ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Поляков Николай Львович

Соответствия Галуа для классов дискретных функций и их применение к математическим проблемам теории коллективного выбора

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет, математический факультет, кафедра теоретической информатики и дискретной математики

Научный руководитель:	**Шамолин Максим Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Кузнецов Сергей Олегович** доктор физико-математических наук, профессор, НИУ «Высшая школа экономики», руководитель Департамента анализа данных и искусственного интеллекта **Жуковский Максим Евгеньевич** кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (ГУ), кафедра дискретной математики, доцент
Ведущая организация:	**Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Защита состоится **27 мая 2016 года** в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский пр., д. 27, сектор А), http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/workers/4892658.

Автореферат разослан 27 апреля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
Д.501.001.84 на базе
МГУ имени М.В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена изучению проблемы агрегирования коллективной системы предпочтений с помощью методов теории замкнутых классов дискретных функций. Проблема агрегирования коллективной системы предпочтений по совокупности индивидуальных систем предпочтений есть центральная задача математической *теории коллективного выбора*. Интерес к этой задаче научная и философская мысль начала проявлять по меньшей мере с конца восемнадцатого века[1]. Впервые систематическое исследование широкого класса формальных процедур агрегирования предпринял К. Эрроу, лауреат Нобелевской премии по экономике 1972 г. Им установлен известный результат, известный как *парадокс Эрроу* или *теорема Эрроу о невозможности*[2]. По существу, результат состоит в следующем.

Пусть дано конечное множества A (альтернатив) и фиксировано натуральное число n (участников или критериев выбора). Пусть $\mathrm{Ord}(A)$ есть множество всех линейных порядков на множестве A. Тогда, если множество A содержит по крайней мере три элемента, то не существует правила агрегирования, т.е. функции $f\colon (\mathrm{Ord}(A))^n \to \mathrm{Ord}(A)$, которое удовлетворяет *условиям единогласия* и *независимости от посторонних альтернатив* и при этом не является *диктаторским*.

Определим эти условия. Правило агрегирования $f\colon (\mathrm{Ord}(A))^n \to \mathrm{Ord}(A)$

- удовлетворяет *условию единогласия*, если

$$(\forall a, b \in A)\,((\forall i < n)\, a \prec_i b) \;\to a\, f(\pi)\, b$$

для каждого *профиля* $\pi = (\prec_0, \prec_1, \dots, \prec_{n-1})$ из $(\mathrm{Ord}(A))^n$;

- удовлетворяет *условию независимости от посторонних альтернатив*, если

$$(\forall a, b \in A)\,((\forall i < n)\, a \prec_i b \leftrightarrow a \prec'_i b) \to (a\, f(\pi)\, b \leftrightarrow a\, f(\pi')\, b))$$

для любых *профилей* $\pi = (\prec_0, \prec_1, \dots, \prec_{n-1})$ и $\pi' = (\prec'_0, \prec'_1, \dots, \prec'_{n-1})$ из $(\mathrm{Ord}(A))^n$.

Правило агрегирования f называется диктаторским, если f есть проекция, т.е.

$$(\exists i < n)\,(\forall \prec_0, \prec_1, \dots, \prec_{n-1} \in \mathrm{Ord}(A))\, f(\prec_0, \prec_1, \dots, \prec_{n-1}) = \prec_i .$$

В современной литературе можно найти простые доказательства классической теоремы Эрроу[3].

---

[1] см. Granger G.G. La mathematique sociale du Marquis de Condorcet. Paris, 1956.

[2] Arrow K. Social Choice and Individual Values. 2 edition. Yale University Press, 1963, см. также раннюю версию Arrow K. A difficulty in the concept of social welfare // J. of Political Economy. 1950.—8. Vol. 58, no. 4. Pp. 328–346.)

[3] См., напр., Geanakoplos J. Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem // Economic Theory. 2005. Vol. 26, no. 1. Pp. 211–215 (здесь теорема Эрроу доказана доказана в немного более сильной версии).

С момента появления монографии Эрроу теория коллективного выбора переживает период бурного развития. Проблемы, близкие к теореме Эрроу, исследовалась многими учеными как экономистами, так и математиками, среди которых А. Сен (нобелевская премия по экономике 1978 г.), П. Фишборн, П. К. Паттанаик и др. Существенная часть работ посвящена поискам границ применимости принципа невозможности Эрроу. В частности, в работе П. Фишборна[4] показано, что теорему Эрроу нельзя распространить на случай бесконечного количества участников; в ряде работ исследованы условия эффективности правила большинства, в случае, когда его действие ограничено некоторым подмножеством множества всех возможных профилей (т.н. случай *ограниченной области*)[5]. В работах А.К. Сена, К. Паттанаика и ряда других авторов предпринят отход от строгого *ординалистского* принципа, т.е. рассмотрены системы предпочтений, представляющие собой частичные порядки[6]. Еще более общие случаи систем предпочтений, представляющих собой произвольные бинарные отношения и функции выбора рассмотрены М. А. Айзерманом и Ф. Т. Алескеровым[7].

Большую часть доказанных результатов можно найти в двухтомном издании Handbook of Social Choice and Welfare[8]; также заслуживают внимание классические монографии А.К. Сена[9], П.Фишборна[10] и книга С. Бергерса[11]. Однако, несмотря на обилие теорем, основными методами теории коллективного выбора до недавнего времени оставались элементарные комбинаторные рассуждения. По всей видимости, это служит основным препятствием для широких обобщений теоремы Эрроу и систематического изучения условий эффективности процедур агрегирования. В частности, существует не так много исследований, посвященных *нетранзитивным* (*нерациональным*) системам предпочтений; между тем, прояснение общего случая представляется, несомненно,

[4] Fishburn P. Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters // Journal of Economics Theory. 1970. Vol. 2. Pp. 103–106.

[5] См. Sen A. K. A Possibility Theorem on Majority Decisions // Econometrica. 1966. Vol. 3, no. 4. Pp. 491–499; из более современных исследований, напр., Barberá Salvador, Ehlers Lars. Free triples, large indifference classes and the majority rule // Social Choice and Welfare. 2011. Vol. 37, no. 4. Pp. 559–574.

[6] Sen A. K. Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions // Review of Economic Studies. 1969. Vol. 36. Pp. 381–393; Batra R., Pattanaik K. Transitive multi-stage majority decisions with quasi-transitive individual preferences // Econometrica. 1972. Vol. 40. Pp. 1121–1135; Pini M. S., Rossi F., Venable K. B., Walsh T. Aggregating Partially Ordered Preferences // Journal of Logic and Computation. 2009. Vol. 19. Pp. 475–502. и др.

[7] Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) // Автомат. и телемех. 1983. № 3. С. 127–151; Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Функциональные локальные операторы в теории голосований. I-III // Автомат. и телемех. 1984. No 5. С. 79–88, No 6. С. 105–114, No 7. С. 108–120.

[8] Handbook of Social Choice and Welfare, Ed. by K. Arrow, A.K. Sen, K. Suzumura. Amsterdam: Elsevier/North-holland, 2002.—08. Vol. 1; Handbook of Social Choice and Welfare, Ed. by K. Arrow, A.K. Sen, K. Suzumura. Amsterdam: Elsevier/North-holland, 2010. Vol. 2.

[9] Sen Amartya K. Collective choice and social welfare. San Francisco: Holden-Day, 1970.

[10] Fishburn P. The Theory of Social Choice. Princeton University Press, 1973.

[11] Börgers C. Mathematics of Social Choice. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

важным[12] и мотивированным с социально-психологической точки зрения [13].

Наиболее значительный результат о нерациональных системах предпочтений получен С. Шелахом[14]. В этой работе в качестве систем предпочтений рассматриваются всевозможные функции выбора, определенные на r-элементных подмножествах множества альтернатив A, где r есть некоторое положительное натуральное число. Множество всех таких функций мы обозначаем символом $\mathfrak{C}_r(A)$. Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ называется симметричным, если вместе с каждой функцией $\mathfrak{d}$ оно содержит все функции $\mathfrak{d}_\sigma$, где σ есть перестановка множества A и $\mathfrak{d}_\sigma(p) = \sigma^{-1}(\mathfrak{d}(\sigma(p)))$ для всех r-элементных подмножеств p множества A.

Правило агрегирования есть функция $f\colon (\mathfrak{C}_r(A))^n \to \mathfrak{C}_r(A)$ для некоторого натурального числа n. Мы называем правило агрегирования

- *вполне локальным*, если

$$(\mathfrak{c}_0(q), \mathfrak{c}_1(q), \dots, \mathfrak{c}_{n-1}(q)) = (\mathfrak{c}'_0(q), \mathfrak{c}'_1(q), \dots, \mathfrak{c}'_{n-1}(q)) \to \\ \to f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{n-1})(q) = f(\mathfrak{c}'_0, \mathfrak{c}'_1, \dots, \mathfrak{c}'_{n-1})(q)$$

  для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{n-1}, \mathfrak{c}'_0, \mathfrak{c}'_1, \dots, \mathfrak{c}'_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $q \in [A]^r$;

- *локально квазитривиальным*, если

$$f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{n-1})(q) \in \{\mathfrak{c}_0(q), \mathfrak{c}_1(q), \dots, \mathfrak{c}_{n-1}(q)\}$$

  для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $q \in [A]^r$.

Эти два условия на правило агрегирования обобщают условия единогласия и независимости от посторонних альтернатив.

Правило агрегирования f *сохраняет* множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, если

$$f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{n-1}) \in \mathfrak{D}$$

для всех функций $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{D}$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ обладает (общим) *свойством Эрроу*, если не существует сохраняющих его вполне локальных и локально квазитривиальных правил агрегирования, кроме проекций.

Теорема Шелаха о свойстве Эрроу утверждает, что существуют такие натуральные числа r_1^*, r_2^* (можно положить $r_1^* = r_2^* = 7$), что для каждого конечного множества A и натурального числа r, удовлетворяющего неравенствам $r_1^* \leq r \leq |A| - r_2^*$, любое симметричное непустое собственное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ обладает свойством Эрроу.

[12] См. Kalai G. Learnability and rationality of choice // Journal of Economic Theory. 2003. Vol. 113. Pp. 104–117.

[13] См. Tversky A. Intransitivity of preferences // Psychological Review. 1969. Vol. 76. Pp. 31–48.

[14] Shelah S. On the Arrow property // Advances in Applied Mathematics. 2005. no. 34. Pp. 217–251

При всей важности результата С. Шелаха нельзя не отметить, что он не дает исчерпывающей классификации симметричных множеств r-функций выбора, обладающих свойством Эрроу. В частности, в его область действия не попадает в некотором смысле наиболее интересный случай $r = 2$, и, следовательно, основная теорема работы Шелаха формально не является обобщением теоремы Эрроу о невозможности. Случай $r = 2$ интересен также тем, что может быть воспринят как задача *теории графов*. Действительно, в этом случае каждую функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ можно отождествить с полным ориентированным графом (*турниром*), а каждое симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ с множеством турниров, замкнутым относительно автоморфизмов.

Намеченный С. Шелахом метод не менее важен, чем сам результат. В общих чертах метод состоит в следующем. Основная теорема частично сводится к своей более слабой версии – аналогичному утверждению для *простого свойства Эрроу*. Определим это понятие. Правило агрегирования f называется

- *простым*, если

$$(\mathfrak{c}_0(p), \mathfrak{c}_1(p), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(p)) = (\mathfrak{c}_0(q), \mathfrak{c}_1(q), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(q)) \to \\ f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(p) = f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(q)$$

  для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $p, q \in [A]^r$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ обладает *простым* свойством Эрроу, если не существует сохраняющих его *простых* вполне локальных и локально квазитривиальных правил агрегирования, кроме проекций.

Дальнейшие рассуждения основаны на том факте, что множество $\mathfrak{D}$ обладает простым свойством Эрроу тогда и только тогда, когда каждая квазитривиальная (консервативная) функция $g\colon A^n \to A$, которая сохраняет множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_{r-1}(A)$, совпадает с некоторой проекцией на множестве

$$A^n_{<r} \rightleftharpoons \{\mathbf{a} \in A^n \colon |\operatorname{ran} \mathbf{a}| < r\}.$$

Здесь функция $g\colon A^n \to A$ называется *квазитривиальной* (*консервативной*), если удовлетворяет условию $g(\mathbf{a}) \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ для всех n-ок $\mathbf{a} \in A^n$, а отношение сохранения функцией g множества функций $H \subseteq {}^Q A$ (для произвольного множества Q) определяется условием

$$(\forall h_1, h_2, \ldots, h_n \in H)\, g(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in H,$$

где последовательность символов $g(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ обозначает функцию, которая на любом элементе $q \in Q$ принимает значение $f(h_1(q), h_2(q), \ldots, h_n(q))$.

С учетом этого факта задача классификации множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, обладающих простым свойством Эрроу, становится естественной задачей математической *теории функциональных систем* и может быть решена методами этой теории.

Изложенные обстоятельства подталкивает к совершенствованию предложенного Шелахом метода с целью получения полной классификационной теоремы о симметричных множествах r-функций выбора (при любых конечных значениях r) и иных приложений. Усовершенствованный автором диссертации метод в дальнейшем будет называться *методом клонов в теории коллективного выбора*. Этот метод представлен автором в качестве специальной главы теории *соответствий Галуа для классов дискретных функций*. Множество всех функций g (любой арности) на множестве A обозначается символом $\mathcal{O}(A)$. Пусть даны множества Q, $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{P}({}^Q A)$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$. Множество всех функций $g \in \mathcal{O}(A)$, которые сохраняют каждое множество $H \in \mathbb{H}$, мы будем обозначать символом $\operatorname{pol} \mathbb{H}$, а множество всех множеств $H \subseteq {}^Q A$, которые сохраняются каждой функцией $g \in \mathcal{F}$, мы будем обозначать символом $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$. Пара $(\operatorname{inv}_Q, \operatorname{pol})$ есть соответствие Галуа между булевыми решетками $\mathcal{P}(\mathcal{P}({}^Q A))$ и $\mathcal{P}(\mathcal{O}(A))$, причем Галуа-замкнутые множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ есть *клоны*[15]. Если множество Q конечно, это соответствие погружается в хорошо известное соответствие Галуа $(\operatorname{inv}, \operatorname{pol})$, порожденное отношением сохранения функцией g предиката P[16].

Легко заметить, что множество $\{\operatorname{pol}\{\mathfrak{D}\} \colon \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ и $\mathfrak{D}$ симметрично$\}$ состоит из *симметричных* клонов, т.е клонов, которые вместе в каждой функцией g (любой арности n) содержат все функции g_σ, где σ есть перестановка множества A и $g_\sigma(\mathbf{a}) = \sigma^{-1}(g(\sigma \cdot \mathbf{a}))$ для всех n-ок $\mathbf{a} \in A^n$ [17]. Таким образом, для решения задачи классификации симметричных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, обладающих простым свойством Эрроу, достаточно получить явное описание некоторого фрагмента соответствия $(\operatorname{inv}_Q, \operatorname{pol})$ при $Q = [A]^r$, а именно

(a) получить описание класса симметричных квазитривиальных клонов,

(b) для каждого симметричного квазитривиального клона $\mathcal{F}$ с носителем A получить описание множества $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$

(далее остается только определить, какие из множеств $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, могут содержать непустое симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$).

Обе задачи в данном исследовании решены, причем на пути описания множеств $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$ для симметричных квазитривиальных клонов $\mathcal{F}$ получены важные результаты (названные в данном исследовании *теоремами о сохранении*) об инвариантных множествах трех достаточно широких классов клонов, а именно, о классах клонов, удовлетворяющих определенным ниже условиям Δ^∂, Δ^e_r и Δ^2.

---

[15] О клонах см., напр., Кон П. Универсальная алгебра. Москва: МИР, 1968.

[16] См. Pöschel R., Kalužnin L. A. Funktionenund Relationenalgebren. Ein Kapitel der Diskreten Mathematik. Berlin: VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, 1979.

[17] Такие клоны в работе Нгуен В. Х. «О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами» названы клонами, *замкнутыми относительно всех автоморфизмов*, см. Нгуен В. Х. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108

Определение 2.1. Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и натуральное число $r \geq 2$. Будем говорить, что клон $\mathcal{F}$

1. *удовлетворяет условию* Δ^∂, если для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^3_3$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая трехместная функция $w \in \mathcal{F}$, что

$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x \text{ для всех } x, y \in A;$$

2. *удовлетворяет условию* Δ^e_r, если существует такое натуральное число $i < r$, что для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^r_r$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая r-местная функция $w \in \mathcal{F}$, что

$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(\mathbf{x}) = x_i \text{ для всех } \mathbf{x} = x_0 x_1 \ldots x_{r-1} \in A^r_{<r}$$

(символ A^r_r обозначает множество $\{\mathbf{a} \in A^r \colon |\operatorname{ran} \mathbf{a}| = r\}$);

3. *удовлетворяет условию* Δ^2, если для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^2_2$ с различными областями значений и элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует такая двухместная функция $w \in \mathcal{F}$, что

$$w(\mathbf{a}) = a, \ w(\mathbf{b}) = b \text{ и } w(xx) = x \text{ для всех } x \in A.$$

Инвариантные множества клонов (не обязательно симметричных и квазитривиальных), удовлетворяющих этим условиям, допускают несложное описание, которое представляет самостоятельный интерес.

Теория замкнутых классов дискретных функций имеет собственную богатую историю. Первым и наиболее известным результатом в этой области была теорема Э. Л. Поста о классификации всех замкнутых классов булевых функций[18]. Как известно, непосредственное распространение классификационной теоремы Поста на общий случай дискретных функций (функций k-значной логики) вызывает затруднения из-за результата Ю. И. Янова и А. А. Мучника[19], из которого следует, что для $k \geq 3$ решетка замкнутых классов континуальна и имеет весьма сложную структуру. В разработку методов изучения этой решетки внесли большой вклад отечественные математики С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов, В. Б. Кудрявцев, С. С. Марченков[20].

---

[18] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic, Ed. by Phillip A. Griffiths, John N. Mather, Elias M. Stein. Princeton Univer, 1942. Vol. 5 of Annal of Math. studies,
современное изложение см. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. Москва: Физматлит, 2000

[19] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

[20] Подробное изложение основных результатов можно найти в книгах Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. Москва: Наука, 1966; Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. Москва: Изд-во МГУ, 1982; Марченков С. С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. Москва: Физматлит, 2004, а также в зарубежных монографиях Pöschel R., Kalužnin L. A. Funktionenund Relationenalgebren. Ein Kapitel der Diskreten Mathematik. Berlin: VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, 1979 и Lau D. Function Algebras on Finite Sets. A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

Соответствие Галуа $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$ для классов дискретных функций, по всей видимости, впервые было обнаружено Д. Гейгером[21] и независимо В. Г. Боднарчуком, Л. А. Калужниным и др.[22]. Соответствие Галуа успешно применяется для получения классификационных теорем в теории замкнутых классов[23], в частности, оно иногда позволяет получить простое описание функционально замкнутых систем, удовлетворяющих какому-либо условию, напоминающему условия Δ^{∂}, Δ_r^e и Δ^2, т.е. содержащих некоторую функцию или множество функций специального вида[24].

Консервативные клоны изучались в работах Я. Ежека и др. [25] Симметричные (замкнутые относительно всех автоморфизмов) клоны, содержащие все константы, описаны в работе В. Х. Нгуена *О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами*[26](непосредственно воспользоваться результатом этой работы в нашем исследовании невозможно, т.к. квазитривиальные клоны с более чем одноэлементным носителем, напротив, не содержат ни одной константы).

Отметим, что известно не так много примеров приложения теории функциональных систем к другим областям математического знания. Неожиданное применение автором диссертации развитой техники теории Галуа для классов дискретных функций к проблемам агрегирования коллективных систем предпочтений представляется новым привлекательным и перспективным направлением теории коллективного выбора.

Цели и задачи работы. Основной целью работы является получить окончательное решение вопроса о свойстве Эрроу для симметричных классов r-функций выбора и развить предложенный С. Шелахом метод клонов в теории коллективного выбора. Поэтапное достижение основной цели ставит перед автором следующие задачи.

- Получить характеризацию инвариантных множеств клонов с конечным носителем, удовлетворяющих условиям Δ^{∂}, Δ_r^e и Δ^2.

---

[21] Geiger D. Closed systems of functions and predicate // Pacific journal of mathematics. 1968. Vol. 27, no. 1. Pp. 95–100.

[22] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста I-II// Кибернетика. 1969. Т. 3. С. 1–10 и Т. 5. С. 1–9.

[23] См., напр., Жук Д. Н. Решётка замкнутых классов самодвойственных функций трёхзначной логики. Москва: Издательство МГУ, 2011.

[24] Примерами таких результатов являются работы Марченков С. С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр // Математические заметки. 1997. Т. 61, № 3. С. 359–366 (теорема 2.2 настоящего исследования, по существу, есть усиление основного результата этой работы); Марченков С. С. О замкнутых классах в k-значной логике, содержащих переключательную однородную функцию // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 2. С. 49–61; Парватов Н. Г. Клоны с мажоритарной функцией и их обобщения // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2010. Т. 17, № 3. С. 46–60.

[25] Ježek J., Kepka T. Quasetrivial and nearly quasitrivial distributive goupoids and semigroups // Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica. 1978. Vol. 19, no. 2. Pp. 25–44 и Ježek J., Quackenbush R. Minimal clones of conservative functions // International J. of Algebra and Computation. 1995. Vol. 5. Pp. 615–630.

[26] Нгуен В. Х. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108.

- Описать основные типы квазитривиальных клонов.
- Построить полную классификацию симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем.
- Обобщить теоремы Шелаха о простом и общем свойстве Эрроу для симметричных классов r-функций выбора на случай произвольного натурального числа r.

Научная новизна. Результаты являются новыми, получены автором самостоятельно. Метод клонов в теории коллективного выбора впервые последовательно представлен как специальный раздел теории функциональных систем. Основные результаты:

- Получена характеризация инвариантных множеств клонов с конечным носителем, удовлетворяющих условиям Δ^{∂}, Δ_r^e и Δ^2.
- Введены понятия r-клона и его распространения, свободной склейки квазитривиальных клонов и 2-монотонной функции. Введено понятие и получено явное описание класса инъективно устойчивых справа и устойчивых слева отношений эквивалентности на множестве $A^{<\omega}$. С помощью этих понятий определены четыре простых типа квазитривиальных клонов.
- Построена классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем, представляющая каждый из них в виде пересечения четырех клонов простых типов.
- Получена полная классификация симметричных множеств r-функций выбора, обладающих простым и общим свойством Эрроу.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы в теории коллективного выбора для доказательства различных обобщений теоремы Эрроу о невозможности и в теории функциональных систем для построения классификаций замкнутых классов дискретных функций. Также результаты диссертации позволяют исследовать практические задачи агрегирования систем предпочтений и некоторые процедуры принятия коллективных решений.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы дискретной математики и универсальной алгебры.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построение полной классификации симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем.

2. Построение полной классификации симметричных классов r-функций выбора, обладающих общим свойством Эрроу.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты прошли апробацию на международных и всероссийских научных конференциях, а также на авторитетных научных семинарах.

Конференции.

- «Информационные технологии и системы – 2012» 35-я конференция молодых ученых и специалистов, 19 – 25 августа 2012, Петрозаводск, Россия.
- ESSLLI Workshop on Logical Models of Group Decision Making, Dusseldorf, 12-16 August 2013
- VII международная конференция по математическому моделированию, 30 июня–4 июля 2014, Якутск, Россия.
- II научная конференция «Управленческие науки в современном мире», 25–26 ноября 2014, Москва, Россия.
- Научная сессия математического факультета МПГУ, 19 – 21 марта 2015,
- Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (DIMA-2015), 14 – 18 сентября 2015, Минск.

Семинары.

- Научный семинар «Проблемы современных информационно-вычислительных систем» под руководством д. ф.-м. н., проф. В. А. Васенина, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.
- Кафедральный семинар «Теория автоматов» кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д. ф.-м. н., академика В.Б. Кудрявцева.
- Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, проф. М. В. Шамолина и проф. С. А. Агафонова, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.
- Семинар «Математические модели информационных технологий» департамента анализа данных и искусственного интеллекта и МНУЛ «Интеллектуальные системы и структурный анализ» Высшей школы экономики под руководством С.О. Кузнецова.

- Семинар по дискретным математическим моделям кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ».

- Семинар «Экстремальная комбинаторика и случайные структуры» под руководством д.ф.-м.н. Д.А. Шабанова и к.ф.-.м.н. М.Е. Жуковского, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

- Объединенный семинар «Логические проблемы информатики» под руководством проф. С.Н. Артёмова, чл.-корр. РАН Л.Д. Беклемишева, доц. В.Н. Крупского, проф. М.Р. Пентуса, доц. Т.Л. Яворской и «Модальная и алгебраическая логика» под руководством проф. М.Р. Пентуса, проф. В.Б. Шехтмана, к.ф.-м.н. И.Б. Шапировского, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Также в 2012 году в ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при правительстве Российской Федерации» был выпущен препринт[27].

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [1–3] и 4 тезисов докладов [4–7].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 136 страниц, из них 129 страницы текста. Библиография включает 54 наименования на 6 страницах.

Краткое содержание работы.

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе вводятся основные понятия. Главным объектом дальнейшего изучения является класс соответствий Галуа $(\mathrm{inv}_Q, \mathrm{pol})$ между булевыми решетками $\mathcal{P}(\mathcal{P}({}^Q A))$ и $\mathcal{P}(\mathcal{O}(A))$.

Во второй главе доказываются три теоремы, которые характеризуют множества $\mathrm{inv}_Q\,\mathcal{F}$ для клонов $\mathcal{F}$ на конечном множестве A, удовлетворяющих условиям Δ^∂, Δ^e_r и Δ^2.

Формулировки нижеследующих теорем о характеризации множеств $\mathrm{inv}_Q\,\mathcal{F}$ используют следующие обозначения. Для каждых множеств $B \subseteq A$, $P \subseteq Q$, элементов $a, b \in A$, различных элементов $p, q \in P$, перестановки $\sigma \in S_A$ и

[27] Поляков Н. Л. Теория социального выбора и клоны операций на конечных множествах // Препринтное издание WP1/2012/05 / ФГОБУ ВПО Финансовый университет при Правительстве РФ. Москва: 2012.

натурального числа r положим

$$
\begin{aligned}
&H_0(p,B,P) = {}^{\{p\}}B \downharpoonleft P = \{h \in {}^{P}A\colon h(p) \in B\},\\
&H_1(p,q,\sigma,P) = \{h \in {}^{P}A\colon h(q) = \sigma(h(p))\},\\
&H_2(p,q,a,b,P) = \{h \in {}^{P}A\colon h(p) = a \vee h(q) = b\}.
\end{aligned}
$$

и, далее,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{H}_0 = \{H_0(p,B,Q)\colon p \in Q, B \subseteq A\},\\
&\mathbb{H}_1 = \{H_1(p,q,\sigma,Q)\colon p,q \in Q,\ p \neq q,\ \sigma \in S_A\},\\
&\mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} = \{H_1(p,q,\mathrm{Id}_A,Q)\colon p,q \in Q,\ p \neq q\},\\
&\mathbb{H}_2 = \{H_2(p,q,a,b,Q)\colon p,q \in Q,\ p \neq q,\ a,b \in A\},\\
&\mathbb{H}_3 = \bigcup_{P \subseteq Q, B \in [A]^2} \{H \downharpoonleft Q\colon H \subseteq {}^{P}B\},\\
&\mathbb{H}_4(r) = \bigcup_{P \subseteq Q} \{H \downharpoonleft Q\colon H \subseteq {}^{P}A \wedge (\forall p \in P)|H(p)| < r\},
\end{aligned}
$$

где для каждого множества функций $G \subseteq {}^{S}A$ и множества R символ $G \downharpoonleft R$ обозначает множество всех функций $f \in {}^{S\cup R}A$ с условием $f \restriction S \in G$.

∂-функцией называется любая функция $w \in \mathcal{O}(A)$, удовлетворяющая условию $(\forall x,y \in A)\, w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x$[28].

Теорема 2.2. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и множество $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, причем выполнено одно из двух условий*

1. *клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^{∂},*
2. *клон $\mathcal{F}$ содержит хотя бы одну ∂-функцию и $(\forall q \in Q)|H(q)| \leq 2$.*

Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.

Теорема 2.6. *Пусть даны натуральное число $r \geq 3$, клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ_r^e, и множество $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$. Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_4(r)$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

Теорема 2.10. *Пусть даны клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ^2, и множество $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$. Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} \cup \mathbb{H}_3$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

В третьей главе исследуются квазитривиальные клоны с конечным носителем A. Множество (клон) всех квазитривиальных функций на множестве

[28] Функция w, удовлетворяющая тождеству $w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x$ часто называется *мажоритарной* функцией.

A обозначается символом $\mathcal{V}(A)$. Клон $\mathcal{F}$ называется квазитривиальным, если состоит только из квазитривиальных функций. Основными результатами третьей главы являются две теоремы о симметричных квазитривиальных клонах. Для их формулировки требуются некоторые новые понятия. Символом $\mathcal{E}(A)$ обозначается клон всех селекторных функций на множестве A. Для каждого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ символом $\mathcal{F}_{[n]}$ обозначается множество всех n-местных функций из $\mathcal{F}$.

Ранг клона. Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ определим ранг $\mathrm{r}(\mathcal{F})$ клона $\mathcal{F}$ формулой

$$\mathrm{r}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{[n]} \neq \mathcal{E}(A)_{[n]}\}, & \text{если } \mathcal{F} \neq \mathcal{E}(A), \\ \omega, & \text{если } \mathcal{F} = \mathcal{E}(A) \end{cases}$$

Свободная склейка. Пусть дано множество $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ и семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ такое, что $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$ для каждого $B \in \mathbb{B}$. Легко проверить, что множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, удовлетворяющих условию

$$f \restriction B^{<\omega} \in \mathcal{F}_B$$

для всех $B \in \mathbb{B}$, образует клон.

Будем говорить, что семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ удовлетворяет *условию склеиваемости*, если

$$\mathcal{F}_B \restriction (B \cap C)^{<\omega} = \mathcal{F}_C \restriction (B \cap C)^{<\omega}$$

для всех $B, C \in \mathbb{B}$.

Если семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$, где $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$, удовлетворяет условию склеиваемости, то для клона $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{V}(B) \colon (\forall B \in \mathbb{B})\, f \restriction B \in \mathcal{F}_B\}$ и каждого множества $B \in \mathbb{B}$ и выполнено

$$\mathcal{F} \restriction B^{<\omega} = \mathcal{F}_B.$$

Этот клон $\mathcal{F}$ называется *свободной склейкой* семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$.

Если $\mathbb{B} \subseteq [A]^2$, то каждое семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$, где $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$, удовлетворяет условию склеиваемости. В этом случае каждый клон $\mathcal{F}_B$ эквивалентен некоторому постовскому классу P_B, состоящему из функций, сохраняющих ноль и единицу. Если каждый класс P_B симметричный (т.е. замкнутый относительно двойственности), то свободная склейка семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ зависит только от семейства $\{P_B\}_{B\in\mathbb{B}}$. Если класс P_B есть один и тот же класс P для всех $B \in [A]^2$, семейство $\{P_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ называется P-семейством. Согласно постовской классификации существует всего шесть симметричных классов булевых функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, а именно

O_1 – класс с базисом $\{x\}$ (класс всех селекторных функций),

- D_1 – класс с базисом $\{\overline{x}y \vee \overline{x}z \vee yz\}$ (класс всех самодвойственных функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$),
- D_2 – класс с базисом $\{xy \vee xz \vee yz\}$ (класс всех монотонных самодвойственных функций),
- L_4 – класс с базисом $\{x \oplus y \oplus z\}$ (класс всех линейных самодвойственных функций),
- A_4 – класс с базисом $\{xy, x \vee y\}$ (класс всех монотонных функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$),
- T_{01} – класс с базисом $\{x \vee y\overline{z}, xy\}$ (класс всех функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$).

r-клоны и их распространения. Для любого натурального числа r множество $\mathcal{V}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$ замкнуто относительно композиции. Любое замкнутое относительно композиции подмножество $\mathcal{G}$ множества $\mathcal{V}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$, содержащее все функции из $\mathcal{E}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$, мы будем называть r-клоном. Это множество вместе с операцией композиции и функциями $e \restriction A^{<\omega}_{<r}$, где $e \in \mathcal{E}(A)$, есть абстрактный клон[29]. Для каждого r-клона $\mathcal{G}$ символом $\mathcal{G}^{\uparrow}$ обозначим множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, для которых $f \restriction A^{<\omega}_{<r} \in \mathcal{G}$. Множество $\mathcal{G}^{\uparrow}$ есть клон; мы будем называть его *распространением* r-клона $\mathcal{G}$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ и натурального числа $r \geq 1$ множество $\mathcal{F} \restriction A^{<\omega}_{<r}$ будем для краткости обозначать символом $\mathcal{F}_{\langle r \rangle}$. Очевидно, множество $\mathcal{F}_{\langle r \rangle}$ есть r-клон, и имеет место включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle r \rangle}$.

Устойчивые справа отношения эквивалентности. Последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ мы будем называть *подобными*, если существует такая перестановка $\sigma \in S_A$, что $\mathbf{a} = \sigma \cdot \mathbf{b}$. Отношение подобия мы будем обозначать символом $\mathcal{S}$. Отношение $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$ мы будем называть *устойчивым справа*, если

1. $R \subseteq \mathcal{S}$,
2. $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \to (\mathbf{a} \cdot \tau)\, R\, (\mathbf{b} \cdot \tau)$ для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$, натурального числа n и функции $\tau \colon n \to \operatorname{dom} \mathbf{a}$.

Очевидно, для каждых подобных последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ существует единственная биекция $\sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \colon \operatorname{ran} \mathbf{a} \to \operatorname{ran} \mathbf{b}$, для которой $\mathbf{b} = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a}$. Для каждого устойчивого справа отношения R обозначим символом $\mathcal{F}_R$ множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, для которых

$$f(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(\mathbf{a}))$$

для всех таких $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \operatorname{dom} f$, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R$. Это множество является клоном.

Отношение $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$ мы будем называть *устойчивым слева*, если

[29] Определение абстрактного клона см. Кон П. Универсальная алгебра. Москва: МИР, 1968.

3. $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \to (\sigma \cdot \mathbf{a})\, R\, (\sigma \cdot \mathbf{b})$ для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ и перестановки σ множества A.

Устойчивые справа и слева отношения эквивалентности на множестве $A^{<\omega}$ описываются явным образом. Каждое такое отношение есть отношение R° для некоторого отношения R из определенного в главе 3 множества $\mathbb{R}(A)$, где

$$R^\circ = \bigcup_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R} \bigcup_{m<\omega} \{(\mathbf{a}\cdot\tau, \mathbf{b}\cdot\tau) \colon \tau \in {}^m(\operatorname{dom}\mathbf{a})\}$$

2-монотонные функции. Для любого натурального числа n любую n-местную функцию $f \in \mathcal{V}(A)$ будем называть 2-монотонной, если

$$(f(\mathbf{a}) = a \wedge \{i < n \colon a_i = a\} \subseteq \{i < n \colon b_i = b\}) \to f(\mathbf{b}) = b$$

для всех $\mathbf{a} = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \in A^n_2$, $\mathbf{b} = b_0 b_1 \ldots b_{n-1} \in A^n$, $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$.

Множество (в действительности, клон) всех 2-монотонных квазитривиальных функций f на множестве A обозначим символом $\mathcal{M}(A)$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ определим параметр $\mathbf{m}(\mathcal{F})$ условием

$$\mathrm{m}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{\langle n\rangle} \nsubseteq \mathcal{M}(A)_{\langle n\rangle}\}, & \text{если } \mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{M}(A), \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь можно сформулировать основные теоремы главы 3. Первая из этих теорем утверждает, что любой симметричный квазитривиальный клон удовлетворяет одному из условий Δ^∂, Δ^e_r и Δ^2.

Теорема 3.15. *Пусть $|A| \geq 2$ и дан симметричный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Пусть $r = \mathrm{r}(\mathcal{F}) < \omega$ и $m = m(\mathcal{F})$. Тогда*

1. *если $r \geq 4$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_r;*
2. *если $r = 3$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет одному из условий Δ^e_3, $\Delta^\partial \wedge \Delta^e_m$;*
3. *если $r = 2$, то либо $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^2, либо*
   - *а. $|A| = 4$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_3;*
   - *б. $|A| = 3$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂.*

Вторая теорема дает классификацию симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем.

Теорема 3.29 (о классификации симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем). *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Тогда клон $\mathcal{F}$ симметричный тогда и только тогда, когда может быть представлен в виде пересечения $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$, где*

1. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}(A)^{\uparrow}_{\langle r\rangle}$ *для некоторого натурального числа* $r \geq 1$,

2. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{M}(A)^{\uparrow}_{\langle m\rangle}$ *для некоторого натурального числа* $m \geq 1$,

3. $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{R^\circ}$ *для некоторого отношения* $R \in \mathbb{R}(A)$,

4. $\mathcal{F}_3$ *есть свободная склейка* P*-семейства клонов* $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ *для некоторого постовского класса* $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4, \mathrm{A}_4, \mathrm{T}_{01}\}$.

В четвертой главе производится полная классификация симметричных классов r-функций выбора на конечном множестве, обладающих свойством Эрроу. Определим несколько специальных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$.

Предположим вначале, что $|A| = 4$ и $r = 3$. Тогда легко проверить, что для каждой пары различных множеств $p, q \in [A]^3$ существует единственная перестановка σ из группы Клейна $K \subseteq S_A$, для которой имеет место равенство $q = \sigma(p)$. Обозначим такую перестановку символом $\sigma_{p,q}$, а символом $\mathfrak{C}_3^K(A)$ множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_3(A)$, которые удовлетворяют равенству

$$\mathfrak{c}(q) = \sigma_{p,q}\mathfrak{c}(p) \text{ для всех различных } p, q \in [A]^3.$$

Можно убедиться, что множество $\mathfrak{C}_3^K(A)$ симметрично и содержит ровно три следующих элемента $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ (здесь $A = \{a, b, c, d\}$).

q	$\mathfrak{c}_0(q)$	$\mathfrak{c}_1(q)$	$\mathfrak{c}_2(q)$
$\{a, b, c\}$	a	b	c
$\{a, b, d\}$	b	a	d
$\{a, c, d\}$	c	d	a
$\{b, c, d\}$	d	c	b

Теперь предположим, что $r = 2$. Каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ поставим в соответствие во взаимно-однозначное соответствие полный ориентированный граф (*турнир*) $\Gamma_{\mathfrak{c}} = (A, E)$, где

$$E = \{(a, b) \in A \times A\colon a \neq b \wedge \mathfrak{c}(\{a, b\}) = b\}.$$

Определим множества $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^1(A)$ как множества всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, для которых каждая вершина графа $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ имеет четную (соответственно, нечетную) *степень захода*.

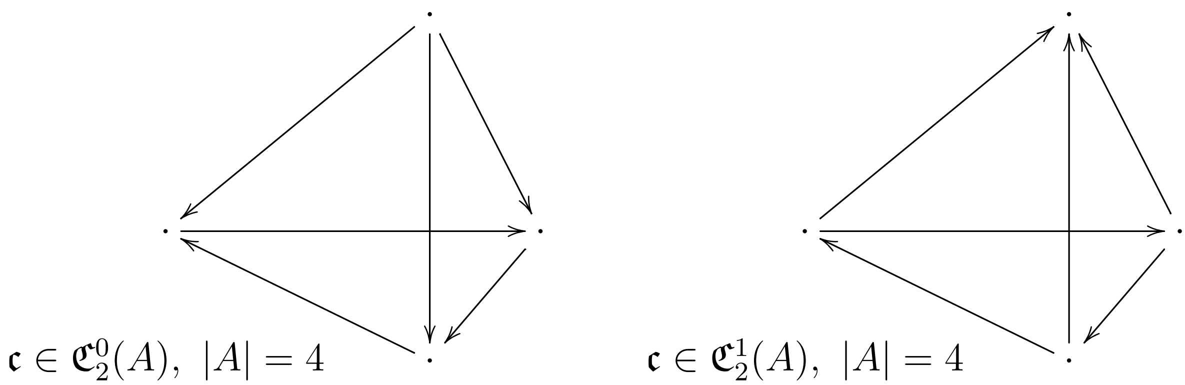

Рис. 1. Графы $\Gamma_\mathfrak{c}$ для функций $\mathfrak{c}$ из $\mathfrak{C}_2^0(A)$ и $\mathfrak{C}_2^1(A)$ при $|A| = 4$

На языке функций выбора множества $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^1(A)$ можно определить так. Для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, элемента $a \in A$ и номера $i \in \{0, 1\}$ положим

$$\begin{aligned}
&Z_a^\mathfrak{c} = \{b \in A \setminus \{a\} \colon \mathfrak{c}(\{a, b\}) = a\},\\
&W_i^\mathfrak{c} = \{a \in A \colon |Z_a^\mathfrak{c}| = i \pmod 2\},\\
&\mathfrak{C}_2^i(A) = \{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A) \colon W_{(1-i)}^\mathfrak{c} = \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Теорема 4.8 (о простом свойстве Эрроу) *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает простым свойством Эрроу в этих и только этих случаях:*

(i) $r = 2$, $|A| = 0,\ 1 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$,

(ii) $r = 2$, $|A| = 0,\ 3 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iii) $r = 2$, $|A| = 0 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iv) $r = 3$, $|A| = 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^\mathrm{K}(A)$.

В пятой главе теорема 4.8 обобщается на случай *общего свойства Эрроу*. Пусть даны непустые конечные множества A, Q и $H \subseteq {}^Q A$. Определим некоторые классы клонов на множестве H.

Для любого натурального числа n функцию $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ будем называть

1. *локально квазитривиальной*, если

$$f(h_0 h_1 \dots h_{n-1})(q) \in \{h_0(q), h_1(q), \dots, h_{n-1}(q)\}$$

для всех $h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ и $q \in Q$,

2. *вполне локальной*, если

$$h_0(q)h_1(q)\dots h_{n-1}(q) = h'_0(q)h'_1(q)\dots h'_{n-1}(q) \to$$
$$\to f(h_0h_1\dots h_{n-1})(q) = f(h'_0h'_1\dots h'_{n-1})(q)$$

для всех $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}, h'_0, h'_1, \dots, h'_{n-1} \in H$ и $q \in Q$.

Множество (в действительности, клон) всех локально квазитривиальных функций $f \in \mathcal{O}(H)$ мы будем обозначать символом $\mathcal{LV}(H)$, а множество (в действительности, клон) всех вполне локальных функций $f \in \mathcal{O}(H)$ мы будем обозначать символом $\mathcal{LW}(H)$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ *обладает общим свойством Эрроу*, если каждая вполне локальная и локально квазитривиальная функция $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{C}_r(A))$, сохраняющая множество $\mathfrak{D}$, является проекцией, т.е.

$$\mathrm{pol}\{\mathfrak{D}\} \cap \mathcal{LV}(\mathfrak{C}_r(A)) \cap \mathcal{LW}(\mathfrak{C}_r(A)) = \mathcal{E}(\mathfrak{C}_r(A))$$

(Здесь множество $\mathfrak{D}$ рассматривается как унарный предикат на множестве $\mathfrak{C}_r(A)$).

В главе 5 доказано, что теорема 4.8 остается верной, если заменить слово «простым» на слово «общим».

Теорема 5.19 (об общем свойстве Эрроу) *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает общим свойством Эрроу в этих и только этих случаях:*

(i) $r = 2$, $|A| = 0,\ 1 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$,

(ii) $r = 2$, $|A| = 0,\ 3 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iii) $r = 2$, $|A| = 0 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iv) $r = 3$, $|A| = 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^{\mathrm{K}}(A)$.

Заключение. В диссертации получены следующие основные результаты.

- Доказаны теоремы, характеризующие инвариантные множеств клонов $\mathcal{F}$ с конечным носителем, удовлетворяющих условиям Δ^∂, Δ_r^e и Δ^2.

- Построена классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем, представляющая каждый из них в виде пересечения четырех клонов простых типов.

- Получена полная классификация симметричных множеств r-функций выбора, удовлетворяющих простому и общему свойству Эрроу.

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный вывод о том, что существенная часть теории коллективного выбора может быть построена на базе теории замкнутых функциональных систем. Предложенный автором подход и полученные им результаты могут найти дальнейшее применение в теории коллективного выбора.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы диссертации можно предложить дальнейшее изучение свойства Эрроу при рассмотрении более общих моделей процедур агрегирования коллективных систем предпочтений.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Максиму Владимировичу Шамолину за постановку задачи и многочисленные плодотворные обсуждения результатов, а также заведующему кафедрой Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова академику, профессору Кудрявцеву Валерию Борисовичу за поддержку и доброжелательное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2013. № 6(107). С. 61–73. (Лично Полякову Н.Л. принадлежит формулировка и доказательство основной теоремы о классификации симметричных замкнутых классов дискретных функций, сохраняющих любой одноместный предикат).

2. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. Об одном обобщении теоремы Эрроу // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 456, № 2. С. 143–145. (Лично Полякову Н.Л. принадлежит формулировка и доказательство основной теоремы о классификации симметричных классов r–функций выбора, удовлетворяющих свойству Эрроу).

3. Polyakov N. L. On the algorithmic decidability of the square-free word problem relative to a system of two defining relations // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 204, no. 6. Pp. 800–807.

4. Поляков Н. Л. О классе дискретных функций, принимающих на любой последовательности значение, равное одному из ее членов // Материалы международной заочной научно-практической конференции «Физико-математические науки и информационные технологии: актуальные проблемы». Новосибирск: 2012. С. 17–26.

5. Поляков Н. Л. О клоновом подходе к некоторым теоремам о невозможно-

сти // VII Международная научная конференция по математическому моделированию. Якутстк: 2014. С. 108–110.

6. Поляков Н. Л. О некоторых позитивных результатах в теории коллективного выбора // II Международная научная конференция «Управленческие науки в современном мире» / Финансовый университет при Правительстве РФ. Москва: 2014. С. 172–177.

7. Поляков Н. Л. О приложении теории функциональных систем к некоторым проблемам теории коллективного выбора // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» / Институт математики НАН Беларуси. Минск: 2015. С. 131–133.