ОТЗЫВ

официального оппонента доктора физико-математических наук профессора НИУ ВШЭ Кузнецова Сергея Олеговича на диссертацию Полякова Николая Львовича на тему «Соответствия Галуа для классов дискретных функций и их применение к математическим проблемам теории коллективного выбора», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Актуальность темы. Диссертационная работа Н.Л. Полякова посвящена изучению одной из центральных задач *теории коллективного выбора* – установлению границ применимости *принципа невозможности Эрроу*. Продолжая исследования С. Шелаха, диссертант рассматривает процедуры агрегирования, заданные на множестве r-функций выбора над конечным множеством альтернатив A. Автору удается построить полную классификацию симметричных множеств r-функций выбора, которые обладают *свойством Эрроу*, т.е. не сохраняются никакими естественными правилами агрегирования, кроме проекций. Полученный результат, по-видимому, является в настоящий момент наиболее сильным обобщением *теоремы Эрроу о невозможности*.

Актуальность исследования процедур принятия коллективных решений не подлежит сомнению. Лучшим свидетельством в пользу практической и теоретической важности темы диссертационного исследования Н.Л. Полякова в аспекте ее мотивации является тот факт, что авторы первых серьезных исследований в теории коллективного выбора – К. Эрроу и А. Сен – были удостоены Нобелевской премии по экономике. Многочисленные семинары, конференции, монографии и публикации по этой тематике свидетельствуют о постоянном научном интересе к проблемам принятия коллективных решений. Близкая к теме диссертации Н.Л. Полякова проблематика составляет предмет научных интересов таких известных математиков и экономистов как Ф.Т. Алескеров П. К. Паттанаик, П. Фишборн, и др.

Не менее актуальна диссертационная работа Н.Л. Полякова и в плане примененного им математического аппарата. Использовав подмеченный С. Шелахом факт функциональной замкнутости класса правил агрегирования, сохраняющих некоторое множество предпочтений, диссертант разработал новый подход в теории коллективного выбора. Н.Л. Поляков показал, что задача классификации симметричных множеств r-функций выбора со свойством Эрроу может быть решена исходя из явного описания некоторого специального фрагмента соответствия Галуа, порожденного отношением сохранения функцией $f \in \mathcal{O}(A)$ множества функций $H \subseteq A^Q$. Отталкиваясь от этого наблюдения, диссертант ставит и решает вторую (в последовательности изложения, первую) задачу – построить классификацию симметричных консервативных клонов и их инвариантных множеств.

Этот результат имеет самостоятельную ценность. Его актуальность основана на том, что он находится в русле классического направления дискретной математики – описания фрагментов решетки замкнутых классов дискретных функций и их инвариантных множеств. Отправной точкой исследований в этой области была теорема Э. Поста, классифицирующая все замкнутые классы булевых функций. Как известно, в силу результата А.А. Мучника, постовская классификация не допускает явного обобщения на замкнутые классы с более чем двухэлементным носителем, поскольку их решетка континуальна и имеет весьма сложную структуру. Важные достижения в понимании ее устройства принадлежат С.В. Яблонскому, О.Б. Лупанову, В.Б. Кудрявцеву, С.С. Марченкову и др. Наиболее близки к теме диссертационной работы Н.Л. Полякова результаты В.Х. Нгуена о классификации функциональных классов с конечным носителем, замкнутых относительно всех автоморфизмов и содержащих все константы, и работы Я. Ежека, посвященные изучению некоторых свойств консервативных клонов.

Научная новизна. Применение алгебраического подхода, основанного на теории функционально замкнутых классов, является новым и неожиданным событием в теории коллективного выбора. Предложенный диссертантом *метод клонов* позволяет получить глубокие результаты о процедурах агрегирования индивидуальных предпочтений. С другой стороны, найденное автором диссертации приложение теории

функциональных систем ставит перед ней новые задачи и способствует ее дальнейшему развитию.

Главным результатом диссертации является полученное впервые построение исчерпывающей классификации симметричных классов r-функций выбора, обладающих свойством Эрроу. Этот результат снимает все ограничения, содержавшиеся в теореме С. Шелаха о свойстве Эрроу. Чрезвычайно любопытным представляется тот факт, что основной результат диссертанта не имеет вполне вида «теоремы о невозможности». А именно, автор обнаружил, что при $r \in \{2, 3\}$ (и некотором специальном выборе параметра $|A|$) существуют случаи нарушения свойства Эрроу для нетривиальных симметричных множеств r-функций выбора на множестве A.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографии.

Первая глава является вводной. Автор определяет основные понятия, в частности, он вводит класс соответствий Галуа $(\mathrm{inv}_{\mathrm{Q}}, \mathrm{pol})$ между булевыми решетками $\mathcal{P}(\mathcal{O}(A))$ и $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A^{\varrho}))$. В явном виде эти соответствия раньше не использовались. Они легко вкладываются в хорошо известное соответствие $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$ и служат своеобразным «мостиком» между функциональной замкнутостью и отношением сохранения функцией f предиката P. Использование соответствий $(\mathrm{inv}_{\mathrm{Q}}, \mathrm{pol})$ вместо соответствия $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$ мотивировано тем, что рассматриваемая диссертантом задача наиболее прозрачно формулируется именно на языке этих соответствий Галуа. Как показывают рассуждения второй главы, функциональная природа инвариантных множеств позволяет просто и единообразно доказывать многие теоремы о сохранении.

Вторая глава посвящена доказательству вспомогательных результатов о свойствах широкого класса клонов с конечным носителем. Автор определяет три условия Δ^{∂}, Δ_r^e и Δ^2, каждое из которых означает, что клон $\mathcal{F}$ содержит некоторое множество специальных функций. Оказывается, что если клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет хотя бы одному из этих условий, то множество $\mathrm{inv}_{\mathrm{Q}}\,\mathcal{F}$ обладает достаточно простой структурой и допускает несложное

частичное описание. В каждом из этих трех случаев автор доказывает теорему о структуре множества $\mathrm{inv}_{\mathrm{Q}}\,\mathcal{F}$. Результаты такого рода достаточно типичны в теории функционально замкнутых классов и перекликаются с известными характеризациями дискриминаторных алгебр и подобных им структур.

Третья глава развивает теорию квазитривиальных (консервативных) клонов с конечным носителем. В первой части главы автор вводит ряд параметров, характеризующих консервативные клоны, и определяет четыре класса консервативных клонов специального вида. Используя теоремы предыдущей главы, автор доказывает несколько общих свойств консервативных клонов. Во второй части диссертант сосредотачивается на изучении симметричных консервативных клонов. Важным промежуточным результатом является теорема о том, что каждый симметричный консервативный клон удовлетворяет одному из условий Δ^{∂}, Δ_r^e и Δ^2. Доказательство теоремы любопытно тем, что дает нечастый пример непосредственного применения классификации Поста (вместе с некоторыми дополнительными аргументами). Кульминацией третьей главы является классификационная теорема. Автор доказал, что каждый симметричный консервативный клон может быть представлен в виде пересечения четырех клонов специального вида, определенных в первой части.

В четвертой главе автор доказывает теорему о классификация симметричных классов r-функций выбора на конечном множестве A, обладающих простым свойством Эрроу. Результаты предыдущей главы позволяют легко решить вопрос для случая $r \geq 3$ & $|A| \geq 5$. Разбор оставшихся случаев потребовал от автора большой изобретательности и дал бесконечную серию нетривиальных симметричных множеств без свойства Эрроу.

В пятой главе эта теорема обобщается на случай общего свойства Эрроу.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы для дальнейшего изучения процедур агрегирования коллективных систем предпочтений, а также дальнейшего прояснения строения решетки функционально замкнутых классов. Несмотря на теоретический характер, результаты диссертации и предложенный автором метод допускают применение в исследованиях практических задач принятия коллективных решений.

Обоснованность положений и выводов. Все результаты снабжены строгими доказательствами, отражены в публикациях автора, неоднократно доложены на авторитетных семинарах и конференциях.

Критический анализ диссертации.

1. Стиль автора слишком сух и лапидарен, что затрудняет понимание работы. Некоторые ключевые понятия автор определяет просто последовательностью формул, не сопровождая никакими разъяснениями.
2. Технически сложные доказательства автору стоило бы предварить подробным планом. В особенности это касается результатов главы пять. Кроме того, в доказательстве основной теоремы этой главы, по всей видимости, можно существенно сократить переборную часть, если применить к общему случаю те соображения, которые автор использует для случая $|A| \leq 5$.
3. В диссертации допущены отдельные опечатки и стилистические погрешности. Например, на стр. 4, вторая строка сверху, формула содержит лишнюю закрывающую скобку. На странице 20, тринадцатая строка сверху, перед словами «свойством Эрроу», пропущено слово «простым».

Отмеченные замечания не снижают общих высоких оценок работы и ее научного уровня. Работа содержит важные результаты теоретического и прикладного характера, причем основная теорема является в некотором смысле окончательной. Предложенный автором метод клонов является сильным и перспективным инструментом теории коллективного выбора.

Заключение. Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой достигнуто существенное продвижение в исследовании границ применения принципа Эрроу и существенно развит математический аппарат теории коллективного выбора. Диссертация написана на хорошем математическом уровне, ее результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и опубликованы в ведущих научных журналах, а также доложены на авторитетных семинарах и международных конференциях. Результаты других авторов снабжены соответствующими ссылками. Автореферат правильно отражает содержание диссертационной работы.

Диссертация удовлетворяет всем требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК Минобрнауки РФ, а ее автор, Поляков Николай Львович, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Доктор физико-математических наук, Кузнецов Сергей Олегович
Профессор НИУ ВШЭ,
руководитель департамента анализа
данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных наук
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

19.04.2016 г.

Контактная информация.

Адрес: 125319, Москва, Кочновский проезд, д. 3, каб. 329

Телефон: +7 (495) 772-95-90 * 22670

Электронная почта: skuznetsov@hse.ru

Подпись заверяю

Начальник отдела по работе с научно-педагогическими кадрами Управления персонала
М Б Дуденко
тел. 4957729590 *12168
19.04.2016