

ОТЗЫВ
официального оппонента д.ф.-м.н. Сергеева А.Н
на диссертацию В.А.Стукопина
ЯНГИАНЫ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 - математическая
логика, алгебра и теория чисел

Диссертация посвящена теории Янгианов классических простых базисных супералгебр Ли над полем комплексных чисел. Янгианы образуют семейство квантовых групп связанных с рациональными решениями уравнения Янга - Бакстера. Янгианы это также ассоциативные алгебры являющиеся каноническими деформациями универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[z])$ для супералгебры токов $\mathfrak{g}[z]$. В случае простых конечномерных алгебр Ли янгианы вначале появились неявно в работах ленинградской школы, возглавляемой Л.Д. Фадеевым на основе тройного соотношения, которое берет свое начало в квантовом методе обратной задачи. Термин Янгиан был введен В.Г. Дринфельдом являющимся вместе с М. Джимбо родоначальником теории квантовых групп. Дринфельд также дал эквивалентное определение Янгиана в терминах отличных от терминов школы Л.Д. Фадеева. Заметим, что в то время как определение ленинградской школы работает только в случае простых классических алгебр Ли, определение Дринфельда годится для любой простой конечномерной алгебры Ли, так как использует только соответствующую систему корней. Диссертация посвящена дальнейшему развитию подхода В.Г. Дринфельда и перенесению соответствующих результатов на случай простых конечномерных контраградиентных супералгебр Ли. Поэтому тема диссертации несомненно является актуальной.

Перечислим основные результаты диссертации.

1. Получена явная формула для универсальной R - матрицы квантового дубля янгиана общей линейной супералгебры и на основе этой формулы выводится также явная формула для R матрицы самого янгиана общей линейной супералгебры.

В работах Дринфельда была дана общая конструкция (называемая квантовым дублем), позволяющая по произвольной алгебре Хопфа построить новую алгебру Хопфа содержащую исходную в качестве подалгебры, вместе с R матрицей такой, что она задается простой явной формулой и удовлетворяет уравнению Янга - Бакстера. Пользуясь этой конструкцией и используя связь между

исходной алгеброй Хопфа и ее квантовым дублем можно получить явную формулу для R матрицы исходной алгебры Хопфа. Вопрос явного описания R янгиана и его квантового дубля оставался открытым даже в случае простых алгебр Ли.

В.А. Стукопин впервые доказывает явную формулу для R матрицы квантового дубля янгиана общей линейной супералгебры, а также доказывает явную формулу для R матрицы самого янгиана общей линейной супералгебры. Для вывода этих явных формул В.А. Стукопин попутно вводит и доказывает необходимые общие результаты о янгиане общей линейной супералгебре, такие как, эквивалентность двух различных определений янгиана, теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта, треугольное разложение, явное описание двойственной алгебры Хопфа к янгиану общей линейной супералгебры и построение квантового дубля. В качестве приложения полученных результатов приводится еще одно доказательство эквивалентности двух определений янгиана общей линейной супералгебры.

2. Классификация неприводимых конечномерных представлений супералгебры Ли $A(m, n)$.

Как и в случае простых конечномерных алгебр Ли, для неприводимых конечномерных представлений янгианов простых алгебр Ли справедлива теорема о векторе старшего веса. Это было доказано В.Г. Дринфельдом. Им также были получены необходимые и достаточные условия на старший вес неприводимого модуля обеспечивающие конечномерность.

В.А. Стукопин развивает теорию конечномерных представлений янгиана супералгебры Ли $A(m, n)$ сновываясь на первоначальных идеях В.Г. Дринфельда, то есть доказывает существование и единственность вектора старшего веса для конечномерного модуля, а также существование неприводимого модуля с заданным старшим весом. Затем находит условия на старший вес обеспечивающие конечномерность.

Следует отметить, что аналогичные результаты были получены независимо Р.Б. Жангом для янгиана супералгебры $\mathfrak{gl}(m, n)$ другими методами. В.А. Стукопин также показывает как классификация неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли $A(m, n)$ может быть получена из результатов Р.Б. Жанга.

3. Построение теории янгианов для базисных супералгебр Ли. То есть обобщение предыдущих результатов на случай супералгебр Ли $B(m, n)$, $D(m, n)$, $C(n)$ и странной супералгебры Ли $Q(n)$. В частности впервые приводится классификация неприводимых конечномерных представлений для янгиана супералгебры Ли $D(m, n)$.

В случае супералгебры отличной от $Q(n)$ как и прежде используется подход В.Г. Дринфельда при задании янгиана в терминах образующих и соотношений на основе матрицы Картана. Для описания двойственного объекта к янгиану, в терминах образующих и соотношений, который также оказывается янгианом, используются результаты Дринфельда. Явное вычисление R матрицы для квантового дубля и янгиана основывается на методах работы С. Хорошкина и В. Толстого.

Отдельно рассматривается случай странной супералгебры $Q(n)$. Эта супералгебра не является контраградиентой, но обладает невырожденной инвариантно нечетной билинейной формой, поэтому во многих отношениях ведет себя аналогично контраградиентным супералгебрам.

В.А. Стукопин впервые дает описание янгиана странной супералгебры Ли в терминах образующих и соотношений в духе В. Дринфельда. В качестве иллюстрирующего примера рассматривается случай супералгебры $Q(2)$. Затем он приводит описание квантового дубля янгиана супералгебры Ли $Q(n)$ и алгебры двойственной янгиану также в терминах образующих и соотношений. Доказываются теоремы о треугольном разложении, теорема Пуанкаре – Биркгофа–Витта и формулы спаривания. Полученные результаты позволяют вычислить универсальную R матрицу квантового дубля. Основываясь на этом вычислении, используя треугольное разложение и оператор сдвига, В.А. Стукопин получает явную формулу для универсальной R матрицы янгиана странной супералгебры Ли.

4. Доказывается явная формула для универсальной R матрицы аффинных алгебр и супералгебр Ли типа A . В последней главе диссертации, В.А. Стукопин применяет методы вычисления универсальной R матрицы разработанные им в случае янгианов, для случая аффинных алгебр Ли типа A_n и аффинных супералгебр Ли типа $A_{m,n}$. При этом он следует той же схеме, что и случае янгианов и использует понятие квантовой аффинной группы Вейля. Вначале доказывается теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта для квантовых аффинных алгебр. Затем описывается структура алгебры двойственной к квантовой аффинной алгебре, описывается квантовый дубль исходной квантовой аффинной алгебры Ли. Используя каноническую структуру универсальной R матрицы квантового дубля, вычисляется универсальная R матрица квантовой аффинной алгебры. Аналогичным образом получается явная формула

для универсальной R матрицы квантовой аффинно супералгебры, типа $A(m, n)$.

Результаты полученные в диссертации В.А. Стукопина являются новыми. Они снабжены подробными и четкими доказательствами. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Все основные результаты изложены в 26 публикациях, 13 из которых входят в Перечень ВАК. Одна публикация является совместной с С. Левендорским и Я. Сойбельманом. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях проводимых в МГУ, Высшей Школе Экономике, ПОМИ, СГУ. В тексте диссертации имеется некоторое количество опечаток, включая формулы, не оказывающих влияние на содержание работы.

Все вопросы, рассмотренные В.А. Стукопиным в диссертации, посвящены единой тематике. Результаты диссертации дают решение трудных и важных задач теории алгебр и супералгебр Ли. Диссертация удовлетворяет требованиям п. 9-11,13,14 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям, представленным на соискание ученой степени доктора наук и соответствуют специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор Владимир Алексеевич СТУКОПИН заслуживает присуждения ученой степени доктора физико - математических наук.

Доктор физико-математических наук
профессор кафедры геометрии
ФГБОУ ВО «Саратовский
национальный исследовательский
государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»

Александр Николаевич
Сергеев

Адрес : 410012, г. Саратов, ул. Астраханская 83, тел. 8452 515539,
E-mail SergeevAN@info.sgu.ru

