

Отзыв официального оппонента о диссертации Н.Л. Полякова  
«Соответствия Галуа для классов дискретных функций и их применение к  
математическим проблемам теории коллективного выбора»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.01.09 —  
дискретная математика и математическая кибернетика

В диссертации Н.Л. Полякова рассматриваются вопросы, связанные с классификацией клонов и применением метода клонов к задачам теории коллективного выбора. Более точно, в работе описываются основные типы квазитривиальных клонов, строится классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем и обобщается теорема Шелаха, полученная для нерациональных систем предпочтений. Эта теорема относится к задаче агрегирования системы предпочтений по совокупности индивидуальных систем предпочтений. Впервые систематическое исследование по этой задаче предпринял К. Эрроу. Затем близкими вопросами занимались А. Сен, П. Фишборн, П.К. Паттанаик, М.А. Айзерман и Ф.Т. Алескеров. Основными методами теории коллективного выбора до недавнего времени оставались элементарные комбинаторные рассуждения, что служило препятствием для широких обобщений теоремы Эрроу о невозможности. Однако, возможность такого обобщения появилась благодаря работе С. Шелаха о нерациональных системах предпочтения. В этой работе в качестве систем предпочтения рассматриваются всевозможные функции, определенные на  $r$ -элементных подмножествах множества альтернатив. Для некоторых значений параметра Шелах доказал, что любое симметричное собственное подмножество множества всевозможных функций выбора обладает свойством Эрроу. К сожалению, этот результат не дает исчерпывающей классификации симметричных множеств  $r$ -функций выбора, обладающих свойством Эрроу. В диссертационной работе Н.Л. Поляков обобщил теорему Шелаха на случай произвольного  $r$ . Для решения этой задачи был применен и расширен намеченный Шелахом подход, использующий классификацию клонов. Теория замкнутых классов дискретных функций имеет собственную богатую историю. Первым и наиболее известным результатом в этой области была теорема Э.Л. Поста. Наибольшее значительный вклад в дальнейшее исследование внес С.В. Яблонский. В диссертационной работе для изучения функциональных систем используется подход, связанный с соответствием Галуа между множествами функций и множествами сохраняемых ими предикатов, которое впервые было обнаружено Д. Гейгером и независимо В.Г. Боднарчуком, Л.А. Калужниным и др. С квазитривиальными клонами и алгебрами, наиболее релевантными настоящему исследованию, связаны работы Я. Ежека. Так как результаты диссертации позволяют исследовать практические задачи агрегирования систем предпочтений (которые, например, возникают в социально-психологических приложениях) и некоторые процедуры принятия коллективных решений, то актуальность проведенного Н.Л. Поляковым исследования представляется несомненной.

Диссертация состоит из введения и пяти глав. В первой главе даны основные определения и введены основные обозначения, относящиеся к теории функциональных классов. В



конец главы вводится ключевое множество  $\text{inv}_Q(\mathcal{F})$ , описанию которого посвящена следующая глава диссертации. Во второй главе доказываются три теоремы, характеризующие множество  $\text{inv}_Q \mathcal{F}$  для клонов с конечным носителем, удовлетворяющих некоторым условиям, каждое из которых состоит в том, что клон включает в себя некоторое множество функций. В главе 3 рассматриваются квазитривиальные клоны с конечным носителем. Основными результатами третьей главы являются две теоремы о симметричных квазитривиальных клонах, первая из которых определяет значения параметров, при которых рассматриваемые клоны удовлетворяют условиям, определенным во второй главе, а вторая — утверждает некоторую классификацию рассматриваемых клонов. В четвертой главе производится полная классификация симметричных классов  $r$ -функций выбора на конечном множестве, обладающих свойством Эрроу. Тем самым, рассмотрены абсолютно все случаи, нерассмотренные в работе Шелаха. В главе 5 определяется общее свойство Эрроу и доказывается, что результаты предыдущей главы переносятся и на случай общего свойства Эрроу.

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Получена характеристика инвариантных множеств клонов с конечным носителем, удовлетворяющих некоторым специальным условиям, каждое из которых состоит в том, что клон включает некоторое множество функций. Определены четыре простых типа квазитривиальных клонов. Построена классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем, представляющая каждый из них в виде пересечения четырех клонов простых типов. С помощью упомянутых результатов получена полная классификация симметричных множеств  $r$ -функций выбора, обладающих простым и общим свойством Эрроу.

Достоверность научных положений, выводов и заключений, сформулированных в диссертации, подтверждается строгими и четкими математическими доказательствами, разобранными примерами, показывающими область применения полученных результатов и их оптимальность.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы как в теории коллективного выбора для доказательства обобщений теоремы Эрроу о невозможности, так и в теории функциональных систем в задачах классификации замкнутых классов дискретных функций.

Работа написана на хорошем математическом уровне. Отметим, что основное отличие данной работы от предыдущих по данной тематике состоит в применении математической теории функциональных систем к задачам о системах предпочтений. Это отличие, в том числе, позволяет определить область применения доказанных результатов и подчеркивает умелое владение автором методами дискретной математики (в частности, теории графов) и универсальной алгебры, аккуратное проведение сложных выкладок и их хорошее изложение. В то же время, в работе замечены и следующие недостатки.

1. На стр. 17 (4 строка снизу) допущена опечатка, которая немного усложняет понимание обозначений, но при этом никак не влияет на корректность изложенного далее материала. А именно при выборе обозначения для множества всех конечных наборов, содержащих хотя бы  $m$  различных элементов, знак  $<$  надо исправить на знак  $\geq$ .



2. На стр. 26 при выборе обозначения для множества всех селекторных функций из контекста напрашивается, что эти функции являются  $n$ -местными, хотя обозначение не зависит от  $n$ . Из дальнейшего, впрочем, становится понятно, что арность может быть любой.
3. Структуру некоторых глав, возможно, стоит изменить, чтобы быстрее знакомить читателя с основными результатами. Так, теоремы о сохранении из второй главы стоило бы сформулировать до различных вспомогательных утверждений.
4. Замечен ряд опечаток нематематического характера и орфографических ошибок (стр. 4 (первая выключная формула), стр. 19 (4 строка сверху), стр. 57 (первая строка), стр. 59 (17 строка снизу), стр. 65 (8 строка снизу), стр. 67 (5 строка снизу), стр. 68 (4 строка строка), стр. 88 (7 строка снизу)).

Указанные недостатки относятся лишь к представлению материала в диссертации, а не к ее математической стороне, и не снижают общего положительного впечатления от работы (как и не снижают впечатления, что работа написана очень аккуратно). Работа апробирована на различных представительных семинарах и научных конференциях; ее результаты адекватно и полно отражены в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах (все входят в перечень ВАК) и 4 тезисов докладов. Основное содержание диссертации своевременно и полно опубликовано в открытой печати. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация является научно-квалификационной работой, результаты которой вносят весомый вклад в математическую теорию систем предпочтений. Она соответствует критериям, установленным Положением о порядке присуждения ученых степеней, утвержденным Постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор Поляков Николай Львович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика.

Кандидат физико-математических наук

Жуковский Максим Евгеньевич

28 апреля 2016 года

Адрес электронной почты: zhukmax@gmail.com.

Телефон: +7(906)7546617.


Организация — место работы: ФГАОУ ВПО “Московский физико-технический институт (государственный университет)”.

Адрес организации: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9.

Адрес официального сайта организации: www.mipt.ru.

Должность: доцент.

Подпись к.ф.-м.н. М.Е. Жуковского:  заверяю.

 ученый секретарь МФТИ

Ф.м.н., доцент Скалько Юрий Иванович

