

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

доктора физико-математических наук, профессора Шамолина Максима Владимировича

на диссертационную работу Полякова Николая Львовича «Соответствия Галуа для классов дискретных функций и их применение к математическим проблемам теории коллективного выбора», представленную к защите на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Выбор темы диссертационной работы Н.Л. Полякова мотивирован возрастающим потоком исследований математических моделей принятия коллективных решений. Интерес к формальным проблемам процедур голосования отчетливо прослеживается с конца XVIII века, когда был сформулирован так называемый *парадокс Кондорсе*. Самостоятельной дисциплиной *теория коллективного выбора* становится в середине прошлого столетия, в основном благодаря трудам двух нобелевских лауреатов – К. Эрроу (нобелевская премия по экономике 1972 г.) и А. Сену (нобелевская премия по экономике 1978 г.). С момента появления их трудов центром притяжения в этой области остается *теорема Эрроу о невозможности*. Многочисленные исследования последних десятилетий направлены на установление границ применимости *принципа невозможности*, который в широком смысле утверждает, что не существует правила агрегирования индивидуальных систем предпочтений, удовлетворяющего тем или иным естественным условиям. Несмотря на то, что теория коллективного выбора представляет собой сформировавшуюся область знания со своей специфической проблематикой, используемый ей математический аппарат до недавнего времени в основном сводился к общим комбинаторным рассуждениям. Неожиданным и существенным теоретическим прорывом в этой теории явилась работа С. Шелаха «On the Arrow property» (2005), в которой принцип невозможности был распространён на произвольные симметричные классы функций выбора, определенных на r -элементных подмножествах конечного множества альтернатив. Пружиной доказательства основной теоремы работы С. Шелаха было наблюдение, состоящее в том, что множество правил агрегирования, сохраняющих некоторую фиксированную систему предпочтений, *функционально замкнуто*, точнее, является *клоном*.

Отталкиваясь от этого наблюдения, Поляков Н.Л. сумел усовершенствовать и развить предложенный С. Шелахом *метод клонов в теории коллективного выбора*. В диссертационном исследовании Полякова Н.Л. этот метод впервые представлен как специальный раздел теории функционально замкнутых классов (С. Шелак в своей работе специально отмечает, что он *не использует* теорию клонов). Оказывается, задача классификации множеств функций выбора, обладающих свойством Эрроу, может быть сформулирована на языке соответствий Галуа для классов дискретных функций и по существу сводится к описанию некоторого фрагмента этого соответствия. На этом пути Полякову Н.Л. удалось построить исчерпывающую классификацию симметричных консервативных (квазитривиальных) клонов с конечным носителем и дать описание их инвариантных множеств. Кульминацией исследования является усиление теоремы Шелаха, содержащее окончательное решение вопроса о том, какие симметричные множества r -функций выбора обладают свойством Эрроу. Кроме того, в процессе доказательства Поляковым Н.Л. установлены важные промежуточные результаты, а именно, описаны инвариантные множества клонов, содержащих некоторые специальные множества функций. Эти результаты выходят за рамки поставленной задачи и могут быть использованы в дальнейшем изучении решетки функционально замкнутых классов. Таким образом, при всей

оригинальности предмета исследований, диссертационная работа Полякова Н.Л. находится в русле классической проблематики дискретной математики, которая восходит к известной теореме Поста и нашла развитие, в частности, в трудах известных отечественных математиков С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова, В.Б. Кудрявцева и др.

В **первой главе** автор вводит основные понятия и устанавливает простые свойства соответствий Галуа, порожденных отношением сохранения n -местной функцией f на множестве A множества H функций из произвольного множества Q в множество A .

Во **второй главе** Поляков Н.Л. доказывает три теоремы о сохранении, дающие описание инвариантных множеств широкого класса клонов с конечным носителем.

Третья глава посвящена развитию теории квазитривиальных (консервативных) клонов, т.е. клонов, состоящих из функций, сохраняющих любой одноместный предикат. Автор определяет несколько типов простых квазитривиальных клонов и использует теоремы о сохранении для доказательства их основных свойств. Основным результатом этой главы является построение классификации симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем, представляющая каждый такой клон в виде пересечения четырех простых клонов описанных типов.

В **четвертой главе** Поляков Н.Л. доказывает теорему о простом свойстве Эрроу для симметричных классов r -функций выбора. Как показывает диссертант, в случае, если параметр r больше или равен трем и множество альтернатив A содержит по крайней мере пять элементов, обобщенный принцип невозможности напрямую следует из теорем сохранения и классификационной теоремы третьей главы. В оставшихся случаях, оказывается, существуют экзотические симметричные классы r -функций выбора без свойства Эрроу. Все такие случаи были описаны автором, что потребовало остроумных дополнительных исследований, в особенности, в наиболее трудном случае $r = 2$. Интересно, что случай $r = 2$ допускает переформулировку на языке теории графов и может рассматриваться как специальная задача о полных ориентированных графах (*турнирах*).

Наконец, **пятая глава** распространяет результат четвертой главы на *общее* свойство Эрроу. Диссертант показывает, что рассмотрение более широкого класса процедур агрегирования не дает новых примеров нарушения принципа невозможности. Таким образом, проблема Эрроу для симметричных классов r -функций выбора оказывается полностью закрытой.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы по итогам исследования, а также отмечены перспективные направления дальнейших исследований.

Диссертационное исследование Полякова Н.Л. соответствует положениям п. 1 областей исследования согласно **Паспорту специальности 01.01.09** «Дискретная математика и математическая кибернетика».

Содержание диссертации свидетельствует о том, что представленные в ней результаты являются новыми и многообещающими. Развитый Поляковым Н.Л. метод клонов вносит существенный вклад в исследование процедур агрегирования систем предпочтений и может служить одним из основных математических инструментов теории коллективного выбора.

Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается:

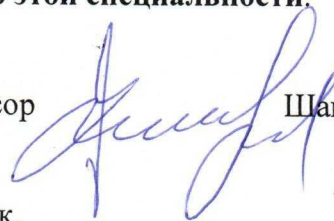
— чёткостью формулировок цели диссертации и постановок общей и частных задач исследования;

— математической строгостью доказательств заявленных автором свойств;

— результатами обсуждения основных положений диссертации на научных и научно-практических конференциях и семинарах, а также публикациями в рецензируемых научных изданиях, в том числе — в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus.

С учётом изложенного выше, считаю, что работа Н.Л. Полякова соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика», а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по этой специальности.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор



Шамолин М.В.

17.12.15г.

Подпись доктора физико-математических наук,
профессора Шамолина Максима Владимировича
удостоверяю

Декан механико-математического факультета МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор



Чубариков В.Н.