала мы, используя результаты первой главы, а также параграфов 2 и 3 данной главы, покажем существование (и единственность) деформации скрученной супералгебры токов. После чего опишем полученную деформацию в терминах системы образующих и определяющих соотношений. Опишем общую структуру такой деформации.

Мы дадим сразу описание скрученного янгиана в терминах системы токовых образующих и определяющих соотношений, не приводя подробно вывод этих соотношений. Следует сказать, что определяющие соотношения выводятся из деформации супералгебры Ли скрученных токов по схеме, реализованной выше для скрученного янгиана супералгебры Ли типа $A(n,n)$, из которого и получился янгиан странной супералгебры Ли.

Определение A.10.1. *Янгиан $Y(D(m,n))^{tw}$ – это ассоциативная супералгебра Хопфа на $\mathbb{C}$, порождённая образующими $h_{i,j,2k+j}$, $x^{\pm}_{i,j,2k+j}$, $i \in I, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_2$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$[h_{i_1,0,k_1}, h_{i_2,j_2,k_2}] = 0, \tag{A.10.7}$$
$$[h_{i_1,0,0}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2}] = \pm a_{i_1,i_2} x^{\pm}_{i_2,j,k_2}, \tag{A.10.8}$$
$$[h_{i_1,0,k_1}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2}] = [h_{i_1,0,k_1-1}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2+1}] + \frac{b_{ij}}{2}\{h_{i_1,0,k_1-1}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2}\}, \tag{A.10.9}$$
$$[x^{\pm}_{i_1,0,k_1}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2}] = [x^{\pm}_{i_1,0,k_1-1}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2+1}] + \frac{b_{ij}}{2}\{x^{\pm}_{i_1,0,k_1-1}, x^{\pm}_{i_2,j,k_2}\}, \tag{A.10.10}$$
$$[x^{+}_{i_1,0,k_1}, x^{-}_{i_2,0,k_2}] = \delta_{i_1,i_2} h_{i_2,0,k_1+k_2}, \tag{A.10.11}$$
$$[x^{+}_{i_1,1,k_1}, x^{-}_{i_2,0,k_2}] = \delta_{i_1,i_2} h_{i_2,1,k_1+k_2}. \tag{A.10.12}$$

Литература

[1] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. – *Мир*, Москва, 1972, 160с.

[2] Бакстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. – М.: "Мир 1985.

[3] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы 1-3. Алгебры Ли. – М.: "Мир 1976.

[4] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы 4-6. Группы Кокстера и системы Титса. – М.: "Мир 1972.

[5] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы 7-8. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли. – М.: "Мир 1978.

[6] Делинь П., Милн Дж., Категории Таннаки. – Хождевы циклы и мотивы. М.: „Мир“, 1985. С.94-201.

[7] Демидов Е.Е. Квантовые группы. - "Факториал Москва, 1998.

[8] Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. – М.: "Мир 1978.

[9] Джимбо М. Мива Т. Алгебраический анализ точно решаемых решёточных моделей. – Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика Ижевск, 2000 г., 179 с.

[10] Замолодчиков А.Б., Замолодчиков Ал.Б. Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах. – М.: МЦНМО, 2009 г., 166 с.

[11] Кассель К. Квантовые группы. – "Фазис Москва, 1999.

[12] Кац В.Г. Бесконечномерные алгебры Ли. – "Мир М.:, 1993, 425 с.

[13] Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. – Москва: "Мир 1985.

[14] Молев А. Янгианы и классические алгебры Ли. – М.: МЦНМО, 2009. – 536 с.

[15] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – – М.:, Наука, 1988, 527 с.

[16] Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. – М.: "Наука 1984, 272с.

[17] Ананикян Д.Н., Кулиш П.П., Ляховский В.Д. Полные цепи твистов для симплектических алгебр. – *Алгебра и анализ.* – 2002 – Т.14, no 3. – С.27 – 54.

[18] Белавин А.А., Дринфельд В.Г. О решениях классического уравнения Янга-Бакстера для простых алгебр Ли. – *Функцион. анализ и его прилож.* – 1982. – Т.16, no 3. – С.1 – 29.

[19] Ваксман Л.Л., Сойбельман Я.С., Алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$. – *Функцион. анализ и его прилож.*– 1988. – Т.22, no 3. – С.1 – 14.

[20] Винберг Э.Б., О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обёртывающей алгебры. – *Изв. РАН. Сер. матем.*- 1990. – Т.54, no 1. – С. 3 – 25.

[21] Гельфанд И.М., Ретах В.С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами. – *Функц. анализ и его прил.* Т.**25**(1991), no 2. С. 13–25.

[22] Дринфельд В.Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга-Бакстера. – *Доклады АН СССР.*– 1983. – **Т.268**, no 2. – С.285 – 287.

[23] Дринфельд В.Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга-Бакстера. – *Доклады АН СССР.*– 1983. – **Т.273**, no 3. – С.531 – 535.

[24] Дринфельд В.Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-Бакстера.– *Доклады АН СССР.* – 1985. – Т.283, No 5. – С.1060 – 1064.

[25] Дринфельд В.Г. Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр. – *Доклады АН СССР.* – 1988. – **36**, 212 – 216.

[26] Дринфельд В.Г. Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр. – *Препринт ФТИНТ.* – 1986. – **30 – 86**.

[27] Дринфельд В.Г. О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа. – *Алгебра и анализ.* – 1989. – Т.1, выпуск 2.– С.30 – 45.

[28] Дринфельд В.Г. Квазихопфовы алгебры. – *Алгебра и анализ.* - 1989. - Т.1, no 6. - С.114 – 148.

[29] Дринфельд В.Г. О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной связанной с $Gal\bar{Q}/Q$. – *Алгебра и анализ.*– **Т. 2** (1990), no 4. – С.149-181.

[30] Дринфельд В.Г. Вырожденные аффинные алгебры Гекке и янгианы. – *Функцион. анализ и его прилож.*– 1986. – Т.20, no 1. – С.69 – 70.

[31] Дринфельд В.Г. О пуассоновых однородных пространствах групп Пуассона–Ли. – ТМФ, **95**(1993), no 2. – 226–227.

[32] Кац В.Г. Классификация простых суперaлгебр Ли. – *Функц. ан. и его прилож.*, **9**, (1975), no 3, 91 – 926.

[33] Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю. Представления янгианов и кратности вхождения неприводимых компонент в тензорное произведение представлений простых алгебр Ли. – *Аналитическая теория чисел и теория функций. VIII: Записки научных семинаров ЛОМИ.* Т. **160**(1987). С. 211 – 221.

[34] Кулиш П.П., Склянин Е.К. О решениях уравнения Янга-Бакстера. – *Зап. научн. семин. ЛОМИ.* – Т.95. – С.129 – 160. Л.: "Наука 1980.

[35] Кулиш П.П., Мудров А.И. Твист-подобные геометрии на квантовом пространстве Минковского. – *Труды Математического института АН им. Стеклова.* – 1999 – Т.226. – С.97 – 111.

[36] Кулиш П.П. Квантовые группы, q-осцилляторы и ковариантные алгебры. – *Теоретическая и матем. физика.* – 1993 – Т.94, no 2. – С.193 – 199.

[37] Лейтес Д.А. Супералгебры Ли. – *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения.*, **25**, Москва, 1984, с. 3 – 49.

[38] Левендорский С.З., Сойбельман Я.С., Квантовая група Вейля и мультипликативная формула для R-матрицы простой алгебры Ли. – *Функцион. анализ и его прилож.*- 1991. – Т.25, no 2. – С.73 – 76.

[39] Назаров М.Л., Хорошкин С.М., Скрученные янгианы и алгебры Микельсона. II. – *Алгебра и анализ*, **21**(2009), no 1, 153 – 228.

[40] Ольшанский Г. И. Янгианы и универсальные обёртывающие алгебры. – *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX: Записки научных семинаров ЛОМИ.* Т. **164**(1987). С. 142 – 150.

[41] Пенков И.Б. Характеры типичных неприводимых конечномерных $q(n)$-модулей. – *Функциональный ан. и его прилож.*, 20 (1986), no 1, с. 37– 45.

[42] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантование групп и алгебр Ли. – *Алгебра и анализ.* – **1**(1989), no 1. – С. 178– 206.

[43] Серганова В.В. Автоморфизмы супералгебр Ли. – *Известия АН СССР. Сер. матем.* –**48**(1984), no 3. – С. 585 – 598.

[44] Серганова В.В. Классификация простых вещественных супералгебр Ли и симетрических суперпространств. – *Функц. ан. и его прилож.* – **17**(1983), no 3. – С. 46 – 54.

[45] Сергеев А.Н. Аналог классической теории инвариантов для супералгебр Ли. – *Функц. анализ и его прил.* –**26**(1992), no 3. – С. 88 – 90.

[46] Сергеев А.Н. Оператор Калоджеро и супералгебры Ли. – *Теоретическая и матем. физика.* –**131**(2002), no 3. – С. 335 – 376.

[47] Склянин Е.К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера. – *Доклады АН СССР.* –**244**(1979), no 6. – С. 1337 – 1340.

[48] Склянин Е.К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния. – *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III: Записки научных семинаров ЛОМИ.* –**95**(1980). – С. 55 – 128.

[49] Склянин Е.К. Об одной алгебре, порожденной квадратичными соотношениями. – *Успехи мат. наук.* **Т. 40**(1985), no 2. – С. 214.

[50] Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи. I. – *Теоретическая и матем. физика.* –**40**(1979), no 2. – С. 194 – 220.

[51] Славнов Н.А. Алгебраический аназац Бёте и квантовые интегрируемые системы. – *Успехи матем. наук.* –**62**(2007), вып. 4. – С. 91 – 132.

[52] Сойбельман Я.С. Состояния Гельфанда-Наймарка-Сигала и группа Вейля для для квантовой группы $SU(n)$. – *Функц. анализ и его прилож.* –**24**(1990), вып. 3. – С. 92 – 93.

[53] Сойбельман Я.С. О квантовом многообразии флагов. – *Функц. анализ и его прилож.* –**25**(1991), вып. 4. – С. 90 – 92.

[54] Стукопин В.А. О янгианах супералгебр Ли типа A(m,n). – *Функцион. анализ и его прилож.*, **28**, no. 3 (1994), 85 – 90.

[55] Стукопин В.А. О квантовании некоторых псевдотреугольных супербиалгебр Ли, связанных с рациональными решениями уравнения Янга-Бакстера. – *Интегро-дифференциальные операторы и их прилож.*, выпуск **4**(1999), 73 – 78.

[56] Стукопин В.А. О новой системе образующих янгианов классических супералгебр Ли. – *Интегро-дифференциальные операторы и их прилож.*, выпуск **5**(2001), 111 – 120.

[57] Стукопин В.А. Новая система образующих и ПБВ теорема для янгианов супералгебр Ли. – *Известия вузов. Математика*, No. 2 (2002).

[58] Стукопин В.А. О янгианах супералгебр Ли: системы образующих и соотношений, PBW-теорема. – *Деп. в ВИНИТИ 22.01.2002, No 111*, 2002, 18с.

[59] Стукопин В.А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа A(m,n) и вычисление универсальной R-матрицы – *Фундамент. и прикладная математика*, **T.11**, No. 2 (2005), 185 – 208.

[60] Стукопин В.А. Янгианы базисных супералгебр Ли их квантовые дубли. – *Известия вузов. Сев.-Кав. науч. центр. Спец. выпуск*,(2005), 217 – 219.

[61] Стукопин В.А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа A(m,n). – *Функцион. анализ и его прилож.*, **40**, No. 2 (2006).

[62] Стукопин В.А., Янгиан "странной"супералгебры Ли Q_{n-1}. – *Известия вузов. Сев.-Кав. науч. центр. Естеств. науки*, No. 2 (2006) – С. 22 – 27.

[63] Стукопин В.А., Скрученные янгианы, подход Дринфельда. – *Современная математика и её приложения.* – Т. **60**(2008), с.145-162 .

[64] Стукопин В.А. О квантовании скрученных алгебр токов. – *Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.*— Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 189 – 196.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. **1**).

[65] Стукопин В.А. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта и представления янгианов супералгебр Ли. – *Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.*—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.— Мат. форум. (Итоги науки. Юг России.) – Т. **4** —С. 214 – 222.

[66] Стукопин В.А. О представлениях янгиана супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$. – *Владикавказский математический журнал.* – Т. **13**(2011), no 3. – С.53 – 63.

[67] Стукопин В.А. О классификации неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли sl(1,2). – *Вестник ДГТУ.* – Т. **11**(2011), no 8. – С.1180 – 1184.

[68] Стукопин В.А. О янгиане странной супералгебры Ли. – *Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.*— Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.– Мат. форум. (Итоги науки. Юг России.) – Т. 5. – С. 149 – 153.

[69] Стукопин В.А. О представлениях янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. – *Известия РАН. Серия матем.* – Т. **77**(2013), no 5. – С. 179 – 202.

[70] Стукопин В.А. Янгиан странной супералгебры Ли и его квантовый дубль. – *Теоретическая и математическая физика.* – Т.**174**(2013), no 1, с. 140 – 153.

[71] Стукопин В.А., О представлениях янгианов. – *Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.*—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.– Мат. форум. (Итоги науки. Юг России.) Т. 7. – С. 146 – 162.

[72] Стукопин В.А. О представлениях янгианов базисных супералгебр Ли. – *Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.* — Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.– Мат. форум. (Итоги науки. Юг России.) Т. 8, no 1. – С. 109 – 125.

[73] Стукопин В.А. О связи янгианов и квантовых аффинных супералгебр. – *Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XII международной конференции.* Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2015. С. 102 – 103.

[74] Стукопин В.А. Универсальная R-матрица квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли. – *Пятая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов* (22 – 27 июня, Самара): Тезисы докладов. – Самара, 2015. – С. 44 – 46.

[75] Тарасов В.О. О строении квантовых L операторов для R-матрицы XXZ модели. – *Теорет. и матем. физика.* – Т.**61** (1984), no 2. – С. 163-173.

[76] Тарасов В.О. Неприводимые матрицы монодромии для R-матрицы XXZ модели и решёточные квантовые локальные гамильтонианы. – *Теорет. и матем. физика.* – Т.**63** (1985), no 2. – С. 175-196.

[77] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга. – *Успехи матем. наук.* – Т.**34** (1979), no 5. – С. 13-63.

[78] Толстой В.Н., Хорошкин С.М. Универсальная R-матрица для квантовых нескрученных аффинных алгебр Ли. – *Функцион. анализ и его прилож.*, **26**(1992), No. 3, 85 – 88.

[79] Чередник И.В. О специальных базисах неприводимых представлений вырожденной аффинной алгебры Гекке. – *Функц. анализ и его прил..* Т.**20**(1986), no 1. С. 87 – 88.

[80] D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampe, L. Frappat, E. Ragoucy, R-matrix presentation for (super)Yangian $Y(\mathfrak{g})$. – *arXiv: math. QA/0111325.*

[81] D. Arnaudon, N. Crampe, Doikou A., Frappat L., Ragoucy E., Analytical Bethe ansatz for closed and open $\mathfrak{gl}(n)$ chains in any representations. – *J. Stat. Mech. Theory Exp.* 2005, no 2, P02007.

[82] Arnaudon D., Molev A., Ragoucy E., On R-matrix realization of Yangians and their representations. – *arXiv: math. QA/0511481.*

[83] G. Arutyunov, S. Frolov, M. Staudacher Bethe ansatz for quantum strings. –*JHEP*, 0410, 016 (2004)(arXiv: hep-th/0406256, 2004.)

[84] Arakawa T. Drinfeld functor and finite-dimensional representations of Yangian. – *Comm. Math. Phys.* – **205**, No 1 (1999). – P. 1–18.

[85] Arakawa T., Suzuki T. Duality between $\mathfrak{sl}(n, C)$ and degenerate affine Hecke algebra. – *J. Algebra.* – **209**(1998). – P. 288–304.

[86] G. Arutyunov, S. Frolov Foundations of the $AdS^5 \times S^5$ Superstring. Part 1. – *arXiv: hep-th/0901.4937, 2009*

[87] Babelon O., Bernard D., Smirnov F. Null-vectors in Integrable Field Theory. – *arXiv: hep-th/9606068*

[88] J. Beck, I. Frenkel, N. Jing Canonical Basis and Macdonald Polynomials. – *Advances in Math.*, **140** (1998), 95–127.

[89] J. Beck Convex bases of PBW type for quantum affine algebras. – *Comm. Math. Phys.*, **165** (1994), 193-200.

[90] J. Beck Braid group action and quantum affine algebras. – *Comm. Math. Phys.*, **165** (1994), 555-568.

[91] J. Beck, H. Nakajima Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras. – *arXiv:math/0212253*, 2002.

[92] N. Beisert, F. Spill The Classical r-matrix of AdS/CFT and its Lie Bialgebra Structure. – *arXiv: hep-th/0708.1762*, 2007.

[93] Beisert N., Galleas W., Matsumoto T. A Quantum Affine Algebra for the Deformed Hubbard Chain. – *arXiv: math-ph/1102.5700v2*, 2011.

[94] Beisert N., Gomez C., Hernandez R. A Crossing-Symmetric Phase for $AdS_5 \times S^5$ Strings. – *JHEP*, **0611** (2006), 070 (arXiv: hep-th/0609044).

[95] N. Beisert and M. Staudacher The N=4 SYM integrable super spin chain. – *Nucl. Phys.* **B670**(2003), 439 arXiv: hep-th/0307042.

[96] R. Bezrukavnikov, V. Ginzburg On deformation of associative algebra. – *Annals of Mathematics*, **166** (2007), 533 – 548.

[97] J. M. Drammond Review of AdS/CFT Integrability, Chapter VI.1: Superconformal Symmetry, *arXiv: hep-th/1012.4004v3*, 2011.

[98] Belliard S., Pakuliak S., Ragoucy E. Universal Bethe Ansatz and Scalar Products of Bethe Vectors. – *SIGMA*, **6**(2010), 094, 1 – 22.

[99] Belliard S., Pakuliak S., Ragoucy E. Algebraic Bethe ansatz afor scalar products in $SU(3)$-invariant integrable models. – *arxiv: math-phys/1207.0956v1*, 2012.

[100] Bernard D., Hidden Yangians in 2D Massive Current Algebras. – *Commun. Math. Phys.*, **165** (1994), 193-199.

[101] Bernard D., Hikami K., Wadate M., The Yangian Deformations of the W-algebras and the Calogero-Sutherland system. – *arXiv: hep-th/9412194*, 1994.

[102] Bogolubov N.M., Korepin V.E. Quantum inverse scattering method and correlation functions. – *Cambridge Monogr. Math. Phys.*, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1993.

[103] Brundan J., Kleshchev A., Parabolic presentation of the Yangian $Y(\mathfrak{gl}_n)$. – Commun. Math. Phys. **254** (2005), 191-220.

[104] Brundan J., Kleshchev A., Shifted Yangians and finite W-algebras. – *arXiv: math/0407012*, 2004.

[105] Brundan J., Kleshchev A., Representations of Shifted Yangians and finite W-algebras. – *arXiv: math/0508003*, 2005.

[106] Chari, V., Pressley, A., A guide to quantum groups. – *Camb.Univ.Press*, Cambridge, 1995.

[107] Chari, V., Pressley, A., Yangians and R-matrices, *L'Enseignment Mathematique.* – **36** (1990), 267 – 302.

[108] Chari, V., Pressley, A., Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices. – *J. Reine Angew. Math.*, **417** (1991), 87 – 128.

[109] Chari, V., Braid group action and tensor products. – *Internat. Math. Res. Notices*, (2002), 357 – 382.

[110] Crampe N. Hopf structure of the Yangian $Y(sl_n)$ in the Drinfel'd realization. – *JMP* **45** (2004) 434.

[111] Chen H., Guay N. Twisted affine Lie superalgebra of type Q and quantization of its enveloping superalgebra. – *preprint* (2011).

[112] T. Curtright, C. Zachos, Supersymmetry and the Nonlocal Yangian Deformation Symmetry. – *Nucl. Phys. B*, **402**(1993), p.604.

[113] Date E., Jimbo M., Miwa T., Okado M. Exactly solvable SOS models. II. Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities. – *Adv. Studies in Pure Math.* , **16**(1988), p.17 – 122.

[114] Ding J., Frenkel I. Isomorphism of two realization of the quantum affine algebra $U_q(\bar{\mathfrak{gl}(n)})$. – *arXiv: Comm. Math. Phys.*, **156**(1994), 277 – 300.

[115] J. Ding, S. Khoroshkin, S. Pakuliak Integral Presentation for the Universal R-matrix. – *arXiv: math QA/0008226*, 2000.

[116] J. Ding, S. Khoroshkin, S. Pakuliak Factorization of the Universal R-matrix for $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}(2))$. – *arXiv: math QA/0008227*, 2000.

[117] L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten A Relations Between Approaches to Integrability in the Superconformal Yang-Mills Theory. – *arXiv: hep-th/0308089*, 2003.

[118] L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten Yangian Symmetry in D=4 Superconformal Yang-Mills theory. – *arXiv: hep-th/0401243*, 2004.

[119] J. M. Drammond Review of AdS/CFT Integrability, Chapter V.2: Dual Superconformal Symmetry, *arXiv: hep-th/1012.4002v3*, 2011.

[120] Drinfeld V. Quantum groups. – *Proc. Int. Cong. Math.*, Berkley, **1** (1988), 789 – 820.

[121] Drinfeld V.G. On some unsolved problems in quantum group theory. – *Lect. Notes Math.* – **1510** (1992), pp. 1 – 8.

[122] Enriquez B., Kosmann-Schwarzbach Y. Quantum homogeneous spaces and Quasi-Hopf algebras. – *arXiv: math. QA/9912243*, 1999.

[123] Enriquez B., Geer N. Compatibility of quantization functor of Lie bialgebras with duality and doubling operations. – *arXiv: math. QA/0707.2337*, 2007.

[124] Etingof, P., Ginzburg V. Non-commutative Del-Pezzo surfaces andCalabi-Yau algebras. – arXiv: math. QA/0709.3593.

[125] Kazhdan, D., Etingof, P., Quantization of Lie bialgebras, 1. – Selecta Math. **2** (1996), no 1, p.1-41 (см. также *ArXiv: math QA/9506005*).

[126] Kazhdan, D., Etingof, P., Quantization of Lie bialgebras, 1. *arXiv: q-alg/9506005*, 1995.

[127] Kazhdan, D., Etingof, P., Quantization of Lie bialgebras, 2. – *arXiv: q-alg/9701038*, 1997.

[128] Kazhdan, D., Etingof, P., Quantization of Lie bialgebras, 3. – *arXiv: q-alg/9610030*, 1996.

[129] Kazhdan, D., Etingof, P., Quantization of Lie bialgebras, 4. – *arXiv: q-alg/9801043*, 1998.

[130] Kazhdan, D., Etingof, P., Quantization of Lie bialgebras, 5. – *arXiv: q-alg/9808121*, 1998.

[131] Etingof, P., Shiffmann O. Lectures on Quantum Groups. – *Lectures in Mathematical Physics*, International Press, Boston, 1998.

[132] Faddeev L. Hystory and perspectives of quantum groups. – *Milan J. Math.* – T.**74** (2006), no 1. – P. 279-294.

[133] Feigin B., Frenkel E. Quantization of soliton systems and Langlands duality. – *arXiv: 0705.2486 [math.QA]*, 2007.

[134] Feigin B., Jimbo M., Miwa T., Mukhin E. Branching rules for quantum toroidal $\mathfrak{gl}_1$ algebra: plane partitions. – *arXiv: 1110.5310v1 [math.QA]*, 2011.

[135] Feigin B., Jimbo M., Miwa T., Mukhin E. Quantum toroidal $\mathfrak{gl}_n$. – *arXiv: 1309.2147v2 [math.QA]*, 2014.

[136] Finkelberg M., Rybnikov L. Quantization of Drinfeld zastava. – *arXiv: 1009.0676 [math. AG]*, 2010.

[137] Frenkel E., Lectures on the Langlands Program and conformal field theory. – *arXiv: hep-th/0512172*, 2005.

[138] Frenkel I.B., Jing N. Vertex representations of quantum affine algebras. – *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* – V.**85** (1988). – P. 9373-9377.

[139] Froleanini F., Leites D., Vinet L., On defining relations of quantum superalgebras. – *Lett. Math. Phys.*, **23** (1991), p.127 – 131.

[140] Frappat L.,Sciarrino A., Sorba P. Dictionary on Lie Superalgebras. – *Academic Press*, London, 2000 (см. также. *arXiv: hep-th/9607161*, 1996.

[141] Gautam S., Toledano Laredo V. Yangians and Quantum Loop Algebras. – *arXiv: math. QA/1012.3687v1*, 2010.

[142] Geer N. Etingof-Kazhdan quantization of Lie Superalgebras. – *arXiv: math. QA/0409563*, 2004.

[143] Geer N. Some remarks on quantized Lie superalgebras of classical type. – *arXiv: math. QA/0508440*, 2005.

[144] Israel Gelfand, Sergei Gelfand, Vladimir Retakh, and Robert Lee Wilson Quasideterminants. – *Adv. Math.*, 193(1):56–141, 2005. math.QA/0208146.

[145] Gerstenhaber M., Schack S.D. Algebras, Bialgebras, Quantum Groups and Algebraic Deformations. – *Contemp. Mathematics*, **134** (1992), p. 51 – 92.

[146] Getzler E., Jones J.D.S. Operads, Homotopy algebras and iterated integrals for double loop spaces. – *arXiv: math. hep-th/9403055*, 1994.

[147] Ginzburg V. Geometric methods in representations theory of Hecke algebras and quantum groups. – *arXiv: math. AG/9802004*, 1998.

[148] Ginzburg V., Kapranov M., Vasserot E., Elliptic algebras and equivariant elliptic cohomology. – *arXiv: math. q-alg/9505012*, 1995.

[149] Ginzburg V., Kapranov M., Vasserot E., Langlands reciprocity for algebraic surfaces. – *Math. Res. Lett.*, **2** (1995), 147 – 160.

[150] Ginzburg V., Vasserot E., Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n. – *Intern. Math. Res. Notices*, **3** (1993), 67 – 85.

[151] Guay N. From quantum loop algebras to Yangians. – *preprint*, 2010.

[152] Gomez C., Hernandez R. The magnon kinematics of the AdS/CFT correspondence. – *J.High Energy PHysics*, **0611** (2006), 021 (arXiv: hep-th/0608029).

[153] Gomez C., Hernandez R. Integrability and non-perturbative effects in the AdS/CFT correspondence. – *Phys.Lett.B*, **644** (2007), 375 – 378 (arXiv: hep-th/0611014).

[154] Gorelik M., Serganova V. On representations of the affine superalgbra $q_n^{(2)}$. – *Moscow Math. J.*, **8**(2008), no 1, p.91 – 109.

[155] Grantcharov D., Jung J.H., Kang S.L., Kim M., Highest weight modules over Quantum Queer Superalgebra $U_q(\mathfrak{q}_n)$. – *arXiv: 0906.0265[math.RT]* , 2009.

[156] Grantcharov D., Jung J.H., Kang S.L., Kashiwara M., Kim M., Quantum Queer Superalgebra and Crystal Bases. – *arXiv: 1007.4105[math.QA]* , 2010.

[157] Grantcharov D., Jung J.H., Kang S.L., Kashiwara M., Kim M., Crystal Bases for the Quantum Queer Superalgebra and semistandard decomposition tableux. – *arXiv: 1103.1456[math.RT]* , 2011.

[158] Grantcharov D., Jung J.H., Kang S.L., Kashiwara M., Kim M., Crystal Bases for the Quantum Queer Superalgebra. – *arXiv: 1103.3437[math.RT]* , 2011.

[159] Gow L. Gauss decomposition of the Yangian $Y(\mathfrak{gl}_{m|n})$. – *arXiv: math QA/0605219* (2006).

[160] Gow L. Gauss decomposition of the Yangian $Y(gl(m|n))$. – *Comm. Math. Phys.* – V. **276** (2007), no 3. – P. 799 – 825.

[161] Guay N. Affine Yangians and deformed double current algebras in type A. – *Adv. Math.*, **211** (2007), no 2, p.436 – 484.*preprint*, 2010.

[162] Guay N. Cherednik algebras and Yangians. – *preprint*, 2010.

[163] Hilton P. Lectures in homological algebra. – AMS, Providence, Rhode Island, 1971.

[164] Hoyt C., Serganova V., Classification of finite-growth general Kac-Moody superalgebras. – *arXiv: 0810.2637[RT]*, 2008.

[165] Iohara, K., Bosonic representation of Yangian Double $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ with $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_N$. – *arXiv:QA/9603033*, 1996.

[166] Iohara, K., Kohno, M., A central extension of Yangian double and its vertex representations. – *arXiv:QA/9603032*, 1996.

[167] Jantzen J.C. Lectures on quantum groups. – *Graduate Studies in Mathematics*, Amer. Math. Soc., 1996.

[168] Jing N., Misra K.S. Vertex operators for twisted quantum affine algebras. – *arXiv: q-alg/9701034*, 1997.

[169] Jimbo M. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. – *Lett. Math. Phys.* – Vol.**10**(1985). – P. 63 – 69.

[170] Jimbo M. A q- analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation. – *Lett. Math. Phys.* – Vol.**11**(1986). – P. 247 – 252.

[171] Jimbo M., Miva T., Nakayashiki A. Difference equations for the correlation functions of the eight vertex model. – *J. Physics A* – Vol.**26**(1993). – P.2199 – 2209.

[172] Jimbo M., Miva T. qKZ equation with |q|=1 and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime. – *J. Physics A* – Vol.**29**(1996). – P.2923 – 2958.

[173] Jimbo M., Kedem R.,Konno H., Miva T., Weston R. Massless XXZ chains with boundary. – *Nuclear Phys. B*(1995). – **448**. – P. 429 – 456.

[174] Kac V. A Sketch of Lie Superalgebra Theory. – *Commun.Math.Phys.*, **53**, (1977), 31 – 64.

[175] Kac V. Lie Superalgebras. – *Adv. Math.* , **26**, (1977), 8 – 96.

[176] Kazhdan D., and Lusztig, G., Tensor structures arising from affine Lie algebras, III. – *J.of AMS*, **7**(1994), 335-381.

[177] T.Khongsap, W. Wang Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras I. The classical affine type – *Transform. Groups*, **13**(2008), no 2, 389 -– 412.

[178] Kashiwara M. Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras. – *Comm. Math. Phys.*, **133**(1990), p. 249 -– 260.

[179] T.Khongsap, W. Wang Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras II. The rational double affine type – *Pacific J. Mah.*, **238**(2008), no 1, 73 -– 103.

[180] T.Khongsap Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras III. The trigonometric type – *J. Algebra*, **322**(2009), no 8, 2731 -– 2750.

[181] Khoroshkin S.M., Central extension of Yangian Double, *arXiv: math QA/9606900*

[182] Khoroshkin S., Nazarov M., Yangians and Mickelsson Algebras I, *Transformation Groups*, **11**(2006), p. 625–658.

[183] Khoroshkin S., Nazarov M. Yangians and Mickelsson algebras II , *Moscow Math.J.*, **6**(2006), p. 477 – 504.

[184] Khoroshkin S., Nazarov M., Vinberg E. A generalized Harish-Chandra isomorphism, *Adv. Math.*, **226**(2011), p. 1168 – 1180.

[185] S.Khoroshkin and M.Nazarov Twisted Yangians and Mickelsson algebras I. – *Selecta Math.*, **13**(2007), 69–136.

[186] Khoroshkin S., Nazarov M., Twisted Yangians and Mickelsson Algebras II, *arXiv: 0801.0519[math.RT]*

[187] Khoroshkin S.M., Tolstoy V.N., Yangian Double, *Lett.Math.Phys.*,**36**, (1996), 373 – 402.

[188] Khoroshkin S.M., Tolstoy V.N., On Drinfeld realization of quantum affine algebras, *J. Geom. Phys.*,**11**, (1993), 445 – 452.

[189] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak Yangian Algebras and Classical Riemann Problems, ArXiv: q-alg/9712057.

[190] Kleber M. Combinatorial structure of finite dimensional representations of Yangians: the symply-laced case. – *arXiv: q-alg/9611032v2*, 1996.

[191] Kleshchev A., Shchigolev V. Modular branching rules for projective representations of symmetric groups and lowering operators for the supergroup $Q(n)$. – *arxiv: math/1011.0566v1*, 2010.

[192] Kontsevich M. Deformation quantization of Poisson manifolds, 1. – *arXiv: q-alg/97109040*, 1997.

[193] Kontsevich M. Deformation quantization of algebraic manifolds. –*arXiv: math AG/0106006*, 2001.

[194] Kontsevich M., Soibelman Ya. Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivi Donaldson-Thomas invariants.–*arXiv:1006.2706[math AG]*, 2010.

[195] Kulish P., Sklyanin E. Quantum spectral trnsform method: recent developments. – *Integrable Quantum Fields Theories*, Lectures Notes in Physics, **151**, Springer, Berlin, 1982, pp.61 – 119.

[196] Smirnov F. Dynamical symmetries of massive integrable models, *J.Modern Phys.A*, **7** suppl. 1B, (1992), 813-838.

[197] LeClair A., Smirnov F. Infinite quantum group symmetry in massive 2D quantum fielf theory. – *Intrnat. J.Modern Phys.A*, **7**, (1992), 297 – 302.

[198] Leites D., Floreanini R., Vinet L. On the defining relations of quantum superalgebras. – *Lett. Math. Phys.*, **23** (1991), 127 – 131.

[199] Leites D., Serganova V. Solutions of the classical Yang-Baxter equations for simple Lie superalgebras. – *Theoret.Math.Phys.*, **58** (1984), 16 – 24.

[200] Leites D., Serganova V. Defining relations for classical Lie superalgebras I. Superalgebras with Cartan matrix or Dynkin-type diagram. *Proc. Topological and Geometrical Methods in Field Theory*, World Sci., Singapore, 1992, 194 – 201.

[201] Levendorskii S. On generators and defining relations of Yangians, *J.Geom.Phys.*, **12** (1993), 1 – 11.

[202] Levendorskii S. On PBW bases, *Lett. Math. Phys.*, **12** (1993), 37 – 42.

[203] Levendorskii S., Soibelman Ya., Some applications of the quantum Weyl group. *J. Geom. Phys.*, **7**,(1990), 241 – 254.

[204] Levendorskii S., Soibelman Ya., Stukopin V., Quantum Weyl group and universal R-matrix for quantum affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. – *Lett. Math. Phys.*, **27**(1993), 253 – 264.

[205] Lusztig G. Introduction to Quantum Groups. – Boston, MA: Birkhauser, 1993 (Prog. Math., 110).

[206] Lusztig G. Canonical Bases arising from Quantized Universal Enveloping Algebras. – *Amer. Math. J.*, **36** (1990).

[207] Lusztig G. Canonical bases and Hall algebras. – *Representations theories and algebraic geometry*, NATO Advanced Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **514**, p. 365 – 399 (1998).

[208] Lusztig G. Quantum groups at roots of 1. – *Geom. Dedicata*, **35** (1990), 89 – 113.

[209] Maldacena J., TASI 2003 lectures on AdS/CFT. *arXiv: hep-th/ 0309246.*

[210] Manin Yu. I., Topics in non-commutative geometry. – Priceton:: Princeton Univ. Press, 1991.

[211] Mac Lane S., Categories for working mathematician. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1971, 302 p.

[212] D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, *arXiv: 1211.1287 [math.AG]*, 2012.

[213] J. Minahan, K. Zarembo, Bethe-ansatz for N=4 super Yang-Mills, *arXiv: hep-th/0212208*, 2002.

[214] J. Minahan, Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.1: Spin Chains in N = 4 Super Yang-Mills, *arXiv: hep-th/1012.3983v3*, 2011.

[215] M. Mintchev, E. Ragoucy, P.Sorba, Ph. Zaugg Yangian symmetry in the Nonlinear Shrodinger hierarhy, *arXiv: hep-th/9905105*, 1999.

[216] Molev A. Yangians and their applications. – *in "Handbook of Algebra Vol.3* (M. Hazewinkel, Ed.), Elsevier, 2003.

[217] Molev A. Finite-dimensional irreducible representations of twisted Yangians. – *J. Math. Phys.* **39** (1998), p. 559 – 560.

[218] Molev A., Gelfand-Tsetlin basis for representations of Yangians. – *Lett. Math. Phys.*, **30**,(1994), 53 – 60.

[219] Molev A., Representations of twisted Yangians. – *Lett. Math. Phys.*, **26**,(1992), 211-218.

[220] Molev A., Nazarov M., Olshanski G. Yangians and classical Lie algebras. – *Russian Math. Surveys*, **51**, No. 2 (1996), 205-282.

[221] Molev A., Ragoucy E., Symmetries and invariants of twisted quantum algebras and associated Poisson algebras. – *arXiv: math. QA/0701902.*

[222] Molev A., Tolstoy V., Zhang R., On irreducibility of tensor products of evaluation modules for the quantum affine algebras. – *J. Phys. A.*, **37**(2004), 2385–2399.

[223] Mudrov A., Reflection equation and twisted Yangians. – *J.Math. Phys.*, **48**(2007). No 9. 093501, 23 p.

[224] Nakajima H., Quiver varietes and finite-dimensional representations of quantum affine algebras. – *J. Amer. Math. Soc.*, **14**(2001), 145 – 238.

[225] Nakajima H., Quiver varietes and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras. – *Ann. of Math.*, **160**(2004), 1057 – 1097.

[226] Nakajima H. t–analogs of q–characters of quantum affine algebras of type A_n, D_n. – *arXiv: math.QA/0204184*, 2002.

[227] Nazarov M., Quantum Berezinian and the classical Capelly identity. – *Lett.Math.Phys.*, **21**, (1991), 123 – 131.

[228] Nazarov M., Yangian of the Queer Lie Superalgebra. – *Commun.Math.Phys.*, **208** (1999), 195 – 223.

[229] Nazarov M., Mixed hook-length formula for degenerate affine Hecke algebras. – *Lecture Notes Math.*, **1815** (2002), 223 – 236.

[230] Nazarov M., Sergeev A., Centralizer construction of the Yangian of the queer Lie superalgebra. – *Studies in Lie theory*, 417 – 441. Progr. Math., **243**, Birkhuser Boston, Boston, MA, 2006.

[231] Nazarov, M., Tarasov, V., On irreducibility of tensor products of Yangian modules. – *Internat. Math. Research Notices* (1998), 125 – 150.

[232] Olshanski G. Twisted Yangians and infinite-dimensional classical Lie algebras. – *Quantum Groups*(Lecture Notes in Math.: vol 1510). Berlin: Springer, 1992. P. 103 – 120.

[233] Olshanski G. Quantized universal enveloping superalgebra of type Q and super-extension of the Hecke algebra. – *Lett. Math. Phys.*, 24 (1992), no 2, c. 93 – 102.

[234] Penkov I., Serganova V. Characters of finite-dimensional irreducible $q(n)$-modules. – *Lett. Math. Phys.*, 40 (1997), no 2, c. 147– 158.

[235] Plefka S., Spill F., Torrielli A., On the Hopf algebra structure of the AdS/CFT S-matrix. – *Phys. Rev.* **D74**(2006), 066008 arXiv: hep-th/0608038.

[236] Ragoucy E., Twisted Yangians and folded W-algebras. – *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**(2001), p. 2411 – 2433.

[237] Ragoucy E., Sorba P. Yangians and finite W-algebras. – *Czech. J. Phys.*, **48**(1998), p. 1483 – 1487.

[238] Ragoucy E., Sorba P. Yangians realization from finite W-algebras. – *Comm. Math. Phys.*, **203**(1999), p. 551 – 572.

[239] Ringel C., Hall algebras and quantum groups. – *Invent. math.*, **101**(1990), no 3, p. 583 – 591

[240] Reyman A.S., Semenov-Tyan-Shansky M.A., Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I. – *Invent. math.*, **54**(1979), p. 81 – 100.

[241] Reyman A.S., Semenov-Tyan-Shansky M.A., Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II. – *Invent. math.*, **63**(1979), p. 423 – 432.

[242] Rosso M., An analogue of the P.B.W. theorem and the universal R-matrix for the $U_h(\mathfrak{sl}(N+1))$. – *Comm. Math. Phys.*, **124**(1989), p.307 – 318.

[243] Sergeev A.N. The How duality and the projective representations of symmetric groups. – *arXiv: math/09810148*, 1998.

[244] Shiffman O. Lectures on Hall algebras. – *arXiv: math/0611617*, 2006.

[245] Shiffman O., Seok-Jin Kang Canonical bases for quantum generalized Kac-Moody algebra. – *arXiv: math/0311089*, 2003

[246] Smirnov F. Dynamical symmetries of massive integrable models.– *Infinite Analysis*, Advansed Series in Math. Physics, **16**, pp. 813-838, 839 – 858.

[247] Spill F., Torelli A. On the Drinfeld's second realization of the **Ads/CFT** $\mathfrak{su}(2,2)$ Yangian. – *arXiv: hep/th 0803.3194*

[248] Stolin A. On rational solutions of Yang-Baxter equation for sl(n). – *Math. Scand.* , **69**(1991), 533 – 548.

[249] Stolin A. On rational solutions Of Yang-Baxter equations. Maximal orders in loop algebras. – *Comm. Math. Phys.*, **141**(1991), 57 – 80.

[250] Stukopin V. Representations theory and Doubles of Yangians of classical Lie superalgebras.– *Asymptotic Combinatorics with Appic. to Math. Phys.*, 255 – 265 (2002). Kluwer Academic Publishers.

[251] Stukopin V. Yangians of Classical Lie Superalgebras: Basic Constructions, Quantum Double and Universal R-Matrix – *Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukranian* , **50**, No. 3 (2005), 1196 – 1201.

[252] Stukopin V. Quantum Double of Yangian of Lie superalgebra A(m,n)– *math. QA/0504302*, 2005.

[253] Stukopin V. Quantum Double of Yangian of "strange"Lie superalgebra. Drinfeld approach. – *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, Vol.3 (2007).

[254] Stukopin V., Quantum Double of Yangian of "strange"Lie superalgebra. Drinfeld approach. – *ArXiv: math QA/0705.3250.*

[255] Stukopin V. Twisted Yangians, Drinfel'd approach. – *Journal of Mathematical Sciences.*, V. **161**(2009), no 1. – P.143 – 162.

[256] Stukopin V. On representations of Yangian of Lie Superalgebra $A(n, n)$ type. – *Journal of Physics. C. S.*, V. **411**(2013), issue 1., 012027.

[257] Stukopin V. The Yangian of the strange Lie superalgebra and its quantum double. – *Theoretical and Math. Physics*, V. **174**(2013), issue 1, p.122 – 133.

[258] Stukopin V. On representations of Yangian of orthosymplectic Lie Superalgebra. – *Comm. Math.Phys.*, (2016) (in print).

[259] Y.Su, R.B. Zhang, Cohomology of Lie Superalgebras $\mathfrak{sl}_{m|n}$, $\mathfrak{osp}_{2|n}$ – *arXiv: math/0402419*, 2004.

[260] Tamarkin D. Another proof of M. Kontsevich formality theorem for R^n – *ArXiv: math QA/9803025.*

[261] Tarasov V. Cyclic monodromy matrices and for $sl(n)$ and trigonometric R-matrices. – *Comm. Math. Phys.* – V.**158** (1993), no 2. – P. 459-484.

[262] Toledano Laredo V. A Kohno- Drinfeld theorem for quantum Weyl groups. – *Duke Mathematics Journal*, **112**(2002), no 3, p. 421 – 451.

[263] Toledano Laredo V. Quasi Coxeter algebras, Dynkin diagram cohomology and quantum Weyl group. – *Int. Math. Res. Rap.* (2008).

[264] Tsuchiya A., Kanie Y. Vertex operators in two-dimensional conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid groups. – *Conformal field theory and solvable lattice models. Advanced Studies in Pure Mathematics* **16**. Tokyo: Kinokuniya, 1988. P. 297-372.

[265] A. Torrielli Review of AdS/CFT Integrability, Chapter VI.2: Yangian Algebra, *arXiv: hep-th/1012.4005*, 2011.

[266] Тураев В.Г. Операторные инварианты связок и R-матрицы. – *Изв. АН СССР*, **53**(1989), No. 5, 1073 – 1107.

[267] Van der Leur J.W. Contragredient Lie superalgebras of finite growth. – *Utrecht thesis*, 1985

[268] Van der Leur J.W., A classification of contragredient Lie superalgebras of finite growth. – *Communications in Algebra.* V.**17**(1989), p. 1815 - 1841.

[269] Varagnolo M. Quiver vareities and Yangians. – *Letters in Mathematical Physics*, **52**(2000), no 4, 273 – 283. *ArXiv: math QA/0005277.*

[270] Varagnolo M., Vasserot E. Double loop algebras and the Fock space. – *ArXiv: q-alg/9612035.*

[271] Vasserot E. Affine quantum groups and equivariant K-theory. – *Transform. Groups.* Vol. 3 (1998). P. 269 – 299.

[272] Woronowicz S.L. Compact matrix pseudo-groups. – *Comm. Math. Phys.*, **111** (1987), p.613-665.

[273] Xu P. Gerstenhaber algebras and BV algebras in Poisson geometry. – *Comm. Math. Phys.*, **200** (1999), no 3, p.545-560.

[274] Zhang R.B. Representations of super Yangian. – *J. Math. Phys.*, **V. 36**(1995), 3854-3865.

[275] Zhang R.B. The $\mathfrak{gl}(M,N)$ super Yangian and its finite-dimensional representations. – *Lett. Math. Phys.*, **V. 37**(1996), 419-434.

[276] Zhang Y.-Z. Super-Yangian double and its central extension. – *Phys. Lett. A*, **V. 234**(1997), 20-26.

[277] Zwiebel B. Two-loop integrability of planar N=6 superconformal Chern-Simons theory. – *arXiv: 0901.0411v1 [hep-th]*

[278] Zwiebel B. I. Yangian symmetry at two-loops for the su(2|1) sector of N = 4 SYM. – *J. Phys. A* **40**(2007), 1141 (arXiv:hep-th/0610283).