ФГБОУ ВО
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.212.2

Хиль Елена Викторовна

Распределения функционалов от совокупностей локальных максимумов в последовательностях случайных величин

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
А. М. Зубков

Москва – 2016

Оглавление

Введение **4**

1 Локальные максимумы и промежутки между ними **20**

1.1 Основные определения 20

1.2 Переход от независимых случайных величин к перестановочным 21

1.3 Цепь Маркова $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ 22

1.4 Характеристики цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ для равномерно распределённых величин 24

1.4.1 Совместное распределение соседних максимумов. 24

1.4.2 Переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ 30

1.4.3 Математическое ожидание локального максимума 31

1.4.4 Условное распределение длины промежутка 33

1.4.5 Формулы для совместного распределения длин соседних промежутков. 34

1.4.6 Условное распределение пика 42

2 Структура последовательности с выделенными локальными максимумами **45**

2.1 Структура длинного промежутка между локальными максимумами 45

2.1.1 Структура “оврага” 45

2.1.2 Асимптотический вид “оврага” 47

2.1.3 Асимптотический вид промежутка между локальными максимумами 51

2.2 Рекуррентные события $\{\lambda = 3\}$ 52

2.3 Количества расстояний заданных длин 60

2.3.1 Определение и моменты 60

2.3.2 Асимптотическая нормальность количеств расстояний заданных длин 67

2.3.3 Статистический критерий 70

3 Локальные максимумы и промежутки между ними в неперестановочных последовательностях 72

3.1 Скользящие суммы 72

3.1.1 Распределение длины промежутка 72

3.1.2 Предельное распределение статистик, построенных по ξ_i^* . 79

3.2 Взвешенные суммы 85

3.3 Меняющееся распределение 90

Заключение 92

Список литературы 93

Введение

Диссертация посвящена изучению структуры последовательности случайных величин в терминах локальных максимумов. Исследование различных характеристик последовательности случайных величин – одна из основных задач теории вероятностей. В частности, представляют интерес характеристики, связанные с отрезками монотонности в последовательности случайных величин: промежутки возрастания, убывания, локальные максимумы.

Обзор литературы. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{X_i\}_{i\geq 1}$, имеющих одно и то же непрерывное распределение. В этой последовательности определим моменты убывания $R_0 = 0$, $R_k = \min\{i > R_{k-1} : X_i > X_{i+1}\}$, $k \geq 1$, и рассмотрим процесс $T_1 = R_1$, $T_k = R_k - R_{k-1}$, $k \geq 2$, – так называемый runs up process (T_k равно длине k-го участка возрастания). Одним из первых этот процесс изучал в начале 20-го века П. А. МакМахон (P. A. MacMahon) [23], который получил формулу (в виде некоторой суммы) для вероятностей $\mathbf{P}\{T_1 = l_1, \ldots, T_{n-1} = l_{n-1}, T_n \geq l_n\}$. В 1974 г. Дж. Д. Диксон (J. D. Dixon) [16] показал, что длина самого длинного участка возрастания (убывания) последовательности $\{X_i\}_{i\geq 1}$ ($\max(T_1, \ldots, T_n)$) для любого целого $r \geq 1$ принадлежит отрезку $[l_0 - 2, l_0 + r]$ с вероятностью $1 - O(\log(\log n)/\log n)^r$, где $l_0 : l_0! \leq n < (l_0 + 1)!$.

В 1980 г. Б. Г. Питтель (B. G. Pittel) показал [27], что $(R_{[nt]} - 2[nt])/\sqrt{2n/3}$ сходится по распределению к стандартному броуновскому движению. В 1981 г. он же показал [28], что $\max(T_1, \ldots, T_n)\log(\log n)/\log n \to 1$ п.н. и в $L^p, p > 0$. Отметим, что длина L_n самой длинной возрастающей подпоследовательности в $X_1, \ldots, X_n$ имеет совсем другой порядок роста: $L_n/(2n^{1/2}) \to 1$ п.н. (А. М. Вершик, С. В. Керов, 1977 г. [2]).

Вопрос о длине самого длинного участка возрастания также рассматривался и для последовательности одинаково распределённых дискретных случайных величин $\{X_i\}_{i\geq 1}$ (обозначим эту длину через M_n). Поведение M_n в этом случае зависит от распределения случайных величин. Однако, если рассматривать нестрого монотонные цепочки $X_i \le X_{i+1} \le \cdots$ (пусть M'_n – длина самой длинной из них), то для любого дискретного распределения $M'_n/(\log_{1/p} n) \to 1$ п.н., где $p = \max_k \mathbf{P}\{X_1 = k\}$ [14].

Строго монотонные участки возрастания изучались в случае геометрического, равномерного распределения и распределения Пуассона, например, в [14], [22], [20]. В статье [21] Г. Лушард и Х. Продингер (G. Louchard, H. Prodinger) рассматривали смежную задачу – суммарную длину всех участков убывания (возрастания) в последовательности независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение. Для ее решения помимо вычисления производящих функций они использовали аппарат цепей Маркова: соседние моменты убывания образуют цепь Маркова, для которой авторы нашли стационарное распределение и моменты.

Авторы [25] изучали длину M_n в последовательности зависимых одинаково распределённых дискретных случайных величин. В этой статье X_1 равномерно распределена на $1, \ldots, m$, и для $n > 1$ случайная величина X_n равномерно распределена на $\{1, \ldots, m\} \setminus \{X_{n-1}\}$. Авторами найден алгоритм для вычисления распределения и математического ожидания M_n.

А. М. Зубков и Д. В. Шуваев [3] рассматривали конечные последовательности перестановочных случайных величин (имеющих произвольное распределение). В [3] найдены первые моменты количества пиков, впадин, возрастаний, убываний как выражения от простых характеристик совместных распределений.

При изучении таких функций от последовательности случайных величин, значения которых зависят только от сигнатуры этой последовательности (знания отношений порядка между соседними членами последовательности), можно использовать переход к случайным перестановкам.

Связь между последовательностью $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимых случайных величин, имеющих одно и то же непрерывное распределение, и случайной перестановкой задается следующим образом: сопоставим числу k номер случайной величины ξ_k в вариационному ряду $\xi_{(1)} < \xi_{(2)} < \cdots < \xi_{(n-1)} < \xi_{(n)}$, построенном по $\xi_1, \ldots, \xi_n$. То есть $\sigma_k = s : \xi_{(1)} < \cdots < \xi_{(s-1)} < \xi_k < \xi_{(s+1)} < \cdots < \xi_{(n)}$. Тогда случайная перестановка σ имеет равномерное распределение на множестве всех перестановок порядка n. Следовательно, вероятность того, что σ обладает заданным свойством, т.е. принадлежит некоторому подмножеству множества всех перестановок, равна мощности этого подмножества, деленной на $n!$.

Этот способ применяется в диссертации несколько раз и позволяет существенно упростить вычисления.

И наоборот, для вычисления количества перестановок, обладающих заданным свойством, может быть удобно рассмотреть последовательность случайных величин и вычислить соответствующую вероятность.

Дж. Шпиро (G. G. Szpiro) [34] использовал такой переход для подсчета перестановок заданной сигнатуры и выразил искомые количества перестановок через вероятности того, что участки возрастания и убывания в последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на $[0, 1]$, повторяют сигнатуру перестановки. Эти вероятности находятся путем вычисления интегралов, для которого может быть использован компьютер.

Д. Ромик (D. Romik) в [30] также использовал связь между перестановками и независимыми одинаково распределёнными случайными величинами. Он выразил максимальную длину M_n^A альтернирующей подпоследовательности в перестановке $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ (такой набор $i_1 < i_2 < \cdots$, что $\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} > \sigma_{i_3} < \cdots$) через сумму индикаторов событий "ξ_k является локальным минимумом или локальным максимумом". Для таких индикаторов легко вычисляются математические ожидания и ковариации, и ЦПТ для M_n^A (доказанная Г. Видомом (H. Widom) в [35] аналитическими методами на основании производящей функции, явная формула для которой была получена Р. Стенли (R. Stanley) [33]) является простым следствием центральной предельной теоремы для 3-зависимых случайных величин.

Заметим, что M_n^A тесно связана с количеством локальных максимумов $N_0(T)$ (рассматриваемым ниже в параграфе 2.3), а именно $N_0(n) = (M_n^A - 1)/2$, если M_n^A нечётно, и $N_0(n) = M_n^A/2 - 1$, если M_n^A чётно.

Альтернирующие перестановки (такие перестановки σ, что $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \cdots$) впервые изучались Д. Андре (D. André). В 1881 г. в работе [9] им были получены производящие функции для количеств A_n таких перестановок и установлена связь чисел A_n с числами Каталана, Бернулли и Эйлера.

Идеи Андре нашли развитие в различных вариациях (обобщениях) этой задачи, например, в [4] А. Г. Кузнецов, И. М. Пак, А. Е. Постников рассматривали количества альтернирующих перестановок с фиксированным первым элементом, как один из результатов авторы получили комбинаторные тождества для чисел Эйлера и Бернулли.

Кроме того, ряд работ посвящен изучению альтернирующих подпоследовательностей в словах. Например, в [24] рассматривалась длина самой длинной альтернирующей подпоследовательности в слове (из символов алфавита мощности k) длины n, не содержащего фиксированной комбинации букв длины 3. Для всех таких комбинаций найдены производящие функции. Рассмотрение комбинаций большей длины – гораздо более сложная и пока полностью не решенная задача.

Актуальность темы. В диссертации изучаются распределения расстояний между соседними локальными максимумами в последовательности случайных величин. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность одинаково распределённых случайных величин, $\chi_n = \mathrm{I}\{\xi_{n-1} < \xi_n > \xi_{n+1}\}\,(n \in \mathbb{Z})$ – индикаторы локальных максимумов этой последовательности, $\{\tau_j,\ j \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} :\ \chi_n = 1\}$ – возрастающая последовательность всех моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$ и $\lambda_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ – длины промежутков между соседними локальными максимумами.

Отметим, что для определения случайных величин τ_j (а, следовательно, и λ_j) не обязательно знать точные значения величин ξ_n, достаточно знать только отношения “больше-меньше” между соседними членами последовательности $\{\xi_n\}$, т.е. последовательности $\{\tau_j\}$ и $\{\lambda_j\}$ можно построить по сильно огрубленным данным.

Локальные максимумы возникают в разных математических и прикладных задачах. Например, в [11] изучается множество $P(S)$ перестановок с фиксированным множеством S значений пиков (например, перестановками порядка 5 с множеством значений пиков $\{4, 5\}$ являются 14253, 35241, 34152, . . .). Даны условия, когда это множество не пусто, и показано, что оно является симплициальным комплексом на множестве $\{3, \ldots, n\}$. Получены рекуррентные формулы для мощности множества $P(S)$ в общем виде и точные формулы в случаях, когда количество пиков равно 0, 1 или 2.

В [10] изучается количество перестановок порядка n, имеющих заданное множество S моментов появления локальных максимумов. Авторы показывают, что количество таких перестановок имеет вид $p(n)2^{n-|S|-1}$, где $p(n)$ – полином, зависящий от множества S. Для некоторых множеств S получены точные формулы для $p(n)$. Результаты этой статьи частично пересекаются с результатами настоящей диссертации.

Авторы [13] рассматривают применение локальных максимумов в качестве точек доступа для разметки текста. Строка (текст) заменяется последовательностью локальных максимумов и расстояний между ними (значение максимума и расстояние до следующего). Такая замена позволяет сравнивать строки быстрее и использовать меньше памяти. Показано, что задача минимизации количества локальных максимумов в тексте за счет выбора порядка букв в алфавите NP-сложна. Для фиксированного порядка букв в алфавите найдено математическое ожидание числа максимумов (которое зависит от мощности алфавита, но не превышает $1/3$ длины текста). Авторы применяют свои результаты к поиску фиксированной последовательности в ДНК.

В [19] изучаются локальные максимумы в случае простого симметричного случайного блуждания. Получены количества траекторий с ровно k пиками (локальными максимумами) для моста, экскурсии и меандра Бернулли. Также исследуется асимптотическое распределение количества пиков.

Предпосылкой к настоящей работе стала статья А. Кукетаева [18], в которой распределение длин $\lambda_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ изучалось в предположении о независимости случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$. В [18] были получены вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_j = k\}$ в виде многократных интегралов, точные формулы для которых найдены в [26] с помощью рекуррентных вычислений.

В [18] использовано несколько стандартных статистик, основанных на λ_j, для тестирования некоторых генераторов случайных чисел, при этом неявно предполагается, что $\{\lambda_j\}$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин.

В дипломной работе Н. А. Харитоновой (2009 г.) [7] было показано, что предположение о независимости случайных величин λ_j неверно. С помощью комбинаторных методов в [7] (см. также [36]) была доказана следующая

Теорема A. *Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то*

$$\mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}\lambda = 3, \quad \mathbf{D}\lambda = 3(e^2 - 7) \approx 1,167, \quad \mathbf{P}\{\lambda > 6\} \approx 0.0074.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = l, \lambda_2 = k\} = \tag{2}$$

$$= \frac{3}{(k+l+3)!} \sum_{m=1}^{k+l+2} \sum_{n=1}^{k+2} C_{m-1}^{n-1} C_{k+l+3-m}^{k+3-n} P(k,n) Q(l, m-n+1),$$

где

$$P(k,n) = \begin{cases} k2^k - (2k-n+3)2^{n-3}, & \text{если } n \geq 3, \\ k2^k - (k+1), & \text{если } n \in \{1,2\}; \end{cases}$$

$$Q(l,m) = \begin{cases} (2l-m-1)2^{m-3}, & \text{если } m \geq 3, \\ l-1, & \text{если } m \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Формулы (2) можно упростить, если одна из длин равна 2 или 3:

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\} = \frac{(k^2+9k+12)(k+4)(k-1)2^k}{(k+5)!},$$

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 3\} = \frac{(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = 3\}.$$

Из упрощенных формул видно, что события $\{\lambda_j = k\}$ и $\{\lambda_{j+1} = 2\}$ зависимы, таким образом случайные величины λ_j зависимы. При этом событие $\{\lambda_j = 3\}$ не зависит от значений λ_{j-1} и λ_{j+1}. Несложно проверить, что вероятность того, что t является внутренней точкой промежутка между соседними локальными максимумами, расстояние между которыми равно $k \geq 1$, есть

$$\mathbf{P}\{\min\{\tau_j : \tau_j \geq t\} - \max\{\tau_j : \tau_j \leq t\} = k\} = \frac{k-1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = k\},$$

и

$$\mathbf{P}\{\min\{\tau_j : \tau_j \geq t\} = \max\{\tau_j : \tau_j \leq t\}\} = \mathbf{P}\{t \in \{\tau_j\}_{j\in Z}\} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, математическое ожидание длины L_t промежутка, накрывающего точку t, равно

$$\mathbf{M}L_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-k}{2}\mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{\mathbf{M}\lambda^2 - \mathbf{M}\lambda}{3} = e^2 - 5 \approx 2,389.$$

Цели работы. Исследование структурных свойств последовательностей случайных величин в терминах расстояний между моментами появления локальных максимумов.

Изучение возможности использования этих характеристик для проверки гипотез о вероятностной структуре исходной последовательности.

Научная новизна. Основные результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Найдены совместные распределения соседних локальных максимумов и длин промежутков между ними.

2. Описана асимптотическая структура промежутка между соседними локальными максимумами при условии, что его длина стремится к бесконечности.

3. Доказана асимптотическая нормальность совместных распределений количеств появления промежутков заданных длин. Предложен статистический критерий проверки гипотезы о вероятностной структуре исходной последовательности.

4. Найдены вероятности появления локальных максимумов и распределение расстояний между ними для некоторых последовательностей зависимых или не одинаково распределённых случайных величин.

Основные методы исследования. В работе используются аналитические и комбинаторные методы теории вероятностей.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа имеет теоретический характер, в частности, обнаружены новые свойства последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин. Полученные результаты могут использоваться при статистической обработке огрублённых наблюдений (достаточно, чтобы были известны только отношения "большеменьше" между соседними наблюдениями), а также при тестировании датчиков случайных чисел.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на научном семинаре кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, 2009–2015 гг.); Десятом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (осенняя сессия) (Сочи, 2009г.); 9-й международной конференции «Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics» (Минск, 2010 г.); Восемнадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Казань, 2011г.); Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения», посвященной 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко (Москва, 2012г.); 10-й международной конференции «Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics» (Минск, 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах, представленных в конце списка литературы.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 43 наименований. Общий объём диссертации составляет 98 страниц.

Краткое содержание работы. Приведём основные результаты диссертации. Нумерация утверждений совпадает с их нумерацией в соответствующих главах.

Первая глава настоящей работы посвящена изучению последовательности локальных максимумов и расстояний $\{\lambda_j\}$ между ними для независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, имеющих одно и то же непрерывное распределение.

В параграфе 1.1 содержатся основные определения и обозначения.

В параграфе 1.2 показано, что доказательство теоремы А (и ряд других результатов) можно обобщить на случай перестановочных случайных величин $\{\xi_n\}$, удовлетворяющих условию $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$.

Лемма 1. *Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – такая последовательность перестановочных случайных величин, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$. Тогда последовательность $\{\tau_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$ моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$ имеет такое же распределение, как последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.*

В параграфе 1.3 доказана следующая

Теорема 1. *Пусть случайные величины ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда последовательность пар $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$, $j \in \mathbb{Z}$, образует однородную по времени цепь Маркова.*

Параграф 1.4 посвящен исследованию характеристик цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ в случае, когда исходные случайные величины $\{\xi_n\}$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим два соседних локальных максимума $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$. Введём обозначения $\xi_{\min} = \min\{\xi_{\tau_{j-1}},\, \xi_{\tau_j}\}$, $\xi_{\max} = \max\{\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}\}$.

Лемма 2. *Условная плотность $g_k(x,y)$ распределения вектора $(\xi_{\min},\, \xi_{\max})$ при условии, что расстояние $\lambda_j = k$, имеет вид*

$$g_k(x,y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^k} xy\left((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}\right), 0 \le x \le y \le 1. \qquad (3)$$

Эта лемма позволила получить следующие теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Тогда переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ равна*

$$p_{\left(\lambda_{j+1},\xi_{\tau_{j+1}}\right)|\left(\lambda_j,\xi_{\tau_j}\right)}(k,y\,|\,l,x) = \frac{1}{2(k-1)!}\,\frac{y\left((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1}\right)}{x},\ 0 \le x, y \le 1.$$

В теореме А формула для совместного распределения длин соседних промежутков представлена в виде двойной суммы. В настоящей работе получена явная формула.

Теорема 3. *Пусть случайные величины* $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = l, \lambda_2 = k\} =$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{k+l-1}\left(C_{k+l}^{l}(kl(k+l+1)+1-k^2-l^2)-(k+l-1)(k+1)(l+1)\right)}{(l+1)(k+1)(k+l+3)(k+l+1)!}, \quad (4)$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} = \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = l, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = k\} =$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{k+l}}{(l+1)!(k+1)!}\left(\frac{kl(k+l+5)^2-(k+l+3)((k+l)^2+6(k+l)-3)}{(k+3)(l+3)(k+l+3)(k+l+5)}\right.$$
$$\left.+\frac{2(k+l+1)}{(k+l+3)(k+l+5)C_{k+l+2}^{l+1}}\right). \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) позволяют найти отношение условных вероятностей

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l | \lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}}{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l | \lambda_2 = 2\}} = \frac{6}{5}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right)\right), \quad k, l \to \infty,$$

которое показывает, что последовательность $\{\lambda_j\}$ не является цепью Маркова.

Во **второй главе** изучается структура последовательности независимых случайных величин ξ_n, имеющих одно и то же непрерывное распределение, с выделенными локальными максимумами.

В параграфе 2.1 описана структура "оврага" (последовательно идущие убывающий и возрастающий участки последовательности случайных величин) и изучено асимптотическое поведение участка последовательности между соседними локальными максимумами.

Теорема 4. *Пусть случайные величины* $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, *независимы и имеют равномерное распределение на отрезке* $[0,1]$, *функции* $y_k(x) = |1 - 2x/(k+1)|$, $V_1^k = \{\exists\, t : \xi_1 > \dots > \xi_t < \dots < \xi_k,\ 1 \le t \le k\}$. *Тогда*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\dots,k} |\xi_n - y_k(n)| > \varepsilon \,|\, V_1^k\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Теорема 5. *Пусть случайные величины $\xi_n, n \geq 0$, независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ и функции $y_k(x) = |1 - 2x/(k+1)|$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\ldots,k} |\xi_n - y_k(n)| > \varepsilon \,|\, W_1^k\} \to 0, \quad k \to \infty,$$
$$W_1^k = \{\exists\, t : \xi_0 < \xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_t < \cdots \xi_{k-1} < \xi_k > \xi_{k+1}\}.$$

Следствие 3. *Если случайные величины $\xi_n, n \geq 0$, независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение с функцией распределения $F(x)$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\ldots,k} |F(\xi_n) - y_k(n)| > \varepsilon \,|\, W_1^k\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Если, кроме того, функция $F(x)$ строго монотонна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\ldots,k} |\xi_n - F^{-1}(y_k(n))| > \varepsilon \,|\, W_1^k\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

В параграфе 2.2 показано, что событие $\{\lambda = 3\}$ является рекуррентным событием с запаздыванием как для исходной последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, так и для последовательности $\{\chi_n\}_{n=2}^{\infty}$ индикаторов локальных максимумов, найдены производящие функции для вероятностей f_k, b_k того, что рекуррентное событие произошло впервые при k-м испытании (в регулярной части и в начальном отрезке) и вероятности u_k того, что рекуррентное событие произошло при k-м испытании

$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k u_k = \frac{1}{9} \sum_{k=6}^{\infty} s^k = \frac{s^6}{9(1-s)},$$
$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k f_k = 1 - (1-s)\left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right)^{-1},$$
$$B(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k b_k = \frac{1}{9} s^6 \left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right)^{-1}.$$

Утверждение 4. *Пусть ρ – расстояние между моментами появления событий $\{\lambda = 3\}$, а ρ_0 – время ожидания первого момента появления события $\{\lambda = 3\}$ в последовательности $\{\xi_n,\, n \in N\}$. Тогда*

$$\mathbf{M}\rho = 9, \quad \mathbf{D}\rho = 57,6; \qquad \mathbf{M}\rho_0 = 13,2, \quad \mathbf{D}\rho_0 = 32,04.$$

В параграфе 2.3 рассматриваются количества расстояний заданных длин между соседними локальными максимумами последовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^T$,

$$N_0(T) = \sum_{i=1}^{T-2} \chi_i = \sum_{i=1}^{T-2} \mathrm{I}\{\xi_{i-1} < \xi_i > \xi_{i+1}\},$$

$$N_k(T) = \sum_{i=1}^{T-2-k} \mathrm{I}\{\chi_i = \chi_{i+k} = 1, \chi_j = 0, j = i+1, \ldots, i+k-1\}, \quad k \geq 2,$$

$$N^{(s)} = \left(N_0(T), N_2(T), N_3(T), \ldots, N_s(T)\right).$$

Для вектора $N^{(s)}$ справедлива следующая предельная теорема.

Теорема 7. *Для любого натурального s вектор $N^{(s)}$ асимптотически нормален при $T \to \infty$ с параметрами $(A^{(s)}T, C_sT)$, где*

$$A^{(s)} = \frac{1}{3}(1, \mathbf{P}\{\lambda = 2\}, \ldots, \mathbf{P}\{\lambda = s\}), \tag{6}$$

а элементы матрицы ковариаций $C_s = \|c_{km}\|_{k,m=1}^s$ определяются формулами

$$c_{11} = \frac{2}{45},$$
$$c_{1k} = c_{k1} = \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \frac{k-1}{9}\mathbf{P}\{\lambda = k\}, \quad k \geqslant 2,$$
$$c_{kk} = \frac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = k\} - \frac{2k+5}{9}\mathbf{P}^2\{\lambda = k\} + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = \lambda_2 = k\}$$
$$+\frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\}, \quad k \geqslant 2,$$
$$c_{mk} = c_{km} = -\frac{k+m+5}{9}\mathbf{P}\{\lambda = k\}\mathbf{P}\{\lambda = m\} + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\}$$
$$+\frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\}, \quad m > k \geqslant 2.$$

Зависимость случайных величин $\{\lambda_j\}$ делает применение стандартных статистических критериев в [18] некорректным, однако теорема 7 позволяет строить критерии согласия для гипотезы H_0: $\{\xi_j\}$ – последовательность перестановочных случайных величин, таких что $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$.

Сформулируем также частный случай теоремы 7.

Теорема 8. *Вектор* $(N(T), N_2(T), N_3(T))$ *при* $T \to \infty$ *асимптотически нормален с параметрами*

$$T\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{9}\right), \qquad T\begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{20}{315} & \frac{2}{135} \\ \frac{20}{315} & \frac{1772}{14175} & -\frac{22}{945} \\ \frac{2}{135} & -\frac{22}{945} & \frac{32}{405} \end{pmatrix}.$$

В **третьей главе** рассмотрено несколько видов последовательностей случайных величин, не являющих перестановочными.

В параграфе 3.1 изучаются распределение расстояния между соседними локальными максимумами и количества расстояний заданных длин между соседними локальными максимумами в последовательности скользящих сумм.

Теорема 9. *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *– последовательность независимых случайных величин, имеющих одно и то же непрерывное распределение, и случайные величины* $\xi_n^* = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Пусть* λ^* *– длина промежутка между соседними локальными максимумами последовательности* $\{\xi_n^*\}$. *Тогда для* $l = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l\} = \frac{4}{[(l+2)!]^2}\left(l^2 - \frac{2}{l+2}\right) C_{2l+1}^l,$$
$$\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l+1\} = \frac{8l(l+1)}{(l+2)!(l+3)!} C_{2l+1}^l.$$

Компьютерные вычисления показывают, что

$$\mathbf{M}\lambda^* = 4, \quad \mathbf{D}\lambda^* \approx 2,117, \quad \mathbf{P}\{\lambda^* > 8\} \approx 0.0081.$$

Пусть $N_k^*(T)$ – случайные величины, аналогичные $N_k(T)$.

Теорема 10. *Вектор* $(N^*(T), N_2^*(T), N_3^*(T))$ *при* $T \to \infty$ *асимптотически нормален с параметрами*

$$T\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{36}, \frac{1}{12}\right), \qquad T\begin{pmatrix} \frac{5}{144} & \frac{5}{288} & \frac{5}{144} \\ \frac{5}{288} & \frac{52}{2025} & \frac{1}{720} \\ \frac{5}{144} & \frac{1}{720} & \frac{259}{3456} \end{pmatrix}.$$

Сравнение теорем 8 и 10 показывает, что с помощью рассмотренных статистик можно построить критерий различения гипотезы H_0 от описанной в теореме 9 альтернативы.

В параграфе 3.2 рассматривается последовательность взвешенных сумм $\widehat{\xi}_n^c = \xi_n + c\xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c = const \neq 0$, где случайные величины $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение (при $c = 0$ $\widehat{\xi}_n^c = \xi_n$, и этот случай подробно изучен в первой главе). При $c = 1$ получаем последовательность $\{\xi_i^*\}$, рассмотренную в параграфе 3.1. По теореме 9 распределение расстояния между соседними локальными максимумами в этой последовательности не зависит от вида непрерывного распределения случайных величин ξ_n, то же справедливо и для вероятности наблюдать локальный максимум в фиксированный момент времени. Однако при $c \neq 1$ это не верно и вероятность $\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_0^c < \widehat{\xi}_1^c > \widehat{\xi}_2^c\}$ зависит от распределения случайных величин ξ_n.

Утверждение 6. *Если случайные величины ξ_n имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, то для любого целого n*

$$\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_{n-1}^c < \widehat{\xi}_n^c > \widehat{\xi}_{n+1}^c\} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{12(c^2-c+1)}, & c < 0, \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{c+c^2-c^3}{12}, & 0 \le c < 1, \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{c^2+c-1}{12c^3}, & c \ge 1. \end{cases} \tag{7}$$

Если случайные величины ξ_n имеют стандартное нормальное распределение, то для любого целого n

$$\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_{n-1}^c < \widehat{\xi}_n^c > \widehat{\xi}_{n+1}^c\} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3c^2-4c+3}{c^2+1}}. \tag{8}$$

В параграфе 3.3 найдена вероятность наблюдать локальный максимум в фиксированный момент времени в частном случае последовательности независимых, но не одинаково распределённых величин.

Утверждение 7. *Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, и пусть $\widetilde{\xi}_n = \xi_n + vn$, $n \in \mathbb{Z}$, $v = const$. Тогда для любого целого n*

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_{n-1} < \widetilde{\xi}_n > \widetilde{\xi}_{n+1}\} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - v^2 \dfrac{9 - 8|v|}{6}, & |v| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(1 - |v|)^2}{2}, & \dfrac{1}{2} \le |v| < 1, \\ 0, & |v| \ge 1. \end{cases}$$

Замечание о цепочках расстояний длины два. Рассмотрим серии расстояний длины два, т.е. события $\{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 2\}$. По определению

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 2\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 < \dots > \xi_{2n-1} < \xi_{2n} > \xi_{2n+1} | \chi_2 = 1\} \\ &= 3\mathbf{P}\{\chi_2 \chi_4 \cdots \chi_{2n} = 1\}. \end{aligned}$$

Вероятности $P_n = \mathbf{P}\{\chi_2 \chi_4 \cdots \chi_{2n} = 1\}$ удобно вычислять комбинаторным методом (описанным выше). Событие $\{\chi_2 \chi_4 \cdots \chi_{2n} = 1\}$ означает, что случайная перестановка, построенная по $\xi_1, \dots, \xi_n$, является альтернирующей. Таким образом, $P_n = A_{2n+1}/(2n+1)!$.

Как отмечалось в обзоре литературы, понятие альтернирующей перестановки было введено Андре в [9]. Там же получены формулы для производящих функций количеств A_n альтернирующих перестановок порядка n

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = \operatorname{tg} x + \sec x,$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Отметим, что в [32] приводится три различных способа доказательства справедливости приведенных формул.

Таким образом, вероятности $P_n = \frac{1}{(2n+1)!} \operatorname{tg}^{(2n+1)}(0)$.

Для вычисления вероятностей P_n можно также воспользоваться рекуррентными соотношениями, которые следуют из полученных в [9] рекуррентных соотношений для A_n,

$$P_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} P_k P_{n-1-k}, \quad n \ge 1, \qquad P_0 = 1.$$

Приведём начальные значения вероятностей P_n

$$P_1 = \frac{1}{3}, \quad P_2 = \frac{2}{15}, \quad P_3 = \frac{17}{315}, \quad P_4 = \frac{62}{2835}, P_5 = \frac{1382}{155925}, \quad P_6 = \frac{21844}{6081075}.$$

Заметим, что вероятности P_n позволяют вычислять совместные вероятности цепочек $\{\lambda_j = k_j, k_j \in \{2,4\}\}$. Например,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_1 = 4\} &= 3\mathbf{P}\{\chi_2\chi_6 = 1, \chi_4 = 0\} = 3\mathbf{P}\{\chi_2\chi_6 = 1\} - 3\mathbf{P}\{\chi_2\chi_4\chi_6 = 1\} \\ &= 3\mathbf{P}\{\chi_2 = 1\}\mathbf{P}\{\chi_6 = 1\} - 3P_3 = 3(P_1^2 - P_3) = \frac{6}{35}, \\ \mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4\} &= 3(P_1P_3 - P_5) = \frac{4269}{155925} \approx 0,027, \\ \mathbf{P}\{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_3 = 4\} &= 3(P_1P_4 - P_6) = \frac{22486}{2027025} \approx 0,011. \end{aligned}$$

Значение первой вероятности можно также найти по формуле (1), а второй – по формуле (4).

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю д.ф.-м.н. Андрею Михайловичу Зубкову за постановку интересных задач, плодотворные обсуждения, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Локальные максимумы и промежутки между ними

1.1 Основные определения

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность одинаково распределённых случайных величин, $\chi_n = \mathrm{I}\{\xi_{n-1} < \xi_n > \xi_{n+1}\}\,(n \in \mathbb{Z})$ – индикаторы локальных максимумов (пиков) этой последовательности, $\{\tau_j,\, j \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} :\, \chi_n = 1\}$ – возрастающая последовательность всех моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$, причём для определенности $\tau_0 = \min\{j \geq 0 : \xi_{j-1} < \xi_j > \xi_{j+1}\}$.

Основным объектом изучения в настоящей работе являются случайные величины $\lambda_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ – длины промежутков (расстояния) между соседними локальными максимумами.

Заметим, что в силу определения случайные величины λ_j принимают значения, не меньшие двух. Кроме того, если случайные величины исходной последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и одинаково распределены, то случайные величины λ_j одинаково распределены и, более того, последовательность $\{\lambda_j, j \in \mathbb{Z}\}$ стационарна в узком смысле.

Напомним, что согласно теореме A (см. введение)

$$\mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}. \tag{1.1}$$

Для удобства изложения введём также обозначения для индикаторов событий “ξ_i и ξ_{i+k} являются соседними локальными максимумами” (расстояние между которыми, очевидно, равно k)

$$\chi_i^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{I}\{\chi_i = \chi_{i+k} = 1, \chi_j = 0, j = i+1, \ldots, i+k-1\}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Если случайные величины последовательности $\{\xi_n\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то вероятности того, что индикаторы $\chi_i^{(k)}$ равны 1, имеют вид

$$\mathbf{P}\{\chi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1 = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3\} = \frac{1}{3}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{P}\{\chi_i^{(k)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^{(k)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1 = 1\}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\} = \frac{(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}. \tag{1.4}$$

1.2 Переход от независимых случайных величин к перестановочным

Определение 1. *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ перестановочны (симметрично зависимы), если для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ чисел $1, \ldots, n$ случайные векторы $(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n})$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеют одно и то же распределение. Бесконечная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ перестановочна, если для любого натурального n случайные величины $\xi_{-n}, \ldots, \xi_n$ перестановочны.*

Лемма 1. *Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – такая последовательность перестановочных случайных величин, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$. Тогда последовательность $\{\tau_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n\}$ имеет такое же распределение, как последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.*

Доказательство. Если $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность перестановочных случайных величин, то по теореме де Финетти (см. [8], [6, гл. VII]) ее распределение можно представить в виде смеси распределений последовательностей независимых одинаково распределённых случайных величин. То есть существует такая случайная величина θ, что при фиксированном значении θ условное распределение $\{\xi_n\}$ является распределением некоторой последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин. Если, кроме того, $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$, то условные распределения $\{\xi_n\}$ непрерывны почти наверное.

Обозначим через $F_t(x)$ функцию условного распределения ξ_1 при условии $\theta = t$, тогда случайные величины $F_\theta(\xi_n)$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Так как функция $F_t(x)$ монотонна, то моменты появления локальных максимумов в последовательностях $\{F_\theta(\xi_n)\}$ и $\{\xi_n\}$ совпадают при любом значении θ. Значит, последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности перестановочных случайных величин $\{\xi_n\}$ имеет такое же распределение, как последовательность моментов появления локальных максимумов в последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. $\square$

Замечание 1. *Распределение последовательности* $\{\tau_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$ *не зависит от вида непрерывного распределения случайных величин* $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 1 позволяет обобщать результаты о распределении последовательности $\{\lambda_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$, полученные для независимых случайных величин ξ_n, имеющих равномерное распределение на $[0, 1]$ (или одно и то же произвольное непрерывное распределение) на случай перестановочных случайных величин, удовлетворяющих условию $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$.

1.3 Цепь Маркова $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$

Теорема 1. *Пусть случайные величины* $\xi_n, , n \in \mathbb{Z}$, *независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда последовательность пар* $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$, $j \in \mathbb{Z}$, *образует однородную по времени цепь Маркова.*

Доказательство. Стационарность в узком смысле последовательности $\{\xi_n\}$ влечет стационарность в узком смысле последовательности $\{(\chi_i, \xi_{\tau_i})\}$, откуда следует стационарность в узком смысле последовательности $\{(\lambda_j, \xi_{\tau_j})\}$. Покажем, что последовательность пар $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ обладает марковским свойством. Без ограничения общности будем считать, что ξ_0 является локальным максимумом и введём обозначения $\xi^- = (\xi_{-1}, \xi_{-2}, \dots)$, $\xi^+ = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Так как случайные величины последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ независимы, то ξ^- и ξ^+ независимы, а также независимы события $\{\xi_{-1} < x\}$, $\{x > \xi_1\}$ для любого фиксированного x. Следовательно, для произвольных борелевских множеств B и C справедливы равенства

$$\mathbf{P}\{\xi^- \in B,\, \xi^+ \in C \,|\, \xi_{-1} < x > \xi_1\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B,\, \xi^+ \in C,\, \xi_{-1} < x > \xi_1\}}{\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}}$$
$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B,\, \xi_{-1} < x\}\,\mathbf{P}\{\xi^+ \in C,\, x > \xi_1\}}{\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}} = d_1. \qquad (1.5)$$

Умножим знаменатель на вероятность $\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}$, а числитель – на произведение $\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x\}\,\mathbf{P}\{x > \xi_1\}$, равное ей в силу независимости рассматриваемых событий,

$$d_1 = \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B,\, \xi_{-1} < x\}\,\mathbf{P}\{x > \xi_1\}\,\mathbf{P}\{\xi^+ \in C,\, x > \xi_1\}\,\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x\}}{\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}}. \tag{1.6}$$

Еще раз воспользовавшись независимостью событий $\{\xi_{-1} < x\}$, $\{x > \xi_1\}$, получим

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\mathbf{P}\{\xi^- \in B,\, \xi_{-1} < x > \xi_1\}\mathbf{P}\{\xi^+ \in C,\, \xi_{-1} < x > \xi_1\}}{\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}\,\mathbf{P}\{\xi_{-1} < x > \xi_1\}} \\ &= \mathbf{P}\{\xi^- \in B\,|\,\xi_{-1} < x > \xi_1\}\,\mathbf{P}\{\xi^+ \in C\,|\,\xi_{-1} < x > \xi_1\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

следовательно, ξ^- и ξ^+ условно независимы при фиксированном значении локального максимума $\xi_0 = x$. Значит,

$$\mathbf{P}\{\xi^+ \in C\,|\,\xi_{-1} < x > \xi_1,\, \xi^- \in B\} = \mathbf{P}\{\xi^+ \in C\,|\,\xi_{-1} < x > \xi_1\}. \tag{1.8}$$

Для завершения доказательства выберем множество C так, чтобы выполнялось равенство $\{\lambda_{j+1} = l, \xi_{\tau_{j+1}} \in D\} = \{\xi^+ \in C, \xi_{-1} < \xi_0 > \xi_1\}$, тогда (1.8) превратится в марковское свойство для последовательности $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$. Событие $\{\xi^+ \in C\}$ должно означать, что в последовательности $\xi^+ = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l-1})$ нет локальных максимумов и $\xi_l \in D$, поэтому положим

$$C = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : y_i < \max(y_{i-1},\, y_{i+1}), i = 2, 3, \ldots, l-2,\, y_{l-1} < y_l > y_{l+1}, y_l \in D\}.$$

$\square$

Замечание 2. *В условиях теоремы 1 последовательность пар* $(\xi_{\tau_j}, \lambda_{j+1}), j \in \mathbb{Z}$, *также образует однородную по времени цепь Маркова.*

Замечание 3. *Если случайные величины* $\{\xi_i\}$ *перестановочны, то последовательность пар* $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ *представляет собой смесь цепей Маркова, при этом распределения* λ*-компонент одинаковы по смеси.*

Следствие 1. *Переходные вероятности* $\mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = k,\, \xi_{\tau_{j+1}} \le y\,|\,\lambda_j = l,\, \xi_{\tau_j} = x\}$ *цепи* $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ *не зависят от* l.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, считаем, что $\chi_0 = 1$. Используя обозначения ξ^-, ξ^+, переходные вероятности можно представить в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = k,\, \xi_{\tau_{j+1}} \le y \,|\, \lambda_j = l,\, \xi_{\tau_j} = x\} \\ = \mathbf{P}\{\chi_0^{(k)} = 1,\, \xi_k \le y \,|\, \xi_{-1} < x = \xi_0 > \xi_1, \chi_{-l}^{(l)} = 1\} \\ = \mathbf{P}\{\xi^+ \in C \,|\, \xi_{-1} < x > \xi_1,\, \xi^- \in B\}, \\ C = \{z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : z_i < \max(z_{i-1},\, z_{i+1}), i = 2, 3, \ldots, k-2,\, z_{k-1} < z_k > z_{k+1}, z_k \le y\}, \\ B = \{z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : z_i < \max(z_{i-1},\, z_{i+1}), i = 2, 3, \ldots, l-2,\, z_{l-1} < z_l > z_{l+1}\}.\end{gathered}$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться формулой (1.8). □

Переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ по свойствам условной плотности с учетом следствия 1 имеет вид

$$p_{(\lambda_{j+1}, \xi_{\tau_{j+1}})|(\lambda_j, \xi_{\tau_j})}(k, y \,|\, l, x) = \frac{p_{\lambda_{j+1}, \xi_{\tau_j}, \xi_{\tau_{j+1}}}(k, x, y)}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)} = \frac{p_k(x, y)\, \mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = k\}}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)}, \tag{1.9}$$

где $p_{\xi_{\tau_j}}(x)$ – плотность распределения локального максимума последовательности $\{\xi_i\}$, $p_k(x, y)$ – условная плотность совместного распределения соседних локальных максимумов при условии, что расстояние между ними равно k, $p_{\lambda_{j+1}, \xi_{\tau_j}, \xi_{\tau_{j+1}}}(k, x, y)$ – плотность совместного распределения соседних локальных максимумов и расстояния между ними.

1.4 Характеристики цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ для равномерно распределённых величин

На протяжении этого раздела будем предполагать, что случайные величины ξ_i независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

1.4.1 Совместное распределение соседних максимумов.

Рассмотрим два соседних локальных максимума $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$. Введём обозначения

$$\xi_{\min} = \min\{\xi_{\tau_{j-1}},\, \xi_{\tau_j}\},\, \xi_{\max} = \max\{\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}\}.$$

Лемма 2. *Условная плотность $g_k(x,y)$ распределения вектора $(\xi_{\min}, \xi_{\max})$ при условии, что расстояние $\lambda_j = k$, имеет вид*

$$g_k(x,y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^k} xy \left((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}\right), \quad 0 \le x \le y \le 1. \tag{1.10}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 (без потери общности) считаем, что $\tau_{j-1} = 2$. Тогда событие $\{\lambda_j = k\}$ определяется случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$ (при этом $\xi_{\tau_{j-1}} = \xi_2$, $\xi_{\tau_j} = \xi_{k+3}$). Заметим, что при условии $\{\lambda_j = k\}$ случайная величина $\xi_{\max} = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}\}$, т.е. $\xi_{\max}$ является $(k+3)$-м членом вариационного ряда, построенного по случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$. При этом $\xi_{\min}$ может занимать в вариационном ряду места с 3-го (так как $\xi_{\min}$ является локальным максимумом) по $(k+2)$-е. Поэтому по формуле полной вероятности плотность $g_k(x,y)$ можно представить в виде следующей суммы:

$$g_k(x,y) = \sum_{t=3}^{k+2} p_{\xi_{(t)},\xi_{(k+3)}}(x,y)\, \mathbf{P}\{\xi_{\min} = \xi_{(t)} \,|\, \lambda_j = k\}, \tag{1.11}$$

где $p_{\xi_{(t)},\xi_{(k+3)}}(x,y)$ – плотность совместного распределения t-го и $(k+3)$-го членов вариационного ряда, построенного по случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$. Так как случайные величины ξ_i независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, то

$$p_{\xi_{(t)},\xi_{(k+2)}}(x,y) = (k+3)(k+2) C_{k+1}^{t-1} x^{t-1} (y-x)^{k+2-t}\, \mathrm{I}\{0 \le x \le y \le 1\}. \tag{1.12}$$

Вероятности $\mathbf{P}\{\xi_{\min} = \xi_{(t)} | \lambda_j = k\}$ были найдены в процессе доказательства теоремы 1 в [36]. Для полноты изложения приведём

Утверждение 1.

$$\mathbf{P}(\xi_{\min} = \xi_{(t)} \,|\, \lambda_j = k) = \begin{cases} 2(k-1)/h(k), & t = 3, \\ (t-1)(2k-t+2)\, 2^{t-4}/h(k), & t = 4, \ldots, k+2, \end{cases} \tag{1.13}$$

где $h(k) = (k+2)(k-1)2^{k-1}$.

Доказательство. Хорошо известно, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то перестановка $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ чисел $1, \ldots, n$, в которой σ_k при каждом k равно порядковому номеру ξ_k в вариационном ряду $\xi_{(1)} < \xi_{(2)} < \cdots < \xi_{(n)}$ (т. е. $\sigma_k = |\{j \in \{1, \ldots, n\} : \xi_j \leqslant \xi_k\}|$), имеет равномерное распределение на множестве всех $n!$ перестановок порядка n.

Тогда $\{\xi_i < \xi_j\} = \{\sigma_i < \sigma_j\}$ при любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Поэтому можно сводить вычисление вероятностей событий, определяемых неравенствами между величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$, к подсчету количества перестановок, удовлетворяющих таким же условиям.

Поэтому искомая вероятность равна $\mathbf{P}(\xi_{\min} = \xi_{(t)} \,|\, \lambda_j = k) = h(t,k)/h(k)$, где $h(k)$ – количество перестановок порядка $k+3$, обладающих ровно двумя локальными максимумами: в точках 2 и $k+2$, кроме того, так как глобальный максимум может находиться в одном из двух локальных максимумов и эти варианты симметричны, то для определенности будем считать, что для всех таких перестановок $\sigma_{k+2} = k+3$; а $h(t,k)$ – количество перестановок, для которых выполняются перечисленные условия и, кроме того, $\sigma_2 = t$. Очевидно, что $h(k) = \sum_{t=3}^{k+2} h(t,k)$.

Заметим, что в рассматриваемых перестановках между двумя локальными максимумами элементы σ_j сначала строго убывают, потом строго возрастают, образуя “овраг”. Приведём полностью вспомогательную лемму из [36].

Лемма 3. *Количество перестановок порядка n, последовательность элементов которых образует сначала один убывающий участок, а затем один возрастающий (возможно, один из них пуст), равно 2^{n-1}.*

Доказательство. Действительно, в такой перестановке элемент 1 всегда располагается на стыке двух участков, и перестановка полностью задаётся выбором чисел для участка убывания, т.е. выбором некоторого подмножества из $\{2, \ldots, n\}$. Таким образом искомое число перестановок равно количеству подмножеств $(n-1)$-элементного множества и равно 2^{n-1}. $\square$

Вернёмся к подсчету $h(t, k)$ и рассмотрим два случая.

1. $t = \sigma_2 = 3$. В этом случае для σ_1 возможны 2 варианта (значения 1 или 2, причем "оставшееся" значение принимает σ_3), для σ_{k+3} возможны $k-1$ вариантов ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{k+2}$ уже известны), а остальные числа выстраиваются в цепочку по убыванию. Получаем $h(3, k) = 2(k-1)$.

2. $\sigma_2 = t$, $3 < t \leq k+2$. Здесь для значения σ_1 возможны $t-1$ вариантов. Далее, если $\sigma_{k+3} \in \{1, \ldots, t-1\} \backslash \{\sigma_1\}$ ($t-2$ вариантов), то $\sigma_{k+1} = k+2 > \sigma_k = k+1 > \cdots > \sigma_t = t+1$, а оставшиеся $t-3$ чисел образуют "овраг", что в итоге даёт $(t-1)(t-2)2^{t-4}$ перестановок.

   Если же $\sigma_{k+3} \in \{t+1, \ldots, k+2\}$ ($k-t+2$ вариантов), то $\sigma_{k+1} > \cdots > \sigma_{t-1}$ и $\{\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_t\} = \{t+1, \ldots, k+2\} \backslash \{\sigma_1\}$, а оставшиеся числа, меньшие t ($t-2$ чисел), образуют "овраг", что даёт еще $(t-1)(k-t+2)\, 2^{t-3}$ перестановок.

   Значит, $h(t, k) = (t-1)(2k-t+2)\, 2^{t-4}$, $3 < t \leq k+2$.

Заметим, что $h(3, k)$ совпадает со значением $(t-1)(2k-t+2)\, 2^{t-4} - 1$ при $t = 3$. Таким образом,

$$h(k) = \sum_{t=3}^{k+2} h(t, k) = \sum_{t=3}^{k+2} (t-1)(2k-t+2)\, 2^{t-4} - 1.$$

Докажем по индукции, что $h(k) = (k+2)(k-1)2^{k-1}$.

Действительно, при $k = 2$ получаем $h(2) = 16 = (2+2)(2-1)2^2$. Далее,

$$h(k+1) - h(k) = \sum_{t=3}^{k+2} (t-1)2^{t-3} + (k+2)(k+1)2^{k-1}$$
$$= \frac{d}{ds} \frac{s^{k+2} - s^2}{2(s-1)} \bigg|_{s=2} + (k+2)(k+1)2^{k-1} = (k^2 + 5k + 2)2^{k-1},$$

что совпадает с соответствующей разностью правых частей доказываемого равенства

$$(k+3)k2^k - (k+2)(k-1)2^{k-1} = (2k^2 + 6k - (k^2 + k - 2))2^{k-1} = (k^2 + 5k + 2)2^{k-1}.$$

$\square$

Вернёмся к доказательству леммы 2 и подставим выражения (1.12) и (1.13) в формулу (1.11)

$$g_k(x,y) = (k+3)(k+2)C_{k+1}^2 x^2 (y-x)^{k-1}\frac{2(k-1)}{(k+2)(k-1)2^{k-1}}$$
$$+(k+3)(k+2)\sum_{t=4}^{k+2} C_{k+1}^{t-1}x^{t-1}(y-x)^{k+2-t}\frac{(t-1)(2k-t+2)2^{t-4}}{(k+2)(k-1)2^{k-1}}$$
$$= \frac{k(k+1)(k+3)}{2^{k-1}}x^2(y-x)^{k-1}$$
$$+\frac{k+3}{(k-1)2^{k+2}}\sum_{t=3}^{k+1} t(2k+1-t)C_{k+1}^t(2x)^t(y-x)^{k+1-t}.$$

Рассмотрим отдельно последнюю сумму

$$\sum_{t=3}^{k+1} t(2k+1-t)C_{k+1}^t(2x)^t(y-x)^{k+1-t}$$
$$= 2k\sum_{t=3}^{k+1} tC_{k+1}^t(2x)^t(y-x)^{k+1-t} - \sum_{t=3}^{k+1} t(t-1)C_{k+1}^t(2x)^t(y-x)^{k+1-t}$$
$$= \left(2k\frac{d}{du} - \frac{d^2}{du^2}\right)\left[(2xu+y-x)^{k+1} - C_{k+1}^1 2xu(y-x)^k\right.$$
$$\left. -C_{k+1}^2(2xu)^2(y-x)^{k-1}\right]\Big|_{u=1}$$
$$= 2k(2x(k+1)(y+x)^k - 2x(k+1)(y-x)^k - 4x^2k(k+1)(y-x)^{k-1})$$
$$-k(k+1)4x^2(y+x)^{k-1} + k(k+1)4x^2(y-x)^{k-1}$$
$$= 4k(k+1)x\left(y(y+x)^{k-1} - (y-x)^k - x(2k-1)(y-x)^{k-1}\right).$$

Подставим найденное значение в формулу для плотности и преобразуем полученное выражение:

$$g_k(x,y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{2^{k-1}}x^2(y-x)^{k-1}$$
$$+\frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^k}x\left(y(y+x)^{k-1} - (y-x)^k - x(2k-1)(y-x)^{k-1}\right)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^k}xy\left((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}\right).$$

Лемма 2 доказана. □

Следствие 1. *Условная плотность $p_k(x,y)$ совместного распределения граничных пиков $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$ при условии, что расстояние $\lambda_j = k$, равна*

$$p_k(x,y) = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^{k+1}} xy \left((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1} \right), \quad 0 \le x, y \le 1. \quad (1.14)$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$p_k(x,y) = g_k(x,y)\,\mathrm{I}\{x \le y\} + g_k(y,x)\,\mathrm{I}\{x > y\}.$$

Следствие 2. *Плотность $p(x,y)$ совместного распределения соседних локальных максимумов $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$ равна*

$$p(x,y) = \frac{3}{2} xy (e^{(y+x)} - e^{|y-x|}), \quad 0 \le x, y \le 1.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности и формулам (1.1), (1.14)

$$p(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x,y) \mathbf{P}\{\lambda_j = k\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^{k+1}} \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!} xy((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1})$$

$$= xy \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{2(k-1)!}((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1})$$

$$= \frac{3}{2} xy \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y+x)^k - |y-x|^k}{k!} = \frac{3}{2} xy (e^{(y+x)} - e^{|y-x|}).$$

□

Следствие 3. *Условные плотности $p_{k,\xi_{\min}}(x)$, $p_{k,\xi_{\max}}(x)$ распределений случайных величин $\xi_{\min}$ и $\xi_{\max}$ при условии, что расстояние*

$$p_{k,\xi_{\min}}(x) = (k+3)x \left(\frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{(k-1)2^k} - x^{k+1} \right), \quad (1.15)$$

$$p_{k,\xi_{\max}}(x) = (k+3)x^{k+2}, \quad 0 \le x \le 1. \quad (1.16)$$

При этом условная плотность каждого из граничных пиков $\xi_{\tau_{j-1}}, \xi_{\tau_j}$ в силу симметрии равна полусумме плотностей $p_{k,\xi_{\min}}(x), p_{k,\xi_{\max}}(x)$

$$p_{k,\xi_{\tau_j}}(x) = \frac{p_{k,\xi_{\min}} + p_{k,\xi_{\max}}}{2} = (k+3)x\frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{(k-1)2^{k+1}}, \quad (1.17)$$

$$0 \le x \le 1.$$

Доказательство. Условную плотность $\xi_{\min}$ можно вычислить как интеграл:

$$p_{k,\xi_{\min}}(x) = \int_x^1 g_k(x,y)dy = \frac{k(k+1)(k+3)}{(k-1)2^k} x \int_x^1 y\left((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}\right)dy.$$

Воспользуемся интегрированием по частям

$$\int_x^1 y\left((y+x)^{k-1} - (y-x)^{k-1}\right)dy = \left.\frac{y(y+x)^k - y(y-x)^k}{k}\right|_x^1$$

$$-\frac{1}{k}\int_x^1 \left((y+x)^k - (y-x)^k\right)dy$$

$$= \frac{(1+x)^k - 2^k x^{k+1} - (1-x)^k}{k} - \left.\frac{(y+x)^{k+1} - (y-x)^{k+1}}{k(k+1)}\right|_x^1$$

$$= \frac{(1+x)^k - 2^k x^{k+1} - (1-x)^k}{k} - \frac{(1+x)^{k+1} - 2^{k+1}x^{k+1} - (1-x)^{k+1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)}\left((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k - 2^k x^{k+1}(k-1)\right).$$

Условная плотность $\xi_{\max}$ совпадает с плотностью максимума из $k+3$ независимых равномерно распределённых случайных величин, поэтому

$$p_{k,\xi_{\max}}(x) = (k+3)x^{k+2}, \quad 0 \le x \le 1.$$

$\square$

1.4.2 Переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$

Теорема 2. *Пусть случайные величины последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.*

Тогда переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ равна

$$p_{\left(\lambda_{j+1},\xi_{\tau_{j+1}}\right)|\left(\lambda_j,\xi_{\tau_j}\right)}(k,y\,|\,l,x) = p(k,x,y) = \frac{1}{2(k-1)!}\,\frac{y\left((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1}\right)}{x},$$

$$0 \le x, y \le 1.$$

Доказательство. Согласно формуле (1.9) переходная плотность имеет вид

$$p_{\left(\lambda_{j+1},\xi_{\tau_{j+1}}\right)|\left(\lambda_j,\xi_{\tau_j}\right)}(k,y\,|\,l,x)=\frac{p_k(x,y)\,\mathbf{P}\{\lambda_{j+1}=k\}}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)}.$$

Для доказательства теоремы достаточно подставить найденную выше условную плотность (1.14), выражение (1.1) и учесть, что

$$p_{\xi_{\tau_j}}(x)=p_{\max\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}}(x)=3x^2,\quad 0\le x\le 1. \tag{1.18}$$

□

1.4.3 Математическое ожидание локального максимума

Найденные условные плотности позволяют вычислить условные математические ожидания пиков.

Лемма 4. *Условные математические ожидания граничных пиков при условии, что расстояние между ними равно k, имеют вид*

$$\mathbf{M}(\xi_{\min}\,|\,\lambda_j=k)=1-\frac{3k^2+3k-14+(k+3)\cdot 2^{-(k-2)}}{(k+4)(k+2)(k-1)}\sim 1-\frac{3}{k},\quad k\to\infty,$$
$$\mathbf{M}(\xi_{\max}\,|\,\lambda_j=k)=1-\frac{1}{k+4}\sim 1-\frac{1}{k},\quad k\to\infty,$$
$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_{j-1}}\,|\,\lambda_j=k)=\mathbf{M}(\xi_{\tau_j}\,|\,\lambda_j=k)=1-\frac{(k^2+k-4)2^k+k+3}{(k+4)(k+2)(k-1)2^{k-1}}\sim 1-\frac{2}{k}$$

при $k\to\infty$.

Доказательство. Математические ожидания находятся непосредственным вычислением. Согласно формуле (1.16)

$$\mathbf{M}(\xi_{\max}\,|\,\lambda_j=k)=\int_0^1 xp_{k,\xi_{\max}}(x)\,dx=\int_0^1(k+3)x^{k+3}\,dx=1-\frac{1}{k+4},$$

Воспользовавшись формулой (1.17), получим

$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j}\,|\,\lambda_j=k)=\int_0^1 xp_{k,\xi_{\tau_j}}(x)\,dx$$
$$=\frac{(k+3)}{(k-1)2^{k+1}}\int_0^1 x^2\left((k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k\right)\,dx$$

$$= \frac{(k+3)}{(k-1)2^{k+1}}\left((k+1)I(k) - I(k+1)\right),$$

где

$$I(k) = \int_0^1 x^2 \left((1+x)^k - (1-x)^{k+1}\right)\, dx.$$

Найдём значение этого интеграла с помощью интегрирования по частям

$$I(k) = x^2\, \frac{(1+x)^{k+1} + (1-x)^{k+1}}{k+1}\bigg|_0^1 - \int_0^1 2x\frac{(1+x)^{k+1} + (1-x)^{k+1}}{k+1}\, dx$$

$$= \frac{2^{k+1}}{k+1} - 2x\, \frac{(1+x)^{k+2} - (1-x)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{(1+x)^{k+2} - (1-x)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\, dx$$

$$= \frac{2^{k+1}}{k+1} - \frac{2^{k+3}}{(k+1)(k+2)} + 2\, \frac{(1+x)^{k+3} + (1-x)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)}\bigg|_0^1$$

$$= \frac{2^{k+1}}{k+1} - \frac{2^{k+3}}{(k+1)(k+2)} + \frac{2^{k+4}-4}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Откуда

$$(k+1)I(k) - I(k+1) = 2^{k+1} - \frac{2^{k+3}}{k+2} + \frac{2^{k+4}-4}{(k+2)(k+3)}$$

$$-\frac{2^{k+2}}{k+2} + \frac{2^{k+4}}{(k+2)(k+3)} - \frac{2^{k+5}-4}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= 2^{k+1} - \frac{3\cdot 2^{k+2}}{k+2} + \frac{2^{k+5}-4}{(k+2)(k+3)} - \frac{2^{k+5}-4}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{2^{k+1}(k^3+3k^2) - 4k - 12}{(k+2)(k+3)(k+4)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j} \,|\, \lambda_j = k) = \frac{2^{k+1}(k^3+3k^2) - 4k - 12}{(k-1)(k+2)(k+4)2^{k+1}} = 1 - \frac{2^{k+1}(2k^2-2k-4) + 4k + 12}{(k-1)(k+2)(k+4)2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{2^k(k^2+k-4) + k + 3}{(k-1)(k+2)(k+4)2^{k-1}}.$$

Так как $p_{k,\xi_{\tau_j}}(x) = (p_{k,\xi_{\min}} + p_{k,\xi_{\max}})/2$ (см. (1.17)), то

$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j} \,|\, \lambda_j = k) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}(\xi_{\min} \,|\, \lambda_j = k) + \mathbf{M}(\xi_{\max} \,|\, \lambda_j = k)),$$

поэтому

$$\mathbf{M}(\xi_{\min}|\lambda_j = k) = 2\mathbf{M}(\xi_{\tau_j} \,|\, \lambda_j = k) - \mathbf{M}(\xi_{\max} \,|\, \lambda_j = k)$$
$$= 2 - \frac{2^k(k^2+k-4)+k+3}{(k-1)(k+2)(k+4)2^{k-2}} - 1 + \frac{1}{k+4} = 1 - \frac{2^{k-2}(3k^2+3k-14)+k+3}{(k-1)(k+2)(k+4)2^{k-2}}.$$

$\square$

1.4.4 Условное распределение длины промежутка

Выразим условную вероятность события $\{\lambda_{j-1} = k\}$ через условную плотность граничного пика:

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \,|\, \xi_{\tau_j} = x\} = \mathbf{P}\{\lambda_j = k \,|\, \xi_{\tau_j} = x\} = \frac{p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)\,\mathbf{P}\{\lambda_j = k\}}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)}.$$

Подставляя выражения (1.17), (1.1) и (1.18), получим

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \,|\, \xi_{\tau_j} = x\}$$
$$= \frac{(k+3)x\left[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right]}{3x^2(k-1)2^{k+1}} \cdot \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}$$
$$= \frac{(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!}, \quad 0 \le x \le 1. \tag{1.19}$$

Нетрудно убедиться, что при $k > 3$ функция (1.19) возрастает по x, $x \in [0,1]$. Таким образом, условная вероятность появления длинного промежутка между локальными максимумами растет с ростом значения граничного пика.

Заметим, что первый множитель (отношение плотностей $p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)$ и $p_{\xi_{\tau_j}}(x)$) имеет следующие пределы:

$$\frac{p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)} = \frac{(k+3)x\left[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right]}{3x^2(k-1)2^{k+1}} \to \frac{k+3}{6}, \quad x \to 1, \tag{1.20}$$

$$\frac{p_{k,\xi_{\tau_j}}(x)}{p_{\xi_{\tau_j}}(x)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.21}$$

Найдём также условное математическое ожидание расстояния между соседними локальными максимумами при условии, что значении одного из них фиксировано. Воспользовавшись формулой (1.19), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\lambda_j\,|\,\xi_{\tau_j}=x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,\mathbf{P}\{\lambda_j=k\,|\,\xi_{\tau_j}=x\}\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!},\end{aligned}$$

так как при $k=0$ и $k=1$ слагаемые равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\lambda_j\,|\,\xi_{\tau_j}=x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k}{2xk!}\\ &\quad-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x)^k-(1-x)^k}{2x(k-1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}x\frac{(1+x)^k+(1-x)^k}{2xk!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+x)^k-(1-x)^k}{2xk!}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+x)^{k+1}-(1-x)^{k+1}}{2x(k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+x)^{k+1}-(1-x)^{k+1}}{2xk!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+x)^{k+1}-(1-x)^{k+1}}{2xk!}\\ &\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x)^k-(1-x)^k}{2xk!}=\frac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2x}.\end{aligned}$$

При $x\in[0,1]$ значение этого выражения так же, как и (1.19), возрастает, т.е. с ростом значения граничного пика возрастает и условное математическое ожидание длины промежутка между локальными максимумами.

1.4.5 Формулы для совместного распределения длин соседних промежутков.

В [36] формула для совместного распределения длин соседних промежутков была получена в виде двойной суммы. Используя условные распределения граничных пиков и расстояний между ними, можно получить явную формулу.

Теорема 3. *Пусть случайные величины $\{\xi_n, n\in\mathbb{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = l, \lambda_2 = k\}$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{k+l-1}\left(C_{k+l}^{l}(kl(k+l+1)+1-k^2-l^2)-(k+l-1)(k+1)(l+1)\right)}{(l+1)(k+1)(k+l+3)(k+l+1)!}, \tag{1.22}$$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} = \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = l, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = k\}$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{k+l}}{(l+1)!(k+1)!}\left(\frac{kl(k+l+5)^2-(k+l+3)((k+l)^2+6(k+l)-3)}{(k+3)(l+3)(k+l+3)(k+l+5)} + \frac{2(k+l+1)}{(k+l+3)(k+l+5)C_{k+l+2}^{l+1}}\right). \tag{1.23}$$

В таблицах 1.1 и 1.2 представлены значения совместных вероятностей (1.22) и (1.23) с точностью до пятого знака.

Таблица 1.1: Вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$

k\l	2	3	4	5	6	7	8
2	0.16190	0.13333	0.06773	0.02603	0.00818	0.00219	0.00051
3	0.13333	0.11111	0.05714	0.02222	0.00705	0.00190	0.00045
4	0.06773	0.05714	0.02976	0.01171	0.00376	0.00102	0.00024
5	0.02603	0.02222	0.01171	0.00466	0.00151	0.00041	0.00010
6	0.00818	0.00705	0.00376	0.00151	0.00049	0.00014	0.00003
7	0.00219	0.00190	0.00102	0.00041	0.00014	0.00004	0.00001
8	0.00051	0.00045	0.00024	0.00010	0.00003	0.00001	0.00000

Таблица 1.2: Вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = l\}$

k\l	2	3	4	5	6	7	8
2	0.06561	0.05397	0.02738	0.01051	0.00330	0.00088	0.00021
3	0.05397	0.04444	0.02258	0.00868	0.00273	0.00073	0.00017
4	0.02738	0.02258	0.01148	0.00442	0.00139	0.00037	0.00009
5	0.01051	0.00868	0.00442	0.00170	0.00054	0.00014	0.00003
6	0.00330	0.00273	0.00139	0.00054	0.00017	0.00005	0.00001
7	0.00088	0.00073	0.00037	0.00014	0.00005	0.00001	0.00000
8	0.00021	0.00017	0.00009	0.00003	0.00001	0.00000	0.00000

Замечание 4. *Напомним (см. [36]), что события $\{\lambda_j = 3\}$ не зависят от значений $\{\lambda_i\}_{i \neq j}$. Нетрудно убедиться, что формула (1.22) превращается в (1.1) при подстановке $l = 3$ (и делении на $\mathbf{P}\{\lambda = 3\} = 1/3$).*

Замечание 5. *Совместные вероятности (1.22) можно представить в виде*

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\} = \frac{3 \cdot 2^{k+l-1}}{(k+l)\, l!\, k!}\left(1 + O\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\right), \quad k, l \to \infty,$$

а совместные вероятности (1.23) – в виде

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} = \frac{3 \cdot 2^{k+l}}{(l+1)!\,(k+1)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\right), \quad k, l \to \infty.$$

Следствие 4. *Ковариация* $\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) \approx 0.01572$. *Пусть* ρ *– расстояние по вариации между совместным распределением* λ_1, λ_2 *и совместным распределением двух независимых случайных величин* λ, λ'. *Тогда* $\rho \approx 0.0038$.

Таким образом, распределение случайных величин λ_1, λ_2 очень близко (в смысле расстояния по вариации) к распределению соответствующих независимых случайных величин.

Однако для отношения совместных вероятностей (1.22) к произведению соответствующих маргинальных вероятностей на хвостах справедлива следующая асимптотика (см. также таблицу 1.3):

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}}{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = l\}} \sim \frac{kl}{6(k+l)}, \qquad k, l \to \infty.$$

Таблица 1.3: Отношение $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}/(\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = l\})$ для некоторых k, l с точностью до второго знака.

k\l	2	3	4	8	16	32	64	128	256
2	1.01	1	0.99	0.95	0.91	0.88	0.86	0.85	0.84
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0.99	1	1.01	1.05	1.09	1.12	1.14	1.15	1.16
8	0.95	1	1.05	1.22	1.42	1.58	1.69	1.76	1.79
16	0.91	1	1.09	1.42	1.84	2.27	2.62	2.86	3.01
32	0.88	1	1.12	1.58	2.27	3.15	4.03	4.75	5.23
64	0.86	1	1.14	1.69	2.62	4.03	5.80	7.58	9.01
128	0.85	1	1.15	1.76	2.86	4.75	7.58	11.13	14.69
256	0.84	1	1.16	1.79	3.01	5.23	9.01	14.69	21.79

Следовательно, условная вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_j = k \,|\, \lambda_{j-1} = l\}$ асимптотически больше безусловной вероятности $\mathbf{P}\{\lambda_j = k\}$ в $k/12$ раз. Это можно объяснить следующим образом. Обратим внимание на то, что вероятность появления длинного промежутка между пиками исчезающе мала. При этом длинный промежуток делает более вероятными большие значения граничных пиков. Из (1.19), (1.20) следует, что условная вероятность события $\{\lambda_j = k\}$ при фиксированном значении левого граничного пика, близком к 1, примерно в $k/6$ раз больше, чем безусловная. То есть длинные промежутки с большей вероятностью имеют большие граничные пики, и наоборот, вероятность наблюдать длинный промежуток после большого пика выше, чем после небольшого.

Отметим также, что при $k, l \to \infty$

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l \,|\, \lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}}{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l\}} = \frac{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = l\}}{\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}\mathbf{P}\{\lambda_3 = l\}} \sim 1 - \frac{2l}{k(k+l)},$$

т.е. промежуток длины 2 нивелирует влияние предыдущего длинного промежутка. Это не противоречит предыдущим рассуждениям, так как в этом случае левый граничный пик промежутка длины 2, являющийся одновременно правым граничным пиком длинного промежутка, с большой вероятностью будет иметь большое значение, и поэтому почти не повлияет на распределение следующего за ним элемента последовательности $\{\xi_n\}$ (который должен быть меньше этого пика). Следовательно, правый граничный пик промежутка длины 2 будет устроен почти так же, как и произвольный локальный максимум.

Формулы (1.22) и (1.23) позволяют найти отношение условных вероятностей

$$\frac{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l \,|\, \lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}}{\mathbf{P}\{\lambda_3 = l \,|\, \lambda_2 = 2\}} = \frac{6}{5}\left(1 + O\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\right), \quad k, l \to \infty,$$

которое показывает, что последовательность $\{\lambda_j\}$ не является цепью Маркова.

Доказательство теоремы 3. Вычислим вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = l\}$ как среднее значение условной вероятности

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l\} = \int_0^1 \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = l \,|\, \xi_{\tau_j} = x\} p_{\xi_{\tau_j}}(x)\, dx. \tag{1.24}$$

Воспользуемся тем, что при условии $\{\xi_{\tau_j} = x\}$ события $\{\lambda_{j-1} = k\}$ и $\{\lambda_j = l\}$

независимы, поэтому

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l\,|\,\xi_{\tau_j}=x\}=\mathbf{P}\{\lambda_{j-1}=k\,|\,\xi_{\tau_j}=x\}\mathbf{P}\{\lambda_j=l\,|\,\xi_{\tau_j}=x\}.$$

Подставляя выражение (1.19), получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l\,|\,\xi_{\tau_j}=x\}\\
&=\frac{(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k}{2x(k+1)!}\frac{(l-x)(1+x)^l-(l+x)(1-x)^l}{2x(l+1)!}\\
&=\frac{\left[(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k\right]\left[(l-x)(1+x)^l-(l+x)(1-x)^l\right]}{4x^2(l+1)!\,(k+1)!}.
\end{aligned}\tag{1.25}$$

Теперь, используя (1.18), (1.25) и равенство

$$\begin{aligned}
(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k&=(k+1)(1+x)^k-(1+x)^{k+1}\\
&-(k+1)(1-x)^k+(1-x)^{k+1},
\end{aligned}\tag{1.26}$$

преобразуем формулу (1.24) к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{4(l+1)!\,(k+1)!}{3}\mathbf{P}\{\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l\}=I\\
&=\int_0^1\left[(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k\right]\left[(l-x)(1+x)^l-(l+x)(1-x)^l\right]dx\\
&=(k+1)(l+1)T(k+l,0)-(k+l+2)T(k+l+1,0)+T(k+l+2,0)\\
&-(k+1)(l+1)T(k,l)+(k+1)T(k,l+1)+(l+1)T(k+1,l)-T(k+1,l+1),
\end{aligned}$$

где

$$T(k,l)=\int_0^1\left((1+x)^k(1-x)^l+(1+x)^l(1-x)^k\right)dx.$$

Для вычисления $T(k,l)$ найдём сначала значение интеграла $\int_0^1(1+x)^k(1-x)^l dx$

$$\begin{aligned}
I(k,l)&\overset{def}{=}\int_0^1(1+x)^k(1-x)^l dx=\int_0^1(1+1-y)^k y^l dy=\int_0^1 2^k\left(1-\frac{y}{2}\right)^k y^l dy\\
&=2^{k+l+1}\int_0^{\frac12}t^l(1-t)^k dt=2^{k+l+1}B_{\frac12}(l+1,k+1)=\frac{1}{(k+l+1)C_{k+l}^l}\sum_{t=l+1}^{k+l+1}C_{k+l+1}^t,
\end{aligned}$$

где $B_{\frac12}(l+1,k+1)$ – неполная бета-функция Эйлера.

Следовательно,

$$T(k,l) = I(k,l) + I(l,k) = \frac{2^{k+l+1}}{(k+l+1)C_{k+l}^{l}}, \quad k,l \geq 0, \tag{1.27}$$

откуда

$$\begin{aligned}
I = (k+1)(l+1)\frac{2^{k+l+1}}{k+l+1} - (k+l+2)\frac{2^{k+l+2}}{k+l+2} + \frac{2^{k+l+3}}{k+l+3} \\
-(k+1)(l+1)\frac{2^{k+l+1}}{(k+l+1)C_{k+l}^{l}} + (k+1)\frac{2^{k+l+2}}{(k+l+2)C_{k+l+1}^{l+1}} \\
+(l+1)\frac{2^{k+l+2}}{(k+l+2)C_{k+l+1}^{l}} - \frac{2^{k+l+3}}{(k+l+3)C_{k+l+2}^{l+1}} \\
= 2^{k+l+1}\left(\frac{(k+1)(l+1)}{k+l+1} - 2 + \frac{4}{k+l+3}\right) \\
-\frac{2^{k+l+1}(k+1)(l+1)}{(k+l+1)C_{k+l}^{l}}\left(1 - \frac{4}{k+l+2} + \frac{4}{(k+l+3)(k+l+2)}\right) \\
= \frac{2^{k+l+1}}{(k+l+1)(k+l+3)}\left(kl(k+l+1) + 1 - k^2 - l^2 - \frac{(k+1)(l+1)(k+l-1)}{C_{k+l}^{l}}\right).
\end{aligned}$$

Перейдём к доказательству формулы (1.23). Аналогично вычислению вероятности (1.22) найдём совместную вероятность $\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = l\}$ как среднее значение условной вероятности

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} \\
= \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_{j+1} = l \,|\, \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\} \\
\times p_{2,\xi_{\tau_j},\xi_{\tau_{j+1}}}(x,y)\mathbf{P}\{\lambda_j = 2\})\, dx\, dy.
\end{gathered}$$

Согласно (1.14) и (1.1)

$$\begin{gathered}
p_{(\xi_{\tau_j},\xi_{\tau_{j+1}})}(x,y) = p_2(x,y) = \frac{15}{4}xy\left(y + x - |y-x|\right), \\
\mathbf{P}\{\lambda_j = 2\} = \frac{2}{5}.
\end{gathered}$$

Воспользуемся марковским свойством последовательности $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_{j+1} = l \,|\, \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\}$$

$$= \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k |\, \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\}\, \mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = l \,|\, \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\}$$
$$= \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k \,|\, \xi_{\tau_j} = x\}\, \mathbf{P}\{\lambda_{j+1} = l \,|\, \xi_{\tau_{j+1}} = y\}.$$

Применяя (1.19), получим

$$\mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_3 = l \,|\, \xi_{\tau_j} = x, \xi_{\tau_{j+1}} = y, \lambda_j = 2\}$$
$$= \frac{\left[(k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right] \left[(l-y)(1+y)^l - (l+y)(1-y)^l\right]}{4xy(l+1)!\,(k+1)!}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_{j-1} = k, \lambda_j = 2, \lambda_{j+1} = l\} &= \frac{3}{8(l+1)!(k+1)!} \\ \times \int_0^1 \int_0^1 &\Big[\big((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\big) \\ \times \big((l-y)(1+y)^l - (l+y)(1-y)^l\big)&\,(y + x - |y-x|)\Big]\, dx\, dy \\ &= \frac{3}{4(l+1)!(k+1)!} \int_0^1 (A(y) + yB(y))C(y)dy, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где

$$A(y) = \int_0^y x\left((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right)\, dx,$$
$$B(y) = \int_y^1 \left((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right)\, dx,$$
$$C(y) = (l-y)(1+y)^l - (l+y)(1-y)^l.$$

Выражение $C(y)$ можно представить в виде

$$C(y) = (l+1)(1+y)^l - (1+y)^{l+1} - (l+1)(1-y)^l + (1-y)^{l+1}.$$

Используя формулу (1.26), получим

$$B(y) = \int_y^1 \left((k+1)(1+x)^k - (1+x)^{k+1} - (k+1)(1-x)^k + (1-x)^{k+1}\right) dx$$
$$= 2^{k+1} - (1+y)^{k+1} - \frac{2^{k+2}}{k+2} + \frac{(1+y)^{k+2}}{k+2} - (1-y)^{k+1} + \frac{(1-y)^{k+2}}{k+2}.$$

Так как $x = (1+x) - 1 = 1 - (1-x)$, то

$$x\left((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right) = (k+2)(1+x)^{k+1} - (k+1)(1+x)^k$$
$$-(1+x)^{k+2} - (k+1)(1-x)^k + (k+2)(1-x)^{k+1} - (1-x)^{k+2}, \qquad (1.29)$$

следовательно

$$A(y) = \int_0^y x\left((k-x)(1+x)^k - (k+x)(1-x)^k\right)dx = (1+x)^{k+2}\Big|_0^y - (1+x)^{k+1}\Big|_0^y$$
$$-\left.\frac{(1+x)^{k+3}}{k+3}\right|_0^y + (1-x)^{k+1}\Big|_0^y - (1-x)^{k+2}\Big|_0^y + \left.\frac{(1-x)^{k+3}}{k+3}\right|_0^y$$
$$= (1+y)^{k+2} - (1+y)^{k+1} - \frac{(1+y)^{k+3}}{k+3} + (1-y)^{k+1} - (1-y)^{k+2} + \frac{(1-y)^{k+3}}{k+3}.$$

Таким образом,

$$A(y) + yB(y) = -\frac{(1+y)^{k+3}}{k+3} + \frac{(1-y)^{k+3}}{k+3} + y\frac{k2^{k+1}}{k+2} + y\frac{(1+y)^{k+2}}{k+2} + y\frac{(1-y)^{k+2}}{k+2}$$
$$= \frac{(1+y)^{k+3}}{(k+2)(k+3)} - \frac{(1+y)^{k+2}}{k+2} + \frac{(1-y)^{k+2}}{k+2} - \frac{(1-y)^{k+3}}{(k+2)(k+3)} + \frac{ky2^{k+1}}{k+2}.$$

Поэтому

$$\int_0^1 (A(y) + yB(y))C(y)dy$$
$$= \int_0^1 \left((l+1)(1+y)^l - (1+y)^{l+1} - (l+1)(1-y)^l + (1-y)^{l+1}\right)$$
$$\times\left(\frac{(1+y)^{k+3}}{(k+2)(k+3)} - \frac{(1+y)^{k+2}}{k+2} + \frac{(1-y)^{k+2}}{k+2} - \frac{(1-y)^{k+3}}{(k+2)(k+3)} + \frac{k2^{k+1}y}{k+2}\right)dy$$
$$= \frac{1}{k+2}\left(\frac{k+l+4}{k+3}T(k+l+3,0) - (l+1)T(k+l+2,0) - \frac{1}{k+3}T(k+l+4,0)\right.$$
$$-\frac{l+1}{k+3}T(k+3,l) + (l+1)T(k+2,l) - T(k+2,l+1) + \frac{1}{k+3}T(k+3,l+1)$$
$$\left.+k2^{k+1}((l+2)T(l+1,0) - T(l+2,0) - (l+1)T(l,0))\right).$$

Подставляя значения (1.27), получим

$$\int_0^1 (A(y) + yB(y))C(y)dy = \frac{1}{k+2}\left(\frac{2^{k+l+4}}{k+3} - \frac{(l+1)2^{k+l+3}}{k+l+3} - \frac{2^{k+l+5}}{(k+3)(k+l+5)}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(l+1)2^{k+l+4}}{(k+3)(k+l+4)C_{k+l+3}^{l}}+\frac{(l+1)2^{k+l+3}}{(k+l+3)C_{k+l+2}^{l}}-\frac{2^{k+l+4}}{(k+l+4)C_{k+l+3}^{l+1}}\\
&\quad+\frac{2^{k+l+5}}{(k+3)(k+l+5)C_{k+l+4}^{l+1}}+\frac{k2^{k+1}}{k+2}\left(2^{l+2}-\frac{2^{l+3}}{l+3}-2^{l+1}\right)\Bigg)\\
&=\frac{2^{k+l+2}}{k+2}\left(\frac{4(k+l+3)}{(k+3)(k+l+5)}-\frac{2(l+1)}{k+l+3}+\frac{k(l-1)}{l+3}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2}{C_{k+l+3}^{l+1}}\left(1-\frac{4}{k+l+4}+\frac{4}{(k+l+4)(k+l+5)}\right)\right)\\
&=2^{k+l+2}\left(\frac{kl(k+l+5)^2-(k+l+3)((k+l)^2+6(k+l)-3)}{(k+3)(l+3)(k+l+3)(k+l+5)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2(k+l+1)}{(k+l+3)(k+l+5)C_{k+l+2}^{l+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Для завершения доказательства достаточно подставить полученное выражение в формулу (1.5). □

1.4.6 Условное распределение пика

При фиксированных длинах $\lambda_{j-1}=k, \lambda_j=l$ плотность условного распределения локального максимума ξ_{τ_j} (являющегося общим граничным пиком) будет иметь вид

$$
p_{(\xi_{\tau_j}\,|\,\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)}(x)=\frac{\mathbf{P}\{\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l\,|\,\xi_{\tau_j}=x\}\,p_{\xi_{\tau_j}}(x)}{\mathbf{P}\{\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l\}}.
$$

Следовательно, по формулам (1.17), (1.22) и (1.25)

$$
\begin{aligned}
&p_{(\xi_{\tau_j}|\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)}(x)=\\
&=\frac{3\left[(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k\right]\left[(l-x)(1+x)^l-(l+x)(1-x)^l\right]}{4(l+1)!(k+1)!}\\
&\times\frac{4(k+l+3)(l+1)(k+1)(k+l+1)!}{3\cdot 2^{k+l+1}\left(C_{k+l}^{l}(kl(k+l+1)+1-k^2-l^2)-(k+l-1)(k+1)(l+1)\right)}\\
&=\frac{C_{k+l}^{l}(k+l+1)(k+l+3)}{2^{k+l+1}\left(C_{k+l}^{l}(kl(k+l+1)+1-k^2-l^2)-(k+l-1)(k+1)(l+1)\right)}\\
&\times\left[(k-x)(1+x)^k-(k+x)(1-x)^k\right]\left[(l-x)(1+x)^l-(l+x)(1-x)^l\right].
\end{aligned}
$$

Тогда, используя равенства (1.26) и (1.29), условное математическое ожидание пика ξ_{τ_j} можно представить в виде

$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j}|\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)=\int_0^1 x\,p_{(\xi_{\tau_j}|\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)}(x)\,dx=(S_1+S_2)F,$$

где

$$F=\frac{C_{k+l}^l(k+l+1)(k+l+3)}{2^{k+l+1}\left(C_{k+l}^l(kl(k+l+1)+1-k^2-l^2)-(k+l-1)(k+1)(l+1)\right)},$$

$$S_1=(kl+2k+2l+3)J(k+l+1,0)-(k+l+3)J(k+l+2,0)$$
$$+J(k+l+3,0)-(k+1)(l+1)J(k+l,0),$$
$$S_2=-(k+2)(l+1)J(k+1,l)+(k+2)J(k+1,l+1)+(k+1)(l+1)J(k,l)$$
$$-(k+1)J(k,l+1)+(l+1)J(k+2,l)-J(k+2,l+1),$$

и

$$J(k,l)=I(k,l)-I(l,k)=\int_0^1((1+x)^k(1-x)^l-(1+x)^l(1-x)^k)\,dx.$$

Интегралы $J(k,0)$ вычисляются непосредственно

$$J(k,0)=\int_0^1((1+x)^k-(1-x)^k)\,dx=\left.\frac{(1+x)^{k+1}+(1-x)^{k+1}}{k+1}\right|_0^1=\frac{2^{k+1}-2}{k+1},$$

откуда

$$S_1=(kl+2k+2l+3)\frac{2^{k+l+2}-2}{k+l+2}-(k+l+3)\frac{2^{k+l+3}-2}{k+l+3}+\frac{2^{k+l+4}-2}{k+l+4}$$
$$-(k+1)(l+1)\frac{2^{k+l+1}-2}{k+l+1}$$
$$=2^{k+l+1}\left(\frac{kl(k+l)}{(k+l+1)(k+l+2)}-1+\frac{6k+6l+8}{(k+l+2)(k+l+4)}\right)$$
$$+\frac{2kl}{(k+l+1)(k+l+2)}+\frac{4}{(k+l+2)(k+l+4)}.$$

Оценим интегралы, входящие в S_2, учитывая, что $k,l\geq 2$,

$$|J(k,l)|<I(k,l)+I(l,k)=\frac{2^{k+l+1}}{(k+l+1)C_{k+l}^l}=o(J(k+l,0),\quad k+l\to\infty.$$

Следовательно, $S_2=o(S_1)$, $k+l\to\infty$.

Таким образом, при $k+l\to\infty$

$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j}\,|\,\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)=$$
$$=\frac{C_{k+l}^{l}(k+l+1)(k+l+3)}{C_{k+l}^{l}(kl(k+l+1)+1-k^2-l^2)-(k+l-1)(k+1)(l+1)}$$
$$\times\left(\frac{kl(k+l)}{(k+l+1)(k+l+2)}-1+\frac{6k+6l+8}{(k+l+2)(k+l+4)}\right)(1+o(1)).$$

Откуда

$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j}\,|\,\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)=\left(1-\frac{1}{k}-\frac{1}{l}+\frac{6}{kl}\right)(1+o(1)),\quad \min(k,l)\to\infty,$$
$$\mathbf{M}(\xi_{\tau_j}\,|\,\lambda_{j-1}=k,\lambda_j=l)=\left(1-\frac{2l+10}{k(l-1)}\right)(1+o(1)),\quad l=const\geq 3,\ k\to\infty.$$

Глава 2

Структура последовательности с выделенными локальными максимумами

На протяжении всей главы 2 будем предполагать, что случайные величины ξ_n, $n \geq 0$, независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение.

2.1 Структура длинного промежутка между локальными максимумами

В этом параграфе мы исследуем асимптотическое поведение случайных величин, расположенных между соседними локальными максимумами, при условии, что расстояние между этими максимумами стремится к бесконечности. Рассмотрим сначала более простой случай – не будем учитывать условия на случайные величины, расположенные "снаружи" промежутка.

2.1.1 Структура "оврага"

Пусть последовательность $\xi_1, \dots, \xi_k$ образует "овраг" – сначала убывающий участок, затем возрастающий, будем считать, что один из них может (но не обязан) быть пустым. То есть в этом пункте будем изучать условное распределение последовательности $\xi_1, \dots, \xi_k$ при условии события

$$V_1^k = \{\exists\, t : \xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_t < \xi_{t+1} < \dots < \xi_k,\ 1 \leq t \leq k\}. \tag{2.1}$$

Так же, как и при доказательстве утверждения 1, набору случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_k$ взаимно однозначно сопоставим случайную перестановку $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ порядка k следующим образом: π_i – номер случайной величины ξ_i в вариационном ряду. В силу того, что случайные величины ξ_i независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, π равномерно распределена на множестве перестановок порядка k. Событию V_1^k при этом переходе соответствует событие $V_\pi = \{\exists\, t : \pi_1 > \pi_2 > \dots > \pi_t < \pi_{t+1} < \dots < \pi_k,\ 1 \leq t \leq k\}$.

Определение 2. *Пусть* $\pi^* = (\pi_1^*, \ldots, \pi_k^*)$ *– перестановка, обратная к* π. *Определим случайные величины* $\nu_s = \pi_s^*$, $s = 1, \ldots, k$, *– положение* $\xi_{(s)}$ *(*s*-го члена вариационного ряда) в исходной последовательности.*

Из доказательства леммы 3 следует, что случайная величина ν_1 при условии V_1^k имеет биномиальное распределение с параметрами $k-2$ и $1/2$.

Лемма 5. *При условии, что исходные случайные величины образуют "овраг", случайные величины* ν_s *имеют следующие распределения:*

$$\mathbf{P}\{\nu_s = t \,|\, V_1^k\} = \mathbf{P}\{\nu_s = k+1-t \,|\, V_1^k\} = \begin{cases} \dfrac{C_{k-s}^{t-1}}{2^{k-s+1}}, & 1 \le t \le k+1-s,\ s > \dfrac{k+1}{2}, \\ \dfrac{C_{k-s}^{t-1}}{2^{k-s+1}}, & 1 \le t \le s-1,\ s \le \dfrac{k+1}{2}, \\ \dfrac{C_{k-s}^{t-1} + C_{k-s}^{k-t}}{2^{k-s+1}}, & s \le t \le \dfrac{k+1}{2}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Доказательство. Итак, нам необходимо найти условное распределение π_s^* при условии события V_π

$$\mathbf{P}\{\pi_s^* = t \,|\, V_\pi\} = \mathbf{P}\{\pi_t = s \,|\, V_\pi^k\} = \frac{\mathbf{P}\{\pi_t = s,\, V_\pi\}}{\mathbf{P}(V_\pi)} = \frac{|\{\sigma_t = s,\, \sigma \in V_\pi\}|}{|V_\pi|}.$$

Заметим, что $\mathbf{P}\{\pi_t = s,\, V_\pi\} = \mathbf{P}\{\pi_t = k+1-s,\, V_\pi\}$ в силу симметрии, следовательно, можно рассматривать только $t \le (k+1)/2$.

Согласно лемме 3 $|V_\pi| = 2^{k-1}$. Найдём количество перестановок σ, стоящее в числителе.

Рассмотрим сначала случай $s > (k+1)/2$. Тогда $k+1-s < s$, следовательно, событие $\sigma_t = s$ однозначно определяет положение числа 1 (минимума) относительно t, а именно, пусть $\sigma_z = 1$, тогда $z > t \Longleftrightarrow t \le k+1-s < s$.

Если $t \le k+1-s$, то для того, чтобы $\sigma_t = s$ нужно выбрать $t-1$ число из $s+1, \ldots, n$ для значений $\sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1}$ и составить из них убывающий участок, затем составить "овраг" из чисел, меньших s, и затем расположить на участке возрастания оставшиеся числа, большие s. Получаем $C_{k-s}^{t-1}\, 2^{s-2}$ перестановок.

Равенство $\sigma_t = s$ при $k+1-s < t \le (k+1)/2$ невозможно, так как в этом случае $t-1 > k-s$ и $k-t > k-s$, поэтому не может быть выполнена ни одна из двух цепочек неравенств: ни $\sigma_1 > \dots > \sigma_t$, ни $\sigma_t < \dots < \sigma_k$. Следовательно, $|\{\sigma_t = s,\ \sigma \in V_\pi\}| = C_{k-s}^{t-1} 2^{s-2},\ t \le k+1-s$.

Теперь рассмотрим случай $s \le (k+1)/2$. Если $t < s$, то возможна только ситуация $\sigma_1 > \dots > \sigma_t$, и искомое количество перестановок равно $C_{k-s}^{t-1}\ 2^{s-2}$.

Если $s \le t \le (k+1)/2$, то в случае $\sigma_1 > \dots > \sigma_t$ получаем $C_{k-s}^{t-1} 2^{s-2}$ перестановок, а в случае $\sigma_t < \dots < \sigma_k$ – $C_{k-s}^{t-s}\ 2^{s-2}$ перестановок. Значит, всего имеем $(C_{k-s}^{t-1} + C_{k-s}^{t-s}) 2^{s-2}$ перестановок. □

Следствие 2. *Расстояние ρ_s от $\xi_{(s)}$ до ближайшего конца отрезка (ξ_1 или ξ_k) имеет распределение*

$$\mathbf{P}\{\rho_s = t | V_1^k\} = \begin{cases} \dfrac{C_{k-s}^t}{2^{k-s}}, & t = 0, 1, \dots, k-s,\ s > \dfrac{k+1}{2}, \\ \dfrac{C_{k-s}^t}{2^{k-s}}, & t = 0, 1, \dots, s-2,\ s \le \dfrac{k+1}{2}, \\ \dfrac{C_{k-s}^t + C_{k-s}^{k-t-1}}{2^{k-s}}, & s-1 \le t \le \dfrac{k-1}{2},\ s \le \dfrac{k+1}{2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Условное распределение вариационного ряда при условии события V_1^k совпадает с безусловным, так как

$$\mathbf{P}\{\xi_{(i)} \le x_i,\ i = 1, \dots, k \,|\, V_1^k\} = \frac{1}{\mathbf{P}(V_1^k)} \sum_{\sigma \in V_\pi} \mathbf{P}\{\xi_{(i)} \le x_i,\ i = 1, \dots, k,\ \pi = \sigma\}$$
$$= \frac{1}{\mathbf{P}(V_1^k)} \sum_{\sigma \in V_\pi} \mathbf{P}\{\xi_{(i)} \le x_i,\ \xi_i = \xi_{(\sigma_i)},\ i = 1, \dots, k\}$$
$$= \frac{1}{\mathbf{P}(V_1^k)} \sum_{\sigma \in V_\pi} \mathbf{P}\{\xi_{(i)} \le x_i,\ i = 1, \dots, k\} \mathbf{P}\{\pi = \sigma\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_{(i)} \le x_i,\ i = 1, \dots, k\} \frac{1}{\mathbf{P}(V_1^k)} \sum_{\sigma \in V_\pi} \mathbf{P}\{\pi = \sigma\} = \mathbf{P}\{\xi_{(i)} \le x_i,\ i = 1, \dots, k\}.$$

Таким образом, если случайные величины ξ_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то $\xi_{(s)}$ имеют бета-распределение с параметрами s, $k-s+1$.

2.1.2 Асимптотический вид "оврага"

Рассмотрим детерминированный "овраг", т.е. кусочно линейную функцию, равную единице в точках 0 и $k+1$ и нулю в середине отрезка $[1, k]$ – точке

$(k+1)/2$. Такую функцию, точнее последовательность функций, можно задать формулой

$$y_k(x) = \left|1 - \frac{2x}{k+1}\right|, \qquad x \in [0, k+1]. \tag{2.4}$$

Покажем, что с ростом k случайный "овраг" будет стремиться к детерминированному.

Теорема 4. *Пусть случайные величины* ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, *независимы и имеют равномерное распределение на отрезке* $[0,1]$, *функции* $y_k(x)$ *заданы формулой (2.4),* $V_1^k = \{\exists\, t : \xi_1 > \dots > \xi_t < \dots < \xi_k,\ 1 \le t \le k\}$. *Тогда*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\dots,k} |\xi_n - y_k(n)| > \varepsilon \,|\, V_1^k\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Так как случайные величины $\xi_{(s)}$ имеют бета-распределение с параметрами s, $k-s+1$, то

$$\mathbf{M}\xi_{(s)} = \frac{s}{k+1}, \quad \mathbf{M}\xi_{(s)}^2 = \frac{s(s+1)}{(k+1)(k+2)}, \qquad s = 1, \dots, k.$$

Среднеквадратичное отклонение $\xi_{(s)}$ от $y_k(\nu_s)$ равно

$$\mathbf{M}((\xi_{(s)} - y_k(\nu_s))^2 \,|\, V_1^k) = \mathbf{M}\xi_{(s)}^2 - 2\mathbf{M}\xi_{(s)}\mathbf{M}(y_k(\nu_{(s)}) \,|\, V_1^k) + \mathbf{M}((y_k(\nu_{(s)}))^2 \,|\, V_1^k), \tag{2.5}$$

так как $\xi_{(s)}$ не зависит от $\nu_s\, \mathrm{I}_{V_1^k}$. Найдём моменты случайной величины $y_k(\nu_s)$, учитывая (2.4), (2.2) и то, что $y_k(t) = y_k(k+1-t)$:

$$\mathbf{M}(y_k(\nu_{(s)}) \,|\, V_1^k) = 2\sum_{t=1}^{k+1-s} y_k(t)\mathbf{P}\{\nu_s = t \,|\, V_1^k\} = 2\sum_{t=1}^{k+1-s} \left(1 - \frac{2t}{k+1}\right) \frac{C_{k-s}^{t-1}}{2^{k-s+1}}$$

$$= \sum_{t=0}^{k-s} \left(1 - \frac{2(t+1)}{k+1}\right) \frac{C_{k-s}^{t}}{2^{k-s}} = 1 - \frac{2}{k+1}\left(\frac{k-s}{2} + 1\right) = \frac{s}{k+1} - \frac{1}{k+1},$$

$$\mathbf{M}((y_k(\nu_{(s)}))^2 \,|\, V_1^k) = \sum_{t=0}^{k-s} \left(1 - \frac{2(t+1)}{k+1}\right)^2 \frac{C_{k-s}^{t}}{2^{k-s}}$$

$$= \sum_{t=0}^{k-s} \frac{C_{k-s}^{t}}{2^{k-s}} \left(1 - \frac{4(t+1)}{k+1} + \frac{4(t^2+2t+1)}{(k+1)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{k+1}\left(\frac{k-s}{2}+1\right) + \frac{4}{(k+1)^2}\left(\frac{k-s}{4} + \frac{(k-s)^2}{4} + k - s + 1\right)$$
$$= \frac{s^2}{(k+1)^2} - \frac{3s}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}.$$

Подставим найденные моменты в (2.5)

$$\mathbf{M}((\xi_{(s)} - y_k(\nu_s))^2 \,|\, V_1^k) = \frac{s(s+1)}{(k+1)(k+2)} - 2\frac{s}{k+1}\left(\frac{s}{k+1} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{s^2}{(k+1)^2}$$
$$-\frac{3s}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{s^2}{(k+1)^2(k+2)} - \frac{s}{(k+1)^2(k+2)} < \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $s \geq 1$

$$\mathbf{P}\{|\xi_{(s)} - y_k(\nu_s)| > \varepsilon \,|\, V_1^k\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{M}((\xi_{(s)} - y_k(\nu_s))^2 \,|\, V_1^k) < \frac{1}{\varepsilon^2(k+1)},$$
$$\mathbf{P}\{|\xi_{(s)} - y_k(\nu_s)| > \varepsilon \,|\, V_1^k\} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.6}$$

Кроме того, $\max_{s=1,\dots,k} \mathbf{M}((\xi_{(s)} - y_k(\nu_s))^2 \,|\, V_1^k) < 1/(k+1)$, значит и

$$\max_{n=1,\dots,k} \mathbf{M}((\xi_n - y_k(n))^2 \,|\, V_1^k) < 1/(k+1).$$

Суммарное среднеквадратичное отклонение равно

$$\sum_{s=1}^{k} \mathbf{M}((\xi_{(s)} - y_k(\nu_s))^2 \,|\, V_1^k) = \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{s^2}{(k+1)^2(k+2)} - \frac{s}{(k+1)^2(k+2)}\right)$$
$$= \frac{k}{k+1} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6(k+1)^2(k+2)} - \frac{k(k+1)}{2(k+1)^2(k+2)} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right),$$

что не позволяет сразу сделать вывод о сходимости $\max_{n=1,\dots,k} |\xi_n - y_k(n)|$ к нулю по вероятности.

Заметим, что для любой последовательности $n_1, \dots, n_m$, такой что $m = o(k)$, суммарное среднеквадратичное отклонение

$$\sum_{t=1}^{m} \mathbf{M}((\xi_{n_t} - y_k(n_t)^2 \,|\, V_1^k) < m \max_{n=1,\dots,k} \mathbf{M}((\xi_n - y_k(n))^2 \,|\, V_1^k) < \frac{m}{k+1} \to 0$$

при $k \to \infty$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\max_{t=1,\dots,m} |\xi_{n_t} - y_k(n_t)| > \varepsilon \,|\, V_1^k\} \to 0, \; k \to \infty. \tag{2.7}$$

Определим последовательность n_t следующим образом: $n_1 = 1$, $n_t = (t-1)[\sqrt{k}]$, $t = 2, \dots, [\sqrt{k}]+1$, и $n_{[\sqrt{k}]+2} = k$, если $\sqrt{k}$ не является целым числом. Для удобства добавим к выбранным точкам те из чисел $k/2, (k+1)/2, k/2+1$, которые являются целыми, и перенумеруем последовательность по возрастанию. Таким образом, последовательность $n_1, \dots, n_m$ обладает следующими свойствами:

$$1 = n_1 < \dots < n_m = k, \quad n_{i+1} - n_i \le [\sqrt{k}], \quad [\sqrt{k}] + 1 < m < [\sqrt{k}] + 4,$$

которые позволяют заключить, что $|y_k(n_{i+1}) - y_k(n_i)| \le 2/\sqrt{k}, i = 1, \dots, m-1$, и для любого $1 < s < k$, не являющегося членом последовательности $\{n_t\}$, найдется такое i, что $n_i < s < n_{i+1}$, при этом $y_k(n_{i+1}) < y_k(s) < y_k(n_i)$, если $s < (k+1)/2$, и $y_k(n_i) < y_k(s) < y_k(n_{i+1})$, если $s > (k+1)/2$.

Теперь оценим $|\xi_s - y_k(s)|$ для s, не входящих в $n_1, \dots, n_m$. Рассмотрим подробно случай $s < (k+1)/2$, для $s > (k+1)/2$ все рассуждения аналогичны. Итак, пусть $n_i < s < n_{i+1}$, тогда $y_k(n_{i+1}) < y_k(s) < y_k(n_i)$, и возможны три варианта.

1. Если $\xi_{n_i} < \xi_s < \xi_{n_{i+1}}$, то $|\xi_s - y_k(s)| < |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{n_{i+1}} - y_k(n_{i+1})|$.

2. Если $\xi_{n_{i+1}} < \xi_s < \xi_{n_i}$, то

$$|\xi_s - y_k(s)| < |\xi_{n_{i+1}} - y_k(n_i)| + |\xi_{n_i} - y_k(n_{i+1})| \le |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{n_{i+1}} - y_k(n_{i+1})|$$
$$+2|y_k(n_{i+1}) - y_k(n_i)| \le |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{n_{i+1}} - y_k(n_{i+1})| + 4/\sqrt{k}.$$

3. Если $\xi_{n_i} > \xi_s < \xi_{n_{i+1}}$, то $\xi_{(1)}$ расположена между ξ_{n_i} и ξ_{n_i}, т.е. $n_i < \nu_1 < n_{i+1}$. Если $n_i < s \le \nu_1$, то $\xi_{\nu_1} = \xi_{(1)} < \xi_s < \xi_{n_i}$ и

$$|\xi_s - y_k(s)| < |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{(1)} - y_k(\nu_1)| + 4/\sqrt{k}.$$

Если же $\nu_1 < s \le n_{i+1}$, то $\xi_{(1)} < \xi_s < \xi_{n_{i+1}}$ и

$$|\xi_s - y_k(s)| < |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{(1)} - y_k(\nu_1)|.$$

Таким образом, для любого $s = 1, \ldots, k$ справедлива оценка $|\xi_s - y_k(s)| < 2\max_{i=1,\ldots,m} |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{(1)} - y_k(\nu_1)| + 4/\sqrt{k}$, поэтому

$$\max_{s=1,\ldots,k} |\xi_s - y_k(s)| < 2 \max_{i=1,\ldots,m} |\xi_{n_i} - y_k(n_i)| + |\xi_{(1)} - y_k(\nu_1)| + 4/\sqrt{k},$$

откуда, учитывая (2.6) и (2.7), сразу следует доказываемое утверждение. □

2.1.3 Асимптотический вид промежутка между локальными максимумами

Для того чтобы сформулировать аналог теоремы 4 для промежутка между локальными максимумами (т.е. "оврага", концы которого являются локальными максимумами), докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 6. *Пусть последовательности $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ событий, заданных на одном вероятностном пространстве, таковы что*
$\mathbf{P}\{Z_k \,|\, V_k\} \to p > 0$, $k \to \infty$,
$W_i \subseteq V_i$, $i \geq 1$, *и при этом* $\mathbf{P}(V_k) = (1 + o(1))\mathbf{P}(W_k)$, $k \to \infty$.

Тогда $\mathbf{P}(Z_k \,|\, W_k) \to p$, $k \to \infty$.

Доказательство. По определению условной вероятности

$$\mathbf{P}(Z_k \,|\, W_k) = \frac{\mathbf{P}(Z_k W_k)}{\mathbf{P}(W_k)} = \frac{\mathbf{P}(Z_k V_k)}{\mathbf{P}(W_k)} - \frac{\mathbf{P}(Z_k (V_k \setminus W_k))}{\mathbf{P}(W_k)},$$

так как $W_k \subseteq V_k$. Предел первой дроби равен

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{P}(Z_k V_k)}{\mathbf{P}(W_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{P}(Z_k V_k)}{\mathbf{P}(V_k)} \frac{\mathbf{P}(W_k)}{\mathbf{P}(V_k)} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(Z_k | V_k)(1 + o(1)) = p.$$

Рассмотрим вторую дробь

$$\frac{\mathbf{P}(Z_k (V_k \setminus W_k))}{\mathbf{P}(W_k)} \leq \frac{\mathbf{P}(V_k \setminus W_k)}{\mathbf{P}(W_k)} = \frac{\mathbf{P}(V_k) - \mathbf{P}(W_k)}{\mathbf{P}(W_k)} = \frac{\mathbf{P}(V_k)}{\mathbf{P}(W_k)} - 1 \to 0, \quad k \to \infty.$$

Следовательно, вторая дробь стремится к нулю и $\mathbf{P}(Z_k \,|\, W_k) \to p$, $k \to \infty$. □

Рассмотрим событие

$$W_1^k = \{\chi_1^{(k-1)} = 1\} = V_1^k \cap \{\xi_0 < \xi_1,\, \xi_k > \xi_{k+1}\},$$

заключающееся в том, что ξ_1 и ξ_k являются соседними локальными максимумами. В силу определения $W_1^k \subset V_1^k$.

Найдём отношение вероятностей этих событий. По формуле (1.4)

$$\mathbf{P}(W_1^k) = \mathbf{P}\{\chi_1^{(k-1)} = 1\} = \frac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = k-1\} = \frac{(k+1)(k-2)2^{k-1}}{(k+2)!}.$$

Согласно лемме 3 $|V_\pi| = 2^{k-1}$, следовательно, $\mathbf{P}(V_1^k) = \mathbf{P}(V_\pi) = 2^{k-1}/k!$. Откуда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{P}(V_1^k)}{\mathbf{P}(W_1^k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)!}{(k+1)(k-2)k!} = 1.$$

Следовательно, последовательности событий $Z_k = \{\max_{n=1,\dots,k} |\xi_n - y_k(n)| > \varepsilon\}$, $V_k = V_1^k$, $W_k = W_1^k$ удовлетворяют условиям леммы 6, значит, справедлива

Теорема 5. *Пусть случайные величины ξ_n, $n \geq 0$, независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ и функции $y_k(x) = |1 - 2x/(k+1)|$. Тогда*

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\dots,k} |\xi_n - y_k(n)| > \varepsilon \,|\, \chi_1^{(k-1)} = 1\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Следствие 3. *Если случайные величины последовательности $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение с функцией распределения $F(x)$, то*

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\dots,k} |F(\xi_n) - y_k(n)| > \varepsilon \,|\, \chi_1^{(k-1)} = 1\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Если, кроме того, функция $F(x)$ строго монотонна, то

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \mathbf{P}\{\max_{n=1,\dots,k} |\xi_n - F^{-1}(y_k(n))| > \varepsilon \,|\, \chi_1^{(k-1)} = 1\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

2.2 Рекуррентные события $\{\lambda = 3\}$

Событие $\{\lambda = 3\}$ является рекуррентным для последовательности пар $\{(\xi_{\tau_i},\, \lambda_{i+1})\}$ (локальный максимум и расстояние до следующего пика). Действительно, условное распределение граничного пика ξ_{τ_j} при условии, что $\{\lambda_j = 3\}$ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j} \le x | \lambda_j = 3\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j} \le x,\, \xi_{\tau_j-1} < \xi_{\tau_j} > \xi_{\tau_j+1},\, \xi_{\tau_j-4} < \xi_{\tau_j-3} > \xi_{\tau_j-2}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j-1} < \xi_{\tau_j} > \xi_{\tau_j+1},\, \xi_{\tau_j-4} < \xi_{\tau_j-3} > \xi_{\tau_j-2}\}}$$
$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j} \le x,\, \xi_{\tau_j-1} < \xi_{\tau_j} > \xi_{\tau_j+1}\}\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j-4} < \xi_{\tau_j-3} > \xi_{\tau_j-2}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j-1} < \xi_{\tau_j} > \xi_{\tau_j+1}\}\mathbf{P}\{\xi_{\tau_j-4} < \xi_{\tau_j-3} > \xi_{\tau_j-2}\}}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_{\tau_j} \le x | \xi_{\tau_j-1} < \xi_{\tau_j} > \xi_{\tau_j+1}\} = \mathbf{P}\{\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \le x\},$$

т.е. совпадает с распределением максимума из трёх независимых случайных величин. Таким образом, распределение “будущего” будет совпадать с распределением последовательности $\{(\xi_{\tau_i},\, \lambda_{i+1})\}$, стартующей с произвольного (не обусловленного) локального максимума.

Изучать расстояние между моментами осуществления событий удобнее в “абсолютном” времени, т.е. удобнее учитывать количество необходимых испытаний ξ_i, чем количество появившихся пиков.

Приведём данное в [5] определение рекуррентного события.

Определение 3. *Свойство E определяет рекуррентное событие в последовательности повторных испытаний с возможными исходами E_j, $j \ge 1$, если*

1) для того чтобы E произошло при n-м и при $(n+m)$-м испытаниях в последовательности $E_{j_1}, \dots, E_{j_{n+m}}$, необходимо и достаточно, чтобы E наступило при последнем испытании в каждом из двух наборов $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ и $E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}$,

2) в этом случае

$$\mathbf{P}\{E_{j_1} \cdots E_{j_{n+m}}\} = \mathbf{P}\{E_{j_1} \cdots E_{j_n}\}\,\mathbf{P}\{E_{j_{n+1}} \cdots E_{j_{n+m}}\}.$$

Из определения следует, что для того чтобы событие $\{\lambda = 3\}$ являлось рекуррентным для последовательности $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, его осуществление в момент n должно определяться первыми n членами последовательности. Поэтому будем говорить, что осуществление события $\{\lambda = 3\}$ в момент n означает, что $\xi_{n-5} < \xi_{n-4} > \xi_{n-3}$, $\xi_{n-2} < \xi_{n-1} > \xi_n$, т.е. что $\chi^{(3)}_{n-4} = \chi_{n-4}\chi_{n-1} = 1$.

Аккуратного определения требует ситуация, когда два соседних расстояния между локальными максимумами равны трём ($\chi_{n-4}\chi_{n-1}\chi_{n+2} = 1$). В этом случае будем считать, что событие $\{\lambda = 3\}$ происходит в моменты n и $n+3$.

То есть будем рассматривать последовательность событий $\{\lambda = 3\}$ как последовательность рекуррентных событий с запаздыванием (распределение последовательности $\{\xi_i\}$ до первого рекуррентного события не совпадает с распределением участков между моментами осуществления рекуррентных событий) и для "регулярной части" (промежутков между событиями $\{\lambda = 3\}$) будем считать, что осуществление события $\{\lambda = 3\}$ в момент 3 (считая от предыдущего рекуррентного события) означает, что $\xi_1 < \xi_2 > \xi_3$ (т.е. $\chi_2 = 1$).

Свойство 2) выполняется в силу независимости случайных величин ξ_i.

Заметим, что осуществление события $\{\lambda = 3\}$ в некоторый момент времени зависит не от конкретных значений случайных величин последовательности ξ_i, а только от неравенств между этими величинами. То есть, достаточно знать только больше следующая случайная величина предыдущей или меньше.

Покажем, что событие $\{\lambda = 3\}$ является рекуррентным и для последовательности $\{\chi_i, i \geq 2\}$. Для этого по определению его осуществление в момент n должно определяться первыми n членами последовательности. Поэтому будем говорить, что осуществление события $\{\lambda = 3\}$ в момент n означает, что $\chi_{n-3}^{(3)} = \chi_{n-3}\chi_n = 1$. Так же, как и для последовательности ξ_i, будем считать, что в "регулярной части" последовательности χ_j осуществление события $\{\lambda = 3\}$ в момент 3 (считая от начала участка) означает, что $\chi_3 = 1$. (Заметим, что по сравнению с последовательностью ξ_i происходит сдвиг "на единицу времени".)

Покажем, что при таком определении событие $\{\lambda = 3\}$ действительно является рекуррентным для последовательности $\{\chi_i\}$, т.е. что выполняется свойство 2) определения 3.

Напомним обозначение $\chi_k^{(3)} = \mathbf{I}\{\chi_k = \chi_{k+3} = 1\} = \chi_k\chi_{k+3}$.

Утверждение 2. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\chi_i = k_i, i = 1, \ldots, n+m \,|\, \chi_{n-3}^{(3)} = \chi_{n+m-3}^{(3)} = 1\} \tag{2.8}$$
$$= \mathbf{P}\{\chi_i = k_i, i \leq n \,|\, \chi_{n-3}^{(3)}\chi_{n+m-3}^{(3)} = 1\}\mathbf{P}\{\chi_i = k_i, i \geq n+1 \,|\, \chi_{n-3}^{(3)}\chi_{n+m-3}^{(3)} = 1\}.$$

Доказательство. Заметим, что событие $\{\chi_{n-3}^{(3)}\chi_{n+m-3}^{(3)} = 1\}$ определяет значения индикаторов $\chi_{n-4}, \ldots, \chi_{n+1}, \chi_{n+m-4}, \ldots, \chi_{n+m+1}$, а именно

$$\{\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}=\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+m-3}\chi_{n+m}=1,$$
$$\chi_{n-4}+\chi_{n-2}+\chi_{n-1}+\chi_{n+1}+\chi_{n+m-4}+\chi_{n+m-2}+\chi_{n+m-1}+\chi_{n+m+1}=0\}.$$

Поэтому дальше будем считать, что $k_j=1$ при $j=n-3$, n, $n+m-3$, $n+m$ и $k_i=0$ при $i=n-4$, $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+m-4$, $n+m-2$, $n+m-1$, $n+m+1$. (Если хотя бы одно из этих равенств нарушается, то и левая, и правая части выражения (2.8) равны нулю.)

По определению условной вероятности

$$\mathbf{P}\{\chi_i=k_i, i=1,\ldots,n+m\,|\,\chi^{(3)}_{n-3}=\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}$$
$$=\frac{\mathbf{P}\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+m-3}\chi_{n+m}=1,\ \chi_i=k_i, i=1,\ldots,n-4,n+2,\ldots,n+m-4\}}{\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3}=\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}}$$
$$=\frac{\mathbf{P}\{\chi_{n-3}=1,\ \chi_i=k_i, i\le n-4\}\mathbf{P}\{\chi_n\chi_{n+m-3}\chi_{n+m}=1,\ \chi_i=k_i, i\ge n+1\}}{\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}},$$

так как последовательности $\chi_1,\ldots,\chi_{n-3}$ и $\chi_n,\ldots,\chi_{n+m}$ независимы.

Заметим, что события $\{\chi^{(3)}_n=1\}$ и $\{\chi^{(3)}_{n+m}=1\}$ несовместны при $m=1,2,4$.

Рассмотрим сначала случай $m=3$. В этом случае $\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3}=\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_n=\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+3}$. Индикаторы χ_{n-3}, χ_n, χ_{n+3} независимы и одинаково распределены, поэтому $\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_n=1\}=(\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_n=1\})^3$. Умножив числитель и знаменатель на эту вероятность и снова воспользовавшись независимостью последовательностей $\chi_1,\ldots,\chi_{n-3}$ и $\chi_n,\ldots,\chi_{n+m}$, получим

$$\mathbf{P}\{\chi_i=k_i, i=1,\ldots,n+m\,|\,\chi^{(3)}_{n-3}=\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}$$
$$=\frac{\mathbf{P}\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+3}=1,\ \chi_i=k_i, i\le n-4\}}{\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_n=1\}}\frac{\mathbf{P}\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+3}=1,\ \chi_i=k_i, i\ge n+1\}}{\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3}=\chi^{(3)}_{n+3}=1\}}$$
$$=\mathbf{P}\{\chi_i=k_i, i\le n\,|\,\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}\mathbf{P}\{\chi_i=k_i, i\ge n+1\,|\,\chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}.$$

Если $m>5$, то индикаторы $\chi^{(3)}_n$, $\chi^{(3)}_{n+m}$ независимы и

$$\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3}=\chi^{(3)}_{n+m-3}=1\}=\mathbf{P}\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+m-3}\chi_{n+m}=1\}=(\mathbf{P}\{\chi_n=1\})^4.$$

Домножив числитель и знаменатель на эту вероятность и воспользовавшись независимостью последовательностей $\chi_1,\ldots,\chi_n$ и $\chi_{n+3},\ldots,\chi_{n+m}$, получим

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\chi_i = k_i, i = 1, \dots, n+m \,|\, \chi^{(3)}_{n-3} = \chi^{(3)}_{n+m-3} = 1\} \\
&= \frac{\mathbf{P}\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+m-3}\chi_{n+m} = 1,\ \chi_i = k_i, i \le n-4\}}{\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3} = \chi^{(3)}_{n+m-3} = 1\}} \\
&\times \frac{\mathbf{P}\{\chi_{n-3}\chi_n\chi_{n+m-3}\chi_{n+m} = 1,\ \chi_i = k_i, i \ge n+1\}}{\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{n-3} = \chi^{(3)}_{n+m-3} = 1\}} \\
&= \mathbf{P}\{\chi_i = k_i, i \le n \,|\, \chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3} = 1\}\mathbf{P}\{\chi_i = k_i, i \ge n+1 \,|\, \chi^{(3)}_{n-3}\chi^{(3)}_{n+m-3} = 1\}.
\end{aligned}
$$

□

Замечание 6. *Событие* $\{\lambda = 3\}$ *также является рекуррентным для последовательности* $\{\chi_i^{(3)}, i \ge 2\}$. *Для этой последовательности осуществление события* $\{\lambda = 3\}$ *в момент* n *означает, что* $\chi_n^{(3)} = 1$.

Следуя [5], для последовательности $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ определим вероятности f_k, b_k того, что рекуррентное событие произошло впервые при k-м испытании (в регулярной части и в начальном отрезке) и вероятность u_k того, что рекуррентное событие произошло k-м испытании

$$
\begin{aligned}
f_k &= \mathbf{P}\{\chi^{(3)}_3 = \dots = \chi^{(3)}_{k+1} = 0, \chi^{(3)}_{k+2} = 1 \,|\, \chi^{(3)}_2 = 1\} \\
&= 9\mathbf{P}\{\chi^{(3)}_2\chi^{(3)}_{k+2} = 1, \chi^{(3)}_3 = \dots = \chi^{(3)}_{k+1} = 0\}, \\
b_k &= \mathbf{P}\{\chi^{(3)}_2 = \dots = \chi^{(3)}_{k-5} = 0, \chi^{(3)}_{k-4} = 1\}, \quad k \ge 6, \qquad b_k = 0, \quad k < 6, \\
u_k &= \mathbf{P}\{\chi^{(3)}_{k-4}\} = \frac{1}{9}, \ k \ge 6, \quad u_1 = 0, \ k < 6,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

и положим $f_0 = b_0 = u_0 = 0$.

Утверждение 3. *Производящие функции последовательностей* f_k, b_k, u_k *равны*

$$
F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k f_k = 1 - (1-s)\left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right)^{-1}, \tag{2.10}
$$

$$
B(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k b_k = \frac{1}{9}s^6\left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right)^{-1}, \tag{2.11}
$$

$$
U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k u_k = \frac{s^6}{9(1-s)}. \tag{2.12}
$$

Доказательство. Для того чтобы найти производящую функцию $F(s)$, рассмотрим последовательность вероятностей w_k того, что рекуррентное событие произойдёт при k-м испытании после предыдущего осуществления,

$$w_k = \mathbf{P}\{\chi_{k+2}^{(3)} \,|\, \chi_2^{(3)} = 1\} = 9\,\mathbf{P}\{\chi_2^{(3)}\chi_{k+2}^{(3)} = 1\}, \quad k > 0, \qquad w_0 = 1.$$

При $k \geq 6$ индикаторы $\chi_2^{(3)}$ и $\chi_{k+2}^{(3)}$ независимы, поэтому

$$w_k = 9\mathbf{P}\{\chi_2^{(3)}\chi_{k+2}^{(3)} = 1\} = 9\,\mathbf{P}\{\chi_2^{(3)} = 1\}\,\mathbf{P}\{\chi_{k+2}^{(3)} = 1\} = \frac{1}{9}, \quad k \geq 6.$$

Вероятности $w_1 = w_2 = w_4 = 0$, так как каждое из событий $\{\chi_3^{(3)} = 1\}$, $\{\chi_4^{(3)} = 1\}$ и $\{\chi_6^{(3)} = 1\}$ несовместно с событием $\chi_2^{(3)} = 1$.

Далее, так как индикаторы χ_2, χ_5, χ_8 независимы,

$$w_3 = 9\mathbf{P}\{\chi_2^{(3)}\chi_5^{(3)} = 1\} = 9\,\mathbf{P}\{\chi_2\chi_5\chi_8 = 1\} = 9\,(\mathbf{P}\{\chi_2 = 1\})^3 = \frac{1}{3}.$$

Аналогично, так как случайные величины χ_2, χ_{10}, $\chi_5\chi_7$ независимы

$$w_5 = 9\,\mathbf{P}\{\chi_2^{(3)}\chi_7^{(3)} = 1\} = 9\,\mathbf{P}\{\chi_2\chi_5\chi_7\chi_{10} = 1\}$$
$$= 9\,\mathbf{P}\{\chi_2 = 1\}\,\mathbf{P}\{\chi_{10} = 1\}\mathbf{P}\{\chi_5\chi_7 = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_5^{(2)} = 1\} = \frac{2}{15},$$

где $\mathbf{P}\{\chi_5^{(2)} = 1\}$ вычисляется по формуле (1.4).

Пусть $W(s)$ – производящая функция последовательности w_k, тогда

$$W(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k w_k = 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{15}s^5 + \frac{1}{9}\sum_{k=6}^{\infty} s^k = 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{15}s^5 + \frac{s^6}{9(1-s)}$$
$$= \frac{1}{1-s}\left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right).$$

Как известно (см. [5]), производящие функции $W(s)$ и $F(s)$ связаны соотношением $W(s)(1 - F(s)) = 1$, что позволяет найти $F(s)$

$$F(s) = 1 - \frac{1}{W(s)} = 1 - (1-s)\left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right)^{-1}.$$

Функция $U(s)$ легко находится непосредственно по определению

$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k u_k = \frac{1}{9} \sum_{k=6}^{\infty} s^k = \frac{s^6}{9(1-s)}.$$

Известно, что для производящих функций $F(s)$, $B(s)$, $U(s)$ справедливо соотношение (см. [5])

$$U(s) = \frac{B(s)}{1 - F(s)},$$

откуда

$$B(s) = U(s)(1 - F(s)) = \frac{1}{9} s^6 \left(1 - s + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{3} + \frac{2s^5}{15} - \frac{s^6}{45}\right)^{-1}.$$

□

Следствие 4. *Последовательности f_k, b_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$f_k = f_{k-1} - \frac{1}{3} f_{k-3} + \frac{1}{3} f_{k-4} - \frac{2}{15} f_{k-5} + \frac{1}{45} f_{k-6}, \quad k > 7,$$
$$f_0 = f_1 = f_2 = f_4 = f_4 = 0, \quad f_3 = \frac{1}{3}, \quad f_5 = \frac{2}{15},$$
$$b_k = b_{k-1} - \frac{1}{3} b_{k-3} + \frac{1}{3} b_{k-4} - \frac{2}{15} b_{k-5} + \frac{1}{45} b_{k-6}, \quad k > 10,$$
$$b_k = 0,\, k < 6, \quad b_6 = b_7 = b_8 = \frac{1}{9}, \quad b_9 = b_{10} = \frac{2}{27}.$$

Утверждение 4. *Пусть ρ – расстояние между моментами появления событий $\{\lambda = 3\}$, а ρ_0 – время ожидания первого момента появления события $\{\lambda = 3\}$ в последовательности $\{\xi_n,\, n \in N\}$. Тогда*

$$\mathbf{M}\rho = 9, \quad \mathbf{D}\rho = 57,6,$$
$$\mathbf{M}\rho_0 = 13,2, \quad \mathbf{D}\rho_0 = 32,04.$$

Доказательство. Так как $F(s)$ – производящая функция случайной величины ρ, то для математического ожидания и дисперсии ρ справедливы формулы

$$\mathbf{M}\rho = F'(1), \qquad \mathbf{D}\rho = F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2. \tag{2.13}$$

Найдём $F'(1), F''(1)$, дифференцируя равенство (2.10) (переписанное в более удобном виде)

$$(F(s)-1)\left(1-s+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{3}+\frac{2s^5}{15}-\frac{s^6}{45}\right)=s-1,$$

$$F'(s)\left(1-s+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{3}+\frac{2s^5}{15}-\frac{s^6}{45}\right)$$
$$-(1-F(s))\left(-1+s^2-\frac{4s^3}{3}+\frac{2s^4}{3}-\frac{2s^5}{15}\right)=1,$$

$$F''(s)\left(1-s+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{3}+\frac{2s^5}{15}-\frac{s^6}{45}\right)+2F'(s)\left(-1+s^2-\frac{4s^3}{3}+\frac{2s^4}{3}-\frac{2s^5}{15}\right)$$
$$-(1-F(s))\left(2s-4s^2+\frac{8s^3}{3}-\frac{2s^4}{3}\right)=0.$$

Подставим $s=1$, учитывая, что $F(1)=1$,

$$\frac{1}{9}F'(1)=1, \quad F'(1)=9,$$
$$\frac{1}{9}F''(1)-\frac{8}{5}F'(1)=0, \quad \frac{1}{9}F''(1)-\frac{72}{5}=0, \quad F''(1)=\frac{648}{5}=129,6.$$

Воспользовавшись формулами (2.13), получим

$$\mathbf{M}\rho=F'(1)=9, \quad \mathbf{D}\rho=F''(1)+F'(1)-[F'(1)]^2=129,6+9-81=57,6.$$

Аналогичным образом найдём математическое ожидание и дисперсию расстояния ρ_0, производящей функцией которого является $B(s)$. Перепишем равенство (2.11) в виде

$$B(s)\left(1-s+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{3}+\frac{2s^5}{15}-\frac{s^6}{45}\right)=\frac{1}{9}s^6$$

и продифференцируем его дважды

$$B'(s)\left(1-s+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{3}+\frac{2s^5}{15}-\frac{s^6}{45}\right)+B(s)\left(-1+s^2-\frac{4s^3}{3}+\frac{2s^4}{3}-\frac{2s^5}{15}\right)=\frac{2}{3}s^5,$$

$$B''(s)\left(1-s+\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{3}+\frac{2s^5}{15}-\frac{s^6}{45}\right)+2B'(s)\left(-1+s^2-\frac{4s^3}{3}+\frac{2s^4}{3}-\frac{2s^5}{15}\right)$$
$$+B(s)\left(2s-s^2+\frac{8s^3}{3}-\frac{2s^4}{3}\right)=\frac{10}{3}s^4.$$

Подставляя $s = 1$ и учитывая, что $B(1) = 1$, получим

$$\frac{1}{9}B'(1) - \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3}, \quad B'(1) = \frac{66}{5} = 13,2,$$
$$\frac{1}{9}B''(1) - \frac{328}{25} + 3 = \frac{10}{3}, \quad B''(1) = \frac{4827}{25}.$$

Таким образом, $\mathbf{M}\rho_0 = B'(1) = 13,2$,

$$\mathbf{D}\rho_0 = B''(1) + B'(1) - [B'(1)]^2 = \frac{4827}{25} + \frac{66}{5} - \frac{4356}{25} = \frac{801}{25} = 32,04.$$

□

2.3 Количества расстояний заданных длин

2.3.1 Определение и моменты

Рассмотрим количество локальных максимумов $N_0(T)$ и количества $N_k(T)$ расстояний длины k между соседними локальными максимумами последовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^T$,

$$N_0(T) = \sum_{i=1}^{T-2} \chi_{i+1} = \sum_{i=1}^{T-2} \mathrm{I}\{\xi_i < \xi_{i+1} > \xi_{i+2}\},$$
$$N_k(T) = \sum_{i=1}^{T-2-k} \chi_{i+1}^{(k)} = \mathrm{I}\{\chi_{i+1}\chi_{i+k+1} = 1, \chi_{i+2} + \cdots + \chi_{i+k} = 0\}, \quad k \geq 2,$$
$$N^{(s)} = \left(N_0(T), N_2(T), \ldots, N_s(T)\right).$$

Будем считать, что $N_k(T) = 0$ при $T < k + 3$.

Лемма 7. *Математические ожидания и ковариации количеств $N_k(T)$ имеют вид*

$$\mathbf{M}N_0(T) = \frac{T-2}{3}, \tag{2.14}$$
$$\mathbf{M}N_k(T) = \frac{T-k-2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\} = \frac{(T-k-2)(k+2)(k-1)\,2^k}{(k+3)!},\ k \geq 2, \tag{2.15}$$
$$\mathrm{Cov}(N_k(T), N_m(T)) = b_{mk}T + d_{mk}, \quad T \geq m + k + 5, \tag{2.16}$$

где коэффициенты b_{km} и d_{mk} вычисляются по формулам

$$b_{km} = \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\} + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\} + \frac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m = k\}$$
$$-\frac{k+m+5}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m\}\,\mathbf{P}\{\lambda_2 = k\}, \quad km \neq 0,$$
$$b_{0m} = b_{m0} = \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2\} - \frac{m-1}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m\}, \quad m \neq 0,$$
$$b_{00} = d_{00} = \frac{2}{45},$$
$$d_{m0} = d_{0m} = \frac{m^2+m+4}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m\} - \frac{2(m+4)}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2\}, \quad m \neq 0,$$
$$d_{mk} = \frac{k^2+m^2+mk+7m+7k+16}{9}\,\mathbf{P}\{\lambda_1 = m\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = k\}$$
$$-\frac{m+2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m = k\} - \frac{2(m+k+2)}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\}$$
$$-\frac{2(m+k+4)}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\}, \; km \neq 0.$$

Замечание 7. *При* $T < k+m+3$ *произведение* $N_k(T)N_m(T) = 0$, *откуда* $\mathrm{Cov}(N_k(T), N_m(T)) = -\mathbf{M}N_k(T)\mathbf{M}N_m(T)$.
При $T = k+m+3$ *произведение* $N_k(T)N_m(T) = \chi_2^{(k)}\chi_{k+2}^{(m)} + \chi_2^{(m)}\chi_{m+2}^{(k)}$, *откуда*

$$\mathrm{Cov}(N_k(T), N_m(T)) = \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\} - \mathbf{M}N_k(T)\mathbf{M}N_m(T), \quad T = k+m+3.$$

При $T = k+m+4$ *произведение*

$$N_k(T)N_m(T) = \chi_2^{(k)}\chi_{k+2}^{(m)} + \chi_2^{(m)}\chi_{m+2}^{(k)} + \chi_3^{(k)}\chi_{k+3}^{(m)} + \chi_3^{(m)}\chi_{m+3}^{(k)},$$

откуда

$$\mathrm{Cov}(N_k(T), N_m(T)) = \frac{4}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\} - \mathbf{M}N_k(T)\mathbf{M}N_m(T), \quad T = k+m+4.$$

Доказательство леммы 7. По свойству линейности математического ожидания и определению индикаторов χ_i, $\chi_i^{(k)}$

$$\mathbf{M}N_0(T) = \mathbf{M}\sum_{i=1}^{T-2}\chi_{i+1} = (T-2)\mathbf{P}\{\chi_1 = 1\} = \frac{T-2}{3},$$
$$\mathbf{M}N_k(T) = \mathbf{M}\sum_{i=1}^{T-2-k}\chi_{i+1}^{(k)} = (T-k-2)\mathbf{M}\chi_1^{(k)},$$

откуда по формуле (1.4)

$$\mathbf{M}N_k(T) = \frac{T-k-2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\} = \frac{(T-k-2)(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}.$$

Вычислим ковариацию $\mathrm{Cov}(N_k(T), N_m(T))$. Не теряя общности, будем считать, что $k \le m$. Так как $\chi_j^{(k)}$ и $\chi_i^{(m)}$ независимы при $j-i > m+2$ и при $i-j > k+2$, и для любых i, j, t $\mathrm{Cov}(\chi_{i+t}^{(k)}, \chi_{j+t}^{(m)}) = \mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_j^{(m)})$, то

$$\mathrm{Cov}(N_k(T), N_m(T)) = T\sum_{i=1}^{k+m+5}\mathrm{Cov}(\chi_{m+3}^{(k)}, \chi_i^{(m)}) - (m+2)\sum_{i=1}^{m-k+1}\mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_1^{(m)})$$
$$-2\sum_{i=m-k+2}^{m+3}(k+1+i)\,\mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_1^{(m)}) = b_{mk}T + d_{mk},$$

где

$$b_{mk} = \sum_{i=1}^{k+m+5}\mathrm{Cov}(\chi_{m+3}^{(k)}, \chi_i^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k+m+5}\mathbf{M}\chi_{m+3}^{(k)}\chi_i^{(m)} - \sum_{i=1}^{k+m+5}\mathbf{M}\chi_{m+3}^{(k)}\,\mathbf{M}\chi_i^{(m)},$$

$$d_{mk} = -(m+2)\sum_{i=1}^{m-k+1}\mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_1^{(m)}) - 2\sum_{i=m-k+2}^{m+3}(k+1+i)\,\mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_1^{(m)}).$$

По определению индикаторов $\chi_i^{(j)}$

$$\mathbf{M}\chi_{m+3}^{(k)}\chi_i^{(m)} = \mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_i^{(m)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_{m+3}\chi_{m+3+k} = 1,\ \chi_{m+4} + \cdots + \chi_{m+2+k} = 0,$$
$$\chi_i\chi_{i+m} = 1,\ \chi_{i+1} + \cdots + \chi_{i+m-1} = 0\}.$$

Откуда видно, что входящие в суммы совместные вероятности не равны нулю только при следующих четырех значения индекса суммирования:

$$i = m+3+k, \quad i = m+5+k, \quad i = 1, \quad i = 3,$$

и, дополнительно, при $i = k+3 = m+3$, если $k = m$. Причём, так как для любого натурального t векторы $(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_t)$ и $(\chi_t, \chi_{t-1}, \ldots, \chi_1)$ одинаково распределены,

$$\mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_i^{(m)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_{m+k+4-i}^{(m)} = 1\}, \quad i \le m+2+\frac{k}{2}.$$

Таким образом, коэффициент при T имеет вид

$$b_{mk} = 2\,\mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_1^{(m)} = 1\} + 2\,\mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_3^{(m)} = 1\} + \mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_{m+3}^{(m)} = 1, k = m\}$$
$$-(k+m+5)\mathbf{P}\{\chi_1^{(k)} = 1\}\,\mathbf{P}\{\chi_1^{(m)} = 1\}, \quad km \neq 0.$$

Для получения итоговой формулы осталось заметить, что при $km \neq 0$

$$\mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_1^{(m)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1\chi_{m+1} = 1,\ \chi_2 + \cdots + \chi_m = 0,\ \chi_{m+3}\chi_{m+3+k} = 1,$$
$$\chi_{m+4} + \cdots + \chi_{m+k+2} = 0\} = \mathbf{P}\{\chi_1 = 1\}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_{m+3}^{(k)}\chi_3^{(m)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_3 = 1\}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\} = \frac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\}.$$

В случае $k = 0$ необходимо учесть, что $\chi_{k+1}^{(m)} = \chi_1^{(m)}$, $\chi_i^{(k)} = \chi_i$, следовательно,

$$b_{m0} = 2\,\mathbf{P}\{\chi_{m+3}\chi_1^{(m)} = 1\} + 2\,\mathbf{P}\{\chi_{m+3}\chi_3^{(m)} = 1\} + \mathbf{P}\{\chi_{m+3}\chi_{m+3}^{(m)} = 1\}$$
$$-(m+5)\mathbf{P}\{\chi_1 = 1\}\,\mathbf{P}\{\chi_1^{(m)} = 1\} = \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2\} - \frac{m-1}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m\}.$$

Если $k = m = 0$, то

$$b_{00} = 2\,\mathbf{P}\{\chi_3\chi_1 = 1\} + \mathbf{P}\{\chi_3\chi_3 = 1\} - 5\mathbf{P}\{\chi_1 = 1\}\,\mathbf{P}\{\chi_1 = 1\}$$
$$= \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = 2\} + \frac{1}{3} - \frac{5}{9} = \frac{2}{45}.$$

Аналогично, в случае $km \neq 0$,

$$d_{mk} = \mathbf{M}\chi_1^{(k)}\,\mathbf{M}\chi_1^{(m)}\left((m+2)(m-k+1) + 2\sum_{i=m-k+2}^{m+3}(k+1+i)\right)$$
$$-(m+2)\mathbf{M}\chi_1^{(k)}\,\mathrm{I}\{k = m\} - 2(m+k+2)\mathbf{M}(\chi_1^{(k)}\chi_{k+1}^{(m)})$$
$$-2(m+k+4)\mathbf{M}(\chi_1^{(k)}\chi_{k+3}^{(m)})$$
$$= \frac{k^2 + m^2 + mk + 7m + 7k + 16}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m\}\,\mathbf{P}\{\lambda_2 = k\} - \frac{m+2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 {=} m {=} k\}$$
$$-\frac{2(m+k+2)}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\} - \frac{2(m+k+4)}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\}.$$

Если $k = 0$, $m > 0$ или $k = m = 0$, то в эту формулу нужно внести такие же поправки, как для b_{mk}. $\square$

Следствие 5. *При $m > k \geq 2$ коэффициенты $b_{mk} = b_{km} < 0$.*

Доказательство. Подставив в формулы для b_{mk} выражения (1.1), (1.22), (1.23), получим для $m > k \geq 2$

$$
\begin{aligned}
b_{mk} = \frac{2^{k+m+1}}{(m+1)!(k+1)!} \Bigg(& \frac{2(k+m+1)}{(k+m+3)(k+m+5)C_{k+m+2}^{m+1}} \\
& + \frac{km(k+m+5)^2 - (k+m+3)((k+m)^2 + 6(k+m) - 3)}{(k+3)(m+3)(k+m+3)(k+m+5)} \Bigg) \\
& + \frac{2^{k+m}}{(m+1)!(k+1)!} \left(\frac{km(k+m+1) + 1 - k^2 - m^2}{(k+m+1)(k+m+3)} \right. \\
& \left. - \frac{(k+m-1)(k+1)(m+1)}{(k+m+1)(k+m+3)C_{k+m}^{m}} \right) \\
& - \frac{(k+m+5)(k+2)(k-1)(m+2)(m-1)2^{k+m}}{(k+3)!(m+3)!} \\
= \frac{2^{k+m}}{(m+1)!(k+1)!} \Bigg(& 2\frac{km(k+m+5)^2 - (k+m+3)((k+m)^2 + 6(k+m) - 3)}{(k+3)(m+3)(k+m+3)(k+m+5)} \\
+ \Bigg(& \frac{4(m+1)(k+1)}{(k+m+3)(k+m+5)(k+m+2)C_{k+m}^{m}} - \frac{(k+m-1)(k+1)(m+1)}{(k+m+1)(k+m+3)C_{k+m}^{m}} \Bigg) \\
& + \left(\frac{km(k+m+1) + 1 - k^2 - m^2}{(k+m+1)(k+m+3)} - \frac{(k+m+5)(k-1)(m-1)}{(k+3)(m+3)} \right) \Bigg) \\
& = \frac{2^{k+m}}{(m+1)!(k+1)!}(s_1 + s_2 + s_3),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 2\frac{km(k+m+5)^2 - (k+m+3)((k+m)^2 + 6(k+m) - 3)}{(k+3)(m+3)(k+m+3)(k+m+5)} \\
&\leq 2\frac{km(k+m+5)}{(k+3)(m+3)(k+m+3)} \leq 2, \\
s_2 &= \frac{(m+1)(k+1)}{(k+m+3)C_{k+m}^{m}} \left(\frac{4}{(k+m+5)(k+m+2)} - \frac{k+m-1}{k+m+1} \right) \\
&\leq \frac{(m+1)(k+1)}{(k+m+3)C_{k+m}^{m}} \left(\frac{2}{27} - \frac{3}{5} \right) < 0, \\
s_3 &= \frac{km(k+m+1) + 1 - k^2 - m^2}{(k+m+1)(k+m+3)} - \frac{(k+m+5)(k-1)(m-1)}{(k+3)(m+3)} \\
&\leq \frac{km}{k+m+3} - \frac{(k+m+5)(k-1)(m-1)}{(k+3)(m+3)}.
\end{aligned}
$$

Если $m > k > 4$, то

$$\frac{(k-1)(m-1)}{(k+3)(m+3)} = \left(1 - \frac{4}{k+3}\right)\left(1 - \frac{4}{m+3}\right) \geq \frac{5}{18},$$

$$\frac{k+m+5}{4} - \frac{km}{k+m+3} = \frac{(k-m)^2 + 8(k+m) + 15}{4(k+m+3)} \geq 2 - \frac{8}{4(k+m+3)} \geq \frac{13}{7},$$

следовательно,

$$s_1 + s_3 - s_5 \leq 2 + \frac{k+m+5}{4} - 2 + \frac{1}{7} - \frac{5(k+m+5)}{18} = -\frac{k+m+5}{36} + \frac{1}{7} < 0.$$

Для завершения доказательства приведём значения b_{mk} для $2 \leq k < m \leq 5$

$$b_{2,3} = -\frac{22}{945}, \quad b_{2,4} = -\frac{3182}{155925}, \quad b_{2,5} = -\frac{68}{6075},$$
$$b_{3,4} = -\frac{28}{1215}, \quad b_{3,5} = -\frac{163}{14175}, \quad b_{4,5} = -\frac{3286}{467775}.$$

□

Утверждение 5. *При* $k = 2, 3$ *ковариация* $\mathrm{Cov}(N_k(T), N_0(T)) > 0$, $T \geq k+3$. *При* $k \geq 5$ *ковариация* $\mathrm{Cov}(N_k(T), N_0(T)) < 0$, $T \geq k+3$.
При $T \geq 9$ *ковариация* $\mathrm{Cov}(N_4(T), N_0(T)) < 0$, *при этом* $\mathrm{Cov}(N_4(8), N_0(8)) = 0$, $\mathrm{Cov}(N_4(7), N_0(7)) > 0$.

Доказательство. Напомним, что согласно теореме A

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\} = \frac{(k^2+9k+12)(k+4)(k-1)2^k}{(k+5)!}, \tag{2.17}$$
$$\mathbf{P}\{\lambda = k\} = \frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.16) (лемма 7), получим

$$\mathrm{Cov}(N_k(T), N_0(T)) = T\left(\frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\} - \frac{k-1}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\}\right)$$
$$+\frac{k^2+k+4}{9}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k\} - \frac{2(k+4)}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2\}$$
$$= T\left(\frac{2(k^2+9k+12)(k+4)(k-1)2^k}{3(k+5)!} - \frac{k-1}{3}\,\frac{(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}\right)$$

$$+\frac{(k^2+k+4)(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}-\frac{2(k+4)(k^2+9k+12)(k+4)(k-1)2^k}{3(k+5)!}$$
$$=\frac{(k-1)(k+4)2^k}{3(k+5)!}\left((-k^3-4k^2+15k+34)T+(k^4+6k^3-5k^2-58k-56)\right).$$

Исследуем знак функции $f(x)=-x^3-4x^2+15x+34$. Для этого рассмотрим её производную $f'(x)=-3x^2-8x+15$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{61}}{3}<\frac{-4+8}{3}<2\Rightarrow f'(x)<0, x\geq 2.$$

Следовательно, так как $f(4)=-34<0$, то $f(x)<0$, $x\geq 4$.

Таким образом, коэффициент при T отрицателен при $k\geq 4$, поэтому найдётся такое $T(k)$, что $\mathrm{Cov}(N_k(T),N_0(T))<0$ при $T>T(k)$.

Чтобы найти $T(k)$, рассмотрим свободный член в выражении для ковариации. Пусть $g(x)=x^4+6x^3-5x^2-58x-56$, тогда

$$g'(x)=4x^3+18x^2-10x-58,$$
$$g''(x)=12x^2+36x-10,$$
$$g''(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{111}}{6}<1\Rightarrow g''(x)>0, x\geq 1,$$
$$g'(2)=26>0\Rightarrow g'(x)>0, x\geq 2, g(4)=272>0\Rightarrow g(x)>0, x\geq 4.$$

Значит, $T(k)$ должно удовлетворять условию $T(k)>-f(k)/g(k)>0$.

$$-\frac{f(k)}{g(k)}=\frac{k^4+6k^3-5k^2-58k-56}{k^3+4k^2-15k-34}=k+2+2\frac{k^2+3k+6}{k^3+4k^2-15k-34}.$$

Так как при $k\geq 5$
$$\frac{k^2+3k+6}{k^3+4k^2-15k-34}<\frac{1}{2},$$
то в этом случае достаточно взять $T(k)=k+3$.

Отношение $-f(4)/g(4)=8$, значит, ковариация $\mathrm{Cov}(N_4(8),N_0(8))=0$ и $\mathrm{Cov}(N_4(T),N_0(T))<0$, $T>8$, откуда $T(4)=9$.

Для $k=2,3$ значение $f(k)>0$, следовательно, коэффициент при T положителен и значение ковариации возрастает по T. Положительность ковариации для $T = k + 3$ проверяется непосредственным вычислением. Так

$$\operatorname{Cov}(N_2(5), N_0(5)) = \frac{4}{35}, \qquad \operatorname{Cov}(N_2(5), N_0(5)) = \frac{8}{135}.$$

$\square$

2.3.2 Асимптотическая нормальность количеств расстояний заданных длин

Индикаторы $\chi_1^{(k)}, \chi_2^{(k)}, \ldots$ при $k = 0$ и при любом $k \geq 2$ образуют последовательность $(k+2)$-зависимых случайных величин.

Определение 4. *Последовательность $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ называется последовательностью m-зависимых случайных величин, если векторы $(X_{u-t}, \ldots, X_u)$ и $(X_v, \ldots, X_{v+s})$ независимы при любых u, v, t, s, для которых $v - u > m$.*

Центральная предельная теорема для суммы m-зависимых случайных величин была показана еще в 1944г. Бернштейном [1]. Векторный аналог был доказан в 1955 г. [15]. В настоящий момент известно большое число обобщений для сумм слабо зависимых векторов (например, [31], [12]).

Упомянем также статью [29], в которой центральная предельная теорема доказана для схемы серий m-зависимых случайных величин, когда m стремится к бесконечности с ростом номера серии (при определенных условиях на скорость роста).

Приведём удобную формулировку центральной предельной теоремы для суммы m-зависимых случайных векторов из [17].

Теорема 6. *Если $\{X_k\}_{k=0}^{+\infty}$ – стационарная в узком смысле последовательность m-зависимых случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^d$, таких что $MX_0 = 0$ и $M\|X_0\|^2 < +\infty$, то*

$$Law\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{w} N(0, C),$$

где $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $c = \|c_{ij}\|$, $c_{ij} = \mathbf{M}X_0^i X_0^j + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{M}(X_0^i X_k^j + X_k^i X_0^j)$.

Замечание 8. *Матрица $C = \operatorname{Cov} S_{m+1} - \operatorname{Cov} S_m$.*

Векторы $(\chi_i, \chi_i^{(2)}, \ldots, \chi_i^{(s)})$ образуют последовательность $(s+2)$-зависимых одинаково распределённых случайных векторов, все моменты которых конечны, что позволяет заключить справедливость центральной предельной теоремы для их суммы.

Напомним обозначение $N^{(s)} = (N_0(T), N_2(T), \ldots, N_s(T))$.

Теорема 7. *Для любого натурального s вектор $N^{(s)}$ асимптотически нормален при $T \to \infty$ с параметрами $(A^{(s)}T, C_sT)$,*

$$Law\left(\frac{1}{\sqrt{T}}(N^{(s)} - TA^{(s)})\right) \xrightarrow{w} N(0, C_s), \quad T \to \infty, \tag{2.18}$$

где

$$A^{(s)} = (a_1, \ldots, a_s) = \mathbf{M}(\chi_1, \chi_1^{(2)}, \ldots, \chi_1^{(s)}) = \frac{1}{3}(1, \mathbf{P}\{\lambda = 2\}, \ldots, \mathbf{P}\{\lambda = s\}), \tag{2.19}$$

а элементы матрицы ковариаций $C_s = \|c_{km}\|_{k,m=1}^{s}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{2}{45}, \\ c_{1k} = c_{k1} &= \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \frac{k-1}{9}\mathbf{P}\{\lambda = k\}, \quad k \geqslant 2, \\ c_{kk} &= \frac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = k\} - \frac{2k+5}{9}\mathbf{P}^2\{\lambda = k\} + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = \lambda_2 = k\} \\ &\quad + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\}, \quad k \geqslant 2, \\ c_{mk} = c_{km} &= -\frac{k+m+5}{9}\mathbf{P}\{\lambda = k\}\mathbf{P}\{\lambda = m\} + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} \\ &\quad + \frac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\}, \quad m > k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Замечание 9. *Из следствия 5 и доказательства утверждения 5 вытекает, что $c_{mk} < 0$ при $m > k \geqslant 2$, $c_{1k} < 0$ при $k \geq 4$, $c_{12}, c_{13} > 0$.*

Доказательство. Пусть $X_i = (X_i^1, \ldots, X_i^s) = (\chi_i, \chi_i^{(2)}, \ldots, \chi_i^{(s)})$, $i = 1, 2, \ldots,$ и $S_T = \sum_{i=1}^{T} X_i$. Тогда $\mathbf{M}S_T = T\mathbf{M}X_1 = T\mathbf{M}(\chi_1, \chi_1^{(2)}, \ldots, \chi_1^{(s)})$ и согласно теореме 6 $Law((S_T - \mathbf{M}S_T)/\sqrt{T}) \xrightarrow{w} N(0, C)$, где элементы матрицы ковариаций C имеют вид

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(\chi_1^{(k)}, \chi_1^{(m)}) + \sum_{i=2}^{s+3} (\mathrm{Cov}(\chi_1^{(k)}, \chi_i^{(m)}) + \mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_1^{(m)})).$$

Вектор $N^{(s)} = S_T - R_T$, где $R_T = (R^1, \ldots, R^s)$, $R^k = \sum_{i=T-1-k}^{T} \chi_i^{(k)}$. Заметим, что $|R^k| \le k$, откуда $R_T/\sqrt{T} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, $T \to \infty$, следовательно,

$$Law\left(\frac{1}{\sqrt{T}}(N^{(s)} - \mathbf{M}S_T)\right) \xrightarrow{w} N(0, C), \quad T \to \infty.$$

Так как индикаторы $\chi_1^{(k)}$, $\chi_i^{(m)}$ независимы при $i > k+3$ и индикаторы $\chi_1^{(m)}$, $\chi_i^{(k)}$ независимы при $i > m+3$, то

$$c_{km} = \sum_{i=2}^{k+3} \mathrm{Cov}(\chi_1^{(k)}, \chi_i^{(m)}) + \sum_{i=1}^{m+3} \mathrm{Cov}(\chi_i^{(k)}, \chi_1^{(m)}).$$

Поскольку последовательность X_i стационарна, можно изменить пределы суммирования, значит,

$$c_{km} = \sum_{i=m+4}^{m+k+5} \mathrm{Cov}(\chi_{m+3}^{(k)}, \chi_i^{(m)}) + \sum_{i=1}^{m+3} \mathrm{Cov}(\chi_{m+3}^{(k)}, \chi_i^{(m)}),$$

что совпадает с коэффициентами b_{km} из леммы 7 ($c_{km} = b_{km}$ при $k, m > 1$ и $c_{11} = b_{00}$, $c_{1m} = b_{0m}$, $m > 1$). $\square$

Найдём численные значения параметров асимптотического распределения вектора $N^{(3)} = (N(T),\, N_2(T),\, N_3(T))$. Для этого, пользуясь формулами (1.1), (2.17), (1.22) и (1.23), вычислим значения следующих вероятностей

$$\mathbf{P}\{\lambda = 2\} = \left.\frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}\right|_{k=2} = \frac{2}{5},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = 3\} = \left.\frac{3(k+2)(k-1)2^k}{(k+3)!}\right|_{k=3} = \frac{1}{3},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = \lambda_2 = 2\} = \left.\frac{(k^2+9k+12)(k+4)(k-1)2^k}{(k+5)!}\right|_{k=2} = \frac{17}{105},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = 2\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = 3\} = \frac{2}{15},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = \lambda_2 = 3\} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = 3\}\mathbf{P}\{\lambda_2 = 3\} = \frac{1}{9},$$

$$\mathbf{P}\{\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=3\}=\mathbf{P}\{\lambda_1=2,\lambda_2=2\}\mathbf{P}\{\lambda_3=3\}=\frac{17}{315},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=3\}=\mathbf{P}\{\lambda_3=3\}\mathbf{P}\{\lambda_1=3,\lambda_2=2\}=\frac{2}{45},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=2\}=\mathbf{P}\{\lambda_1=k,\lambda_2=2,\lambda_3=l\}|_{k=l=2}$$
$$=\frac{3\cdot 2^4}{3!\,3!}\left(\frac{4\cdot 9^2-7(4^2+24-3)}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{10}{63C_6^3}\right)=\frac{62}{945}.$$

Подставляя найденные значения в формулы для $A^{(3)}$ (2.19) и C_3 (2.20), получим следующую теорему как частный случай теоремы 7.

Теорема 8. *Вектор* $(N_0(T),N_2(T),N_3(T))$ *при* $T\to\infty$ *асимптотически нормален с параметрами*

$$A^{(3)}=T\left(\frac{1}{3},\frac{2}{15},\frac{1}{9}\right),\quad C_3=T\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & \frac{20}{315} & \frac{2}{135}\\ \frac{20}{315} & \frac{1772}{14175} & -\frac{22}{945}\\ \frac{2}{135} & -\frac{22}{945} & \frac{32}{405}\end{pmatrix}.$$

2.3.3 Статистический критерий

Как известно, если случайный вектор $Z=(z_1,\ldots,z_s)$ имеет s-мерное нормальное распределение с вектором средних a и невырожденной ковариационной матрицей C, то случайный вектор $C^{-1/2}(Z-a)$ имеет s-мерное нормальное распределение с параметрами $(0,E)$, где E – единичная $s\times s$-матрица, поэтому

$$\|C^{-1/2}(Z-a)\|^2=(C^{-1/2}(Z-a),C^{-1/2}(Z-a))=(C^{-1}(Z-a),Z-a)$$

имеет распределение хи-квадрат с s степенями свободы. Отсюда и из теоремы 7 следует, что при $T\to\infty$ распределение случайной величины

$$\frac{1}{T}\left(C_s^{-1}\left(N^{(s)}(T)-A^{(s)}T\right),N^{(s)}(T)-A^{(s)}T\right)$$

сходится к распределению хи-квадрат с s степенями свободы; это позволяет стандартным образом строить простые критерии согласия с гипотезой

H_0: $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ – последовательность перестановочных случайных величин, таких что $\mathbf{P}\{\xi_1=\xi_2\}=0$.

Например, при заданном уровне значимости α будем принимать H_0 только в том случае, когда

$$\frac{1}{T}\left(C_s^{-1}\left(N^{(s)}(T)-A^{(s)}T\right), N^{(s)}(T)-A^{(s)}T\right)\leq u_{1-\alpha},$$

где u_α – α-квантиль распределения хи-квадрат с s степенями свободы.

Используя теорему 7, можно построить критерий согласия, использующий любой подвектор вектора $N^{(s)}$, в том числе только одну статистику, например, $N(T)$.

Согласно теореме 7 $Law((N(T)-T/3)/\sqrt{T})\xrightarrow{w} N(0,2/15)$. Следовательно, в качестве критического множества для критерия согласия с асимптотическим уровнем значимости α можно использовать

$$\left\{\left|N(T)-\frac{T}{3}\right|>\sqrt{\frac{2}{15}T}\,z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

где z_α – α-квантиль стандартного нормального распределения.

Напомним, что согласно лемме 1 последовательность моментов появления локальных максимумов в $\{\xi_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ при H_0 имеет такое же распределение, как в случае, когда случайные величины $\{\xi_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Поэтому различить две эти ситуации с помощью статистик $N_k(T)$ невозможно.

Глава 3

Локальные максимумы и промежутки между ними в неперестановочных последовательностях

3.1 Скользящие суммы

В этом параграфе изучаются распределение расстояния между соседними локальными максимумами и количества расстояний фиксированных длин между соседними локальными максимумами в последовательности скользящих сумм.

3.1.1 Распределение длины промежутка

Теорема 9. *Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих одно и то же непрерывное распределение, и случайные величины $\xi_n^* = \xi_n + \xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть λ^* – длина промежутка между соседними локальными максимумами последовательности $\{\xi_n^*\}$. Тогда для $l = 1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l\} = \frac{4}{[(l+2)!]^2}\left(l^2 - \frac{2}{l+2}\right) C_{2l+1}^l,$$
$$\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l+1\} = \frac{8l(l+1)}{(l+2)!(l+3)!} C_{2l+1}^l.$$

Замечание 10. *Компьютерные вычисления показывают, что*

$$\mathbf{M}\lambda^* = 4, \quad \mathbf{D}\lambda^* \approx 2,117, \quad \mathbf{P}\{\lambda^* > 8\} \approx 0.0081.$$

Доказательство. Заметим, что последовательность $\{\xi_n^*\}$ стационарна в узком смысле, поэтому интересующие нас вероятности $\mathbf{P}\{\lambda^* = m\}$ равны

$$\mathbf{P}\{\lambda^* = m\} = \mathbf{P}\{\chi_{m+2}^* = 1,\, \chi_3^* + \cdots + \chi_{m+1}^* = 0 \,|\, \chi_2^* = 1\}$$
$$= \frac{\mathbf{P}\{\chi_2^* \chi_{m+2}^* = 1,\, \chi_3^* + \cdots + \chi_{m+1}^* = 0\}}{\mathbf{P}\{\chi_2^* = 1\}},$$

где $\chi_i^* = \mathrm{I}\{\xi_{i-1}^* < \xi_i^* > \xi_{i+1}^*\}$.

Вычислим вероятность, стоящую в знаменателе,

$$\mathbf{P}\{\chi_2^* = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^*\} = \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 < \xi_2 + \xi_3 > \xi_3 + \xi_4\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3,\, \xi_2 > \xi_4\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 < \xi_3\right\} \mathbf{P}\{\xi_2 > \xi_4\} = \frac{1}{4}. \qquad (3.1)$$

Вероятность, стоящую в числителе, представим в виде суммы

$$\mathbf{P}\{\chi_2^*\chi_{m+2}^* = 1,\, \chi_3^* + \cdots + \chi_{m+1}^* = 0\} = \sum_{t=3}^{m+1} P(t, m), \qquad (3.2)$$

$$P(t, m) = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^* > \cdots > \xi_{t-1}^* > \xi_t^* < \xi_{t+1}^* < \cdots < \xi_{m+1}^* < \xi_{m+2}^* > \xi_{m+3}^*\}.$$

Наша задача свелась в вычислению вероятностей $P(t, m)$.

Чётное расстояние. Рассмотрим сначала случай чётного $m = 2l$, который, в свою очередь, разобьем на два случая: чётное и нечётное t.

Пусть t чётно ($t = 2k$), тогда

$$P(2k, 2l) = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* >> \cdots > \xi_{2k-1}^* > \xi_{2k}^* < \xi_{2k+1}^* < \cdots < \xi_{2l+2}^* > \xi_{2l+3}^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \xi_5 > \cdots > \xi_{2k+1} < \cdots < \xi_{2l+3},$$
$$\xi_2 > \xi_4 > \cdots > \xi_{2k} < \cdots < \xi_{2l+2} > \xi_{2l+4}\}.$$

Воспользуемся тем, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, и получим

$$P(2k, 2l) = \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \xi_5 > \cdots > \xi_{2k+1} < \cdots < \xi_{2l+3}\}$$
$$\times \mathbf{P}\{\xi_2 > \xi_4 > \cdots > \xi_{2k} < \cdots < \xi_{2l+2} > \xi_{2l+4}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \cdots > \xi_{k+1} < \cdots < \xi_{l+2}\} \mathbf{P}\{\xi_1 > \cdots > \xi_k < \cdots < \xi_{l+1} > \xi_{l+2}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \cdots > \xi_{k+1} < \cdots < \xi_{l+2}\} \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \cdots > \xi_{l+3-k} < \cdots < \xi_{l+2}\}$$
$$= A(k+1, l+2) A(l+3-k, l+2),$$

где $A(k, l) = \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 > \cdots > \xi_k < \cdots < \xi_l\}$.

Аналогичным образом разберём случай нечётного $t = 2k - 1$

$$P(2k-1, 2l) = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \cdots > \xi_{2k-2}^* > \xi_{2k-1}^* < \xi_{2k}^* < \cdots < \xi_{2l+2}^* > \xi_{2l+3}^*\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \dots > \xi_{2k-1} < \dots < \xi_{2l+3},\, \xi_2 > \xi_4 > \dots > \xi_{2k} < \dots < \xi_{2l+2} > \xi_{2l+4}\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \dots > \xi_{2k-1} < \dots < \xi_{2l+3}\}\,\mathbf{P}\{\xi_2 > \dots > \xi_{2k} < \dots < \xi_{2l+2} > \xi_{2l+4}\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 > \dots > \xi_k < \dots < \xi_{l+2}\}\,\mathbf{P}\{\xi_1 > \dots > \xi_k < \dots < \xi_{l+1} > \xi_{l+2}\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 > \dots > \xi_k < \dots < \xi_{l+2}\}\,\mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \dots > \xi_{l+3-k} < \dots < \xi_{l+2}\} \\
&= A(k, l+2)A(l+3-k, l+2).
\end{aligned}
$$

Лемма 8. *Вероятности $A(k,l)$ вычисляются по формуле*

$$
A(k,l) = \frac{lC_{l-2}^{k-2} - C_{l-1}^{k-1}}{l!}.
$$

Доказательство. Так как случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то $A(k,l) = a(k,l)/l!$, где $a(k,l)$ равно количеству перестановок $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_l)$ порядка l, удовлетворяющих соотношению

$$
\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 > \dots > \pi_k < \dots < \pi_l.
$$

Заметим, что в каждой такой перестановке наименьшее значение, т.е. 1, могут принимать только π_1 и π_k. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. $\pi_1 = 1$. Тогда, так как $\pi_k = \min_{i=2,\dots,l} \pi_i$, то $\pi_k = 2$, и вся перестановка однозначно определяется выбором $\pi_2, \dots, \pi_{k-1}$, который можно произвести C_{l-2}^{k-2} способами.

2. $\pi_k = 1$. В этом случае для того, чтобы определить перестановку, нужно выбрать $k-1$ число для $\pi_1, \dots, \pi_{k-1}$, и из этих чисел выбрать значение π_1, учитывая, что оно не может быть наибольшим числом. Таким образом, получаем $(k-2)C_{l-1}^{k-1}$ перестановок.

Сложим полученные количества перестановок и найдём

$$
\begin{aligned}
a(k,l) &= C_{l-2}^{k-2} + (k-2)C_{l-1}^{k-1} = C_{l-2}^{k-2} + (k-1)C_{l-1}^{k-1} - C_{l-1}^{k-1} \\
&= C_{l-2}^{k-2} + (l-1)C_{l-2}^{k-2} - C_{l-1}^{k-1} = lC_{l-2}^{k-2} - C_{l-1}^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. □

Вернёмся к вычислению $\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l\}$, переписав (3.2) в виде

$$\frac{1}{4}\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l\} = \sum_{k=3}^{2l+1} P(k, 2l) = \sum_{k=2}^{l} (P(2k-1, 2l) + P(2k, 2l)) + P(2l+1, 2l).$$

Вычислим сначала слагаемые отдельно

$$\begin{aligned}
P(2k-1, 2l) + P(2k, 2l) &= A(l+3-k, l+2)\,(A(k, l+2) + A(k+1, l+2)) \\
&= \frac{(l+2)C_l^{l+1-k} - C_{l+1}^{l+2-k}}{[(l+2)!]^2}[(l+2)C_l^{k-2} - C_{l+1}^{k-1} + (l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^{k}] \\
&= \frac{(l+2)C_l^{l+1-k} - C_{l+1}^{l+2-k}}{[(l+2)!]^2}[(l+2)C_{l+1}^{k-1} - C_{l+2}^{k}] \\
&= \frac{(l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^{k-1}}{[(l+2)!]^2}[kC_{l+2}^{k} - C_{l+2}^{k}] = \frac{(l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^{k-1}}{[(l+2)!]^2}(k-1)C_{l+2}^{k} \\
&= \frac{l(l+2)C_{l-1}^{k-2}C_{l+2}^{k} - (l+1)C_l^{k-2}C_{l+2}^{k}}{[(l+2)!]^2},
\end{aligned}$$

здесь мы воспользовались равенствами

$$C_l^k + C_l^{k+1} = C_{l+1}^{k+1}, \quad C_l^k = C_l^{l-k}, \quad lC_{l-1}^k = (k+1)C_l^{k+1}.$$

Последнее слагаемое равно

$$\begin{aligned}
P(2l+1, 2l) &= \frac{[(l+2)C_l^{l-1} - C_{l+1}^{l}]\,[(l+2)C_l^0 - C_{l+1}^1]}{[(l+2)!]^2} \\
&= \frac{[(l+2)l - (l+1)][(l+2) - (l+1)]}{[(l+2)!]^2} = \frac{l^2 + l - 1}{[(l+2)!]^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l\} = \frac{4}{[(l+2)!]^2}\left(\sum_{k=2}^{l}\left[l(l+2)C_{l-1}^{k-2}C_{l+2}^{k} - (l+1)C_l^{k-2}C_{l+2}^{k}\right] + l^2 + l - 1\right).$$

Просуммируем отдельно произведения биномиальных коэффициентов, используя равенство $\sum_{k=0}^{l} C_m^{l-k}C_n^k = C_{m+n}^l$,

$$\sum_{k=2}^{l} C_{l-1}^{k-2}C_{l+2}^{k} = \sum_{k=0}^{l-2} C_{l-1}^{k}C_{l+2}^{l-k} = C_{2l+1}^{l} - C_{l-1}^{l-1}C_{l+2}^{1} = C_{2l+1}^{l} - (l+2),$$

$$\sum_{k=2}^{l} C_l^{k-2} C_{l+2}^k = \sum_{k=0}^{l-2} C_l^k C_{l+2}^{l-k} = C_{2l+2}^l - C_l^{l-1} C_{l+2}^1 - C_l^l C_{l+2}^0$$
$$= \frac{2l+2}{l+2} C_{2l+1}^l - l(l+2) - 1.$$

Подставляя полученные значения сумм, найдём сначала множитель при C_{2l+1}^l

$$l(l+2) - (l+1)\frac{2l+2}{l+2} = l(l+2) - \frac{2(l+1)^2}{l+2} = l^2 + 2l - 2l - \frac{2}{l+2} = l^2 - \frac{2}{l+2}.$$

Теперь вычислим свободный член

$$-l(l+2)(l+2) + (l+1)(l(l+2)+1) + l^2 + l - 1$$
$$= l(l+2)(-l-2+l+1) + l + 1 + l^2 + l - 1 = 0.$$

Получили, что

$$\frac{[(l+2)!]^2}{4} \mathbf{P}\{\lambda^* = 2l\} = C_{2l+1}^l \left(l^2 - \frac{2}{l+2} \right), \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Нечётное расстояние. Теперь рассмотрим случай нечётного $m = 2l+1$. Как и прежде, пусть сначала t чётно ($t = 2k$). Представим вероятность $P(2k, 2l+1)$ в виде произведения

$$P(2k, 2l+1) = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^* > \cdots > \xi_{2k-1}^* > \xi_{2k}^* < \xi_{2k+1}^* < \cdots < \xi_{2l+3}^* > \xi_{2l+4}^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \cdots > \xi_{2k+1} < \cdots < \xi_{2l+3} > \xi_{2l+5},\, \xi_2 > \cdots > \xi_{2k} < \cdots < \xi_{2l+4}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \cdots > \xi_{2k+1} < \cdots < \xi_{2l+3} > \xi_{2l+5}\}\, \mathbf{P}\{\xi_2 > \cdots > \xi_{2k} < \cdots > \xi_{2l+4}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 > \cdots > \xi_{k+1} < \cdots < \xi_{l+2} > \xi_{l+3}\}\, \mathbf{P}\{\xi_1 > \cdots > \xi_k < \cdots < \xi_{l+2}\}$$
$$= B(k+1, l+3)\, D(k, l+2),$$

где

$$B(k+1, l+3) = \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 > \cdots > \xi_{k+1} < \cdots < \xi_{l+2} > \xi_{l+3}\},$$
$$D(k, l+2) = \mathbf{P}\{\xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_k < \cdots < \xi_{l+1} < \xi_{l+2}\}.$$

Теперь рассмотрим нечётное $t = 2k-1$. В этом случае

$$
\begin{aligned}
P(2k-1,2l+1) &= \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \dots > \xi_{2k-2}^* > \xi_{2k-1}^* < \xi_{2k}^* < \dots < \xi_{2l+3}^* > \xi_{2l+4}^*\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \dots > \xi_{2k-1} < \dots < \xi_{2l+3} > \xi_{2l+5},\, \xi_2 > \dots > \xi_{2k} < \dots < \xi_{2l+4}\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 > \dots > \xi_{2k-1} < \dots < \xi_{2l+3} > \xi_{2l+5}\}\, \mathbf{P}\{\xi_2 > \dots > \xi_{2k} < \dots < \xi_{2l+4}\} \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_2 > \xi_3 > \dots > \xi_k < \dots < \xi_{l+2} > \xi_{l+3}\}\, \mathbf{P}\{\xi_1 > \dots > \xi_k < \dots < \xi_{l+2}\} \\
&= B(k,l+3)\, D(k,l+2).
\end{aligned}
$$

Лемма 9. *Вероятности $B(k+1,l+3)$, $D(k,l+2)$ вычисляются по формулам*

$$
B(k+1,l+3) = \frac{l+2}{(l+3)!}\left[(l+3)C_l^{k-1} - C_{l+2}^k\right],
$$
$$
D(k,l+2) = \frac{C_{l+1}^{k-1}}{(l+2)!}.
$$

Доказательство. Проведём такие же рассуждения, как при нахождении вероятностей $A(k,l)$. Итак,

$$
B(k+1,l+3) = \frac{b(l)}{(l+3)!},
$$

где $b(l)$ равно количеству перестановок $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_{l+3})$ порядка $l+3$, удовлетворяющих условию $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 > \dots > \pi_{k+1} < \dots < \pi_{l+2} > \pi_{l+3}$. Минимальное значение (т.е. 1) могут принимать только π_1, π_{k+1}, π_{l+3}. Рассмотрим эти случаи.

1. $\pi_{k+1} = 1$. В этом случае перестановка полностью определяется выбором сначала k чисел – значений $\pi_1,\dots,\pi_k$ (C_{l+2}^k способов), затем выбором из них значения для π_1 ($k-1$ способ, т.к. π_1 не может быть максимумом) и выбором из оставшихся $l+2-k$ чисел значения для π_{l+3} ($l+1-k$ способов, т.к. π_{l+3} не может быть максимумом). Поэтому количество таких перестановок равно $C_{l+2}^k(k-1)(l+1-k)$.

2. $\pi_1 = 1$. В этом случае условие $\pi_1 < \pi_2$ выполняется автоматически, и искомое число перестановок в точности равно

$$
a(l+3-k,l+2) = (l+2)C_l^{l+1-k} - C_{l+1}^{l+2-k} = (l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^{k-1}.
$$

3. $\pi_{l+3} = 1$. В этом случае условие $\pi_{l+2} > \pi_{l+3}$ выполняется автоматически, и искомое число перестановок в точности равно

$$a(k+1, l+2) = (l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^k.$$

Сложим полученные количества перестановок и найдём

$$\begin{aligned} b(l) &= (k-1)(l+1-k)C_{l+2}^k + (l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^{k-1} + (l+2)C_l^{k-1} - C_{l+1}^k \\ &= (k-1)(l+1-k)C_{l+2}^k + 2(l+2)C_l^{k-1} - (C_{l+1}^{k-1} + C_{l+1}^k) \\ &= (k-1)(l+1-k)C_{l+2}^k + 2(l+2)C_l^{k-1} - C_{l+2}^k \\ &= k(l+2-k)C_{l+2}^k - (l+2)C_{l+2}^k + 2(l+2)C_l^{k-1}, \end{aligned}$$

так как $C_{l+1}^{k-1} + C_{l+1}^k = C_{l+2}^k$. Теперь воспользуемся равенством $k(l+2-k)C_{l+2}^k = (l+2)(l+1)C_l^{k-1}$ и получим, что

$$\begin{aligned} b(l) &= (l+2)(l+1)C_l^{k-1} + 2(l+2)C_l^{k-1} - (l+2)C_{l+2}^k \\ &= (l+2)(l+3)C_l^{k-1} - (l+2)C_{l+2}^k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$B(k+1, l+3) = \frac{l+2}{(l+3)!}\left[(l+3)C_l^{k-1} - C_{l+2}^k\right].$$

Теперь найдём, чему равно $D(k+1, l+2)$. Для этого нужно подсчитать количество перестановок $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{l+2})$ порядка $l+2$, удовлетворяющих условию $\sigma_1 > \cdots > \sigma_k < \cdots < \sigma_{l+2}$. Каждая такая перестановка однозначно определяется выбором значений $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ из чисел $2, 3, \ldots, l+2$ (так как $\sigma_k = 1$). Поэтому

$$D(k, l+2) = \frac{C_{l+1}^{k-1}}{(l+2)!}.$$

$\square$

Суммируем полученные вероятности

$$P(2k, 2l+1) + P(2k-1, 2l+1) = (B(k+1, l+3) + B(k, l+3))D(k, l+2)$$

$$= \frac{C_{l+1}^{k-1}}{(l+2)!}\frac{l+2}{(l+3)!}\left[(l+3)C_l^{k-1} - C_{l+2}^k + (l+3)C_l^{k-2} - C_{l+2}^{k-1}\right]$$
$$= \frac{C_{l+1}^{k-1}}{(l+1)!}\frac{1}{(l+3)!}\left[(l+3)C_{l+1}^{k-1} - C_{l+3}^k\right].$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4}\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l+1\} = \sum_{k=3}^{2l+2} P(k, 2l+1) = \sum_{k=2}^{l+1}(P(2k-1, 2l+1) + P(2k, 2l+1))$$
$$= \frac{1}{(l+1)!\,(l+3)!}\sum_{k=2}^{l+1}\left[(l+3)C_{l+1}^{k-1}C_{l+1}^{k-1} - C_{l+1}^{k-1}C_{l+3}^k\right].$$

Вычислим отдельно суммы произведений биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=2}^{l+1} C_{l+1}^{k-1}C_{l+1}^{k-1} = \sum_{k=1}^{l} C_{l+1}^k C_{l+1}^k = \sum_{k=1}^{l} C_{l+1}^{l+1-k}C_{l+1}^k = \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^{l+1-k}C_{l+1}^k - C_{l+1}^{l+1}C_{l+1}^0$$
$$-C_{l+1}^0 C_{l+1}^{l+1} = C_{2l+2}^{l+1} - 2,$$
$$\sum_{k=2}^{l+1} C_{l+1}^{k-1}C_{l+3}^k = \sum_{k=2}^{l+1} C_{l+1}^{l+2-k}C_{l+3}^k = \sum_{k=1}^{l+2} C_{l+1}^{l+2-k}C_{l+3}^k - C_{l+1}^{l+1}C_{l+3}^1 - C_{l+1}^0 C_{l+3}^{l+2}$$
$$= C_{2l+4}^{l+2} - 2(l+3) = 2\frac{2l+3}{l+2}C_{2l+2}^{l+1} - 2(l+3).$$

Используя полученные выражения, найдём множитель при C_{2l+2}^{l+1}

$$(l+3) - 2\frac{2l+3}{l+2} = \frac{l^2+l}{l+2} = \frac{l(l+1)}{l+2}.$$

При этом свободный член равен $-2(l+3) - (-2(l+3)) = 0$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\lambda^* = 2l+1\} = \frac{8l(l+1)}{(l+2)!(l+3)!}C_{2l+1}^l, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

и теорема 9 полностью доказана. □

3.1.2 Предельное распределение статистик, построенных по ξ_i^*

Пусть $N_0^*(T)$ – количество локальных максимумов, $N_k^*(T)$, $k \geq 2$, – количество расстояний длины k между соседними локальными максимумами последовательности $\{\xi_i^*\}_{i=1}^T$

$$N_0^*(T) = \sum_{i=1}^{T-2} \chi_{i+1}^*, \qquad N_k^*(T) = \sum_{i=1}^{T-2-k} \chi_{i+1}^{*(k)}, \quad k \geq 2,$$

$$\chi_i^* = \chi_{i+1}^{*(0)} = \mathrm{I}\{\xi_{i-1}^* < \xi_i^* > \xi_{i+1}^*\},$$

$$\chi_{i+1}^{*(k)} = \mathrm{I}\{\chi_i^*\chi_{i+k}^* = 1, \chi_{i+1}^* + \cdots + \chi_{i+k-1}^* = 0\}, \quad k \geq 2.$$

Вектор $N^{*(s)} = (N_0^*(T), N_2^*(T), \ldots, N_s^*(T))$ так же, как и в случае независимых случайных величин ξ_i (см. параграф 2.3), асимптотически нормален (индикаторы $\chi_i^{*(k)}$ $(k+3)$-зависимы, все их моменты конечны). Однако, вычисление матрицы ковариаций в общем виде (а именно, совместных распределений длин соседних промежутков) сопряжено с техническими трудностями – совместные вероятности, как и одномерные, можно представить в виде сумм, к сожалению, весьма громоздких и не дающих представления об итоговых значениях. Поэтому рассмотрим только вектор $(N_0^*(T), N_2^*(T), N_3^*(T))$ и найдём для него параметры асимптотического распределения.

Теорема 10. *Вектор $(N^*(T), N_2^*(T), N_3^*(T))$ при $T \to \infty$ асимптотически нормален с параметрами $(A^{(s)*}T, C_s^*T)$, где*

$$A^{(s)*} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{36}, \frac{1}{12}\right), \qquad C_s^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{144} & \frac{5}{288} & \frac{5}{144} \\ \frac{5}{288} & \frac{52}{2025} & \frac{1}{720} \\ \frac{5}{144} & \frac{1}{720} & \frac{259}{3456} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Асимптотическая нормальность вектора $N^{*(s)}$ следует из теоремы 6 (с таким же обоснованием, как для вектора $N^{(s)}$ в доказательстве теоремы 7).

Найдём параметры асимптотической нормальности.

В силу линейности математического ожидания и стационарности последовательности $\chi_i^{*(k)}$

$$\mathbf{M}N_k^*(T) = \sum_{i=1}^{T-2-k} \mathbf{M}\chi_{i+1}^{*(k)} = (T-2-k)\mathbf{M}\chi_1^{*(k)} = (T-2-k)\mathbf{P}\{\chi_1^{*(k)} = 1\}.$$

Пользуясь теоремой 9 и формулой (3.1) найдём значения вероятностей

$$\mathbf{P}\{\chi_1^* = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^*\} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_1^{*(2)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^* = \chi_3^* = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^* = 1\}\mathbf{P}\{\lambda^* = 2\} = \frac{1}{36},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_1^{*(3)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^* = \chi_4^* = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^* = 1\}\mathbf{P}\{\lambda^* = 3\} = \frac{1}{12}.$$

Откуда

$$\mathbf{M}N^*(T) = \frac{T-2}{4}, \quad \mathbf{M}N_2^*(T) = \frac{T-4}{36}, \quad \mathbf{M}N_3^*(T) = \frac{T-5}{12}.$$

Согласно теореме 6 элементы c_{km}^* матрицы ковариаций C_s^* имеют вид (будем считать, что строки и столбцы этой матрицы нумеруются числами $0, 2, 3, \ldots, s$)

$$c_{km}^* = \mathrm{Cov}(\chi_1^{*(k)}, \chi_1^{*(m)}) + \sum_{i=2}^{s+4}(\mathrm{Cov}(\chi_1^{*(k)}, \chi_i^{*(m)}) + \mathrm{Cov}(\chi_i^{*(k)}, \chi_1^{*(m)})).$$

Так как $\chi_j^{*(k)}$ и $\chi_i^{*(m)}$ независимы при $j - i > m + 3$, $i - j > k + 3$, и последовательность индикаторов χ_i^* стационарна, то

$$c_{km}^* = \sum_{i=1}^{k+m+7} \mathrm{Cov}(\chi_i^{*(k)}, \chi_{k+4}^{*(m)}) = \sum_{i=1}^{k+m+7} \mathbf{M}\chi_i^{*(k)}\chi_{k+4}^{*(m)} - \sum_{i=1}^{k+m+7} \mathbf{M}\chi_i^{*(k)}\mathbf{M}\chi_{k+4}^{*(m)}.$$

По определению индикаторов $\chi_i^{*(j)}$

$$\mathbf{M}\chi_i^{*(k)}\chi_{k+4}^{*(m)} = \mathbf{P}\{\chi_i^{*(k)}\chi_{k+4}^{*(m)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_i^*\chi_{k+i}^* = 1, \chi_j^* = 0, j = i+2, \ldots, k-1,$$
$$\chi_{k+4}^*\chi_{k+m+4}^* = 1, \chi_t = 0, t = k+6, \ldots, k+m+3\}.$$

Откуда видно, что входящие в суммы совместные вероятности не равны нулю только при следующих значениях индекса суммирования:

$$i = 1, \quad i = 2, \quad i = 4, \quad i = k+m+4, \quad i = k+m+6, \quad i = k+m+7$$

и, дополнительно, при $i = k+4 = m+4$, если $k = m$.

Заметим, что в силу симметрии (так как для любого натурального t векторы $(\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots \chi_t^*)$ и $(\chi_t^*, \chi_{t-1}^*, \ldots, \chi_1^*)$ одинаково распределены)

$$\mathbf{P}\{\chi_i^{*(k)} = \chi_{k+4}^{*(m)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_{k+m+8-i}^{*(k)} = \chi_{k+3}^{*(m)} = 1\}, \quad i \le k + 4 + \frac{m}{2}.$$

Таким образом,

$$c_{km}^* = 2\,\mathbf{P}\{\chi_1^{*(k)}\chi_{k+4}^{*(m)} = 1\} + 2\,\mathbf{P}\{\chi_2^{*(k)}\chi_{k+4}^{*(m)} = 1\} + 2\,\mathbf{P}\{\chi_4^{*(k)}\chi_{k+4}^{*(m)} = 1\}$$
$$+\mathbf{P}\{\chi_{k+4}^{*(m)} = 1, k = m\} - (k+m+7)\,\mathbf{P}\{\chi_1^{*(k)} = 1\}\,\mathbf{P}\{\chi_1^{*(m)} = 1\}. \tag{3.3}$$

При этом (см. доказательство теоремы 9)

$$\mathbf{P}\{\chi_1^* = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}\{\chi_1^{*(t)} = 1\} = \mathbf{P}\{\lambda^* = t\}\,\mathbf{P}\{\chi_1^* = 1\} = \frac{1}{4}\mathbf{P}\{\lambda^* = t\}. \tag{3.4}$$

Найдём значения коэффициентов c_{km}^* для $k, m \le 3$.

k=0, m=0. Согласно определению индикаторов χ_i^* и теореме 9

$$\mathbf{P}\{\chi_1^*\chi_4^* = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^{*(3)} = 1\} = \frac{1}{4}\mathbf{P}\{\lambda^* = 3\} = \frac{1}{12},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_2^*\chi_4^* = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^{*(2)} = 1\} = \frac{1}{4}\mathbf{P}\{\lambda^* = 2\} = \frac{1}{36}.$$

Откуда по формуле (3.3)

$$c_{00}^* = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4} - \frac{7}{16} = \frac{5}{144}.$$

k=0, m=2. Воспользуемся тем, что $\xi_i^* = \xi_i + \xi_{i+1}$ и случайные величины $\{\xi_i\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, и получим

$$\mathbf{P}\{\chi_1^*\chi_4^{*(2)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^*\chi_4^*\chi_6^* = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_0^* < \xi_1^* > \xi_2^*, \xi_3^* < \xi_4^* > \xi_5^* < \xi_6^* > \xi_7^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 + \xi_1 < \xi_1 + \xi_2 > \xi_2 + \xi_3,\ \xi_3 + \xi_4 < \xi_4 + \xi_5 > \xi_5 + \xi_6 < \xi_6 + \xi_7 > \xi_7 + \xi_8\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_2,\ \xi_1 > \xi_3 < \xi_5 < \xi_7,\ \xi_4 > \xi_6 > \xi_8\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_2\}\,\mathbf{P}\{\xi_1 > \xi_3 < \xi_5 < \xi_7\}\,\mathbf{P}\{\xi_4 > \xi_6 > \xi_8\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{96},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_2^*\chi_4^{*(2)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_2^*\chi_4^*\chi_6^* = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^* < \xi_4^* > \xi_5^* < \xi_6^* > \xi_7^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 < \xi_2 + \xi_3 > \xi_3 + \xi_4 < \xi_4 + \xi_5 > \xi_5 + \xi_6 < \xi_6 + \xi_7 > \xi_7 + \xi_8\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 < \xi_5 < \xi_7,\ \xi_2 > \xi_4 > \xi_6 > \xi_8\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3 < \xi_5 < \xi_7\}\,\mathbf{P}\{\xi_2 > \xi_4 > \xi_6 > \xi_8\} = \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{4!} = \frac{1}{576},$$

$$\mathbf{P}\{\chi_4^*\chi_4^{*(2)}=1\}=\mathbf{P}\{\chi_4^{*(2)}=1\}=\frac{1}{4}\mathbf{P}\{\lambda^*=2\}=\frac{1}{36}.$$

Откуда по формуле (3.3)

$$c_{02}^*=\frac{1}{48}+\frac{1}{288}+\frac{1}{18}-\frac{9}{4\cdot 36}=\frac{5}{288}.$$

k=0, m=3. Аналогично предыдущим вычислениям найдём значения вероятностей $\mathbf{P}\{\chi_t^*\chi_4^{*(3)}=1\}$, $t=1,2,4$,

$$\mathbf{P}\{\chi_1^*\chi_4^{*(3)}=1\}=\mathbf{P}\{\chi_1^*\chi_4^*\chi_7^*=1\}=\mathbf{P}\{\xi_0^*<\xi_1^*>\xi_2^*,\,\xi_3^*<\xi_4^*>\xi_5^*,\,\xi_6^*<\xi_7^*>\xi_8^*\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_0+\xi_1<\xi_1+\xi_2>\xi_2+\xi_3,\,\xi_3+\xi_4<\xi_4+\xi_5>\xi_5+\xi_6,$$
$$\xi_6+\xi_7<\xi_7+\xi_8>\xi_8+\xi_9\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_0<\xi_2,\,\xi_1>\xi_3<\xi_5,\,\xi_4>\xi_6<\xi_8,\,\xi_7>\xi_9\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_0<\xi_2\}\,\mathbf{P}\{\xi_1>\xi_3<\xi_5\}\,\mathbf{P}\{\xi_4>\xi_6<\xi_8\}\,\mathbf{P}\{\xi_7>\xi_9\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{36},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_2^*\chi_4^{*(3)}=1\}=\mathbf{P}\{\chi_2^*\chi_4^*\chi_7^*=1\}=\mathbf{P}\{\chi_2^{*(2)}\chi_7^*=1\}=\mathbf{P}\{\chi_4^{*(2)}\chi_1^*=1\}=\frac{1}{96},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_4^*\chi_4^{*(3)}=1\}=\mathbf{P}\{\chi_4^{*(3)}=1\}=\frac{1}{12}.$$

Откуда по формуле (3.3)

$$c_{03}^*=\frac{1}{18}+\frac{1}{48}+\frac{1}{6}-\frac{10}{4\cdot 12}=\frac{5}{144}.$$

k=2, m=2. Найдём вероятности $\mathbf{P}\{\chi_t^{*(2)}\chi_6^{*(2)}=1\}$, $t=1,2,4$, пользуясь свойствами последовательности $\{\xi_i\}$,

$$\mathbf{P}\{\chi_1^{*(2)}\chi_6^{*(2)}=1\}=\mathbf{P}\{\xi_0^*<\xi_1^*>\xi_2^*<\xi_3^*>\xi_4^*,\xi_5^*<\xi_6^*>\xi_7^*<\xi_8^*>\xi_9^*\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_0+\xi_1<\xi_1+\xi_2>\xi_2+\xi_3<\xi_3+\xi_4>\xi_4+\xi_5,$$
$$\xi_5+\xi_6<\xi_6+\xi_7>\xi_7+\xi_8<\xi_8+\xi_9>\xi_9+\xi_{10}\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_0<\xi_2<\xi_4,\,\xi_1>\xi_3>\xi_5<\xi_7<\xi_9,\,\xi_6>\xi_8>\xi_{10}\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_0<\xi_2<\xi_4\}\,\mathbf{P}\{\xi_1>\xi_3>\xi_5<\xi_7<\xi_9\}\,\mathbf{P}\{\xi_6>\xi_8>\xi_{10}\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5!}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{720},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_2^{*(2)}\chi_6^{*(2)}=1\}=\mathbf{P}\{\xi_1^*<\xi_2^*>\xi_3^*<\xi_4^*>\xi_5^*<\xi_6^*>\xi_7^*<\xi_8^*>\xi_9^*\}$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2<\xi_2+\xi_3>\xi_3+\xi_4<\xi_4+\xi_5>\xi_5+\xi_6<\xi_6+\xi_7$$
$$>\xi_7+\xi_8<\xi_8+\xi_9>\xi_9+\xi_{10}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1<\xi_3<\xi_5<\xi_7<\xi_9,\, \xi_2>\xi_4>\xi_6>\xi_8>\xi_{10}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1<\xi_3<\xi_5<\xi_7<\xi_9\}\,\mathbf{P}\{\xi_2>\xi_4>\xi_6>\xi_8>\xi_{10}\} = \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{5!} = \frac{1}{14400},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_4^{*(2)}\chi_6^{*(2)}=1\} = \mathbf{P}\{\chi_4^{*}=\chi_6^{*(2)}=1\} = \mathbf{P}\{\chi_2^{*}=\chi_4^{*(2)}=1\} = \frac{1}{576}.$$

Откуда по формуле (3.3)

$$c_{22}^{*} = \frac{1}{360}+\frac{1}{7200}+\frac{1}{288}+\frac{1}{36}-\frac{11}{1296}=\frac{52}{2025}.$$

k=2, m=3. Аналогично предыдущим вычислениям

$$\mathbf{P}\{\chi_1^{*(2)}=\chi_6^{*(3)}=1\} = \mathbf{P}\{\xi_0^*<\xi_1^*>\xi_2^*<\xi_3^*>\xi_4^*,\, \xi_5^*<\xi_6^*>\xi_7^*,\, \xi_8^*<\xi_9^*>\xi_{10}^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0+\xi_1<\xi_1+\xi_2>\xi_2+\xi_3<\xi_3+\xi_4>\xi_4+\xi_5,$$
$$\xi_5+\xi_6<\xi_6+\xi_7>\xi_7+\xi_8,\, \xi_8+\xi_9<\xi_9+\xi_{10}>\xi_{10}+\xi_{11}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0<\xi_2<\xi_4,\, \xi_1>\xi_3>\xi_5<\xi_7,\, \xi_6>\xi_8<\xi_{10},\, \xi_9>\xi_{11}\}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{288},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_2^{*(2)}=\chi_6^{*(3)}=1\} = \mathbf{P}\{\xi_1^*<\xi_2^*>\xi_3^*<\xi_4^*>\xi_5^*<\xi_6^*>\xi_7^*,\, \xi_8^*<\xi_9^*>\xi_{10}^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1+\xi_2<\xi_2+\xi_3>\xi_3+\xi_4<\xi_4+\xi_5>\xi_5+\xi_6<\xi_6+\xi_7>\xi_7+\xi_8,$$
$$\xi_8+\xi_9<\xi_9+\xi_{10}>\xi_{10}+\xi_{11}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1<\xi_3<\xi_5<\xi_7,\, \xi_2>\xi_4>\xi_6>\xi_8<\xi_{10},\, \xi_9>\xi_{11}\}$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_1<\xi_3<\xi_5<\xi_7\}\mathbf{P}\{\xi_2>\xi_4>\xi_6>\xi_8<\xi_{10}\}\mathbf{P}\{\xi_9>\xi_{11}\}=\frac{1}{4!}\cdot\frac{4}{5!}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{1440},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_4^{*(2)}=\chi_6^{*(3)}=1\} = \mathbf{P}\{\chi_4^{*(2)}=\chi_9^{*}=1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^{*}=\chi_4^{*(2)}=1\} = \frac{1}{96}.$$

Откуда по формуле (3.3)

$$c_{23}^{*} = \frac{1}{144}+\frac{1}{720}+\frac{1}{48}-\frac{12}{12\cdot 36}=\frac{1}{720}.$$

k=3, m=3. Найдём вероятности $\mathbf{P}\{\chi_t^{*(3)}\chi_7^{*(3)}=1\}$, $t=1,2,4$, как и ранее, пользуясь свойствами последовательности $\{\xi_i\}$,

$$\mathbf{P}\{\chi_1^{*(3)} = \chi_7^{*(3)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^* = \chi_4^* = \chi_7^* = \chi_{10}^* = 1\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0^* < \xi_1^* > \xi_2^{,} * \xi_3^* < \xi_4^* > \xi_5^*,\, \xi_6^* < \xi_7^* > \xi_8^*,\, \xi_9^* < \xi_{10}^* > \xi_{11}^*\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 + \xi_1 < \xi_1 + \xi_2 > \xi_2 + \xi_3,\, \xi_3 + \xi_4 < \xi_4 + \xi_5 > \xi_5 + \xi_6,$$
$$\xi_6 + \xi_7 < \xi_7 + \xi_8 > \xi_8 + \xi_9,\, \xi_9 + \xi_{10} < \xi_{10} + \xi_{11} > \xi_{11} + \xi_{12}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_2,\, \xi_1 > \xi_3 < \xi_5,\, \xi_4 > \xi_6 < \xi_8,\, \xi_7 > \xi_9 < \xi_{11},\, \xi_{10} > \xi_{12}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_2\}\,\mathbf{P}\{\xi_1 > \xi_3 < \xi_5\}\,\mathbf{P}\{\xi_7 > \xi_9 < \xi_{11}\}\,\mathbf{P}\{\xi_{10} > \xi_{12}\}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{108},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_2^{*(3)} = \chi_7^{*(3)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_2^* = \chi_5^* = \chi_7^* = \chi_{10}^* = 1\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1^* < \xi_2^* > \xi_3^*, \xi_4^* < \xi_5^* > \xi_6^*, \xi_6^* < \xi_7^* > \xi_8^*, \xi_9^* < \xi_{10}^* > \xi_{11}^*\}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 < \xi_2 + \xi_3 > \xi_3 + \xi_4,\, \xi_4 + \xi_5 < \xi_5 + \xi_6 > \xi_6 + \xi_7 < \xi_7 + \xi_8 > \xi_8 + \xi_9,$$
$$\xi_9 + \xi_{10} < \xi_{10} + \xi_{11} > \xi_{11} + \xi_{12}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3,\, \xi_2 > \xi_4 < \xi_6 < \xi_8,\, \xi_5 > \xi_7 > \xi_9 < \xi_{11},\, \xi_{10} > \xi_{12}\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < \xi_3\}\,\mathbf{P}\{\xi_2 > \xi_4 < \xi_6 < \xi_8\}\,\mathbf{P}\{\xi_5 > \xi_7 > \xi_9 < \xi_{11}\}\,\mathbf{P}\{\xi_{10} > \xi_{12}\} = \frac{1}{256},$$
$$\mathbf{P}\{\chi_4^{*(3)} = \chi_7^{*(3)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_4^* = \chi_7^{*(3)} = 1\} = \mathbf{P}\{\chi_1^* = \chi_4^{*(3)} = 1\} = \frac{1}{36}.$$

Откуда по формуле (3.3)

$$c_{33}^* = \frac{1}{54} + \frac{1}{128} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} - \frac{13}{144} = \frac{259}{3456}.$$

$\square$

Теоремы 8 и 10 показывают, что распределения векторов $N^{(s)}$ и $N^{*(s)}$ количеств промежутков фиксированных длин между соседними локальными максимумами различаются, следовательно, возможно статистическое различение гипотезы H_0 (см. параграф 2.3) и описанной в теореме 9 альтернативы.

3.2 Взвешенные суммы

В параграфе 3.1 рассмотрены скользящие суммы независимых одинаково распределённых случайных величин. Обобщим эту конструкцию, рассмотрев взвешенные суммы.

Пусть $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих одно и то же непрерывное распределение, и $\widehat{\xi}_n^c = \xi_n + c\xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c = const \neq 0$ (при $c = 0 \quad \widehat{\xi}_n^c = \xi_n$, и этот случай подробно изучен в первой главе).

При $c = 1$ получаем последовательность ξ_i^*, рассмотренную в параграфе 3.1. По теореме 9 распределение расстояния между соседними локальными максимумами в этой последовательности не зависит от вида непрерывного распределения случайных величин ξ_n, то же справедливо и для вероятности наблюдать локальный максимум в фиксированный момент времени. Однако при $c \neq 1$ это не верно и $\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_0^c < \widehat{\xi}_1^c > \widehat{\xi}_2^c\}$ зависит от распределения случайных величин ξ_n.

Утверждение 6. *Если случайные величины ξ_n имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то для любого целого n*

$$\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_{n-1}^c < \widehat{\xi}_n^c > \widehat{\xi}_{n+1}^c\} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{12(c^2 - c + 1)}, & c < 0, \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{c + c^2 - c^3}{12}, & 0 \leq c < 1, \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{c^2 + c - 1}{12c^3}, & c \geq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Если случайные величины ξ_n имеют стандартное нормальное распределение, то для любого целого n

$$\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_{n-1}^c < \widehat{\xi}_n^c > \widehat{\xi}_{n+1}^c\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3c^2 - 4c + 3}{c^2 + 1}}. \tag{3.6}$$

Замечание 11. *Значения выражений (3.5), (3.6) при $c = 0$ равны 1/3 и при $c = 1$ равны 1/4, что соответствует результатам главы 1 и параграфа 3.1.*

Доказательство. Заметим, что последовательность $\{\widehat{\xi}_n^c\}$ стационарна в узком смысле, поэтому $\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_{n-1}^c < \widehat{\xi}_n^c > \widehat{\xi}_{n+1}^c\} = \mathbf{P}\{\widehat{\xi}_0^c < \widehat{\xi}_1^c > \widehat{\xi}_2^c\}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Введём обозначение $P(c) = \mathbf{P}\{\widehat{\xi}_0^c < \widehat{\xi}_1^c > \widehat{\xi}_2^c\}$.

1. Пусть случайные величины ξ_n имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 10. *При $c \neq 0$ справедливо равенство $P(c) = P\left(\frac{1}{c}\right)$.*

Доказательство. Если $c > 0$, то

$$P(c) = \mathbf{P}\{\xi_0 + c\xi_1 < \xi_1 + c\xi_2 > \xi_2 + c\xi_3\} = \mathbf{P}\left\{\frac{1}{c}\xi_0 + \xi_1 < \frac{1}{c}\xi_1 + \xi_2 > \frac{1}{c}\xi_2 + \xi_3\right\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\xi_0 + \frac{1}{c}\xi_1 < \xi_1 + \frac{1}{c}\xi_2 > \xi_2 + \frac{1}{c}\xi_3\right\} = P\left(\frac{1}{c}\right),$$

так как последовательность случайных величин $\{c\xi_n + \xi_{n-1}\}$ устроена так же, как и $\{\widehat{\xi}_n^c\}$.

Если $c < 0$, то воспользуемся тем, что случайные величины $1 - \xi_n$ тоже независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, поэтому

$$P(c) = \mathbf{P}\{\xi_0 + c\xi_1 < \xi_1 + c\xi_2 > \xi_2 + c\xi_3\}$$
$$= \mathbf{P}\{1 - \xi_0 + c(1 - \xi_1) < 1 - \xi_1 + c(1 - \xi_2) > 1 - \xi_2 + c(1 - \xi_3)\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 + c\xi_1 > \xi_1 + c\xi_2 < \xi_2 + c\xi_3\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\frac{1}{c}\xi_0 + \xi_1 < \frac{1}{c}\xi_1 + \xi_2 > \frac{1}{c}\xi_2 + \xi_3\right\} = P\left(\frac{1}{c}\right).$$

$\square$

Таким образом, достаточно рассмотреть только случаи $0 < c \le 1$, $c \le -1$.

Пусть сначала $0 < c \le 1$. Тогда

$$P(c) = \mathbf{P}\{\xi_0 < c\xi_2 + (1-c)\xi_1, c\xi_3 < \xi_1 - (1-c)\xi_2\}$$
$$= \int_0^1 \int_{(1-c)x}^{(1-c)x+c} (cx + (1-c)y)\, \frac{y - (1-c)x}{c}\, dy\, dx$$
$$+ \int_0^1 \int_{(1-c)x+c}^{1} (cx + (1-c)y)\, dy\, dx$$
$$= \frac{1}{c} \int_0^1 \int_{(1-c)x}^{(1-c)x+c} ((1-c)y^2 - (c^2 - 3c + 1)xy - c(1-c)x^2)\, dy\, dx$$
$$+ \int_0^1 \int_{(1-c)x+c}^{1} (cx + (1-c)y)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{(1-c)}{3}\left(3(1-c)^2x^2 + 3c(1-c)x + c^2\right) - \frac{c^2 - 3c + 1}{2}x\left(2(1-c)x + c\right)\right.$$
$$\left. - c(1-c)x^2 + (1 - c - (1-c)x)\left(cx + \frac{1-c}{2}\left(1 + c + (1-c)x\right)\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \Bigg[(1-c)^3x^2 + c(1-c)^2x + \frac{c^2(1-c)}{3} - (1-c)(c^2-3c+1)x^2$$
$$-\frac{c(c^2-3c+1)}{2}x - c(1-c)x^2 + (1-c)\cdot\left(\frac{1-c^2}{2} + c^2x - \frac{c^2+1}{2}x^2\right)\Bigg]\,dx$$
$$= \frac{(1-c)^3}{3} + \frac{c(1-c)^2}{2} + \frac{c^2(1-c)}{3} - \frac{(1-c)(c^2-3c+1)}{3} - \frac{c(c^2-3c+1)}{4}$$
$$-\frac{c(1-c)}{3} + \frac{(1-c)^2(1+c)}{2} + \frac{c^2(1-c)}{2} - \frac{(1-c)(c^2+1)}{6}$$
$$= \frac{(2-c)(1-c)^2}{6} - \frac{(4-c)(c^2-3c+1)}{12} + \frac{(1-c)(2-c^2)}{6} = \frac{(1-c)(4-3c)}{6}$$
$$-\frac{(4-c)(c^2-3c+1)}{12} = \frac{c^3-c^2-c+4}{12} = \frac{1}{3} - \frac{c+c^2-c^3}{12}.$$

Пусть $c \le -1$. Для удобства сделаем замену $t = -c$, тогда $t \ge 1$ и

$$P(c) = P(-t) = \mathbf{P}\{\xi_0 - t\xi_1 < \xi_1 - t\xi_2 > \xi_2 - t\xi_3\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_0 < (t+1)\xi_1 - t\xi_2,\, t\xi_3 > -\xi_1 + (t+1)\xi_2\} = \int_0^1\int_0^1 P(u,v)\,du\,dv,$$
$$P(u,v) = \mathbf{P}\{u < (t+1)\xi_1 - t\xi_2,\, -\xi_1 + (t+1)\xi_2 < tv\}.$$

Так как ξ_1, ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, то интегрируемая вероятность $P(u,v)$ равна площади множества

$$\{u < (t+1)x - ty,\, -x + (t+1)y < tv,\, x, y \in [0,1]\},$$

которое при $0 < u, v < 1$ представляет собой четырехугольник, ограниченный прямыми

$$(t+1)x - ty = u, \quad -x + (t+1)y = tv, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Поэтому

$$P(u,v) = \frac{(u + t(t+1)v)(t+1-u) + (tv+1)(t^2+t+1-(t+1)u - t^2v)}{2(t+1)(t^2+t+1)}.$$

Следовательно,

$$2(t+1)(t^2+t+1)P(-t) = 2(t+1)(t^2+t+1)\int_0^1\int_0^1 P(u,v)\,du\,dv,$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 [2t(t^2+t+1)v - u^2 - t^3v^2 - 2t(t+1)uv + t^2+t+1]\, du\, dv$$
$$= \frac{1}{6}[6t(t^2+t+1) - 2 - 2t^3 - 3t(t+1) + 6(t^2+t+1)]$$
$$= (t+1)(t^2+t+1) - \frac{2t^3+3t^2+3t+2}{6}.$$

Откуда

$$P(-t) = \frac{1}{2} - \frac{2(t+1)(t^2t+1) - t(t+1)}{12(t+1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{3} + \frac{t}{12(t^2+t+1)}.$$

Для завершения доказательства достаточно подставить $c = -t$ в полученную формулу и воспользоваться леммой 10.

2. Пусть теперь случайные величины ξ_n имеют стандартное нормальное распределение. Преобразуем искомую вероятность к виду

$$P(c) = \mathbf{P}\{\xi_1 + c\xi_2 < \xi_2 + c\xi_3 > \xi_3 + c\xi_4\} = \mathbf{P}\{\zeta_1 > 0,\, \zeta_2 > 0\},$$

где $\zeta_1 = c\xi_3 - \xi_1 - (c-1)\xi_2$, $\zeta_2 = \xi_2 + (c-1)\xi_3 + c\xi_4$.

Вектор (ζ_1, ζ_2) имеет двумерное нормальное распределение с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$C = \begin{pmatrix} 2(c^2-c+1) & (c-1)^2 \\ (c-1)^2 & 2(c^2-c+1) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы С суть $\lambda_1 = 3c^2 - 4c + 3$, $\lambda_2 = c^2 + 1$, им соответствуют собственные векторы $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,1)$.

Рассмотрим матрицу, составленную из ортонормированных собственных векторов,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и вектор $(x,y) = V(\zeta_1,\zeta_2)$. Матрица ковариаций вектора (x,y) имеет диагональный вид с числами λ_1, λ_2 на диагонали. При этом области $\{\zeta_1 > 0,\, \zeta_2 > 0\}$ соответствует область $\{x + y > 0,\, x - y > 0\}$. Пусть $x' = x/\sqrt{\lambda_1}$, $y' = y/\sqrt{\lambda_2}$, тогда вектор (x', y') имеет стандартное двумерное нормальное распределение, следовательно

$$P(c) = \mathbf{P}\{\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0\} = \mathbf{P}\{x + y > 0, x - y > 0\} = \mathbf{P}\{\sqrt{\lambda_1}x' + \sqrt{\lambda_2}y' > 0,$$
$$\sqrt{\lambda_1}x' - \sqrt{\lambda_2}y' > 0\} = \frac{1}{2\pi}\,2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3c^2 - 4c + 3}{c^2 + 1}}.$$

□

Заметим, что математическое ожидание количества локальных максимумов на отрезке длины T ($\mathbf{M}N_0(T)$) пропорционально вероятности наблюдать локальный максимум в фиксированной точке. Следовательно, так как эта вероятность для последовательности $\{\widehat{\xi_n^c}\}$ при $c \neq 0$ отличается от $1/3$, то рассмотренные в этом параграфе распределения можно отличить от основного (перестановочные случайные величины $\{\xi_n\}$, такие что $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$) с помощью вектора $N^{(s)}$.

3.3 Меняющееся распределение

В этом параграфе мы рассмотрим последовательность независимых, но не одинаково распределённых случайных величин. Так же, как и в предыдущем параграфе, найдём для этой последовательности вероятность наблюдать локальный максимум в фиксированной точке.

Утверждение 7. *Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке* $[0, 1]$, *и пусть $\widetilde{\xi}_n = \xi_n + vn$, $n \in \mathbb{Z}$, $v = const$. Тогда для любого целого n*

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_{n-1} < \widetilde{\xi}_n > \widetilde{\xi}_{n+1}\} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - v^2\dfrac{9 - 8|v|}{6}, & |v| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(1 - |v|)^2}{2}, & \dfrac{1}{2} \leq |v| < 1, \\ 0, & |v| \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что в силу стационарности в узком смысле последовательности $\{\xi_n\}$, для любого целого n

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\xi}_{n-1} < \widetilde{\xi}_n > \widetilde{\xi}_{n+1}\} = \mathbf{P}\{\xi_{n-1} + v(n-1) < \xi_n + vn > \xi_{n+1} + v(n+1)\}$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_{n-1} < \xi_n + v > \xi_{n+1} + 2v\} = \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_1 + v > \xi_2 + 2v\} = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi_0} < \widetilde{\xi_1} > \widetilde{\xi_2}\}.$$

Пусть $P(v) = \mathbf{P}\{\widetilde{\xi_0} < \widetilde{\xi_1} > \widetilde{\xi_2}\}$. Заметим, что

$$P(v) = \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_1 + v > \xi_2 + 2v\} = \mathbf{P}\{\xi_0 - 2v < \xi_1 - v > \xi_2\} = P(-v),$$

так как векторы (ξ_0, ξ_1, ξ_2) и (ξ_2, ξ_1, ξ_0) одинаково распределены.

Далее будем считать, что $v \geq 0$. Заметим, что при $v > 1$ вероятность $P(v) = \mathbf{P}\{\xi_1 - \xi_2 > v > 1\} = 0$. Пусть $0 < v \leq 1/2$, тогда

$$P(v) = \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_1 + v, \xi_2 < \xi_1 - v\} = \int_v^{1-v} \int_0^{y-v} (y+v)\, dz\, dy + \int_{1-v}^1 \int_0^{y-v} dz\, dy$$
$$= \int_v^{1-v} (y^2 - v^2)\, dy + \int_{1-v}^1 (y-v)\, dy = \left(\frac{y^3}{3} - v^2 y\right)\Bigg|_{y=v}^{1-v} + \left(\frac{y^2}{2} - vy\right)\Bigg|_{y=1-v}^{1}$$
$$= \frac{(1-v)^3 - v^3}{3} - v^2(1-2v) + \frac{1-(1-v)^2}{2} - v^2 = \frac{1}{3} - v^2\,(9-8v)\,.$$

Если $v > 1/2$, то

$$P(v) = \mathbf{P}\{\xi_0 < \xi_1 + v, \xi_2 < \xi_1 - v\} = \int_v^1 \int_0^{y-v} dz\, dy = \int_v^1 (y-v)\, dy = \frac{(1-v)^2}{2}.$$

□

Заметим, что в случае $v = 0$ последовательность $\widetilde{\xi_n}$ совпадает с последовательностью $\{\xi_n\}$, т.е. является последовательностью независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ (при этом $P(0) = 1/3$, как и в главе 1). Во всех остальных случаях распределения случайных величин последовательности $\widetilde{\xi_n}$ различны и вероятность $P(v) < 1/3$ и убывает с увеличением v. Таким образом, как и в предыдущем пункте, можно заключить, что такие альтернативы также можно отличить от основной гипотезы с помощью вектора $N^{(s)}$.

Заметим также, что поскольку случайные величины $\widetilde{\xi_n}$ независимы, то вероятность наблюдать расстояние λ длины 3 (в фиксированном месте) равна $P^2(v)$. Значит, математическое ожидание количества расстояний длины 3 на отрезке последовательности длины T равно $(T-5)P^2(v)$ (и зависит от v).

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Найдены совместные распределения соседних локальных максимумов и длин промежутков между ними.

2. Описана асимптотическая структура промежутка между соседними локальными максимумами при условии, что его длина стремится к бесконечности.

3. Доказана асимптотическая нормальность совместных распределений количеств появления промежутков заданных длин. Предложен статистический критерий проверки гипотезы о вероятностной структуре исходной последовательности.

4. Найдены вероятности появления локальных максимумов и распределение расстояний между ними для некоторых последовательностей зависимых или не одинаково распределённых случайных величин.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с изучением других (не рассмотренных в работе) классов последовательностей зависимых или не одинаково распределённых случайных величин.

Также представляет интерес исследование расстояний между появлением тех или иных комбинаций в последовательностях случайных величин, имеющих дискретные распределения.

Список литературы

1. Бернштейн С. Н. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин // УМН. — 1944. — № 10. — С. 65–114.

2. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233 — № 6 — С. 1024–1027. English transl.: Vershik A., Kerov S. Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux // Soviet Math. Dokl. — 1977. — Is. 18. — Pp. 527–531.

3. Зубков А. М. , Шуваев Д. В. Вычисление моментов комбинаторных статистик от перестановочных случайных величин // Дискрет. Матем. —2005. — Т. 17. — Вып. 2. — С. 3–18.

4. Кузнецов А. Г. , Пак И. М., Постников А. Е. Возрастающие деревья и альтернирующие перестановки // УМН. — 1994. — Т. 49. — Вып. 6(300). — С. 79–110.

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х т. — М.: Мир, 1967. — 498 с. — т. 1.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х т. — М.: Мир, 1967. — 752 с. — т. 2.

7. Харитонова Н. А. Распределения расстояний между локальными максимумами случайной последовательности. — Дипл. работа, мех.-мат. ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова — 2009. — 15 с.

8. Хинчин А. Я. О классах эквивалентных событий // Доклады АН СССР — 1952 — Т. 85 — Вып. 4 — С. 713–714. (Перепечатано: Хинчин А. Я. О классах эквивалентных событий // Избранные труды по теории вероятностей. — М.: Научное издательство ТВП. — 1995. — С. 358-360.)

9. André D. Sur les permutations alternées // J. Math. Pure Appl. — 1881. — Vol. 7. — Pp. 167—184.

10. Billey S., Burdzy K., Sagan B. E. Permutations with Given Peak Set // J. Integer Seq. — 2013. — Vol. 16. — Is. 6. — Article 13.6.1.

11. Bouchard P., Hungyung Chang, Jun Ma, Jean Yeh, Yeong-Nan Yeh. Value-Peaks of Permutations [Электронный ресурс] // Electron. J. Combin. — 2010. — Vol. 17. — #R.46. — Режим доступа: http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v17i1r46.

12. Cocke W. J. Central Limit Theorems for Sums of Dependent Vector Variables // Ann. Math. Statist. — 1972. — Vol. 43. — no. 3. — Pp. 968–976.

13. Crescenzi P., Lungo A. D., Grossi R., Lodi E., Pagli L., Rossi G. Text sparsification via local maxima // Theor. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 304. — Is. 1–3. — Pp. 341–364.

14. Csaki E., Foldes A. On the length of the longest monotone block // Stud. Sci. Math. Hung. — 1996. — Vol. 31. — Pp. 35–46.

15. Diananda P. H. The central limit theorem for m-dependent variables // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1955. — Vol. 51. — Pp. 92–95.

16. Dixon J. D. Monotonic subsequences in random sequences // Discrete Math. — 1975. — Vol. 12. — Is. 2. — Pp. 139–142.

17. Jakubowski A., Kobus M. α-stable limit theorems for sums of dependent random vectors // J. Multivariate Anal. — 1989. — Vol. 29. —Is. 2. — Pp. 219–251.

18. Kuketayev A. Probability distribution of distances between local extrema of random number series // Вестник Караганд. ун-та, сер. Физика. — 2011. — Т. 62. — № 2. — С. 21–34; arXiv:math/0611130, 2006.

19. Labarbe, J., Marckert, J. Asymptotics of Bernoulli random walks, bridges, excursions and meanders with a given number of peaks [Электронный ресурс] // Electron. J. Probab. — 2007. —Vol. 12. — Pp. 229-261. — Режим доступа: http://ejp.ejpecp.org/article/view/397.

20. Louchard G. Monotone runs of uniformly distributed integer random variables: a probabilistic analysis // Theor. Comput. Sci. — 2005. — Vol. 346. — Is. 2–3. — Pp. 358–387.

21. Louchard G., Prodinger H. A combinatorial and probabilistic study of initial and end heights of descents in samples of geometrically distributed random variables and in permutations // Discrete Mathematics & Theor. Comput. Sci. — 2007. — Vol. 9 — no. 1. — Pp. 137–170.

22. Louchard G., Prodinger H. Ascending runs of sequences of geometrically distributed random variables: a probabilistic analysis // Theor. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 304. — Is. 1–3. — Pp. 59–86.

23. MacMahon P. A. Second Memoir on the Compositions of Numbers // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. — 1908. — Vol. 207. — Pp. 65–134.

24. Mansour, T. Longest alternating subsequences of k-ary words // Discrete Appl. Math. — 2008. — Vol. 156. — Is. 1. — Pp. 119—124.

25. Mitton N., Paroux K., Sericola B., Tixeuil S. Ascending Runs in Dependent Uniformly Distributed Random Variables: Application to Wireless Networks // Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2010. — Vol. 12. — no. 1. — Pp. 51–62.

26. Oshanin G., Voituriez R., Nechaev S., Vasilyev O., Hivert F. Random patterns generated by random permutations of natural numbers // Eur. Phys. J. Special Topics — 2007. — Vol. 143. — Pp. 143–157; arXiv:cond-mat/0609718, 2006.

27. Pittel B. G. A process of runs and its convergence to the brownian motion // Stoch. Proc. Appl. — 1980. — Vol. 10. – Is. 1. — Pp. 33–48.

28. Pittel B. G. Limiting behavior of a process of runs // Ann. Probab. —1981. — Vol. 9. — no. 1. — Pp. 119–129.

29. Romano J. P., Wolf M. A more general central limit theorem for m-dependent random variables with unbounded m // Statistics & Probability Letters. — 2000. — Vol. 47(2). — Pp. 115–124.

30. Romik D. Local extrema in random permutations and the structure of longest alternating subsequences // DMTCS Proceedings, 23rd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. — 2011. — Pp. 825–834.

31. Rosén B. On asymptotic normality of sums of dependent random Vectors // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. – 1967. — Vol. 7. — Is. 2. — Pp. 95–102.

32. Stanley R. A Survey of Alternating Permutations // Contemp. Math. —2010. — Vol. 531. — Pp. 165-196.

33. Stanley R. Longest alternating subsequences of permutations // Michigan Math. J. — 2008. — Vol. 57. — Pp. 675–687.

34. Szpiro G. G. The number of permutations with a given signature, and the expectations of their elements // Discrete Math. — 2001. — Vol. 226. — Is. 1—3. — Pp. 423—430.

35. Widom H. On the limiting distribution for the length of the longest alternating sequence in a random permutation [Электронный ресурс] // Electron. J. Combin. — 2006. — 13.1. — #R25. — Режим доступа: http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v13i1r25.

Публикации автора по теме диссертации

36. Зубков А. М., Харитонова Н. А., Хиль Е. В. Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин // ТВП. — 2011. — Т. 56. — Вып. 4. — С. 690–703.

English transl.: Zubkov A. M., Kharitonova N. A., and Khil E. V. Gaps between Local Maxima in Sequences of Random Variables // Theory Probab. Appl. — 2012. — V. 56. — Is. 4. — P. 590–601.

[А. М. Зубкову принадлежат постановка задачи и помощь в выборе способа решения, Н. А. Харитоновой принадлежит теорема 1 (случай независимых случайных величин), Е. В. Хиль принадлежат теорема 3 (асимптотическая нормальность вектора частот), теорема 4 и утверждения 1 и 2 (частные случаи зависимых случайных величин).]

37. Хиль Е. В. Марковские зависимости в последовательности локальных максимумов и промежутков между ними // ТВП. — 2013. — Т. 58. — Вып. 3. — С. 472–485.

    English transl.: Khil E. V. Markov Structure of the Sequence of Local Maxima and the Gaps between Them // Theory Probab. Appl. — 2014. — Vol. 58. — No. 3. — P. 430–441.

38. Хиль Е. В. Структура последовательности случайных величин с выделенными локальными максимумами. — М., 2016. — Деп. в ВИНИТИ РАН 19.02.2016, № 35-В2016.

39. Зубков А. М., Харитонова Н. А., Хиль Е. В. Формулы для распределений расстояний между соседними локальными максимумами // Обозрение прикл. и промышл. матем. — 2009. — Т. 16. — Вып. 4. — С. 658–659.

40. Kharitonova N. A., Khil E. V., Zubkov A. M. Goodness-of-fit test based on local maxima, // Proceedings of 9th International Conference “Computer Data Analysis and Modeling: Complex Stochastics Data and Systems” — Minsk. — 2010. — V. 1. — P. 74–76.

41. Зубков А. М., Хиль Е. В. Марковские зависимости в последовательности локальных максимумов // Обозрение прикл. и промышл. матем. — 2011. — Т. 18. — Вып. 1. — С. 83–84.

42. Хиль Е. В. Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин // Международная конференция “Теория вероятностей и ее приложения”, посвященная 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 года): Тезисы докладов. — М.: Ленанд. — 2012. — С. 71–72.

43. Khil E. V. Markov properties of gaps between local maxima in a sequence of independent random variables // Proceedings of 10th International Conference "Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics" — Minsk. — 2013. — V. 2. — P. 13–16.