

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Стукопина В.А. "Янгианы супералгебр Ли", представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертация В.А. Стукопина "Янгианы супералгебр Ли" посвящена т.н. янгианам супералгебр Ли, их конструкции, структурной алгебраической теории конечномерным представлениям и связанным с ними решениям градуированного уравнения Янга-Бакстера.

Янгианы классических алгебр Ли были введены В.Г.Дринфельдом как деформации алгебр токов со значениями в простой алгебре Ли, отвечающие рациональным решениям классического уравнения Янга-Бакстера. Исследования в структурной теории янгианов и в их теорий представлений оказали существенное влияние на современное состояние исследований квантовых интегрируемых моделей. Более того, благодаря работам Г.И.Ольшанского и И.Чередника, в рамках теории представлений янгианов удалось решить также давно стоящие проблемы классической теории представлений групп Ли.

С другой стороны, теория супералгебр Ли и их представлений занимает в настоящее время такое же фундаментальное положение, как и классическая теория групп и алгебр Ли. Однако, далеко не все методы и результаты геометрии групп Ли и теории представлений допускают прямое обобщение на суперслучай. С учетом этого развитие теории янгианов простых супералгебр Ли представляется важной задачей как с точки зрения приложений к интегрируемым моделям, так и с точки зрения классической теории групп и алгебр Ли.

Полученные в диссертации В.А. Стукопина результаты являются весомым вкладом в развитие теории янгианов простых супералгебр Ли, с возможностью дальнейшего применения к квантовым интегрируемым моделям, а также к классическим вопросам геометрии и теории представлений супергрупп и супералгебр Ли.

Диссертация состоит из введения и шести глав, общим объемом 323 страницы.

В первой главе приведены общие результаты о градуированных алгебрах Хопфа и квантовым деформациям универсальных обертывающих простых супералгебр Ли; в частности, дается и обсуждается определение янгиана простой супералгебры Ли как квантования соответствующей бисупералгебры.

Вторая глава посвящена янгиану специальной линейной супералгебры Ли. Следуя идеологии "новой реализации" В.Г.Дринфельда, вводится "токовая" система образующих янгиана, на которые выписывается бесконечная система квадратичных соотношений, а также соотношений третьего и четвертого порядка, происходящих из соотношений Серра. Доказывается полнота этих соотношений. что представляет из себя нетривиальную техническую задачу с привлечением

деформационных аргументов. Вводится базис типа Пуанкаре-Биркгофа-Витта, основанный на корневой конструкции для выпуклого порядка в системе корней аффинной супералгебры. Доказывается аналог теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Приводится конструкция квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли, аналогичная соответствующей конструкции для янгиана простой алгебры Ли. А именно, для описания дубля как ассоциативной алгебры в системе образующих натуральный индекс заменяется целочисленным, соотношения продолжаются аналитически. Более нетривиальной задачей является вычисление структуры алгебры Хопфа и конструкция универсальной R -матрицы. Коумножение автор выписывает в производящих функциях, а также на образующих малой степени. В конструкции универсальной R -матрицы автор следует методам В.Толстого и С.Хорошкина, исследуя треугольное разложение хопфова спаривания. Конечным результатом является явная мультипликативная формула для универсальной R -матрицы дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли.

В третьей главе исследуются конечномерные представления янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Главным результатом является классификация неприводимых конечномерных представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли в терминах аналогов полиномов Дринфельда. Отдельно рассмотрен случай янгиана супералгебры $sl(n, n)$, для которой классификация усложняется и выглядит несколько иначе.

Четвертая глава посвящена изучению янгианов базисных супералгебр Ли серий $B(m, n)$, $D(m, n)$, $C(n)$. Для них также вводится система токовых образующих, строится квантовый дубль, базис типа Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Доказывается теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Исследуя треугольное разложение хопфова спаривания двух противоположных подалгебр Хопфа квантового дубля, находится мультипликативная формула для универсальной R -матрицы.

Пятая, наиболее технически и идейно сложная глава диссертации, посвящена янгиану "странной" супералгебры Q_n . По мнению многих известных специалистов, представления именно "странных" супералгебр серий P и Q наиболее интересны; в них проявляются специфические свойства супералгебр, не являющиеся прямыми обобщениями "четных" конструкций. Поэтому результаты этой главы представляют особый интерес.

Янгиан $Y(Q_n)$ странной супералгебры Q_n может быть определен как квантование некоторой супералгебры скрученных токов, где супералгебра Q_n определяется как множество неподвижных точек некоторого инволютивного автоморфизма базисной супералгебры Ли $A(n, n)$. Автор строит по В.Г.Дринфельду квантование бисупералгебры Ли полиномиальных петель и описывает полученный объект в терминах аналогов образующих Картана-Вейля. В четном случае такая конструкция приводит к топологической алгебре Хопфа, изоморфной дублю янгиана, соответствующему соответствующей скрученной аффинной алгебре Ли как алгебра, но с иным коумножением, связанным с каноническим нетривиальной подкруткой. Такова же ситуация и в нечетном случае.

В.А.Стукопин приводит бесконечную систему образующих проквантованной им алгебры скрученных токов, и выписывает на них систему полиномиальных соотношений. Построенный базис продолжается затем до корневого базиса типа Картана-Вейля, используемого для формулировки и доказательства соответствующей теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Это продолжение технически нетривиально: оно обращается к индукционной цепочке базисов янгианов $Y(Q_m)$, $m < n$. Хопфово спаривание в построенном базисе имеет треугольную структуру, что позволяет автору диссертации предъявить факторизованную форму для универсальной R -матрицы без вычисления нормировочных множителей для корневых векторов. Из этого же результата видно, что построенная таким образом градуированная алгебра Хопфа действительно является квантованием бисупералгебры, отвечающей янгиану супералгебры Q . Остается открытым вопрос о соответствии этого результата конструкции М.Назарова янгианов странных супералгебр, полученных в рамках R -матричного формализма.

В последней главе диссертации излагаются более ранние результаты автора, полученные в совместных с Я.Сойбельманом и С.Левендорским, о нахождении универсальной R -матрицы квантовой аффинной алгебры $A_1^{(1)}$, а также связь между квантовыми аффинными (супер)алгебрами базисных супералгебр Ли $A(m, n)$ и соответствующими янгианами.

Также как и для янгиана, универсальная R -матрица для квантовой аффинной алгебры допускает треугольное разложение с факторизованными по корням сомножителями. Основная задача в обоих случаях - построение корневого базиса Картана-Вейля, по элементам которого происходит факторизация сомножителей. Для построения действительных корней в случае квантовой аффинной алгебры используются автоморфизмы Люстига, мнимые же корни строятся, как и других авторов, логарифмированием производящей функции образующих Дринфельда.

Ту же идеологию производящих функций образующих Дринфельда автор использует для построения топологического гомоморфизма квантовой аффинной супералгебры специальной линейной супералгебры Ли в соответствующий янгиан. Доказывается, что этот гомоморфизм устанавливает топологический изоморфизм подалгебры полиномиальных петель и янгиана.

Диссертация В. А. Стукопина является оригинальным глубоким исследованием по теории представлений, некоммутативному анализу с возможными приложениями к математической физике. Все представленные результаты являются новыми и доказанными. Работы, составляющие основу диссертации, хорошо известны специалистам и активно цитируются. Результаты В. А. Стукопина, представленные в диссертации, вне всякого сомнения послужат источником новых исследований в современной теории представлений, некоммутативном анализе и математической физике.

Текст диссертации не лишен недостатков. Имеется значительное число опечаток, обозначения не всегда подробно объяснены, их введение может находиться далеко от используемого места.

Диссертация В. А. Стукопина удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям и ее автор бесспорно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук. Результаты своевременно опубликованы и автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Доктор физико-математических наук
Ведущий научный сотрудник

С.М. Хорошкин
16.09.16г.

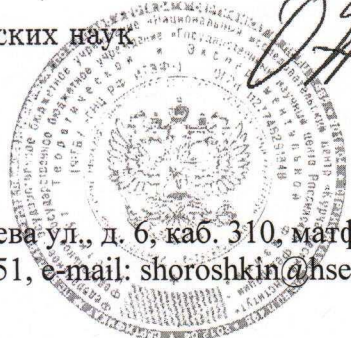
С. М. Хорошкин

Подпись С. М. Хорошкина заверяю:

Ученый секретарь
ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ
Кандидат физико-математических наук

В.В. Васильев

В. В. Васильев



Контактные данные: Москва, Усачева ул., д. 6, каб. 310, матфак ВШЭ.
телефон: +7(495) 772-9590 доб. 12751, e-mail: shoroshkin@hse.ru