МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

**МИЦЕНКО Вадим Валериевич**

# О ХАРАКТЕРИСТИКАХ БЛУЖДАЕМОСТИ И КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛЯПУНОВСКОГО ТИПА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

**Автореферат**
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Сергеев Игорь Николаевич

Официальные оппоненты: Глызин Сергей Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой компьютерных сетей
ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова»

Дементьев Юрий Игоревич
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
ФГБОУ ВПО «Московский государственный
технический университет гражданской авиации».

Ведущая организация: Институт математики НАН Беларуси

Защита диссертации состоится 10 июня 2016 г. в 16 ч 45 мин на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан       апреля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85,
на базе МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор                                        В.В. Власов

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений играют линейные системы, которые служат основой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Линейные нестационарные системы имеют многочисленные приложения, которые порождают ряд новых задач теоретического характера, требующих изучения различных асимптотических свойств решений системы.

Среди важнейших направлений качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений особое место занимают теория устойчивости и теория колебаний.

С теорией устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым (1892 г.), естественным образом связаны, прежде всего, характеристические показатели Ляпунова решений дифференциальных систем, а также введенные позже показатели Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающие за разнообразные асимптотические свойства решений уравнений или систем.

В теории же колебаний немалая роль отводится вопросам колеблемости решений дифференциальных уравнений, восходящим к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма (1837–41 гг.) и более поздним исследованиям А. Кнезера (1896–98 гг.).

Изучением различных свойств самых разных показателей решений и систем занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, С.Н. Попова, Е.А. Барабанов, О.И. Морозов, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков, Ю.И. Дементьев и другие. Здесь указаны далеко не все работы каждого автора, а исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[1,2] и монографиях[3,4].

Исследования по тематике колеблемости успешно продвигались усилиями многих математиков, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Н. Левина, Н.А. Изобова, И.В. Асташову, С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова и других (обширные библиографии по этому вопросу

---

[1] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[2] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[3] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

[4] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

можно найти, например, в обзоре[5] и монографии[6]). Заметим, что перечисленных авторов в основном интересовали вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения хотя бы одного колеблющегося решения (имеющего бесконечное число нулей на полупрямой или на промежутке), а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено прежде всего на получение коэффициентных (т. е. опирающихся только на свойства коэффициентов уравнения) признаков существования или отсутствия колеблющихся решений.

В связи с этим, особенно интересной и актуальной представляется задача о нахождении аналогов показателей Ляпунова, отвечающих за колеблемость решений дифференциальных уравнений и систем.

В 2004 г. И.Н. Сергеев в докладе[7] впервые ввел понятие *характеристической частоты* $\nu(y)$ скалярной функции $y$, несущее в себе черты усреднения по Ляпунову и позволившее численно измерять колеблемость решений на полупрямой. Позже в статьях[8,9] им также были определены различные модификации характеристических частот, а именно: были определены *полная* $\sigma(x)$ *и векторная* $\zeta(x)$ *частоты* вектор-функции $x$, а в работе[10] были впервые введены *характеристики блуждаемости* вектор-функции $x$: скорость блуждания $\mu(x)$, показатель блуждаемости $\rho(x)$ и показатель блуждания $\eta(x)$, которые, как оказалось (см. работы[11,12,13,14,15]), имеют тесную связь с определенными ранее характеристиками колеблемости. В дальнейших его работах изучались свойства введенных характеристик и взаимосвязи, имеющиеся между ними.

Частоту решения можно интерпретировать как среднее (по всей полупрямой) значение числа нулей решения на полуинтервале длины $\pi$. Оказалось[7], что на решениях

[5] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. **24**. №2. С. 43–96.

[6] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

[7] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1576.

[8] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. №11. С. 1577.

[9] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. **45**. №6. С. 908.

[10] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №6. С. 902.

[11] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №11. С. 1667–1668.

[12] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №6. С. 906–907.

[13] Бурлаков Д.С., Сергеев И. Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 899.

[14] Сергеев И.Н. Неупорядоченность верхних характеристик полной колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №6. С. 852–853.

[15] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. 2013. **204**. №1. С. 119–138.

линейных однородных уравнений с ограниченными коэффициентами она принимает лишь конечные значения, что позволяет естественным образом классифицировать колеблющиеся решения, ставя в соответствие, к примеру, функции $y(t) = \sin\omega t$ ее частоту $\nu(y) = \omega$ (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции $x$ с нормой $|x(t)| = \exp\lambda t$ ее показатель $\chi(x) = \lambda$).

Подсчет полной и векторной частоты вектор-функции происходит путем усреднения числа нулей проекции этой функции на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается полная частота $\sigma(x)$, а если после — то векторная частота $\zeta(x)$. По своему геометрическому смыслу данные частоты отвечают за частоту вращения вектора $x$ вокруг нуля.

Оказалось[16], что на решениях линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами эти характеристики колеблемости принимают лишь конечные значения (при этом полная и векторная частоты решения $y$ линейного уравнения $n$-го порядка определяются как величины $\sigma(x)$ и $\zeta(x)$ соответственно, где $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$).

Таким образом, оставался открытым вопрос о нахождении точных границ спектров (множества значений на всех ненулевых решениях) характеристик колеблемости на множестве решений линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами. В настоящей работе найдены точные границы спектров характеристик колеблемости на множестве решений линейных однородных уравнений второго порядка, а также диагональных и треугольных линейных систем произвольной размерности.

Характеристики блуждаемости, в свою очередь, могут быть интерпретированы следующим образом: скорость блуждания функции $x$ есть временное среднее скорости движения следа, который вектор $x$ оставляет на единичной сфере за определенный промежуток времени, а показатели блуждания или блуждаемости функции $x$ получаются минимизацией (зависящей или не зависящей от отрезка усреднения) ее скорости блуждания по всем преобразованиям координат. Следовательно, эти показатели содержат только ту информацию о траектории на сфере, которая не гасится невырожденными линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора $x$ вокруг нуля, но не улавливают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора.

В работе[10] было доказано, что все показатели блуждаемости на решениях линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами также

[16]Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

принимают лишь конечные значения. Кроме того, в работах[17,18] были исследованы границы спектров скорости блуждания $\mu$ для множества двумерных линейных систем и линейных однородных уравнений второго порядка. Таким образом, оставались неизвестными точные границы спектров остальных характеристик блуждаемости на множестве решений линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами. В настоящей работе найдены точные границы спектров показателей блуждаемости и блуждания для линейных однородных уравнений второго порядка, а также диагональных и треугольных линейных систем произвольной размерности.

В статье[19] было доказано, что спектр любой из величин $\eta, \rho, \sigma, \zeta, \nu$ на множестве решений одной системы, отвечающей линейному уравнению второго порядка, в некотором смысле вырожден – состоит ровно из одного числа. Однако оставался открытым вопрос касательно невырожденности спектра показателя $\mu$. И в настоящей работе найдено такое уравнение, на множестве решений которого спектр показателя $\mu$ не только не вырожден, но и содержит целый отрезок числовой прямой.

Кроме того, известно[20], что все показатели блуждаемости ограничены сверху равномерной нормой $||A||$ (в пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксированы базис и связанная с ним стандартная евклидова структура) системы $A$, что однако не позволяет для систем, отвечающих линейным однородным уравнениям произвольного порядка, уменьшая коэффициенты эквивалентного ей уравнения гарантировать близость к нулю показателей ее решений. В той же работе[20] было доказано, что данная близость имеет место для всех характеристик колеблемости, а в настоящей работе доказано, что данная близость имеет место и для показателей блуждания и блуждаемости.

**Цель работы**

Целью настоящей диссертационной работы является исследование *спектров* характеристик колеблемости и блуждаемости для диагональных и треугольных линейных однородных дифференциальных систем (с ограниченными коэффициентами), а также для систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям (с ограниченными коэффициентами).

**Научная новизна работы**

В диссертации получены следующие основные результаты:

- получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для диагональных и треугольных

[17] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №11. С. 1670–1671.

[18] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 907.

[19] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

[20] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

линейных однородных дифференциальных систем произвольной размерности (с ограниченными коэффициентами);

- получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям второго порядка (с ограниченными коэффициентами);

- доказано существование линейной системы, отвечающей линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка (с ограниченными коэффициентами), спектр скорости блуждания которой содержит отрезок числовой прямой;

- установлена близость показателей блуждания и блуждаемости к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

**Методы исследования**

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и математического анализа.

**Теоретическая и практическая ценность**

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

**Апробация работы**

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2012–2015).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ по итогам года (г. Москва, декабрь 2014 г.);

- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

### Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 106 страниц. Библиография включает 74 наименования.

## Краткое содержание диссертации

### Введение

В кратком введении описывается история вопроса и постановка задачи. Формулируются основные результаты диссертации и указывается их место в современной теории колеблемости и теории характеристических частот дифференциальных уравнений.

### Глава 1

В разделе **1.1** вводятся понятия верхних и нижних характеристик блуждаемости и колеблемости, а также выделяются подмножества изучаемых в данной работе линейных дифференциальных систем.

Для натурального числа $n$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty),$$

где матричная (в $\mathbb{R}^n$ фиксирован правый базис) функция (отождествляемая в дальнейшем с самой системой) $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ кусочно непрерывна.

В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножества *диагональных* и *треугольных* систем с ограниченными по модулю (числом $d > 0$) на полупрямой коэффициентами

$$\mathcal{D}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \begin{array}{c} |a_{ij}(t)| \leqslant d, \\ t \in \mathbb{R}^+, \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n. \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{T}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \begin{array}{c} |a_{ij}(t)| \leqslant d, \\ t \in \mathbb{R}^+, \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n. \end{array} \right\},$$

а также множество систем вида

$$\mathcal{E}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \text{-}a_n(t) & \text{-}a_{n-1}(t) & \ldots & \text{-}a_1(t) \end{pmatrix}, \begin{array}{c} |a_i(t)| \leqslant d, \\ t \in \mathbb{R}^+, \\ 1 \leqslant i \leqslant n. \end{array} \right\},$$

отвечающих *уравнениям* $n$-го порядка с ограниченными по модулю (числом $d > 0$) на полупрямой коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

превращающимся в систему $A$ стандартным переходом от скалярной переменной $y$ к векторной

$$x = \psi y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}).$$

Пусть $S_*(A)$ – множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$, а множество $\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$ состоит из всех невырожденных линейных операторов $A \in \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$.

Определение I[10]. Каждому решению $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ поставим в соответствие следующие его *ляпуновские* характеристики блуждаемости: *нижнюю (верхнюю) скорость блуждания, нижний (верхний) показатель блуждаемости* и, соответственно, *нижний (верхний) показатель блуждания*

$$\begin{aligned}
\check{\mu}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t), &\quad \left(\hat{\mu}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t)\right),\\
\check{\rho}(x) \equiv \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx), &\quad \left(\hat{\rho}(x) \equiv \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx)\right),\\
\check{\eta}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,t), &\quad \left(\hat{\eta}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,t)\right),
\end{aligned}$$

где

$$\gamma(z,t) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau}\left(\frac{z(\tau)}{|z(\tau)|}\right)\right| d\tau \quad \text{и} \quad |z| = \sqrt{z_1^2 + ... + z_n^2}.$$

Для вектор-функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n_*$ (где здесь и далее $\mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$), $x \equiv (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{т}}$, числа $t > 0$ и вектора $m \equiv (m_1, \dots, m_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n_*$ обозначим через $\nu(x,m,t)$ *количество гиперкратных нулей* скалярного произведения

$$(x(\tau), m) \equiv m_1 x_1(\tau) + m_2 x_2(\tau) + \dots + m_n x_n(\tau),$$

на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчета этого количества:

а) каждый некратный корень берется ровно один раз;

б) любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности; другими словами, как только хотя бы в одной точке $\tau_0 \in (0;t]$ выполнены одновременно оба равенства

$$(x(\tau_0), m) = (\dot{x}(\tau_0), m) = 0,$$

так сразу считается выполненным $\nu(x,m,t) = \infty$, в противном случае величина $\nu(x,m,t)$ считается равной числу нулей функции $(x,m)$ на промежутке $(0,t]$.

Определение II[9]. Каждому решению $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ и вектору $m \in \mathbb{R}^n_*$ поставим в соответствие следующие характеристики колеблемости: *нижнюю (верхнюю) частоту нулей координаты* $(x,m)$

$$\check{\nu}_m(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\hat{\nu}_m(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$

а под *нижней (верхней) полной частотой нулей* и *нижней (верхней) векторной частотой нулей* решения $x$ будем понимать

$$\check{\sigma}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\hat{\sigma}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$
$$\check{\zeta}(x) \equiv \underline{\lim}_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\hat{\zeta}(x) \equiv \overline{\lim}_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right).$$

Определение III[20]. *Спектром* какой-либо величины $\varkappa : S_*(A) \to \mathbb{R}$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем область ее значений

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \{\varkappa(x) |\ x \in S_*(A)\},$$

а для произвольного подмножества $H \subset \mathcal{M}^n$ обозначим

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(H) = \{\varkappa(x) |\ x \in \bigcup_{A\in H} S_*(A)\}.$$

В данной работе, говоря о том, что для какого-либо из показателей $\varkappa = \mu, \rho, \eta, \nu_m, \sigma, \zeta$ справедливо то или иное утверждение, автор подразумевает, что данное утверждение справедливо одновременно для обоих показателей $\check{\varkappa}$ и $\hat{\varkappa}$.

В разделе **1.2** доказываются некоторые вспомогательные свойства исследуемых величин, которые в дальнейшем используются при доказательстве основных результатов.

В разделе **1.3** доказывается вырожденность спектра всех характеристик колеблемости и блуждаемости для линейных одномерных систем.

Замечание 1. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^1$, числа $m \in \mathbb{R}_*$ и любого из показателей $\varkappa = \nu_m, \sigma, \zeta, \mu, \rho, \eta$ справедливо равенство*

$$\varkappa(x) = 0, \quad x \in S_*(A).$$

**Глава 2**

В разделе **2.1** получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для диагональных систем произвольной размерности (с ограниченными коэффициентами).

Теорема I. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$ и любого из показателей $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \rho$ справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(\mathcal{D}^n_d) = \{0\},$$

*при этом если $n > 1$, то*

$$\mathrm{Sp}_\mu(\mathcal{D}^n_d) = [0, d].$$

Для натурального $n > 1$ обозначим через $\mathbb{R}^n_D$ множество векторов $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n_*$, у которых как минимум две координаты отличны от 0

$$\mathbb{R}^n_D \equiv \{m \in \mathbb{R}^n_* \mid \exists i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n : m_i \cdot m_j \neq 0\},$$

а через $\overline{\mathbb{R}}^+$ будем обозначать множество $\mathbb{R}^+$, дополненное точкой $\infty$.

Теорема II. *Для любых чисел $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $d > 0$ и любого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ справедливы соотношения*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+,\ m \in \mathbb{R}^n_D, \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \{0, \infty\},\ m \notin \mathbb{R}^n_D.$$

В разделе **2.2** найдены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для треугольных систем произвольной размерности (с ограниченными коэффициентами).

Теорема III. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$ и любого из показателей $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \check{\rho}$ справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(\mathcal{T}^n_d) = \{0\},$$

*при этом если $n > 1$, то*

$$\mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}^n_d) = [0, d].$$

Для натурального $n > 1$ обозначим через $\mathbb{R}^n_T$ множество векторов $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n_*$, у которых только последняя координата отлична от 0

$$\mathbb{R}^n_T \equiv \{m \in \mathbb{R}^n_* \mid m_n \neq 0,\ m_r = 0, r = 1, \ldots, n-1\}.$$

Теорема IV. *Для любых чисел $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $d > 0$ и любого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ справедливы соотношения*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+,\ m \notin \mathbb{R}^n_T, \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}^n_d) = \{0, \infty\},\ m \in \mathbb{R}^n_T.$$

В разделе **2.3** получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для линейных систем, отвечающих уравнениям второго порядка (с ограниченными коэффициентами).

В множестве $\mathbb{R}^2_*$ каждому числу $d > 0$ поставим в соответствие подмножества векторов

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^-_d} \equiv \left\{m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_* \mid \left|\frac{m_2}{m_1}\right| < \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}},\ m_1 \in \mathbb{R}_*, m_2 \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^0_d} \equiv \left\{m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_* \mid \left|\frac{m_2}{m_1}\right| = \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}},\ m_1 \in \mathbb{R}_*, m_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

и

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^+_d} \equiv \left\{m \in \mathbb{R}^2_* \mid m \notin \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^-_d} \cup \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^0_d}\right\}.$$

Теорема V. *Для любого числа $d>0$ справедливо соотношение*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{E}_d^2)=\begin{cases}[0,\lambda(d)], & m\in\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-},\\ [0,\lambda(d)]\cup\{\infty\}, & m\in\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0},\\ \overline{\mathbb{R}}^+, & m\in\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^+},\end{cases}$$

*из которого также вытекает цепочка равенств*

$$\mathrm{Sp}_\sigma(\mathcal{E}_d^2)=\mathrm{Sp}_\zeta(\mathcal{E}_d^2)=\mathrm{Sp}_\eta(\mathcal{E}_d^2)=\mathrm{Sp}_\rho(\mathcal{E}_d^2)=[0;\lambda(d)],$$

*где*

$$\lambda(d)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sqrt{4d-d^2}\left(\pi-2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{d}{\sqrt{4d-d^2}}\right)\right)^{-1}, & 0<d<4,\\ 1, & d=4,\\ \dfrac{\pi}{2}\sqrt{d^2-4d}\left(\ln\left(\dfrac{d+\sqrt{d^2-4d}}{d-\sqrt{d^2-4d}}\right)\right)^{-1}, & d>4.\end{cases}$$

**Глава 3**

В разделе **3.1** доказано существование линейной системы, отвечающей линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка (с ограниченными коэффициентами), спектр скорости блуждания которой содержит отрезок числовой прямой.

Теорема VI. *Существует отрезок $K\subset\mathbb{R}^+$ такой, что для любого числа $d>1/2$ и некоторой системы $A\in\mathcal{E}_d^2$ справедливо включение*

$$K\subset\mathrm{Sp}_\mu(A).$$

В разделе **3.2** установлена близость показателей блуждания и блуждаемости к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

Теорема VII. *Для любых чисел $n\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$, а также любого из показателей $\varkappa=\eta,\rho$ существует такое число $d>0$, что для любой системы $A\in\mathcal{E}_d^n$ справедливо неравенство*

$$\varkappa(x)<\varepsilon,\quad x\in S_*(A),$$

*при этом, если $n=2$, то справедливо еще и неравенство*

$$\mu(x)<\varepsilon,\quad x\in S_*(A).$$

**Заключение**

В работе проведено исследование спектров характеристик колеблемости и блуждаемости для диагональных и треугольных линейных однородных дифференциальных систем (с ограниченными коэффициентами), а также для систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям (с ограниченными коэффициентами).

Установлены точные границы спектров всех характеристик колеблемости, а также показателей блуждаемости и блуждания на множестве решений линейных однородных уравнений второго порядка, а также диагональных и треугольных линейных систем произвольной размерности. Установлены точные границы спектра скорости блуждания на множестве решений диагональных линейных систем произвольной размерности. Доказано существование линейной системы, отвечающей линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка, спектр скорости блуждания которой содержит отрезок числовой прямой. Установлена близость показателей блуждания и блуждаемости к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

Интересным остается вопрос о нахождении точных границ спектра: скорости блуждания на множестве решений треугольных линейных систем произвольной размерности, всех характерстик колеблемости и блуждаемости на множестве решений линейных однородных уравнений третьего и более высоких порядков. Кроме того, неизученным остается вид спектра верхнего показателя блуждаемости на множестве решений произвольной двумерной линейной треугольной системы. Также открытым остается вопрос о близости скорости блуждания к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

## Работы автора по теме диссертации

### Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Mitsenko V.V. Spectrum of the upper wanderability exponent of solutions of two-dimensional triangular differential systems // Differential Equations 2014. V 50. № 10. P. 1336-1341.

2. Mitsenko V.V. Wandering of Solutions of Two-Dimensional Diagonal and Triangular Systems of Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V 210. No 3. P. 251-263.

### Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

3. Миценко В.В. Блуждаемость решений двумерных треугольных и диагональных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2012. т. 48. № 6. с.907-908.

4. Миценко В.В. О блуждаемости решений двумерных диагональных и треугольных дифференциальных систем // Труды семинара имени И.Г.Петровского. 2014. вып. 30. с. 221-241.

5. Миценко В.В. О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных диференциальных систем и линейных уравнений второго порядка. // Дифференциальные уравнения. 2014. т. 50. № 6. с. 851-852.

6. Миценко В.В. Спектр верхнего показателя блуждаемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем. // Дифференциальные уравнения. 2014. т. 50. № 10. с. 1347–1352.

7. Миценко В.В. О спектрах характеристик блуждаемости линейных дифференциальных систем и уравнений. // Дифференциальные уравнения. 2015. т. 51. № 6. с. 822–824.