МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

МИЦЕНКО Вадим Валериевич

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ БЛУЖДАЕМОСТИ И КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛЯПУНОВСКОГО ТИПА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор СЕРГЕЕВ Игорь Николаевич

Москва — 2016

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений играют линейные системы, которые служат основой для изучения нелинейных систем по их линейному приближению. Линейные нестационарные системы имеют многочисленные приложения, которые порождают ряд новых задач теоретического характера, требующих изучения различных асимптотических свойств решений системы.

Среди важнейших направлений качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений особое место занимают теория устойчивости и теория колебаний.

С теорией устойчивости, созданной А.М. Ляпуновым (1892 г.), естественным образом связаны, прежде всего, характеристические показатели Ляпунова решений дифференциальных систем, а также введенные позже показатели Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающие за разнообразные асимптотические свойства решений уравнений или систем.

В теории же колебаний немалая роль отводится вопросам колеблемости решений дифференциальных уравнений, восходящим к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма (1837–41 гг.) и более поздним исследованиям А. Кнезера (1896–98 гг.).

Изучением различных свойств самых разных показателей решений и систем занимались многие математики. Приведем далеко не полный список тех из них, кто внес значительный вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград

[15, 16], Б.Ф. Былов [11, 12], В.М. Миллионщиков [42, 43, 44], Н.А. Изобов [22, 24, 25], М.И. Рахимбердиев [56, 57], И.Н. Сергеев [58, 65], Е.К. Макаров [40, 41], С.Н. Попова [54, 55], Е.А. Барабанов [5, 6], О.И. Морозов [52, 53], А.С. Фурсов [69, 70], А.Н. Ветохин [13, 14], В.В. Быков [8, 9], Ю.И. Дементьев [19, 20] и другие. Здесь указаны далеко не все работы каждого автора, а исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах [23, 28] и монографиях [10, 29].

Исследования по тематике колеблемости успешно продвигались усилиями многих математиков, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева [34, 35], И.Т. Кигурадзе [30, 31, 32], Т.А. Чантурия [73, 74], А.Н. Левина [36, 37], Н.А. Изобова [26, 27], И.В. Асташову [1, 2, 3], С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова [17, 18] и других (обширные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре [36] и монографии [4]). Заметим, что перечисленных авторов в основном интересовали вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения хотя бы одного колеблющегося решения (имеющего бесконечное число нулей на полупрямой или на промежутке), а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено прежде всего на получение коэффициентных (т. е. опирающихся только на свойства коэффициентов уравнения) признаков существования или отсутствия колеблющихся решений.

В связи с этим, особенно интересной и актуальной представляется задача о нахождении аналогов показателей Ляпунова, отвечающих за колеблемость решений дифференциальных уравнений и систем.

В 2004 г. И.Н. Сергеев в докладе [59] впервые ввел понятие *характеристической частоты* $\nu(y)$ скалярной функции y, несущее в себе черты усреднения по Ляпунову и позволившее численно измерять колеблемость решений на полупрямой. Позже в статьях [60, 61] им также были определены различные модификации характеристических частот, а именно были определены *полная* $\sigma(x)$ *и векторная* $\zeta(x)$ *частоты* вектор-функции x, а в работе [62] были впервые введены *характеристики блуждаемости* вектор-функции x: скорость блуждания $\mu(x)$, показатель блуждаемости $\rho(x)$ и показатель блуждания $\eta(x)$, которые, как оказалось (см. работы [63, 65, 7, 68, 67]), имеют тесную связь с определенными ранее характеристиками колеблемости. В дальнейших его работах изучались свойства введенных характеристик и взаимосвязи, имеющиеся между ними.

Частоту решения можно интерпретировать как среднее (по всей полупрямой) значение числа нулей решения на полуинтервале длины π. Оказалось [59], что на решениях линейных однородных уравнений с ограниченными коэффициентами она принимает лишь конечные значения, что позволяет естественным образом классифицировать колеблющиеся решения, ставя в соответствие, к примеру, функции $y(t) = \sin \omega t$ ее частоту $\nu(y) = \omega$ (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции x с нормой $|x(t)| = \exp \lambda t$ ее показатель $\chi(x) = \lambda$).

Подсчет полной и векторной частоты вектор-функции происходит путем усреднения числа нулей проекции этой функции на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается полная частота $\sigma(x)$, а если после — то векторная частота $\zeta(x)$. По своему геометрическому смыслу данные частоты отвечают за частоту вращения вектора x вокруг нуля.

Оказалось [66], что на решениях линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами эти характеристики колеблемости принимают лишь конечные значения (при этом полная и векторная частоты решения y линейного уравнения n-го порядка определяются как величины $\sigma(x)$ и $\zeta(x)$ соответственно, где $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$).

Таким образом, оставался открытым вопрос о нахождении точных границ спектров (множества значений на всех ненулевых решениях) характеристик колеблемости на множестве решений линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами. В настоящей работе найдены точные границы спектров характеристик колеблемости на множестве решений линейных однородных уравнений второго порядка, а также диагональных и треугольных линейных систем произвольной размерности.

Характеристики блуждаемости, в свою очередь, могут быть интерпретированы следующим образом: скорость блуждания функции x есть временное среднее скорости движения следа, который вектор x оставляет на единичной сфере за определенный промежуток времени, а показатели блуждания или блуждаемости функции x получаются минимизацией (зависящей или не зависящей от отрезка усреднения) ее скорости блуждания по всем преобразованиям координат. Следовательно, эти показатели содержат только ту информацию о траектории на сфере, которая не гасится невырожденными линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора x вокруг нуля, но не улавливают его локального вращения вокруг какого-либо другого вектора.

В работе [62] было доказано, что все показатели блуждаемости на решениях линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами также принимают лишь конечные значения. Кроме того, в работах [38, 39] были исследованы границы спектров скорости блуждания μ для множества двумерных линейных систем и линейных однородных уравнений второго порядка. Таким образом, оставались неизвестными точные границы спектров остальных характеристик блуждаемости на множестве решений линейных однородных уравнений и систем с ограниченными коэффициентами. В настоящей работе найдены точные границы спектров показателей блуждаемости и блуждания для линейных однородных уравнений второго порядка, а также диагональных и треугольных линейных систем произвольной размерности.

В статье [64] было доказано, что спектр любой из величин $\eta, \rho, \sigma, \zeta, \nu$ на множестве решений одной системы, отвечающей линейному уравнению второго порядка, в некотором смысле вырожден – состоит ровно из одного числа. Однако оставался открытым вопрос касательно невырожденности спектра показателя μ. И в настоящей работе найдено такое уравнение, на множестве решений которого спектр показателя μ не только не вырожден, но и содержит целый отрезок числовой прямой.

Кроме того, известно [66], что все показатели блуждаемости ограничены сверху равномерной нормой $||A||$ (в пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксированы базис и связанная с ним стандартная евклидова структура) системы A, что однако не позволяет для систем, отвечающих линейным однородным уравнениям произвольного порядка, уменьшая коэффициенты эквивалентного ей уравнения гарантировать близость к нулю показателей ее решений. В той же работе [66] было доказано, что данная близость имеет место для всех характеристик колеблемости, а в настоящей работе доказано, что данная близость имеет место и для показателей блуждания и блуждаемости.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование *спектров* характеристик колеблемости и блуждаемости для диагональных и треугольных линейных однородных дифференциальных систем (с ограниченными коэффициентами), а также для систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям (с ограниченными коэффициентами).

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для диагональных и треугольных линейных однородных дифференциальных систем произвольной размерности (с ограниченными коэффициентами);
- получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям второго порядка (с ограниченными коэффициентами);
- доказано существование линейной системы, отвечающей линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка (с ограниченными коэффициентами), спектр скорости блуждания которой содержит отрезок числовой прямой;
- установлена близость показателей блуждания и блуждаемости к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

Методы исследования

В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под рук. проф. И.В. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И.Н. Сергеева (неоднократно: 2012–2015).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ по итогам года (г. Москва, декабрь 2014 г.);
- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (г. Ижевск, июнь 2015 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ [45]-[51]. Работ в соавторстве нет.

Автор глубоко признателен профессору Игорю Николаевичу Сергееву за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе. Автор также благодарен доценту Быкову Владимиру Владиславовичу за организационную и моральную поддержку.

Формулировки основных результатов

Для натурально числа n обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty),$$

где матричная (в $\mathbb{R}^n$ фиксирован правый базис) функция (отождествляемая в дальнейшем с самой системой) $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ кусочно непрерывна.

В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножества *диагональных* и *треугольных* систем

$$\mathcal{D}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{T}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \right\},$$

с ограниченными коэффициентами $|a_{ij}(t)| \leq d, \ t \in \mathbb{R}^+, \ 1 \leq i, j \leq n$, а также множество систем

$$\mathcal{E}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \right\}$$

с ограниченными коэффициентами $|a_i(t)| \leq d, \ t \in \mathbb{R}^+, \ 1 \leq i \leq n$, отвечающих *уравнениям* n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

превращающимся в систему A стандартным переходом от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}).$$

Пусть $S_*(A)$ – множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$, а множество $\operatorname{Aut} \mathbb{R}^n$ состоит из всех невырожденных линейных операторов $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Каждому решению $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ поставим в соответствие следующие его *ляпуновские* характеристики блуждаемости: *нижнюю (верхнюю) скорость блуждания, нижний (верхний) показатель блуждаемости* и, соответственно, *нижний (верхний) показатель блуждания*

$$\check{\mu}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t), \quad \left(\hat{\mu}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t)\right),$$
$$\check{\rho}(x) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \check{\mu}(Lx), \quad \left(\hat{\rho}(x) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx)\right),$$
$$\check{\eta}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,t), \quad \left(\hat{\eta}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \gamma(Lx,t)\right),$$

где

$$\gamma(z,t) \equiv \int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\left(\frac{z(\tau)}{|z(\tau)|}\right)\right| d\tau \quad \text{и} \quad |z| = \sqrt{z_1^2+...+z_n^2}.$$

Для вектор-функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n_*$ (где здесь и далее $\mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$), $x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\text{т}}$, числа $t>0$ и вектора $m \equiv (m_1,\ldots,m_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n_*$ обозначим через $\nu(x,m,t)$ *количество гиперкратных нулей* скалярного произведения

$$(x(\tau),m) \equiv m_1x_1(\tau)+m_2x_2(\tau)+\cdots+m_nx_n(\tau), \tag{1}$$

на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчета этого количества:

а) каждый некратный корень берется ровно один раз;

б) любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности; другими словами, как только хотя бы в одной точке $\tau_0 \in (0;t]$ выполнены одновременно оба равенства

$$(x(\tau_0),m) = (\dot{x}(\tau_0),m) = 0,$$

так сразу считается выполненным $\nu(x,m,t)=\infty$, в противном случае величина $\nu(x,m,t)$ считается равной числу нулей функции (x,m) на промежутке $(0,t]$.

Определение 2. Каждому решению $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ и вектору $m \in \mathbb{R}^n_*$ поставим в соответствие следующие характеристики колеблемости: *нижнюю (верхнюю) частоту нулей координаты* (x,m)

$$\check{\nu}_m(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\hat{\nu}_m(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$

а под *нижней (верхней) полной частотой нулей* и *нижней (верхней) векторной частотой нулей* решения x будем понимать

$$\check{\sigma}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\hat{\sigma}(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right),$$
$$\check{\zeta}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t) \quad \left(\hat{\zeta}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t)\right).$$

Определение 3. *Спектром* какой-либо величины $\varkappa : S_*(A) \to \mathbb{R}$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем область ее значений

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \{\varkappa(x) |\ x \in S_*(A)\},$$

а для произвольного подмножества $H \subset \mathcal{M}^n$ обозначим

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(H) = \{\varkappa(x) |\ x \in \bigcup_{A\in H} S_*(A)\}.$$

В дальнейшем, говоря о том, что для какого-либо из показателей $\varkappa = \mu, \rho, \eta, \nu_m, \sigma, \zeta$ справедливо то или иное утверждение, будем подразумевать, что данное утверждение справедливо одновременно для обоих показателей $\check{\varkappa}$ и $\hat{\varkappa}$.

Переходя к формулировкам основных результатов диссертации, заметим, что при $n = 1$ спектр всех названных выше величин для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ состоит ровно из одного числа 0 (замечание 1 в п. 1.3).

Теорема I (теоремы 1 и 2 в п. 2.1). *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$ и любого из показателей $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \rho$ справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(\mathcal{D}^n_d) = \{0\},$$

при этом если $n > 1$, то

$$\mathrm{Sp}_\mu(\mathcal{D}^n_d) = [0, d].$$

Для натурального $n > 1$ обозначим через $\mathbb{R}^n_D$ множество векторов $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n_*$, у которых как минимум две координаты отличны от 0

$$\mathbb{R}^n_D \equiv \{m \in \mathbb{R}^n_* \mid \exists i \neq j, 1 \leq i, j \leq n : m_i \cdot m_j \neq 0\},$$

а через $\overline{\mathbb{R}}^+$ будем обозначать множество $\mathbb{R}^+$, дополненное точкой ∞.

Теорема II (теорема 3 в п. 2.1). *Для любых чисел* $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$, *и* $d > 0$ *и любого вектора* $m \in \mathbb{R}^n_*$ *справедливы соотношения*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+,\ m \in \mathbb{R}^n_D, \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \{0, \infty\},\ m \notin \mathbb{R}^n_D.$$

Теорема III (теоремы 4 и 5 в п. 2.2). *Для любых чисел* $n \in \mathbb{N}$ *и* $d > 0$ *и любого из показателей* $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \check{\rho}$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(\mathcal{T}^n_d) = \{0\},$$

при этом если $n > 1$, *то*

$$\mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}^n_d) = [0, d].$$

Для натурального $n > 1$ обозначим через $\mathbb{R}^n_T$ множество векторов $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n_*$, у которых только последняя координата отлична от 0

$$\mathbb{R}^n_T \equiv \{m \in \mathbb{R}^n_* \mid m_n \neq 0,\ m_r = 0, r = 1, \ldots n-1\}.$$

Теорема IV (теорема 6 в п. 2.2). *Для любых чисел* $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$, *и* $d > 0$ *и любого вектора* $m \in \mathbb{R}^n_*$ *справедливы соотношения*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+,\ m \notin \mathbb{R}^n_T, \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}^n_d) = \{0, \infty\},\ m \in \mathbb{R}^n_T.$$

В множестве $\mathbb{R}^2_*$ каждому числу $d > 0$ поставим в соответствие подмножества векторов

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^-_d} \equiv \left\{ m \equiv (m_1, m_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2_* \mid \ \left|\frac{m_2}{m_1}\right| < \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}},\ m_1 \in \mathbb{R}_*,\ m_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^0_d} \equiv \left\{ m \equiv (m_1, m_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2_* \mid \ \left|\frac{m_2}{m_1}\right| = \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}},\ m_1 \in \mathbb{R}_*,\ m_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^+_d} \equiv \left\{ m \in \mathbb{R}^2_* \mid m \notin \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^-_d} \cup \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^0_d} \right\}.$$

Теорема V (теорема 7 и следствие 1 в п. 2.3). *Для любого числа* $d > 0$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{E}^2_d) = \begin{cases} [0, \lambda(d)], & m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^-_d}, \\ [0, \lambda(d)] \cup \{\infty\}, & m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^0_d}, \\ \overline{\mathbb{R}}^+, & m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}^+_d}, \end{cases}$$

из которого также вытекает цепочка равенств

$$\mathrm{Sp}_\sigma(\mathcal{E}_d^2) = \mathrm{Sp}_\zeta(\mathcal{E}_d^2) = \mathrm{Sp}_\eta(\mathcal{E}_d^2) = \mathrm{Sp}_\rho(\mathcal{E}_d^2) = [0;\lambda(d)],$$

где

$$\lambda(d) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sqrt{4d-d^2}\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{d}{\sqrt{4d-d^2}}\right)\right)^{-1}, & 0 < d < 4, \\ 1, & d = 4, \\ \dfrac{\pi}{2}\sqrt{d^2-4d}\left(\ln\left(\dfrac{d+\sqrt{d^2-4d}}{d-\sqrt{d^2-4d}}\right)\right)^{-1}, & d > 4. \end{cases}$$

Теорема VI (теорема 8 в п. 3.1). *Существует отрезок $K \subset \mathbb{R}^+$ такой, что для любого числа $d > 1/2$ и некоторой системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ справедливо включение*

$$K \subset \mathrm{Sp}_\mu(A).$$

Теорема VII (теоремы 9 и 10 в п. 3.2). *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, а также любого из показателей $\varkappa = \eta, \rho$ существует такое число $d > 0$, что для любой системы $A \in \mathcal{E}_d^n$ справедливо неравенство*

$$\varkappa(x) < \varepsilon, \quad x \in S_*(A),$$

при этом, если $n = 2$, то справедливо еще и неравенство

$$\mu(x) < \varepsilon, \quad x \in S_*(A).$$

Глава 1

Некоторые свойства характеристик блуждаемости и колеблемости

Основным результатом настоящей главы является доказательство некоторых вспомогательных свойств исследуемых величин, которые в дальнейшем используются при доказательстве основных результатов. Также в данной главе доказывается вырожденность спектра всех характеристик колеблемости и блуждаемости для линейных одномерных систем.

1.1 Основные определения

Основные определения и обозначения, используемые в данной работе, представлены во введении. В частности, в множестве кусочно-непрерывных систем $\mathcal{M}^n$ размерности n выделены подмножества *диагональных* $\mathcal{D}_d^n$ и *треугольных* $\mathcal{T}_d^n$ систем с ограниченными коэффициентами, а также множество систем $\mathcal{E}_d^n$ (с ограниченными коэффициентами), отвечающих *уравнениям* n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Каждая система $A \in \mathcal{M}^n$ в дальнейшем отождествляется со своей матричной функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, а через $S_*(A)$ обозначается множество всех ее ненулевых решений системы.

Каждому решению $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ ставятся в соответствие его *ляпуновские* характеристики блуждаемости $\check{\mu}, \hat{\mu}, \check{\rho}, \hat{\rho}, \check{\eta}, \hat{\eta}$ (см. определение 1), а также характеристики колеблемости $\check{\nu}_m, \hat{\nu}_m, \check{\sigma}, \hat{\sigma}, \check{\zeta}, \hat{\zeta}$ (см. определение 2).

Спектром какой-либо величины $\varkappa : S_*(A) \to \mathbb{R}$ для системы $A \in \mathcal{M}^n$ или подмножества $H \subset \mathcal{M}^n$ называется область ее значений (см. определение 3).

1.2 Некоторые свойства характеристик блуждаемости и колеблемости

В дальнейшем, говоря о том, что для какого-либо из показателей $\varkappa = \mu, \rho, \eta, \nu_m, \sigma, \zeta$ справедливо то или иное утверждение, будем подразумевать, что данное утверждение справедливо одновременно для обоих показателей $\check{\varkappa}$ и $\hat{\varkappa}$.

Каждой непрерывной вектор-функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2_*$ в каждый момент τ поставим в соответствие функцию $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, являющуюся непрерывной (по τ) ветвью угла, образуемого вектором $x(\tau)$ с положительным направлением Ox_1 оси абсцисс и отсчитываемого в положительном (против хода часовой стрелки) направлении.

Определение 4. Под *угловой скоростью кусочно-непрерывно дифференцируемой вектор-функции* $x \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2_*$ будем понимать производную $\dot\varphi(t)$ функции $\varphi(t)$, т.е. функцию, равную мгновенной (в момент $t \in \mathbb{R}^+$) угловой скорости единичного вектора

$$(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))^{\text{т}} = \frac{x(t)}{|x(t)|} \equiv \frac{(x_1(t), x_2(t))^{\text{т}}}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}.$$

А каждой непрерывной вектор-функции $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n_*$, где $y \equiv (y_1, \ldots, y_n)^{\text{т}}$, в каждый момент τ поставим в соответствие набор из n скалярных функций $(r(\tau), \varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{n-2}(\tau))$, определяемых равенством

$$\begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\tau)\cos\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau)\sin\varphi_2(\tau)\ldots\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ r(\tau)\sin\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau)\sin\varphi_2(\tau)\ldots\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ r(\tau)\cos\varphi_1(\tau)\sin\varphi_2(\tau)\ldots\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ \vdots \\ r(\tau)\cos\varphi_{n-3}(\tau)\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ r(\tau)\cos\varphi_{n-2}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{1.1}$$

Лемма 1. *Для любой кусочно-непрерывно дифференцируемой вектор-функции* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_*$ *справедливо равенство*

$$\gamma(x, t) = \int_0^t |\dot\varphi(\tau)|\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

а для любого натурального $n > 2$ и любой кусочно-непрерывно дифференцируемой вектор-функции $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_*$ справедливо равенство

$$\gamma(y,t) = \int_0^t \sqrt{\left(\dot{\varphi}^2_{n-2} + \dot{\varphi}^2_{n-3} \cdot \sin^2 \varphi_{n-2}(\tau) + \dots + \dot{\varphi}^2_0 \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \sin^2 \varphi_i(\tau)\right)}\, d\tau,$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, а $\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_i(\tau)$ – производная функции $\varphi_i(\tau)$ в момент τ, $i = 0, \dots, n-2$, и

$$\gamma(x,t) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) \right| d\tau, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Доказательство.

Разобьем доказательство на 2 этапа.

1. Рассмотрим сперва случай $n = 2$. Вектор x в полярных координатах в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ может быть представлен в виде

$$x(\tau) \equiv \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\tau)\cos\varphi(\tau) \\ r(\tau)\sin\varphi(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда вектор $e_x \equiv x/|x|$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ будет равен вектору $(\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau))^{\text{т}}$, а вектор $\dot{e}_x$ примет вид

$$\begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(\tau) \cdot \sin\varphi(\tau) \\ \dot{\varphi}(\tau) \cdot \cos\varphi(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, норма вектора $\dot{e}_x$ будет равна

$$\sqrt{(\dot{\varphi}(\tau))^2 \cdot \sin^2\varphi(\tau) + (\dot{\varphi}(\tau))^2 \cdot \cos^2\varphi(\tau)} = |\dot{\varphi}(\tau)|, \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

и

$$\gamma(x,t) \equiv \int_0^t \left| \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right)^{\cdot} \right| \equiv \int_0^t |\dot{e}_x|\, d\tau = \int_0^t |\dot{\varphi}(\tau)|\, d\tau,$$

что и требовалось доказать.

2. Вторую часть утверждения докажем по индукции. В случае $n = 3$ вектор y в сферических координатах в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ может быть представлен в виде

$$y(\tau) \equiv \begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \\ y_3(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\tau)\cos\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau) \\ r(\tau)\sin\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau) \\ r(\tau)\cos\varphi_1(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда вектор $e_y \equiv y/|y|$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ будет равен вектору $(\cos\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau), \sin\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau), \cos\varphi_1(\tau))^{\text{т}}$, а вектор $\dot{e}_y$ примет вид

$$\begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_0(\tau)\cdot\sin\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau) + \dot{\varphi}_1(\tau)\cdot\cos\varphi_0(\tau)\cos\varphi_1(\tau) \\ \dot{\varphi}_0(\tau)\cdot\cos\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau) + \dot{\varphi}_1(\tau)\cdot\sin\varphi_0(\tau)\cos\varphi_1(\tau) \\ -\dot{\varphi}_1(\tau)\cdot\sin\varphi_1(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, квадрат его (вектора $\dot{e}_x$) нормы будет равен

$$\begin{aligned}(\dot{\varphi}_0(\tau))^2 \cdot \sin^2\varphi_1(\tau)\cdot(\sin^2\varphi_0(\tau)+\cos^2\varphi_0(\tau)) + \\ + (\dot{\varphi}_1(\tau))^2\cdot\cos^2\varphi_1(\tau)\cdot(\sin^2\varphi_0(\tau)+\cos^2\varphi_0(\tau)) + \\ + (\dot{\varphi}_1(\tau))^2\cdot\sin^2\varphi_1(\tau) = \\ = \dot{\varphi}_0^2(\tau)\cdot\sin^2\varphi_1(\tau) + \dot{\varphi}_1^2(\tau), \quad \tau\in\mathbb{R}^+,\end{aligned}$$

и

$$\gamma(x,t) \equiv \int_0^t \sqrt{\dot{\varphi}_0^2(\tau)\cdot\sin^2\varphi_1(\tau)+\dot{\varphi}_1^2(\tau)}\,d\tau.$$

Таким образом, база индукции доказана.

Предположим теперь, что утверждение справедливо для $k > 2$ и докажем его для $n = k+1$. Последнее предположение, в свою очередь, означает, что для всякого вектора $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, которому в каждый момент τ сопоставлена (1.1) некоторая строка из $n-1$ скалярных функций $(r(\tau), \varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{n-3}(\tau))$, справедливо равенство

$$|\dot{e}_z|^2 = (\dot{\varphi}_{n-3}(\tau))^2 + (\dot{\varphi}_{n-4}(\tau))^2\cdot\sin^2\varphi_{n-3}(\tau) + \cdots + (\dot{\varphi}_0(\tau))^2\cdot\prod_{i=1}^{n-3}\sin^2\varphi_i(\tau), \tag{1.3}$$

где $e_z \equiv z/|z| \in \mathbb{R}^n$.

Пусть теперь вектору y в каждый момент τ сопоставлена (1.1) строка из n скалярных функций $(r(\tau), \varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{n-2}(\tau))$. Для натурального $n > 2$ введем следующее обозначение:

$$e_j^n \equiv \frac{e_{y_j}}{\sin\varphi_{n-2}}, \quad j = 0, \ldots, n-2,$$

где e_{y_j} – j-ая координата вектора $e_y \equiv y/|y| \in \mathbb{R}^n$.

Тогда вектор e_y может быть представлен следующим образом

$$e_y = \begin{pmatrix} e_0^n\cdot\sin\varphi_{n-2} \\ \ldots \\ e_{n-2}^n\cdot\sin\varphi_{n-2} \\ \cos\varphi_{n-2}\end{pmatrix},$$

а вектор $\dot{e}_y$ примет вид

$$\dot{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{e}_0^n \cdot \sin\varphi_{n-2} + e_0^n \cdot \dot{\varphi}_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-2} \\ \dots \\ \dot{e}_{n-2}^n \cdot \sin\varphi_{n-2} + e_{n-2}^n \cdot \dot{\varphi}_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-2} \\ \dot{\varphi}_{n-2} \cdot \sin\varphi_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что вектор $e_{\hat{y}}(\tau) \equiv (e_0^n, \dots, e_{n-2}^n)^{\text{т}}$ принадлежит подпространству $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и для него справедливо равенство (1.3).

Тогда, принимая во внимание тождество $\sum_{i=0}^{n-2}(e_i^n)^2 = 1$, вычислим квадрат нормы вектора $\dot{e}_y$, получим:

$$|\dot{e}_y|^2 = \sum_{i=0}^{n-2}(\dot{e}_i^n \cdot \sin\varphi_{n-2})^2 + \sum_{i=0}^{n-2} 2(\dot{e}_i^n \cdot e_i^n \cdot \dot{\varphi}_{n-2} \cdot \sin\varphi_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-2}) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2}(e_i^n \cdot \dot{\varphi}_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-2})^2 + \dot{\varphi}_{n-2}^2 \cdot \sin^2\varphi_{n-2} =$$

$$= \sin^2\varphi_{n-2} \cdot \sum_{i=0}^{n-2}(\dot{e}_i^n)^2 + \sin\varphi_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-2} \cdot \dot{\varphi}_{n-2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-2}(e_i^n)^2\right)^{\cdot} +$$

$$+ \dot{\varphi}_{n-2}^2 \cdot \cos^2\varphi_{n-2} \cdot \sum_{i=0}^{n-2}(e_i^n)^2 + \dot{\varphi}_{n-2}^2 \cdot \sin^2\varphi_{n-2} =$$

$$= \sin^2\varphi_{n-2} \cdot \sum_{i=0}^{n-2}(\dot{e}_i^n)^2 + \dot{\varphi}_{n-2}^2 \cdot \cos^2\varphi_{n-2} + \dot{\varphi}_{n-2}^2 \cdot \sin^2\varphi_{n-2} = \sin^2\varphi_{n-2} \cdot |\dot{e}_{\hat{y}}|^2 + \dot{\varphi}_{n-2}^2.$$

Извлекая корень из полученного соотношения и подставляя в него вместо $|\dot{e}_{\hat{y}}|^2$ выражение (1.3) получим требуемое равенство.

Лемма доказана.

Для натурального $n > 1$ обозначим

$$\mathcal{G}^n \equiv \left\{ L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n \mid L \equiv \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_{nn} \end{pmatrix}, \begin{matrix} k_{ij} \in \mathbb{R}^+, \ i = j, \\ k_{ij} \in \mathbb{R}, \ \ i \neq j. \end{matrix} \right\}. \quad (1.4)$$

Лемма 2. *Для любого решения $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ справедливо равенство*

$$\inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(Lx) = \inf_{L \in \mathcal{G}^n} \hat{\mu}(Lx).$$

Доказательство.

В самом деле, всякая невырожденная матрица L представляется [72, с. 139] в виде произведения

$$L = Q \cdot R$$

ортогональной матрицы Q и верхнетреугольной с положительными диагональными элементами матрицы R. Поэтому, так как $|Qx| = |x|$ для любых вектора x и ортогональной матрицы Q, то

$$\gamma(Lx,t) = \gamma(Q \cdot Rx,t) = \gamma(Rx,t), \quad x \in S_*(A).$$

Тогда, разделив матрицу R на ее $(1,1)$-элемент и воспользовавшись очевидным равенством $\gamma(kx,t) = \gamma(x,t)$, где $t \in \mathbb{R}^+$ и $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, получим необходимое соотношение.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого решения $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{T}_d^2$, $d \in \mathbb{R}^+$, и преобразования $L \in \mathcal{G}^2$ (1.4) угловая скорость $\dot\psi$ преобразованной вектор-функции Lx при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot\psi = (a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau)) \sin\psi\cos\psi - \big(k_{22}^{-1} a_{12}(\tau) + k_{12}k_{22}^{-1}(a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau))\big)\sin^2\psi, \tag{1.5}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(\tau)$ и k_{ij} – коэффициенты матриц $A = A(\tau)$ и L, соответственно.

Доказательство.

Зафиксируем число $d > 0$ и для произвольной системы $A \in \mathcal{T}_d^2$ рассмотрим ее ненулевое решение $x \in \mathbb{R}^2$. Зафиксируем также числа k_{12} и k_{22} для матрицы $L \in \mathcal{G}^2$. Пусть в каждый момент времени τ вектор $Lx(\tau) \equiv (x_1(\tau) + k_{12}x_2(\tau), k_{22}x_2(\tau))^{\mathrm{т}}$ сонаправлен с единичным вектором $(\cos\psi(\tau), \sin\psi(\tau))^{\mathrm{т}}$, а его длина $|Lx(\tau)|$ равна $r(\tau)$, т.е. $x_1(\tau) + k_{12}x_2(\tau) = r(\tau)\cos\psi(\tau)$ и $k_{22}x_2(\tau) = r(\tau)\sin\psi(\tau)$.

Если существует момент $\tau \in \mathbb{R}^+$, для которого $\psi(\tau) = 0$ или π, то $\psi(\tau) \equiv 0$ или π. Это следует из свойств решения дифференциального уравнения вида $\dot z = a(\tau)z, z \in \mathbb{R}$ [71, с. 63], а также того факта, что система $\tilde A \in \mathcal{T}_d^2$, полученная вследствие перехода к новым координатам

$y_1 = x_1 + k_{12}x_2, y_2 = k_{22}x_2$ содержит уравнение такого вида. При этом получим, что $\dot{\psi}(\tau) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, а отсюда и требуемое равенство.

Если же $\psi(\tau) \neq 0$ и π, то для всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ корректно определена функция $\operatorname{ctg}\psi(\tau) = \frac{1}{k_{22}} \cdot \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} + \frac{k_{12}}{k_{22}}$. Продифференцировав последнее равенство по переменной τ, получим:

$$-\dot{\psi} \cdot (\sin^2\psi)^{-1} = {k_{22}}^{-1} \cdot (\dot{x}_1 \cdot x_2 - \dot{x}_2 \cdot x_1) \cdot x_2^{-2} \Leftrightarrow$$

$$-\dot{\psi} \cdot (\sin^2\psi)^{-1} = {k_{22}}^{-1} \cdot ((a_{11}(\tau)x_1 + a_{12}(\tau)x_2)x_2 - a_{22}(\tau)x_1x_2) \cdot x_2^{-2} \Leftrightarrow$$

$$-\dot{\psi} \cdot (\sin^2\psi)^{-1} = {k_{22}}^{-1} \cdot ((a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau))(\cos\psi - k_{12} \cdot k_{22}^{-1}\sin\psi) \cdot {k_{22}}^{-1} \cdot \sin\psi - \\ - k_{22}^{-2} \cdot a_{12}(\tau)\sin^2\psi) \cdot (k_{22}^{-2} \cdot \sin^2\psi)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi} = (a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau))\sin\psi\cos\psi - \left(k_{22}^{-1}a_{12}(\tau) + k_{12}k_{22}^{-1}(a_{22}(\tau) - a_{11}(\tau))\right)\sin^2\psi.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого натурального числа $n > 2$ и системы $A \in \mathcal{D}^2$ существует система $\tilde{A} \in \mathcal{D}^n$ такая, что*

$$\mathrm{Sp}_\mu(A) \subset \mathrm{Sp}_\mu(\tilde{A}),$$

а для любой системы $B \in \mathcal{T}^2$ существует система $\tilde{B} \in \mathcal{T}^n$ такая, что

$$\mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(B) \subset \mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\tilde{B}).$$

Доказательство.

1. Докажем сперва первую часть леммы. Зафиксируем произвольные натуральное число $n > 2$, положительное число d, а также систему $A \in \mathcal{D}_d^2$

$$A(\tau) \equiv \begin{pmatrix} a_1(\tau) & 0 \\ 0 & a_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Пусть x – ненулевое решение этой системы и для некоторых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ выполняется

$$\check{\mu}(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t) = \alpha \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(x,t) = \beta.$$

Рассмотрим диагональную систему $\tilde{A}$ вида

$$\tilde{A}(\tau) \equiv \begin{pmatrix} a_1(\tau) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2(\tau) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

где функции a_1, a_2 – это коэффициенты исходной матрицы A. Очевидно, таким образом заданная система $\tilde{A}$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_d^n$.

Рассмотрим решение $\tilde{x}$ данной системы $\tilde{A}$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), 0, \dots, 0)^{\text{т}}$, где $x(0) \equiv (x_1(0), x_2(0))^{\text{т}}$ – значение исходной функции x в момент $\tau = 0$. Первые две координаты данного решения $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ будут удовлетворять уравнениям $\dot{x} = a_1(\tau)x$ и $\dot{x} = a_2(\tau)x$ соответственно, а с учетом равенств $\tilde{x}_1(0) = x_1(0)$ и $\tilde{x}_2(0) = x_2(0)$ получим, что $\tilde{x}_1(\tau) = x_1(\tau)$ и $\tilde{x}_2(\tau) = x_2(\tau)$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Тогда норма вектора $(\tilde{x}(\tau)/|\tilde{x}(\tau)|)^{\cdot}$ будет удовлетворять соотношению

$$\left|\left(\frac{\tilde{x}(\tau)}{|\tilde{x}(\tau)|}\right)^{\cdot}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tilde{x}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2}}\right)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2}}\right)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)\right)^2 = \left|\left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}\right)^{\cdot}\right|, \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

а значит, при всех $t \in \mathbb{R}^+$ будет справедливо равенство

$$\gamma(\tilde{x}, t) = \gamma(x, t),$$

из которого следуют соотношения

$$\check{\mu}(\tilde{x}) = \alpha \quad \text{и} \quad \hat{\mu}(\tilde{x}) = \beta.$$

Таким образом, имеем:

$$\mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\check{\mu}}(\tilde{A}) \qquad \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\hat{\mu}}(\tilde{A}).$$

Первое утверждение леммы доказано.

2. Перейдем к доказательству второй части леммы. Зафиксируем произвольные натуральное число $n > 2$, положительное число d, а также систему $B \in \mathcal{T}_d^2$

$$B(\tau) \equiv \begin{pmatrix} a_1(\tau) & a_2(\tau) \\ 0 & a_3(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Пусть x – ненулевое решение этой системы и для некоторого числа $\alpha \geq 0$ выполняется

$$\hat{\rho}(x) = \alpha.$$

Тогда из леммы 2 следует, что

$$\inf_{L \in \mathcal{G}^2} \hat{\mu}(Lx) \equiv \inf_{L \in \mathcal{G}^2} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) = \alpha.$$

Рассмотрим треугольную систему $\tilde{B}$ вида

$$\tilde{B}(\tau) \equiv \begin{pmatrix} a_1(\tau) & a_2(\tau) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_3(\tau) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

где функции a_1, a_2, a_3 – коэффициенты исходной матрицы B. Очевидно, данная система принадлежит множеству $\mathcal{T}_d^n$.

Рассмотрим решение $\tilde{x}$ данной системы $\tilde{B}$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), 0, \dots, 0)^{\text{т}}$, где $x(0) \equiv (x_1(0), x_2(0))^{\text{т}}$ – значение исходной функции x в момент $\tau = 0$. Первые две координаты данного решения $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ будут удовлетворять системе уравнений $\dot{x_1} = a_1(\tau)x_1 + a_2(\tau)x_2$ и $\dot{x_2} = a_3(\tau)x_2$ соответственно, а с учетом равенств $\tilde{x}_1(0) = x_1(0)$ и $\tilde{x}_2(0) = x_2(0)$ получим, что $\tilde{x}_1(\tau) = x_1(\tau)$ и $\tilde{x}_2(\tau) = x_2(\tau)$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Для любого преобразования $L \in \mathcal{G}^n$ (1.4) вектор $L\tilde{x}$ примет вид

$$L\tilde{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 + k_{12}\tilde{x}_2 \\ k_{22}\tilde{x}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\tilde{\mathcal{G}^n}$ множество преобразований $\tilde{L} \in \mathcal{G}^n$ вида

$$\tilde{L} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из вида вектора (1.6) следует, что для решения $\tilde{x}$ и любого преобразования $L \in \mathcal{G}^n$ найдется преобразование $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{G}^n}$, для которого справедливо равенство

$$L\tilde{x}(\tau) = \tilde{L}\tilde{x}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

А т.к. $\tilde{\mathcal{G}^n} \subset \mathcal{G}^n$, то будет справедливо равенство

$$\inf_{\tilde{L}\in\mathcal{G}^n} \hat{\mu}(\tilde{L}\tilde{x}) = \inf_{\tilde{L}\in\tilde{\mathcal{G}^n}} \hat{\mu}(\tilde{L}\tilde{x}).$$

Аналогично выкладкам п.1. получим, что норма вектора $(\tilde{L}\tilde{x}(\tau)/|\tilde{L}\tilde{x}(\tau)|)^\cdot$ при всех τ будет удовлетворять соотношению

$$\left|\left(\frac{\tilde{L}\tilde{x}(\tau)}{|\tilde{L}\tilde{x}(\tau)|}\right)^\cdot\right| = \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tilde{x}_1 + k_{11}\tilde{x}_2}{\sqrt{(\tilde{x}_1 + k_{11}\tilde{x}_2)^2 + (k_{22}\tilde{x}_2)^2}}\right)\right)^2 + \\ + \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{k_{22}\tilde{x}_2}{\sqrt{(\tilde{x}_1 + k_{11}\tilde{x}_2)^2 + (k_{22}\tilde{x}_2)^2}}\right)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{x_1 + k_{11}x_2}{\sqrt{(x_1 + k_{11}x_2)^2 + (k_{22}x_2)^2}}\right)\right)^2 + \\ + \left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{k_{22}x_2}{\sqrt{(x_1 + k_{11}x_2)^2 + (k_{22}x_2)^2}}\right)\right)^2 = \left|\left(\frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}\right)^\cdot\right|,$$

где $L \equiv L(k_{12}, k_{22}) \in \mathcal{G}^2$. Это означает, что для любого преобразования $L \in \mathcal{G}^2$ найдется такое преобразование $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{G}^n}$, что при всех $t \in \mathbb{R}^+$ будет верно равенство $\gamma(\tilde{L}\tilde{x}, t) = \gamma(Lx, t)$, а т.к. между преобразованиями $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{G}^2}$ и преобразованиями $L \in \mathcal{G}^2$ можно естественным образом установить изоморфизм, получим

$$\inf_{\tilde{L}\in\mathcal{G}^n} \hat{\mu}(\tilde{L}\tilde{x}) = \inf_{\tilde{L}\in\tilde{\mathcal{G}^n}} \hat{\mu}(\tilde{L}\tilde{x}) = \inf_{L\in\mathcal{G}^2} \hat{\mu}(Lx).$$

Следовательно, $\hat\rho(\tilde x) = \hat\rho(x)$ и

$$\mathrm{Sp}_{\hat\rho}(B) \subset \mathrm{Sp}_{\hat\rho}(\tilde B).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если для некоторой кусочно-непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n_*$, вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и числа $l > 0$ скалярная функция (x, m) (1) на любом полуинтервале длины π/l ровно один раз обращается в 0 и в моменты ее обнуления производная $(\dot x, m)$ не равна нулю, то будет справедливо равенство*

$$\nu_m(x) = l.$$

Доказательство.

1. Для начала отметим, что для любых кусочно-непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n_*$, вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и числа $t > 0$ равенство $\nu(x, m, t) = \infty$ возможно лишь в том случае, если на отрезке $[0; t]$ найдется момент t_0, для которого величины $(x(t_0), m)$ и $(\dot x(t_0), m)$ будут одновременно равны 0.

Действительно, если в некоторый момент t выполнено $\nu(x, m, t) = \infty$, то функция (x, m) на отрезке $[0; t]$ имеет бесконечно много нулей, а значит, по теореме Вейерштрасса [21, с. 85] имеет на нем и предельную точку $t_0 \in [0; t]$, служащую нулем этой функции; но тогда этот же нуль в силу теоремы Ролля является предельной точкой и для нулей производной $(\dot x, m)$, поэтому и сам является нулем производной, таким образом

$$(x(t_0), m) = (\dot x(t_0), m) = 0.$$

Получили противоречие.

Таким образом, из условии теоремы следует, что величина $\nu(x, m, t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}^+$ принимает только конечные значения.

2. Зафиксируем число $l > 0$, вектор-функцию x и вектор m, которые удовлетворяют условиям теоремы.

Заметим, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $T^* > \pi/l$ такое, что

$$\frac{\pi}{T^*} < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Тогда рассмотрим произвольный момент времени $t > T^*$ и предположим, что функция (x, m) обнулилась к этому моменту N раз, где $N \in \mathbb{N}$, т.е.

$\nu(m, x, t) = N$. А т.к. функция (x, m) на любом полуинтервале длины π/l содержит ровно один нуль, то будет справедлива следующая цепочка неравенств
$$\frac{\pi}{l} \cdot N \le t < \frac{\pi}{l} \cdot (N+1), \tag{1.8}$$
из которой также вытекает оценка
$$T^* < \frac{\pi}{l}(N+1). \tag{1.9}$$

Таким образом, с учетом первого неравенства в цепочке неравенств (1.8), имеем:
$$\frac{\pi\nu(x, m, t)}{t} = \frac{\pi N}{t} \le \frac{\pi N}{(\pi/l) \cdot N} = l.$$
А с учетом второго неравенства в цепочке (1.8), а также соотношений (1.7) и (1.9), получим оценку
$$\frac{\pi\nu(x, m, t)}{t} = \frac{\pi N}{t} > \frac{\pi N}{(\pi/l) \cdot (N+1)} = \frac{\pi}{(\pi/l)} - \frac{\pi}{(\pi/l) \cdot (N+1)} > l - \frac{\pi}{T^*} > l - \varepsilon.$$
Из двух последний соотношений получаем равенство
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\pi\nu(x, m, t)}{t} = l,$$
а вместе с ним и требуемую соотношение
$$\nu_m(x) = l.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если ненулевое решение x системы $A \in \mathcal{M}^2$ и вектор $m \in \mathbb{R}^2_*$ в некоторый момент $t \in \mathbb{R}^+$ связаны соотношением*
$$(x(t), m) = 0,$$
а $\dot\varphi(t)$ – значение угловой скорости решения x в момент t, то следующие условия эквивалентны:
1) $(\dot x(t), m) = 0$;
2) $\dot\varphi(t) = 0$.

Доказательство.

Зафиксируем момент $t \in \mathbb{R}^+$, вектор $m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_*$ и рассмотрим произвольное ненулевое решение x системы A. Через $\varphi(t)$ будем обозначать угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))^{\text{т}}$, сонаправленному с вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\text{т}}$ в момент $t \in \mathbb{R}^+$. Также, без ограничения общности, будем считать, что у вектора m первая координата отлична от нуля.

1. Предположим, что в момент t выполнено равенство

$$(\dot{x}(t), m) = 0.$$

Тогда из соотношения

$$(\dot{x}(t), m) = (A(t)x(t), m) = |x(t)| \cdot (A(t)e_x(t), m),$$

где $e_x(t) \equiv x(t)/|x(t)|$, а $|x(t)|$ – евклидова норма вектора $x(t)$, следует, что

$$(A(t)e_x(t), m) = 0.$$

А это, в свою очередь, означает, что величина $(\dot{e}_x(t), m)$ также будет равна 0:

$$\begin{aligned}(\dot{e}_x(t), m) = (A(t)e_x(t) + (A(t)e_x(t), e_x(t))e_x(t), m) = \\ = (A(t)e_x(t), m) + (A(t)e_x(t), e_x(t)) \cdot (e_x(t), m) = 0.\end{aligned} \quad (1.10)$$

Первое равенство в цепочке (1.10) доказано в теореме 1 главы 2 (2.1), а последний переход следует из предположения $(x(t), m) = 0$ и равенства $(A(t)e_x(t), m) = 0$.

Таким образом, из последнего равенства имеем:

$$\begin{aligned}(\dot{e}_x(t), m) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt}\cos\varphi(t)\right) m_1 + \left(\frac{d}{dt}\sin\varphi(t)\right) m_2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{\varphi}(t) \cdot (m_2\cos\varphi(t) - m_1\sin\varphi(t)) = 0.\end{aligned}$$

Выражение $m_2\cos\varphi(t) - m_1\sin\varphi(t)$ не равно нулю, т.к. в противном случае, с учетом предположения $(x(t), m) = 0$, получим, что

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\varphi(t)}{\cos\varphi(t)} = -\frac{m_1}{m_2},$$

откуда будет следовать, что вектор m – нулевой, а это противоречит условию теоремы.

Следовательно, нулю будет равна величина $\dot{\varphi}(t)$.

2. Предположим теперь, что что в момент t выполнено равенство

$$\dot{\varphi}(t) = 0,$$

из которого аналогично п.1 вытекает равенство

$$(\dot{e}_x(t), m) = 0.$$

А из предположения $(x(t), m) = 0$ аналогично п.1 получим, что

$$(\dot{e}_x(t), m) = 0 \Leftrightarrow (A(t)e_x(t), m) + (A(t)e_x(t), e_x(t)) \cdot (e_x(t), m) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A(t)e_x(t), m) = 0.$$

Следовательно, величина $(A(t)x(t), m)$ также будет равна 0, а вместе с ней нулю будет равно и выражение $(\dot{x}(t), m)$.

Лемма доказана.

1.3 Вырожденность спектра характеристик блуждаемости и колеблемости для линейных одномерных систем

Замечание 1. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^1$, числа $m \in \mathbb{R}_*$ и любого из показателей $\varkappa = \nu_m, \sigma, \zeta, \mu, \rho, \eta$ справедливо равенство*

$$\varkappa(x) = 0, \quad x \in S_*(A).$$

Доказательство.

Заметим, что любое ненулевое решение $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^1$ не обращается в нуль на $\mathbb{R}^+$ [71, с. 63], а вместе с ним не обращается в 0 и функция $\nu(x, m, t)$ (при любых $m \in \mathbb{R}_*$ и $t \in \mathbb{R}^+$). Следовательно, выполняются равенства

$$\nu_m(x) = \sigma(x) = \zeta(x) = 0.$$

Вместе с тем величина $x(\tau)/|x(\tau)|$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ тождественно равна либо 1, либо -1 (в зависимости от начальных условий решения x). Таким образом, $(x(\tau)/|x(\tau)|)^{\cdot} = 0$ и

$$\gamma(x, t) = 0,$$

откуда следует равенство нулю всех характеристик блуждаемости

$$\mu(x) = \rho(x) = \eta(x) = 0.$$

Утверждение доказано.

Глава 2

Точные границы спектров характеристик блуждаемости и колеблемости

В данной главе получены точные границы спектров показателей блуждания и блуждаемости, а также всех характеристик колеблемости для диагональных и треугольных систем произвольной размерности (с ограниченными коэффициентами), а также для линейных систем, отвечающих уравнениям второго порядка (с ограниченными коэффициентами).

2.1 Точные границы спектров диагональных систем произвольной размерности

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ в множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножество *диагональных* систем

$$\mathcal{D}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n(t) \end{pmatrix} \right\},$$

с ограниченными коэффициентами $|a_i(t)| \le d,\ \tau \in \mathbb{R}^+,\ 1 \le i \le n.$

В дальнейшем, говоря о том, что для какого-либо из показателей $\varkappa = \mu, \rho, \eta, \nu_m, \sigma, \zeta$ справедливо то или иное утверждение, будем подразумевать, что данное утверждение справедливо одновременно для обоих показателей $\check{\varkappa}$ и $\hat{\varkappa}$.

Теорема 1. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$ и любого из показателей $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \rho$ выполняется равенство*

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(\mathcal{D}_d^n) = \{0\}.$$

Доказательство.

Зафиксируем натуральное число $n > 1$ (случай $n = 1$ рассмотрен в главе 1), положительное число d и рассмотрим произвольное ненулевое решение x системы $A \in \mathcal{D}^n_d$. Для каждой координаты $i = 1, \ldots, n$ вектор-функции x всегда справедливо ровно одно из двух утверждений: либо $x_i(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, либо $x_i(t) \neq 0$ на $\mathbb{R}^+$. Это следует из свойств решения дифференциального уравнения вида $\dot{z} = a(t)z, \ z \in \mathbb{R}$ [71, с. 63], а также того факта, что каждая из координат вектор-функции x удовлетворяет уравнению такого вида.

1. Из вышесказанного в частности следует, что каждая координата x_i решения x либо равна нулю, либо сохраняет знак при всех t. Пусть тогда $i_1, \ldots, i_k$ – номера всех ненулевых координат решения x ($k \geq 1$, т. к. решение x – ненулевое). Тогда для вектора $m^* \equiv (\operatorname{sgn}(x_1(0)), \ldots, \operatorname{sgn}(x_n(0)))^{\mathrm{т}}$ в каждый момент $\tau \in \mathbb{R}^+$ справедлива оценка

$$(x(\tau), m^*) = |x_{i_1}(\tau)| + |x_{i_2}(\tau)| + \cdots + |x_{i_k}(\tau)| > 0,$$

а, значит, функция $(x(\tau), m^*)$ не обнуляется на $\mathbb{R}^+$ и при любом $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено равенство

$$\nu(x, m^*, t) = 0,$$

откуда сразу же следует соотношение

$$\zeta(x) = \sigma(x) = 0.$$

Таким образом, для любого натурального числа $n > 1$ и положительного числа d получим

$$\mathrm{Sp}_\zeta(\mathcal{D}^n_d) = \mathrm{Sp}_\sigma(\mathcal{D}^n_d) = \{0\}.$$

2. Для произвольных преобразования $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n_*$, ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{M}^n$ и момента $\tau \in \mathbb{R}^+$ обозначим

- через $e_x(\tau)$ – след $\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}$ решения x на единичной сфере в момент τ,
- через $y(\tau)$ – вектор, соответствующий в момент τ преобразованному решению $Lx(\tau)$,
- через $e_y(\tau)$ – след $\frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}$ решения x на единичной сфере в момент τ после действия на него преобразования L.

Заметим, что если исходное решение $x = x(\tau)$ удовлетворяет системе $\dot{x} = A(\tau)x,\ \tau \in \mathbb{R}^+$, то преобразованное решение $y = Lx(\tau)$ будет удовлетворять системе $\dot{y} = LA(\tau)L^{-1}y,\ \tau \in \mathbb{R}^+$ (достаточно подставить в первую системы вместо x выражение $L^{-1}y$), а вектор $\dot{e}_y$ примет вид

$$\begin{aligned}\dot{e}_y(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau}\left(\frac{y(\tau)}{|y(\tau)|}\right) = \frac{\dot{y}(\tau)}{|y(\tau)|} - \frac{y(\tau)\cdot|y(\tau)|^{\cdot}}{|y(\tau)|^2} = \\ = \frac{LA(\tau)L^{-1}y(\tau)}{|y(\tau)|} - \left(\frac{LA(\tau)L^{-1}y(\tau)}{|y(\tau)|}, \frac{y(\tau)}{|y(\tau)|}\right)\cdot\frac{y(\tau)}{|y(\tau)|} = \\ = LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau) - \big(LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau), e_y(\tau)\big)\, e_y(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{2.1}$$

т.к.

$$|y(\tau)|^{\cdot} = \frac{2\cdot(\dot{y}(\tau), y(\tau))}{2\cdot\sqrt{(y(\tau), y(\tau))}} = |y(\tau)|\cdot\left(\frac{LA(\tau)L^{-1}y(\tau)}{|y(\tau)|}, \frac{y(\tau)}{|y(\tau)|}\right).$$

Из (2.1), в частности, следует, что выражение $\gamma(y,t)$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\gamma(y,t) \equiv \int_0^t |\dot{e}_y(\tau)|\, d\tau = \\ = \int_0^t \left|LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau) - \big(LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau), e_y(\tau)\big)\, e_y(\tau)\right| d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1 Для произвольного $k > 1$ рассмотрим преобразование, задаваемое матрицей $L = L(k)$ размерности $n \times n$

$$L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ k & \dots & k & k & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

обратное преобразование L^{-1} будет иметь вид

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -k & \dots & -k & -k & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица LAL^{-1} примет вид

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ k(a_1 - a_n) & \dots & \dots & k(a_{n-1} - a_n) & a_n \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

2.2. Поставим в соответствие вектор-функциям x и y такие наборы из n скалярных функций $(r(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-2}(t))$ и, соответственно, $(\tilde{r}(t), \psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{n-2}(t))$, чтобы при всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполнялись соотношения

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)e_{x_1}(t) \\ r(t)e_{x_2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ r(t)e_{x_n}(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r\cos\varphi_0(t)\sin\varphi_1(t)\sin\varphi_2(t)\dots\sin\varphi_{n-2}(t) \\ r\sin\varphi_0(t)\sin\varphi_1(t)\sin\varphi_2(t)\dots\sin\varphi_{n-2}(t) \\ r\cos\varphi_1(t)\sin\varphi_2(t)\dots\sin\varphi_{n-2}(t) \\ \vdots \\ r\cos\varphi_{n-3}(t)\sin\varphi_{n-2}(t) \\ r\cos\varphi_{n-2}(t) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

и

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}(t)e_{y_1}(t) \\ \tilde{r}(t)e_{y_2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{r}(t)e_{y_n}(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{r}(t)\cos\psi_0(t)\sin\psi_1(t)\sin\psi_2(t)\dots\sin\psi_{n-2}(t) \\ \tilde{r}(t)\sin\psi_0(t)\sin\psi_1(t)\sin\psi_2(t)\dots\sin\psi_{n-2}(t) \\ \tilde{r}(t)\cos\psi_1(t)\sin\psi_2(t)\dots\sin\psi_{n-2}(t) \\ \vdots \\ \tilde{r}(t)\cos\psi_{n-3}(t)\sin\psi_{n-2}(t) \\ \tilde{r}(t)\cos\psi_{n-2}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Как уже отмечалось ранее, для каждой координаты $i = 1, \dots, n$ вектор-функции x выполняется ровно одно из двух условий: либо $x_i(t) \equiv 0,\ t \in \mathbb{R}^+$, либо $x_i(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}^+$. Исходя из этого далее можно считать, что все координаты вектор-функции x неотрицательны ($x_i(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}^+, i = 1, \dots, n$), т.к. в противном случае можно перейти к рассмотрению вектор-функции Qx, где Q – диагональная матрица $Q \equiv \operatorname{diag}\{\operatorname{sgn}(x_1(0)), \dots, \operatorname{sgn}(x_n(0))\}$, для которой при всех $t \in \mathbb{R}^+$ будет справедливо равенство $\gamma(Qx, t) = \gamma(x, t)$.

Также будем считать, что вектор-функция x содержит как минимум две ненулевые координаты $x_p(t),\ x_q(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}^+,\ 1 \leq p < q \leq n$, т.к.

в противном случае задача будет сведена к одномерному случаю, для которого, согласно замечанию 1 главы 1, справедливы равенства

$$\eta(x) = \rho(x) = 0.$$

Тогда из соотношений $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_{n-1} = y_{n-1}$ и $kx_1 + \cdots + kx_{n-1} + x_n = y_n$ (вытекающих из равенства $y = Lx$), а также неравенств $x_i(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, \ldots, n$, следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^2 \psi_{n-2} = \frac{y_n^2}{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2} = \frac{(kx_1 + \cdots + kx_{n-1} + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \geq \\ \geq \frac{k^2(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) + x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} = k^2 + \frac{x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} = k^2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_{n-2}\end{aligned}$$

и

$$\sin^2 \psi_{n-2} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_{n-2}} \leq \frac{1}{1 + k^2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_{n-2}} < \frac{1}{k^2}. \qquad (2.7)$$

2.3. Перейдем теперь к оценке нормы вектора $\dot{e}_y$, воспользуемся представлением (2.1). Из вида матрицы LAL^{-1} (2.4) следует, что величина $\big(LAL^{-1}e_y, e_y\big)$ будет равна

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} \Big(a_j \cdot e_{y_j}^2 + k(a_j - a_n)e_{y_j}e_{y_n}\Big)\right) + a_n e_{y_n}^2,$$

где e_{y_j} – j-ая координата вектора $e_y,\ j = 1, \ldots, n$. Следовательно, каждая из первых $n-1$ координат вектора $\dot{e}_y$ будет иметь вид

$$a_i e_{y_i} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \Big(a_j \cdot e_{y_j}^2 + k(a_j - a_n)e_{y_j}e_{y_n}\Big)\right) e_{y_i} - a_n e_{y_n}^2 e_{y_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad (2.8)$$

где $a_i = a_i(\tau)$ – коэффициенты матрицы A. Заметим, что каждая компонента $e_{y_i},\ i = 1, \ldots, n-1$, содержит множитель $\sin \psi_{n-2}$, а все остальные множители этой компоненты ограничены по модулю единицей. Следовательно, в каждый момент τ каждая такая компонента по модулю будет ограничена числом $|\sin \psi_{n-2}(\tau)|,\ \tau \in \mathbb{R}^+$, которое в свою очередь будет ограничено числом k^{-1}, что следует из (2.7). Таким образом, выражение (2.8) при $i = 1, \ldots, n-1$ по модулю будет ограничено числом

$$\frac{d}{k} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{k^2} + 2dk \cdot \frac{1}{k}\right)\right) \cdot \frac{1}{k} + \frac{d}{k} = \frac{2d \cdot n}{k} + \frac{d(n-1)}{k^3} < \frac{3d \cdot n}{k}.$$

Последняя же координата (с номером n) вектора $\dot{e}_y$ будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(k(a_j-a_n)e_{y_j}\right)+a_ne_{y_n}-\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_j\cdot e_{y_j}^2+k(a_j-a_n)e_{y_j}e_{y_n}\right)e_{y_n}-$$

$$-a_ne_{y_n}^2e_{y_n}=\sum_{j=1}^{n-1}\left(k(a_j-a_n)e_{y_j}\right)(1-e_{y_n}^2)+a_n(1-e_{y_n}^2)e_{y_n}-\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_j\cdot e_{y_j}^2\right)e_{y_n}. \tag{2.9}$$

Тогда, с учетом равенства $1-e_{y_n}^2=\sin^2\psi_{n-2}$, получим, что выражение (2.9) по модулю ограничено числом

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(k\cdot 2d\cdot\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{d}{k^2}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d}{k^2}<\frac{3d\cdot n}{k^2}.$$

Таким образом, для любого $0<\varepsilon<d$ можно подобрать преобразование $L=L(k)$ вида (2.3), где $k=(3dn^2)\cdot\varepsilon^{-1}$, такое, что для преобразованного решения $y=Lx$ каждая координата вектора $\dot{e}_y$ в каждый момент времени τ будет ограничена по модулю числом $\varepsilon\cdot n^{-1}$. В таком случае норма самого вектора будет ограничена сверху числом ε, и, как следствие, будут справедливы оценки

$$\frac{1}{t}\gamma(Lx,t)\equiv\frac{1}{t}\int_0^t|\dot{e}_y(\tau)|\,d\tau\le\frac{1}{t}\cdot t\cdot\varepsilon=\varepsilon$$

и

$$\mu(Lx)\le\varepsilon$$

а, значит,

$$\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\mu(Lx)=0,$$

откуда в силу неравенств $\check{\eta}(x)\le\check{\rho}(x)$ и $\hat{\eta}(x)\le\hat{\rho}(x)$, получаем требуемую цепочку

$$\eta(x)=\rho(x)=0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любых чисел $n>1$, $n\in\mathbb{N}$, и $d>0$ существует система $A\in\mathcal{D}_d^n$, для которой справедливо соотношение*

$$\operatorname{Sp}_\mu(A)=\operatorname{Sp}_\mu(\mathcal{D}_d^n)=[0,d].$$

Доказательство.

1. Зафиксируем натуральное число $n > 1$, положительное число d и покажем, что для любой системы $A \in \mathcal{D}_d^n$ справедлива оценка

$$\mu(x) \leq d, \quad x \in S_*(A).$$

Действительно, для произвольного ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{D}_d^n$, величина $\gamma(x,t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}^+$ будет иметь вид

$$\gamma(x,t) = \int_0^t |\dot{e}_x(\tau)| \, d\tau = \int_0^t |A(\tau)e_x(\tau) - (A(\tau)e_x(\tau), e_x(\tau))\, e_x(\tau)| \, d\tau,$$

где $e_x \equiv x/|x|$. Это следует из (2.2), если положить $L = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1\}$.

Обозначим через a вектор $(a_1, \ldots, a_n)^{\text{т}}$, составленный из диагональных коэффициентов матрицы A, тогда вектор Ae_x можно представить в виде

$$Ae_x = (a_1 e_{x_1}, \ldots, a_n e_{x_n})^{\text{т}},$$

где e_{x_j} – j-ая координата вектора e_x, $j = 1, \ldots, n$. Величина (Ae_x, e_x), в свою очередь, может быть представлена в виде

$$(Ae_x, e_x) = \sum_{j=1}^n a_j e_{x_j}^2 \equiv f(a, e_x),$$

а вектор $\dot{e}_x$ примет вид

$$\dot{e}_x \equiv \begin{pmatrix} \dot{e}_{x_1} \\ \dot{e}_{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{e}_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e_1 - f(a, e_x) e_1 \\ a_2 e_2 - f(a, e_x) e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n e_n - f(a, e_x) e_n \end{pmatrix}.$$

С учетом введенных выше обозначений, а также принимая во внимание ограниченность коэффициентов a_j по модулю числом d на $\mathbb{R}^+$, $j = 1, \ldots, n$, для нормы вектора $\dot{e}_x$ может быть получена оценка

$$|\dot{e}_x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \dot{e}_{x_j}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j e_{x_j} - f(a, e_x) e_{x_j})^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 e_{x_j}^2 - 2f(a,e_x)\cdot\sum_{j=1}^{n} a_j e_{x_j}^2 + f^2(a,e_x)\cdot\sum_{j=1}^{n} e_{x_j}^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 e_{x_j}^2 - 2f^2(a,e_x) + f^2(a,e_x)} \le$$

$$\le \sqrt{d^2\cdot\sum_{j=1}^{n} e_{x_j}^2 - f^2(a,e_x)} = \sqrt{d^2 - f^2(a,e_x)} \le d.$$

Следовательно, величина $\gamma(x,t)$ ограничена числом $d\cdot t$ при всех $t\in\mathbb{R}^+$, откуда сразу же вытекает оценка $\mu(x)\le d$.

Таким образом, для любой системы $A\in\mathcal{D}_d^n$ справедливо включение

$$\mathrm{Sp}_\mu(A)\subseteq[0,d].$$

2. Докажем теперь, что для любого натурального числа $n>1$ и положительного числа d существует система $A\in\mathcal{D}_d^n$, для которой справедливо обратное включение

$$[0,d]\subseteq\mathrm{Sp}_\mu(A).$$

2.1. Для начала рассмотрим случай $n=2$. Для заданного $d>0$ искомую систему $A\in\mathcal{D}_d^2$ будем строить как кусочно-постоянную, матрица которой на участках постоянства совпадает с одной из следующих матриц:

$$A_1=\begin{pmatrix}-d & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}d & 0\\ 0 & -d\end{pmatrix}.$$

Участки постоянства будут строиться по индукции с шагом k. На каждом шаге индукции будет строиться пара промежутков (полуинтервалов), длина которых будет зависеть от номера шага. Промежутки, построенные на k-ом шаге, будут обозначаться как Δ_k^1 и Δ_k^2, $k\in\mathbb{N}$, а их объединение – через Δ_k. На промежутках Δ_k^1 матрица A будет совпадать с матрицей A_1, а на промежутках Δ_k^2 – с матрицей A_2.

На первом шаге, в качестве промежутков Δ_1^1 и Δ_1^2 возьмем полуинтервалы $(0,1]$ и $(1,2]$, соответственно. На втором шаге участками постоянства будут промежутки $\Delta_2^1\equiv(2,2+1/2]$ и $\Delta_2^2\equiv(2+1/2,3]$. Обозначим общую длину всех промежутков постоянства построенных на шагах $1,\ldots,k-1$ через T, тогда на k-ом шаге промежутками постоянства будут

$(T, T+1/k]$ и $(T+1/k, T+2/k]$. Сразу отметим, что длина каждого из промежутков, построенных на k-ом шаге равна $1/k$ и стремится к 0 при $k \to \infty$. При этом объединение всех построенных промежутков $\cup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k$ есть $\mathbb{R}^+$. Это означает, что система, заданная таким образом, определена на всей полупрямой.

Пусть теперь x – такое решение построенной системы A, у которого обе координаты положительны на $\mathbb{R}^+$ (этим свойством обладает любое решение с начальными условиями $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$). В каждый момент τ поставим в соответствие решению x функцию $\varphi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, являющуюся непрерывной (по τ) ветвью угла, образуемого вектором $x(\tau)$ с положительным направлением Ox_1 оси абсцисс и отсчитываемого в положительном (против хода часовой стрелки) направлении. Под угловой скоростью решения x будем понимать производную $\dot{\varphi}(t)$ функции $\varphi(t)$, т.е. функцию, равную мгновенной (в момент $t \in \mathbb{R}^+$) угловой скорости единичного вектора

$$(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))^{\text{т}} = \frac{x(t)}{|x(t)|} \equiv \frac{(x_1(t), x_2(t))^{\text{т}}}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}.$$

Тогда из леммы 3 (если положить $k_{12} = 0, k_{22} = 1$) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ на промежутке Δ_k^1 угловая скорость вектор-функции x будет удовлетворять уравнению

$$\dot{\varphi}(\tau) = 2d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau), \quad \tau \in \Delta_k^1,$$

а на промежутке Δ_k^2 – уравнению

$$\dot{\varphi}(\tau) = -2d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau), \quad \tau \in \Delta_k^2.$$

Перепишем данные уравнения в виде уравнений с разделяющимися переменными, получим:

$$\frac{d\varphi}{2d\sin\varphi\cos\varphi} = d\tau \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{-2d\sin\varphi\cos\varphi} = d\tau.$$

Для чисел $k \in \mathbb{N}$ и $i = \{1, 2\}$ обозначим концы промежутков Δ_k^i через α_k^i и β_k^i, а через φ_k^i и $\varphi_k^i + \Delta\varphi_k^i$ будем обозначать значения функции $\varphi = \varphi(\tau)$ в точках α_k^i и β_k^i, соответственно. Сразу же отметим, что область значений функции $\varphi = \varphi(\tau)$ не выходит за пределы интервала $(0, \pi/2)$, что следует из условий $x_1(\tau) > 0, x_2(\tau) > 0,\ \tau \in \mathbb{R}^+$. Тогда, с учетом введенных обозначений, будут справедливы соотношения

$$\int\limits_{\alpha_k^1}^{\beta_k^1} d\tau = \int\limits_{\varphi_k^1}^{\varphi_k^1+\Delta\varphi_k^1} \frac{d\varphi}{2d\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{2d}\int\limits_{\varphi_k^1}^{\varphi_k^1+\Delta\varphi_k^1} \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi}{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{1}{2d}\int\limits_{\varphi_k^1}^{\varphi_k^1+\Delta\varphi_k^1} \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2d}(\ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^1+\Delta\varphi_k^1)| - \ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^1)|) \quad (2.10)$$

и

$$\int\limits_{\alpha_k^2}^{\beta_k^2} d\tau = \int\limits_{\varphi_k^2}^{\varphi_k^2+\Delta\varphi_k^2} \frac{d\varphi}{-2d\sin\varphi\cos\varphi} = \int\limits_{\varphi_k^2+\Delta\varphi_k^2}^{\varphi_k^2} \frac{d\varphi}{2d\sin\varphi\cos\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2d}(\ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^2)| - \ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^2+\Delta\varphi_k^2)|). \quad (2.11)$$

По построению длины полуинтервалов Δ_k^1 и Δ_k^2 равны между собой, а значит

$$\int\limits_{\alpha_k^2}^{\beta_k^2} d\tau = \alpha_k^2 - \beta_k^2 = \alpha_k^1 - \beta_k^1 = \int\limits_{\alpha_k^1}^{\beta_k^1} d\tau$$

и, как следствие

$$\frac{1}{2d}(\ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^1+\Delta\varphi_k^1)|-\ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^1)|) = \frac{1}{2d}(\ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^2)|-\ln|\,\mathrm{tg}(\varphi_k^2+\Delta\varphi_k^2)|). \quad (2.12)$$

Также из построения последовательности $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, вытекает равенство $\varphi_k^1 + \Delta\varphi_k^1 = \varphi_k^2$, которое вместе с равенством (2.12) и ограничением $\varphi(\tau) \in (0, \pi/2)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, обеспечивает тождество $\varphi_k^1 = \varphi_k^2 + \Delta\varphi_k^2$. Это, в свою очередь, означает, что по окончанию каждого шага индукции всякое решение x с начальными условиями $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$ возвращается в свое исходное положение (на тот же луч фазовой плоскости, на котором решение находилось в начальный момент). При этом величина отклонения от исходного положения $\Delta\varphi_k^i \equiv \left|(\Delta\varphi_k^i + \varphi_k^i) - \varphi_k^i\right|$ стремится к 0 при увеличении номера шага. Действительно, функция $f(\varphi) = (2d\sin\varphi\cos\varphi)^{-1}$ на отрезках $[\varphi_k^1, \varphi_k^1 + \Delta\varphi_k^1]= [\varphi_k^2 + \Delta\varphi_k^2, \varphi_k^2] \subset (0, \pi/2)$ непрерывна и достигает своего наименьшего значения – обозначим его через M_k. Тогда из соотношений

(2.10) и (2.11) для $i = 1, 2$ и $k \in \mathbb{N}$ получим

$$|\beta_k^i - \alpha_k^i| = \left| \int\limits_{\varphi_k^i}^{\varphi_k^i + \Delta\varphi_k^i} \frac{d\varphi}{2d\sin\varphi\cos\varphi} \right| \geq M_k \cdot |(\varphi_k^i + \Delta\varphi_k^i) - \varphi_k^i| = M_k \cdot \Delta\varphi_k^i.$$

По построению длина промежутков Δ_k^i стремится к 0 при $k \to +\infty$, следовательно, при увеличении шага k стремится к 0 будет и величина $\Delta\varphi_k^i$.

Таким образом, для любого $\varphi_0 \in (0, \pi/4]$ и $0 < \varepsilon < \pi/4 - \varphi_0$, существует решение x построенной системы A, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) \equiv \operatorname{arctg}(x_2(0)/x_1(0)) = \varphi_0$, и число T такие, что для любого $\tau > T$ модуль угловой скорости данного решения удовлетворяет оценке

$$d\sin(2 \cdot \varphi_0) \leq |\dot\varphi(\tau)| \leq d\sin(2 \cdot (\varphi_0 + \varepsilon)) \leq d\sin(2 \cdot \varphi_0) + \varepsilon$$

откуда [21, с. 113] сразу следует, что

$$\mu(x) = d\sin(2 \cdot \varphi_0).$$

Функция $g(\varphi_0) \equiv d\sin(2 \cdot \varphi_0)$ из последнего равенства возрастает на промежутке $(0, \pi/4]$, принимая все значения от 0 до d, что обеспечивает требуемое включение

$$[0, d] \subseteq \mathrm{Sp}_\mu(A).$$

2.2. Применив лемму 4, получим, что утверждение, доказанное в пункте 2.1, справедливо и для любого $n > 2$. А значит, с учетом включения, доказанного в п. 1, для любого натурального числа $n > 1$, положительного числа d и системы $A \in D_d^n$ получим

$$\mathrm{Sp}_\mu(\mathcal{D}_d^n) = \mathrm{Sp}_\mu(A) = [0, d].$$

Теорема доказана.

Для натурального числа $n > 1$ обозначим через $\mathbb{R}_D^n$ множество векторов $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}_*^n$, у которых как минимум две координаты отличны от 0

$$\mathbb{R}_D^n \equiv \{m \in \mathbb{R}_*^n \mid \exists i \neq j : m_i \cdot m_j \neq 0\},$$

а через $\overline{\mathbb{R}}^+$ будем обозначать множество $\mathbb{R}^+$ дополненное точкой ∞.

Теорема 3. *Для любых чисел $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $d > 0$ и любого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ справедливы соотношения*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+, \quad m \in \mathbb{R}^n_D,$$

и

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \{0, \infty\}, \quad m \notin \mathbb{R}^n_D.$$

Доказательство.

1. Предположим, что у ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ ровно одна координата отлична от 0 и j – ее порядковый номер. Пусть также фиксировано число $d > 0$. Рассмотрим тогда систему $A \in \mathcal{D}^n_d$ с диагональной матрицей $A = \mathrm{diag}\{d, \ldots, d\}$ и пусть x – некоторое ее ненулевое решение. Тогда выражение (x, m) (1) примет вид

$$(x(\tau), m) = m_j x_j(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Для каждой координаты $i = 1, \ldots, n$ вектор-функции x всегда справедливо ровно одно из двух утверждений: либо $x_i(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, либо $x_i(t) \neq 0$ на $\mathbb{R}^+$. Это следует из свойств решения дифференциального уравнения вида $\dot{z} = a(t)z,\ z \in \mathbb{R}$ [71, с. 63], а также того факта, что каждая из координат вектор-функции x удовлетворяет уравнению такого вида. Следовательно, выражение $(x(\tau), m)$ всегда либо тождественно равно 0, либо не обнуляется при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$, что зависит от выбора начальных условий для координаты x_j. А, значит, величина $\nu_m(x)$ может принимать только 2 значения: либо 0, либо ∞. Данные значения могут быть достигнуты на решениях со следующими начальными условиями: $x_i(0) = 1, i = 1, \ldots, n$, и, соответственно, $x_j(0) = 0, x_i(0) = 1, i \neq j$.

Второе равенство теоремы доказано.

2. Перейдем к доказательству первого равенства.

2.1. Для начала рассмотрим случай $n = 2$, предварительно зафиксировав число $d > 0$ и вектор $m = (m_1, m_2)^{\mathrm{т}}$, где $m_1 \cdot m_2 \neq 0$.

Легко заметить, что значения 0 и ∞ величина ν_m принимает на решениях $z_1 = (m_1 e^{dt}; m_2 e^{dt})^{\mathrm{т}}$ и $z_2 = (m_1 e^{dt}; -m_2 e^{dt})^{\mathrm{т}}$ системы $A \in \mathcal{D}^2_d$ с постоянными коэффициентами $a_{11}(t) = a_{22}(t) = d,\ t \in \mathbb{R}^+$.

Докажем, что показатель ν_m может принимать любое значение $l > 0$. Рассмотрим систему $B = B(l)$, получающуюся из системы A, построенной в пункте 2.1 теоремы 2, путем следующих модификаций: на каждом шаге $k \in \mathbb{N}$ в качестве участков постоянства Δ_k^1 и Δ_k^2 берутся промежутки $(T, T + \pi/(2l)]$ и $(T + \pi/(2l), T + \pi/l]$ (длина которых не зависит от номера шага k), где T – общая длина всех промежутков, построенных на шагах $1, \ldots, k-1$, а $l > 0$ – некоторое наперед заданное число. Очевидно, таким образом заданная система (при любом $l \in \mathbb{R}^+$) определена на $\mathbb{R}^+$.

Пусть x – такое ненулевое решение системы $B(l)$, у которого ни одна из координат не обнуляется на $\mathbb{R}^+$ (этим свойством обладает любое решение с начальными условиями $x_1(0) \cdot x_2(0) \neq 0$). Тогда аналогично п. 2.1 теоремы 2 можно утверждать, что по окончанию каждого шага индукции всякое такое решение x возвращается в свое исходное положение – на тот же луч фазовой плоскости $\varphi(0) = \operatorname{arctg}(x_2(0)/x_1(0))$, на котором это решение находилось в начальный момент. Также предположение $x_1(0) \cdot x_2(0) \neq 0$ гарантирует, что для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ будет справедливо соотношение

$$\frac{\pi}{2} \cdot s < \varphi(\tau) < \frac{\pi}{2} \cdot (s+1), \quad \tau \in \mathbb{R}^+,$$

где $\varphi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau))$, сонаправленному в каждый момент τ с вектором x. А это, в свою очередь, означает, что

$$\operatorname{sgn}\dot{\varphi}(\tau) = \operatorname{sgn}(2d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)) = \mathrm{const}, \quad \Delta_k^1, \ k \in \mathbb{N},$$

и

$$\operatorname{sgn}\dot{\varphi}(\tau) = \operatorname{sgn}(2d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)) = -\mathrm{const}, \quad \Delta_k^2, \ k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, на каждом из этих промежутков (Δ_k^1 и Δ_k^2, $k \in \mathbb{N}$) вектор x движется по фазовой плоскости строго в одном определенном направлении (против или по направлению движения часовой стрелки при традиционном расположении осей) и пересекает любой луч фазовой плоскости не более одного раза.

Рассмотрим тогда решение x удовлетворяющее начальным условиям $x(0) \equiv (x_1(0), x_2(0))^{\mathrm{т}} = (m_2, -m_1)^{\mathrm{т}}$. На каждом промежутке Δ_k^1 вектор-функция x начинает движение из положения $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(-m_1/m_2)$ и движется по фазовой плоскости строго в одном определенном направлении (против движения часовой стрелки при традиционном расположении осей) пока $\tau \in \Delta_k^1$. Спустя время $\pi/(2l)$ (равное длине промежутка Δ_k^1), вектор x меняет направление движения по фазовой плоскости на противоположное и на промежутке Δ_k^2 движется строго в этом направлении, за то же время $\pi/(2l)$ возвращаясь в исходное положение. Таким образом, вектор x на любом полуинтервале длины π/l ровно один раз пересекает луч $\varphi = \mathrm{arctg}(m_1/m_2)$ и только в этот момент функция (x, m) обращается в 0 (в этот момент $(x, m) = m_2 \cdot m_1 + (-m_1) \cdot m_2 = 0.$), при этом из условия $\dot{\varphi}(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+$, согласно лемме 6 следует, что в эти моменты обнуления производная $(\dot{x}, m)$ не равна 0. Следовательно, согласно лемме 5 будет верно равенство

$$\nu(x, m) = l.$$

За счет изменения параметра $l \in \mathbb{R}^+$ для системы $B = B(l)$ получим первое соотношение теоремы для случая $n = 2$:

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}_d^2) = \overline{\mathbb{R}}^+, \quad m \in \mathbb{R}_D^2.$$

2.2. Обобщим теперь результат, полученный в п. 2.1 на случай произвольного $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $m \in \mathbb{R}_*^n$ – ненулевой вектор и m_p, m_q – его первые по порядку ненулевые координаты, $1 \leq p < q \leq n$. Рассмотрим диагональную систему $\tilde{B}(\tau, l) = \mathrm{diag}\{d, \ldots, b_p(\tau, l), \ldots, b_q(\tau, l), \ldots, d\}$, у которой на диагонали, на всех позициях кроме (p, p) и (q, q) стоят числа d, а коэффициенты b_p, b_q, стоящие на позициях (p, p) и (q, q), таковы, что матрица

$$\begin{pmatrix} b_p(\tau, l) & 0 \\ 0 & b_q(\tau, l) \end{pmatrix}$$

совпадает при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ и $l \in \mathbb{R}^+$ с построенной в п. 2.1. матрицей $B = B(l)$.

Зафиксируем произвольное $l \in \mathbb{R}^+$ и обозначим через $\tilde{x}$ решение данной системы $\tilde{B}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{x}_p(0) = m_q, \qquad \tilde{x}_q(0) = -m_p, \qquad \tilde{x}_j(0) = 0,\ j \neq p, q,$$

где m_p и m_q – p-ая и q-ая координаты вектора m. Перенумеруем координаты вектора $\tilde{x}$ следующим образом: пусть $k_1 = p, k_2 = q$, а $k_3, \ldots, k_n$ – все оставшиеся координаты этого вектора, упорядоченные по возрастанию. Тогда в каждый момент $\tau \in \mathbb{R}^+$ поставим в соответствие вектору $\tilde{x}$ строку из n скалярных функций $(r(\tau), \varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{n-2}(\tau))$, такую, что будет справедливо соотношение

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{k_1}(\tau) \\ \tilde{x}_{k_2}(\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{x}_{k_n}(\tau) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r(\tau)\cos\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau)\sin\varphi_2(\tau)\dots\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ r(\tau)\sin\varphi_0(\tau)\sin\varphi_1(\tau)\sin\varphi_2(\tau)\dots\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ r(\tau)\cos\varphi_1(\tau)\sin\varphi_2(\tau)\dots\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ \vdots \\ r(\tau)\cos\varphi_{n-3}(\tau)\sin\varphi_{n-2}(\tau) \\ r(\tau)\cos\varphi_{n-2}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{2.13}$$

где $\varphi_0 = \varphi_0(\tau)$ – непрерывная (по τ) ветвь угла, образуемого вектором $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ с положительным направлением оси Ox_p в плоскости Ox_px_q и отсчитываемого в положительном (против хода часовой стрелки) направлении. С учетом начальных условий данное соотношение примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{k_1}(\tau) \\ \tilde{x}_{k_2}(\tau) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r(\tau)\cos\varphi_0(\tau) \\ r(\tau)\sin\varphi_0(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_{k_r}(\tau) \equiv 0, \quad r = 3, \dots, n, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{2.14}$$

а, следовательно, решение $\tilde{x}$ будет осуществлять движение исключительно в плоскости Ox_px_q, причем из вида системы $\tilde{B} = \tilde{B}(l)$ следует, что его траектория в этой плоскости будет полностью совпадать с траекторией решения x двумерной системы $B = B(l)$ из пункта 2.1 в плоскости Ox_1x_2: на любом полуинтервале длины π/l вектор $\tilde{x}$ ровно один раз будет пересекать луч $\varphi = \operatorname{arctg}(m_p/m_q)$ и в этот момент функция $(\tilde{x}, m)$ будет обращаться в 0 (в этот момент $(\tilde{x}, m) = m_q \cdot m_p + (-m_p) \cdot m_q = 0$), а производная $(\dot{\tilde{x}}, m)$ будет ненулевой. Следовательно, будет верно равенство

$$\nu(\tilde{x}, m) = l,$$

из которого и следует обобщение первого утверждения теоремы на случай произвольного $n > 1$.

Теорема доказана.

2.2 Точные границы спектров треугольных систем произвольной размерности

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ в множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножество *треугольных* систем

$$\mathcal{T}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \right\},$$

с ограниченными коэффициентами $|a_{ij}(t)| \leq d, \ \tau \in \mathbb{R}^+, \ 1 \leq i, j \leq n.$

Теорема 4. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$ и любого из показателей $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \check{\rho}$ справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_{\varkappa}(\mathcal{T}_d^n) = \{0\}.$$

Доказательство.

Зафиксируем натуральное число $n > 1$ (случай $n = 1$ рассмотрен в главе 1), положительное число d и рассмотрим произвольное ненулевое решение x системы $A \in \mathcal{T}_d^n$. Заметим, что для последней координаты x_n вектор-функции x всегда выполнено ровно одно из двух утверждений: либо $x_n(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, либо $x_n(t) \neq 0$ на $\mathbb{R}^+$. Это следует из свойств решения дифференциального уравнения вида $\dot{z} = a(t)z, \ z \in \mathbb{R}$ [71, с. 63], а также того факта, что скалярная функция $x_n = x_n(t)$ удовлетворяет уравнению такого вида.

1. Докажем равенство нулю показателей σ и ζ. Рассмотрим два случая.

1.1. Пусть $x_n(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда для любого момента $\tau \in \mathbb{R}^+$ и вектора $m^* \equiv (0, \dots, 0, \mathrm{sgn}(x_n(0)))^{\mathrm{T}}$ справедлива оценка

$$(x(\tau), m^*) = |x_n(\tau)| > 0,$$

а, значит, функция $(x(\tau), m^*)$ не обнуляется на $\mathbb{R}^+$ и для любого $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено равенство $\nu(x, m^*, t) = 0$, откуда сразу следует требуемая цепочка

$$\zeta(x) = \sigma(x) = 0.$$

1.2. Пусть теперь $x_n(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. В этом случае уже $(n-1)$-ая координата решения x будет удовлетворять уравнению

$\dot{x}_{n-1} = a_{(n-1)(n-1)}(t)x_{n-1}$, и, следовательно, будет обладать тем же свойством: либо $x_{n-1}(t) \neq 0$, либо $x_{n-1}(t) \equiv 0$ при всех t. Если верно первое, то для вектора $m^* \equiv (0, \dots, 0, \mathrm{sgn}(x_{n-1}(0)), 0)^{\mathrm{т}}$ и любого $\tau \in \mathbb{R}^+$ выполняется оценка

$$(x(\tau), m^*) = |x_{n-1}(\tau)| > 0,$$

и

$$\nu(x, m^*, t) = 0.$$

Если же верно второе, то рассмотрим $(n-2)$-ую координату решения x, которая также будет обладать вышеуказанным свойством, и проведем аналогичные рассуждения уже для нее. Т.к. вектор-функция x – ненулевое решение, то оно содержит хотя бы одну ненулевую координату и можно утверждать, что найдется номер $l, 1 \leq l < n$, для которого при всех t будет выполнено условие $x_l(t) \neq 0$. Тогда взяв вектор $m^* = (0, \dots, 0, \mathrm{sgn}(x_l(0)), 0, \dots, 0)^{\mathrm{т}}$, у которого только l-ая координата отлична от 0, получим оценку

$$(x(\tau), m^*) = |x_l(\tau)| > 0,$$

а, значит, функция $(x(\tau), m^*)$ не будет обнуляться на $\mathbb{R}^+$ и при любых $t \in \mathbb{R}^+$ будет выполнено равенство $\nu(x, m^*, t) = 0$, откуда сразу следует требуемая цепочка

$$\zeta(x) = \sigma(x) = 0.$$

Таким образом, для любого натурального числа $n > 1$ и положительного числа d имеем

$$\mathrm{Sp}_\zeta(\mathcal{T}_d^n) = \mathrm{Sp}_\sigma(\mathcal{T}_d^n) = \{0\}.$$

2. Перейдем к доказательству оставшихся двух равенств. Для любых преобразования $L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}_*^n$ и преобразованного решения $y = Lx$ справедливо соотношение (2.2)

$$\gamma(y, t) \equiv \int_0^t |\dot{e}_y(\tau)|\, d\tau =$$
$$= \int_0^t \left| LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau) - \big(LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau), e_y(\tau)\big)\, e_y(\tau) \right| d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $e_y \equiv y/|y|$. Рассмотрим преобразование

$$L = L(k_2, \dots, k_n) \equiv \mathrm{diag}\{1, k_2, \dots, k_n\}, \quad k_i > 1, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

Обратным к L будет преобразование $L^{-1} = \mathrm{diag}\{1, k_2^{-1} \ldots, k_n^{-1}\}$, а матрица LAL^{-1} примет вид

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{k_2} & \ldots & \frac{a_{1(n-1)}}{k_{n-1}} & \frac{a_{1n}}{k_n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & \frac{k_2 a_{2(n-1)}}{k_{n-1}} & \frac{k_2 a_{2n}}{k_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & \frac{k_{n-1} a_{(n-1)n}}{k_n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Поставим в соответствие вектор-функциям x и y такие наборы из n скалярных функций $(r(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-2}(t))$ и, соответственно, $(\tilde{r}(t), \psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_{n-2}(t))$, чтобы при всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполнялись соотношения (2.5) и (2.6).

Как уже отмечалось, для последней координаты x_n вектор-функции x всегда выполнено ровно одно из двух утверждений: либо $x_n(t) \neq 0$, либо $x_n(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Далее будем считать, что для решения x выполнено первое утверждение, т.к. второй случай сводится к первому рассмотрением вектор-функции $\tilde{x} \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1})^{\mathrm{т}}$, являющейся решением системы меньшей размерности $\dot{z} = Az$, где

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1(n-1)}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & \ldots & a_{2(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{(n-1)(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

2.1. Первым докажем равенство $\eta(x) = 0$.

В преобразовании $L = L(k_2, \ldots, k_n)$ (2.15) положим

$$k_2 = \cdots = k_{n-1} = 1, \quad k_n = k, \ k > 1.$$

Матрица LAL^{-1} (2.16) примет вид

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(n-1)} & k^{-1} a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2(n-1)} & k^{-1} a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & k^{-1} a_{(n-1)n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

а из соотношений $x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \ldots, \ x_{n-1} = y_{n-1}, \ kx_n = y_n$ (вытекающих из равенства $y = Lx$) будет следовать, что

$$\operatorname{ctg}^2 \psi_{n-2} = \frac{y_n^2}{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2} = \frac{(kx_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} =$$
$$= k^2 \cdot \frac{x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} = k^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \varphi_{n-2}. \quad (2.18)$$

Для любого фиксированного числа $t > 0$ непрерывная функция $\varphi_{n-2} \equiv \varphi_{n-2}(\tau)$, соответствующая исходному решению x, на отрезке $[0, t]$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений (которые в силу предположения $x_n(\tau) \neq 0,\ \tau \in \mathbb{R}^+$, отделены от нуля и конечны). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора k (вообще говоря зависящего от t) на отрезке $[0, t]$ можно обеспечить оценки

$$\sin^2 \psi_{n-2}(\tau) = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_{n-2}(\tau)} = \frac{1}{1 + k^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_{n-2}(\tau)} \leq \varepsilon^2, \quad \tau \in [0, t],$$

и

$$\frac{1}{k} \leq \varepsilon. \quad (2.19)$$

Перейдем к оценке нормы вектора $\dot{e}_y$. Из вида матрицы (2.17) следует, что величина $\left(LAL^{-1}e_y, e_y\right)$ будет равна

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} (a_{mj} e_{y_j}) + k^{-1} a_{mn} e_{y_n} \right) \cdot e_{y_m} + a_{nn} e_{y_n}^2,$$

где e_{y_j} – j-ая координата вектора e_y, $i = 1, \ldots, n$. А значит, каждая из первых $n-1$ координат вектора $\dot{e}_y$ примет вид

$$\left(\sum_{j=i}^{n-1} a_{ij} e_{y_j} + k^{-1} a_{in} e_{y_n} \right)$$
$$- \left(\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} (a_{mj} e_{y_j}) + k^{-1} a_{mn} e_{y_n} \right) \cdot e_{y_m} + a_{nn} e_{y_n}^2 \right) \cdot e_{y_i},$$
$$i = 1, \ldots, n-1. \quad (2.20)$$

Заметим, что для $i = 1, \ldots, n-1$, каждая компонента e_{y_i} содержит множитель $\sin \psi_{n-2}$ и, следовательно, в каждый момент $\tau \in \mathbb{R}^+$ каждая такая компонента по модулю ограничена числом $|\sin \psi_{n-2}(\tau)|$, которое, в свою очередь, ограничено числом ε, что следует из (2.19). А компонента e_{y_n} по модулю не превосходит 1 при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Тогда из оценок (2.19) следует, что выражение (2.20) при каждом $i = 1, \ldots, n-1$ по модулю будет ограничено числом

$$dn\varepsilon + (dn^2\varepsilon^2 + d) \cdot \varepsilon$$

Последняя же координата вектора $\dot{e}_y$ будет иметь вид

$$a_{nn}e_{y_n} - \left(\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} (a_{mj}e_{y_j}) + k^{-1}a_{mn}e_{y_n} \right) \cdot e_{y_m} + a_{nn}e_{y_n}^2 \right) \cdot e_{y_n} =$$

$$= a_{nn}(1 - e_{y_n}^2)e_{y_n} - \left(\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} (a_{mj}e_{y_j}) + k^{-1}a_{mn}e_{y_n} \right) \cdot e_{y_m} \right) \cdot e_{y_n}. \quad (2.21)$$

С учетом того факта, что $1 - e_{y_n}^2 = \sin^2 \psi_{n-2}$, модуль величины (2.21) аналогично оценивается числом

$$d\varepsilon^2 + dn^2\varepsilon^2.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ выбором числа k можно подобрать преобразование $L = L(k)$, где $k = k(\varepsilon, t)$, такое, что каждая координата вектора $\dot{e}_y$ на промежутке $(0, t]$ будет ограничена сверху числом $\varepsilon \cdot n^{-1}$. Тогда норма самого вектора будет оцениваться числом ε (т.к. $\sqrt{(\varepsilon \cdot n^{-1})^2 \cdot n} \leq \varepsilon$). Следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого числа $t > 0$ существует преобразование L, для которого справедлива оценка

$$\frac{1}{t}\gamma(Lx, t) < \varepsilon,$$

откуда вытекает равенство

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n} \gamma(Lx, t) = 0,$$

а вместе с ним и равенство

$$\eta(x) = 0.$$

2.2. Докажем теперь равенство $\check{\rho}(x) = 0$.

2.2.1. В преобразовании $L = L(k_2, \ldots, k_n)$ (2.15) положим

$$k_i = k^{i-1}, \ k > 1, \ i = 2, \ldots, n.$$

Получим преобразование с матрицей

$$L = L(k) = \operatorname{diag}\{1, k, \ldots, k^{n-1}\}, \quad (2.22)$$

которое будет зависеть только от параметра k, а $n \times n$ матрица LAL^{-1} в таком случае примет вид

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{k} & \dots & \frac{a_{1(n-1)}}{k^{n-2}} & \frac{a_{1n}}{k^{n-1}} \\ 0 & a_{22} & \dots & \frac{a_{2(n-1)}}{k^{n-3}} & \frac{a_{2n}}{k^{n-2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & \frac{a_{(n-1)n}}{k} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Из соотношений $x_1 = y_1,\ kx_2 = y_2,\ k^2x_3 = y_3,\ \dots,\ k^{n-1}x_n = y_n$ (вытекающих из равенства $y = Lx$) будет следовать, что для $i = 1, \dots, n-2$ выполнено

$$\operatorname{tg}^2 \psi_i = \frac{y_1^2 + \dots + y_{i+1}^2}{y_{i+2}^2} = \frac{x_1^2 + (kx_2)^2 + \dots + (k^i x_{i+1})^2}{(k^{i+1}x_{i+2})^2} =$$

$$= \frac{e_{x_1}^2 + (ke_{x_2})^2 + \dots + (k^i e_{x_{i+1}})^2}{(k^{i+1}e_{x_{i+2}})^2} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi_0 \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_i)^2}{(\cos\varphi_i \cdot k^{i+1})^2} + \frac{(k\sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_i)^2}{(\cos\varphi_i \cdot k^{i+1})^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{(k^{i-1} \cdot \cos\varphi_{i-2} \sin\varphi_{i-1} \sin\varphi_i)^2}{(\cos\varphi_i \cdot k^{i+1})^2} + \frac{(k^i \cdot \cos\varphi_{i-1} \sin\varphi_i)^2}{(\cos\varphi_i \cdot k^{i+1})^2},$$

а для $i = 0$ получим

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{kx_2}{x_1} = \frac{k \cdot \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}}{\cos\varphi_0 \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}} = k \cdot \operatorname{tg}\varphi_0.$$

А значит, при $k >> 1$ для $i = 1, \dots, n-2$ будут справедливы оценки

$$\operatorname{tg}^2\psi_i \le \left(\frac{1}{k^{2(i+1)}} + \dots + \frac{1}{k^2}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\varphi_i \le \frac{1/k^2}{1 - 1/k^2} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi_i = \frac{1}{k^2 - 1} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi_i$$

и

$$\operatorname{tg}^2\psi_i =$$

$$\frac{(k^2-1)(\sin\varphi_0 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{i-1})^2}{(\cos\varphi_i \cdot k^{i+1})^2} + \dots + \frac{(k^{2(i-1)} - 1)(\cos\varphi_{i-2}\sin\varphi_{i-1}\sin\varphi_i)^2}{(\cos\varphi_i \cdot k^{i+1})^2} +$$

$$+ \frac{((\cos\varphi_0 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{i-1})^2 + (\sin\varphi_0 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{i-1})^2 + \dots + (\cos\varphi_{i-1})^2}{(k^{i+1})^2} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi_i \ge$$

$$\ge \frac{1}{k^{2(i+1)}} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi_i \ge \frac{1}{k^{2n}} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi_i.$$

Откуда, в частности, следует, что для любых $0 < \varepsilon < 1$ и $i = 1, \ldots, n-2$

$$|\sin\psi_i(\tau)| \le |\operatorname{tg}\psi_i(\tau)| \le \operatorname{tg}\varepsilon, \text{ если } \tau \in \mathbb{R}^+ : \left[\begin{array}{l} 0 \le \varphi_i(\tau) \le \operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}\varepsilon), \\ \pi - \operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}\varepsilon) \le \varphi_i(\tau) \le \pi. \end{array}\right.$$

и

$$|\cos\psi_i(\tau)| \le |\operatorname{ctg}\psi_i(\tau)| \le \operatorname{tg}\varepsilon, \text{ если } \tau \in \mathbb{R}^+ : \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}(k^n\operatorname{ctg}\varepsilon) \le \varphi_i(\tau) \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi_i(\tau) \le \pi - \operatorname{arctg}(k^n\operatorname{ctg}\varepsilon). \end{array}\right.$$

Аналогично для любого $0 < \varepsilon < 1$ и $i = 0$, имеем

$$|\sin\psi_0(\tau)| \le |\operatorname{tg}\psi_0(\tau)| \le \operatorname{tg}\varepsilon \quad \text{и} \quad |\cos\psi_0(\tau)| \le |\operatorname{ctg}\psi_0(\tau)| \le \operatorname{tg}\varepsilon,$$

если

$$\tau \in \mathbb{R}^+ : \left[\begin{array}{l} \pi m \le \varphi_0(\tau) \le \pi m + \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{tg}\varepsilon),\ m \in \mathbb{N}, \\ \pi(m+1) - \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{tg}\varepsilon) \le \varphi_0(\tau) \le \pi(m+1),\ m \in \mathbb{N}, \end{array}\right.$$

и, соответственно,

$$\tau \in \mathbb{R}^+ : \left[\begin{array}{l} \pi m + \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{ctg}\varepsilon) \le \varphi_0(\tau) \le \pi m + \dfrac{\pi}{2},\ m \in \mathbb{N}, \\ \pi(m+1/2) \le \varphi_0(\tau) \le \pi(m+1) - \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{ctg}\varepsilon),\ m \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Тогда для произвольных момента времени $t \in \mathbb{R}^+$, чисел $k > 1$ и $0 < \varepsilon < 1$ обозначим

$$T_t^{k,\varepsilon} \equiv \Big\{0 \le \tau \le t \mid \varphi_i(\tau) \in A_i^{k,\varepsilon},\ i = 0, \ldots, n-1\Big\}, \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned} A_i^{k,\varepsilon} \equiv \big[&\operatorname{arctg}(k\cdot\operatorname{tg}\varepsilon), \operatorname{arctg}(k^n\cdot\operatorname{ctg}\varepsilon)\big]\cup \\ &\cup \big[\pi - \operatorname{arctg}(k^n\cdot\operatorname{ctg}\varepsilon), \pi - \operatorname{arctg}(k\cdot\operatorname{tg}\varepsilon)\big],\ i = 1, \ldots, n-2, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} A_0^{k,\varepsilon} \equiv \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Bigg(&\big[\pi m + \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{tg}\varepsilon), \pi m + \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{ctg}\varepsilon)\big]\cup \\ &\cup \big[\pi(m+1) - \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{ctg}\varepsilon), \pi(m+1) - \operatorname{arctg}(k^{-1}\operatorname{tg}\varepsilon)\big]\Bigg). \end{aligned}$$

А длину (меру) измеримого по Лебегу множества $F \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через $\operatorname{mes} F$.

Из данных выше оценок следует, что если в некоторый момент $\tau \in [0,t]$, $t \in \mathbb{R}^+$, функция $\varphi_i = \varphi_i(\tau)$, соответствующая исходному решению $x = x(\tau)$, принимает значения из множества $[0,\pi]\backslash A_i^{k,\varepsilon}$ при $i = 1,\dots,n-2$ или из множества $\mathbb{R}\backslash A_i^{k,\varepsilon}$ при $i = 0$, то функция $\psi_i(\tau)$, соответствующая преобразованному решению $Lx = Lx(\tau)$, где $L = L(k)(2.22)$, удовлетворяет в этот момент неравенству

$$|\cos\psi_i(\tau)\sin\psi_i(\tau)| \le \operatorname{tg}\varepsilon.$$

2.2.2. Воспользовавшись представлением выражения $\gamma(y,t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, из леммы 1, оценим теперь подынтегральное выражение – норму вектора $\dot{e}_y$, соответствующего преобразованному решению $y = Lx$.

Продифференцируем равенство

$$\operatorname{tg}^2\psi_i = \frac{y_1^2 + \dots + y_{i+1}^2}{y_{i+2}^2}$$

по переменной τ, получим

$$\dot{\psi}_i \cdot \frac{\sin\psi_i}{\cos^3\psi_i} = \frac{y_{i+2}^2 \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^n b_{1j}y_j\right)\cdot y_1 + \dots + \left(\sum_{j=i+1}^n b_{(i+1)j}y_j\right) y_{i+1}\right)}{y_{i+2}^4} - \\ - \frac{(y_1^2 + \dots + y_{i+1}^2)\cdot y_{i+2}\cdot\left(\sum_{j=i+2}^n b_{ij}y_j\right)}{y_{i+2}^4} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi}_i \cdot \frac{\sin\psi_i}{\cos^3\psi_i} = \frac{\left(\left(\sum_{j=1}^n b_{1j}e_{y_j}\right)\cdot e_{y_1} + \dots + \left(\sum_{j=i+1}^n b_{(i+1)j}e_{y_j}\right) e_{y_{i+1}}\right)}{e_{y_{i+2}}^2} \\ - \frac{(e_{y_1}^2 + \dots + e_{y_{i+1}}^2)\cdot\left(\sum_{j=i+2}^n b_{ij}e_{y_j}\right)}{e_{y_{i+2}}^3} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi}_i \cdot \frac{\sin\psi_i}{\cos^3\psi_i} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n b_{1j}e_{y_j}\right)\cdot\cos\psi_0\sin\psi_0\dots\sin\psi_i}{\cos\psi_i\cdot e_{y_{i+2}}} + \dots + \\ + \frac{\left(\sum_{j=i+1}^n b_{(i+1)j}e_{y_j}\right)\cdot\cos\psi_{i-1}\sin\psi_i}{\cos\psi_i\cdot e_{y_{i+2}}} - \\ - \frac{\left((\cos\psi_0\sin\psi_0\dots\sin\psi_i)^2 + \dots + (\cos\psi_{i-1}\sin\psi_i)^2\right)\cdot\left(\sum_{j=i+2}^n b_{ij}e_{y_j}\right)}{\cos^2\psi_i\cdot e_{y_{i+2}}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi}_i \cdot \frac{e_{y_{i+2}}}{\cos\psi_i} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j} e_{y_j}\right) \cdot \cos\psi_0 \sin\psi_0 \ldots \sin\psi_{i-1} \cdot \cos\psi_i + \ldots$$

$$\cdots + \left(\sum_{j=i+1}^{n} b_{(i+1)j} e_{y_j}\right) \cdot \cos\psi_{i-1} \cdot \cos\psi_i -$$

$$- \left((\cos\psi_0 \sin\psi_0 \ldots \sin\psi_i)^2 + \cdots + (\cos\psi_{i-1} \sin\psi_i)^2\right) \cdot \left(\sum_{j=i+2}^{n} b_{ij} e_{y_j}\right),$$

где b_{ij} – коэффициенты матрицы LAL^{-1} (2.23), а e_{y_j} – j-ая координата вектора $e_y \equiv y/|y|$. С учетом того факта, что коэффициенты b_{ij} на всей полупрямой по модулю ограничены числом d/k при $j > i$, а при $i = j$ – числом d (что следует из ограниченности коэффициентов a_{ij} исходной системы), и, принимая во внимание тот факт, что для $i = 1, \ldots, n-2$ справедливо равенство

$$\frac{e_{y_{i+2}}}{\cos\psi_i} = \sin\psi_{i+1} \cdot \ldots \cdot \sin\psi_{n-2},$$

получим оценку

$$\left|\dot{\psi}_i \cdot \sin\psi_{i+1} \cdot \ldots \cdot \sin\psi_{n-2}\right| = \left|\dot{\psi}_i \cdot \frac{e_{y_{i+2}}}{\cos\psi_i}\right| \leq$$

$$\leq \left(\left|\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j} e_{y_j}\right)\right| + \cdots + \left|\left(\sum_{j=i+1}^{n} b_{(i+1)j} e_{y_j}\right)\right|\right) \cdot |\cos\psi_i| + n \cdot \left|\left(\sum_{j=i+2}^{n} b_{ij} e_{y_j}\right)\right| \leq$$

$$\leq (|b_{11} e_{y_1}| + \cdots + |b_{(i+1)(i+1)} e_{y_{i+1}}|) \cdot |\cos\psi_i| +$$

$$+ n \cdot \left|\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{d}{k} \cdot e_{y_j}\right)\right| + n \cdot \left|\left(\sum_{j=i+2}^{n} \frac{d}{k} \cdot e_{y_j}\right)\right| \leq$$

$$\leq (|d e_{y_1}| + \cdots + |d e_{y_{i+1}}|) \cdot |\cos\psi_i| + 2n^2 \cdot \frac{d}{k} \leq dn \cdot |\cos\psi_i \sin\psi_i| + 2n^2 \cdot \frac{d}{k}.$$

Аналогично, для $i = 0$, имеем

$$\dot{\psi}_0 \cdot \frac{1}{\cos^2\psi_0} = \frac{y_1 \cdot \left(\sum_{j=2}^{n} b_{2j} y_j\right) - y_2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j} y_j\right)}{y_1^2} =$$

$$= \frac{(b_{22} - b_{11}) y_1 y_2 + y_1 \cdot \left(\sum_{j=3}^{n} b_{2j} y_j\right) - y_2 \cdot \left(\sum_{j=2}^{n} b_{1j} y_j\right)}{y_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi}_0 \cdot \frac{1}{\cos^2\psi_0} = \frac{(b_{22}-b_{11})e_{y_1}e_{y_2} + e_{y_1}\cdot\left(\sum_{j=3}^n b_{2j}e_{y_j}\right) - e_{y_2}\cdot\left(\sum_{j=2}^n b_{1j}e_{y_j}\right)}{e_{y_1}^2} \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi}_0 \cdot \frac{e_{y_1}}{\cos\psi_0} = (b_{22}-b_{11})\cdot e_{y_2}\cdot\cos\psi_0 + \cos\psi_0\cdot\left(\sum_{j=3}^n b_{2j}e_{y_j}\right) - \sin\psi_0\cdot\left(\sum_{j=2}^n b_{1j}e_{y_j}\right)$$

и

$$\left|\dot{\psi}_0\cdot\sin\psi_1\cdot\ldots\cdot\sin\psi_{n-2}\right| \le 2d\cdot|\cos\psi_0\sin\psi_0| + 2n\cdot\frac{d}{k}.$$

Следовательно, для нормы вектора $\dot{e}_y$ в каждый момент $\tau\in\mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|\dot{e}_y(\tau)| \le |\dot{\psi}_{n-2}(\tau)| + |\dot{\psi}_{n-3}(\tau)|\cdot|\sin\psi_{n-2}(\tau)| + \dots + |\dot{\psi}_0(\tau)|\cdot\prod_{i=1}^{n-2}|\sin\psi_i(\tau)| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-2}\left(dn\cdot|\cos\psi_i(\tau)\sin\psi_i(\tau)| + 2n^2\cdot\frac{d}{k}\right) \le 3dn^3. \quad (2.26)$$

А если к тому же $0<\varepsilon<<1$ и $k>dn^3/\varepsilon$, то для любого $t\in\mathbb{R}^+$ при $\tau\in[0,t]\backslash T_t^{k,\varepsilon}$ будет справедлива оценка

$$|\dot{e}_y(\tau)| \le dn^2\cdot\operatorname{tg}\varepsilon + \varepsilon. \quad (2.27)$$

2.2.3. Покажем теперь, что для любого ненулевого решения x системы $A\in\mathcal{T}_d^n$ и числа $0<\varepsilon<1$ существуют число $k>1/\varepsilon$ и последовательность моментов времени $\{t_j\}_{j=1}^\infty, t_j \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, такие, что для каждого $j\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{\operatorname{mes} T_{t_j}^{k,\varepsilon}}{t_j} < \varepsilon, \quad (2.28)$$

где величина $T_{t_j}^{k,\varepsilon}$ определяется соотношением (2.24). Существование такой последовательности моментов $\{t_j\}_{j=1}^\infty, t_j \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, равносильно существованию для любого числа $T\in\mathbb{R}^+$ момента $t\ge T$, для которого справедливо неравенство

$$\frac{\operatorname{mes} T_t^{k,\varepsilon}}{t} < \varepsilon.$$

Предположим обратное – пусть существует такое число $0<\varepsilon<1$, что для любого числа $k>1/\varepsilon$ найдется момент T, начиная с которого для любого $t \geq T$ будет выполняться обратное неравенство

$$\frac{\operatorname{mes} T_t^{k,\varepsilon}}{t} \geq \varepsilon.$$

Тогда рассмотрим такую последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которой промежутки $\{A_1^{k_j,\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty}$ (2.25) не пересекаются. Существование такой последовательности следует непосредственно из определения множеств $A_1^{\varepsilon,k}$: действительно, для фиксированных $\varepsilon > 0$ и натурального числа k_j всегда найдется натуральное число k_{j+1} такое, что $k_{j+1} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon > k_j^n \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon$. Выберем из последовательности $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ первые $[\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ чисел – пусть это будут $k_1, ..., k_m$. Каждое из этих чисел задает промежуток (даже целый набор), и по предположению для каждого числа (набора промежутков) существуют свои моменты $T_1, T_2, ...T_m$ такие, что при $t \geq T_j$

$$\frac{\operatorname{mes} T_t^{k_j,\varepsilon}}{t} \geq \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Положим $t_{max} = \max\limits_{j=1...m} T_j$ и, просуммировав по j от 1 до m левые и правые части всех вышестоящих неравенств, получим

$$\frac{\operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_1,\varepsilon}}{t_{max}} + \cdots + \frac{\operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_m,\varepsilon}}{t_{max}} \geqslant \varepsilon \cdot \big([\frac{1}{\varepsilon}] + 1\big) > \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1.$$

С другой стороны, промежутки $\{A_1^{k_j,\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty}$ не пересекаются и справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_j,\varepsilon} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_j,\varepsilon} \leq t_{max}.$$

Таким образом, получаем противоречие:

$$1 < \frac{\operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_1,\varepsilon}}{t_{max}} + \cdots + \frac{\operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_m,\varepsilon}}{t_{max}} \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \operatorname{mes} T_{t_{max}}^{k_j,\varepsilon}}{t_{max}} \leq 1.$$

Следовательно, обратное предположение неверно и утверждение доказано.

2.2.4. Тогда, для любого ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{T}_d^n$ и числа $0 < \varepsilon < 1$ всегда найдется преобразование $L = L(k)$ (или, что то же самое, число k) и последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которых выполняются условия (2.28). Возьмем тогда эти преобразование и последовательность моментов и оценим выражение $t_j^{-1} \cdot \gamma(y, t_j)$, где $y = Lx$, получим

$$\frac{1}{t_j}\gamma(y,t_j) \equiv \frac{1}{t_j}\int_0^{t_j} |\dot{e}_y(\tau)|\ d\tau = \frac{1}{t_j}\int\limits_{[0,t_j]\setminus T_{t_j}^{k,\varepsilon}} |\dot{e}_y(\tau)|\ d\tau + \frac{1}{t_j}\int\limits_{T_{t_j}^{k,\varepsilon}} |\dot{e}_y(\tau)|\ d\tau \leq$$

$$\leq (dn^2\cdot \operatorname{tg}\varepsilon + \varepsilon)\cdot \frac{(t_j - \operatorname{mes} T_{t_j}^{k,\varepsilon})}{t_j} + 3dn^3\cdot \frac{\operatorname{mes} T_{t_j}^{k,\varepsilon}}{t_j} \leq (dn^2\cdot \operatorname{tg}\varepsilon + \varepsilon) + 3dn^3\cdot\varepsilon.$$

Оценка первого слагаемого следует из оценки (2.27), а вторая – из оценки (2.26) и условия (2.28).

Таким образом, можно подобрать число $k > 0$ так, чтобы для преобразования $L = L(k)$ последовательность $\{\frac{1}{t_j}\gamma(Lx, t_j)\}_{j=1}^{\infty}$ была ограничена сверху числом ε. Следовательно, у данной последовательности будет существовать нижний предел, не превосходящий ε, откуда и будет следовать требуемое равенство.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Для любого натурального числа $n > 1$ и произвольного числа $d > 0$ справедливо равенство*

$$\operatorname{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}_d^n) = [0, d].$$

Доказательство.

1. Зафиксируем натуральное число $n > 1$, положительное число d и покажем, что для любой системы $A \in \mathcal{T}_d^n$ справедлива оценка

$$\hat{\rho}(x) \leq d, \quad x \in S_*(A).$$

Действительно, для произвольного ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{T}_d^n$ и преобразования $L \in \mathcal{G}^n$ величина $\gamma(y,t) \equiv \gamma(Lx,t)$ может быть представлена в виде (2.2)

$$\gamma(y,t) \equiv \int_0^t |\dot{e}_y(\tau)|\ d\tau =$$
$$= \int_0^t \left| LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau) - \big(LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau), e_y(\tau)\big)\, e_y(\tau)\right|\ d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $e_y \equiv y/|y|$. Также из данного равенства следует, что норма вектора $\dot{e}_y(\tau)$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ не превосходит нормы вектора

$LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau)$. Действительно, вектор $\dot{e}_y(\tau)$ удовлетворяет соотношению $\dot{e}_y(\tau) + \beta e_y(\tau) = LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau), \tau \in \mathbb{R}^+$, где β – некоторое положительное число. При этом векторы $e_y(\tau)$ и $\dot{e}_y(\tau)$ ортогональны при всех τ, а значит, из последнего соотношения следует, что норма вектора $LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau)$ заведомо больше норм каждого из векторов $\dot{e}_y(\tau)$ и $\beta e_y(\tau)$.

Для $k > 1$ рассмотрим преобразование $L = \mathrm{diag}\{1, k, k^2, \ldots, k^n\}$. Обратным к L будет преобразование $L^{-1} = \mathrm{diag}\{1, k^{-1}, k^{-2}, \ldots, k^{-n}\}$, тогда $n \times n$ матрица LAL^{-1} будет иметь вид

$$LA(\tau)L^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & \frac{a_{12}(\tau)}{k} & \frac{a_{13}(\tau)}{k^2} & \ldots & \frac{a_{1n}(\tau)}{k^{n-1}} \\ 0 & a_{22}(\tau) & \frac{a_{23}(\tau)}{k} & \ldots & \frac{a_{2(n-1)}(\tau)}{k^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a_{(n-1)(n-1)}(\tau)}{k} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}(\tau) \end{pmatrix},$$

а каждая координата z_i, $i = 1, \ldots, n$, вектора $z \equiv LAL^{-1}e_y$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ будет удовлетворять соотношению

$$|z_i(\tau)| \equiv \left| \sum_{j=i}^{n} \frac{a_{ij}(\tau)e_{y_j}(\tau)}{k^{j-1}} \right| \le d \cdot |e_{y_i}| + d \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{k^{j-1}} \le d \cdot |e_{y_i}| + \frac{dn}{k}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где e_{y_i} – i-ая координата вектора e_y, $i = 1, \ldots, n$.

Как уже было отмечено, при любом $\tau \in \mathbb{R}^+$ номра вектора $\dot{e}_y(\tau)$ не превосходит нормы вектора $LA(\tau)L^{-1}e_y(\tau)$, таким образом, при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ справедлива оценка

$$|\dot{e}_y(\tau)| \le |LA(\tau)L^{-1}e_y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i(\tau)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(d \cdot |e_{y_i}| + \frac{dn}{k} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d^2 \cdot e_{y_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 \cdot n}{k} \cdot |e_{y_i}| + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 \cdot n^2}{k^2}} \le \sqrt{d^2 + \frac{2d^2 \cdot n^3}{k}} \le d + \frac{2d \cdot n^2}{\sqrt{k}}.$$

Следовательно, величина $\gamma(Lx, t)$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ ограничена сверху числом $(d + 2d \cdot n^2 \cdot \sqrt{k^{-1}}) \cdot t$ и

$$\hat{\mu}(Lx) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \gamma(Lx, t) \le (d + 2d \cdot n^2 \cdot \sqrt{k^{-1}}).$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\hat{\rho}(x) = \inf_{L \in \mathcal{G}} \hat{\mu}(Lx) \leq \inf_{k>1} (d + 2d \cdot n^2 \cdot \sqrt{k^{-1}}) = d,$$

из которого вытекает требуемая оценка, а вместе с ней и включение

$$\mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}_d^n) \subseteq [0, d].$$

2. Докажем теперь, что для любого натурального числа $n > 1$ и положительного числа d справедливо обратное включение

$$[0, d] \subseteq \mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}_d^n).$$

2.1. Для начала рассмотрим случай $n = 2$. Покажем, что для любого числа $d > 0$ существует система $A \in \mathcal{T}_d^2$, для одного из решений (обозначим его через $\tilde{x}$) которой справедливо равенство

$$\hat{\rho}(\tilde{x}) = d.$$

2.1.1. Введем вспомогательные

Определение 5. *Сектором* $[\alpha, \beta]$ будем называть часть фазовой плоскости Ox_1x_2, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и заметаемой при движении луча из положения $\varphi = \alpha$ в положение $\varphi = \beta$ в положительном (против хода часовой стрелки) направлении. Луч $\varphi = \alpha$ назовем левой, а луч $\varphi = \beta$ – правой границами сектора $[\alpha, \beta]$.

Определение 6. Будем говорить, что вектор-функция $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2_*$ *блуждала* в секторе $\Delta \equiv [\alpha, \beta]$ фазовой плоскости на отрезке $[t_0, t_k]$ в течении времени, не меньшего T, если выполнены следующие условия:

1) в момент $(t_0 - 0)$ вектор $x = x(t_0 - 0)$ находился вне сектора Δ, т.е. $\varphi(t_0 - 0) \notin \Delta$;

2) в момент t_0 вектор попал в сектор, т.е. $\varphi(t_0) = \alpha$, если вектор x попал в сектор через его правую границу (если $\varphi(t_0 - 0) = \alpha - 0$), или же $\varphi(t_0) = \beta$, если вектор x попал в сектор через его левую границу (если $\varphi(t_0 - 0) = \beta + 0$);

3) после попадания в сектор через правую (левую) границу вектор x, начиная с момента t_0, двигался по направлению возрастания (убывания) угла φ с ненулевой угловой скоростью и движение продолжалось до тех пор, пока не нашелся момент времени t_1 такой, что $\varphi(t_1) = \beta$ ($\varphi(t_1) = \alpha$);

4) после этого вектор сразу продолжал движение в противоположном направлении с ненулевой угловой скоростью и двигался до тех пор, пока

не находился следующий момент времени t_2, для которого $\varphi(t_2) = \alpha$ $(\varphi(t_2) = \beta)$;

5) далее данный процесс движения повторялся заново до тех пор, пока в момент t_k, больший $t_0 + T$ и ближайший к нему, вектор-функция не попадала на границу сектора $\varphi(t_k) = \beta$ $(\varphi(t_k) = \alpha)$ и в момент $t_k + 0$ вектор $x(t_k + 0)$ находился вне сектора Δ.

2.1.2. Искомую систему $A \in \mathcal{T}_d^2$ будем строить как кусочно-постоянную, матрица которой на участках постоянства совпадает с одной из следующих матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -d & -d \\ 0 & d \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} d & d \\ 0 & -d \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -d & d \\ 0 & d \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} d & -d \\ 0 & -d \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Концы участков постоянства строящейся матрицы A назовем моментами переключения.

Отметим следующие нужные в дальнейшем свойства систем с матрицами коэффициентов (2.29), которые легко вытекают из рассмотрения фазовых портретов этих систем. Всякое решение, лежащее в I квадранте, система с матрицей коэффициентов A_1 поворачивает против хода часовой стрелки, так, что в некоторый момент времени оно пересечет ось ординат, а система с матрицей коэффициентов A_2 – по ходу часовой стрелки к оси абсцисс, приближая его к ней сколь угодно близко. Всякое решение, лежащее во II квадранте, система с матрицей коэффициентов A_3 поворачивает по ходу часовой стрелки, так, что в некоторый момент времени оно пересечет ось ординат, а система с матрицей коэффициентов A_4 – против хода часовой стрелки к оси абсцисс, приближая его к ней сколь угодно близко.

Указанные свойства систем с матрицами A_1 и A_2 позволяют для любых числа $T > 0$ и сектора $\Delta = [\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta \leq \pi/2)$, лежащего в I квадранте, построить на некотором отрезке $[t_0, t_k]$ систему, матрица которой кусочно-постоянна и на участках постоянства совпадает с матрицами A_1 или A_2, такую, что ее решение x, для которого $\varphi(t_0) = \alpha$ $(\varphi(t_0) = \beta)$, блуждало бы в секторе Δ в течение времени, не меньшего T. Действительно, если $\varphi(t_0) = \alpha$, то положим $A(t) = A_1$ при $t \in [t_0, t_1)$, где t_1 – момент попадания решения x на луч $\varphi = \beta$, затем $A(t) = A_2$ при $t \in [t_2, t_3)$, где t_3 – момент попадания решения x на луч $\varphi = \alpha$ и т. д.

Аналогично строится система, если $\varphi(t_0) = \beta$.

То же верно для матриц A_3 и A_4 и любых числа $T > 0$ и сектора $[\alpha, \beta]$ $(\pi/2 \leq \alpha < \beta < \pi)$, лежащего во II квадранте.

Построение искомой системы $A \in \mathcal{T}_d^2$ и ее решения $\tilde{x}$ будем вести по шагам индукцией по номеру k шага ($k \in \mathbb{N}$). На k-ом шаге система и ее решение будут строиться на некотором полуинтервале $[T_k^0, T_{k+1}^0)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $T_1^0 = 1$. При этом будет выполнено соотношение $\varphi(T_k^0) = 2^{-k}\pi$, если k нечетное, и $\varphi(T_k^0) = \pi - 2^{-k}\pi$, если k четное. Это соотношение при $k = 1$ мы обеспечим, взяв начальный вектор $\tilde{x}(1)$ таким, что для него $\varphi(1) = \pi/2$, а на последующих шагах оно будет обеспечено самим построением. Чтобы иметь базу индукции, введем еще нулевой шаг, на котором положим $T_0^0 = 0$, $T_1^0 = 1$, а матрицу $A(t) = \operatorname{diag}\{0, 0\}$.

Опишем k-ый шаг в зависимости от четности k. Пусть k нечетно. Рассмотрим сектор $\Delta_k = [2^{-k-1}\pi, \pi - 2^{-k-1}\pi]$ и разобьем его на $N_k = 2^{k+1} - 2$ равных сектора, которые пронумеруем последовательно против хода часовой стрелки $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \ldots, \Delta_k^{N_k}$. Обозначим $r_k = N_k/2$. Как легко видеть, у сектора $\Delta_k^{r_k}$ правый, а у сектора $\Delta_k^{r_k+1}$ левый концы – луч $\varphi = \pi/2$. В момент $t = T_k^0$ решение $\tilde{x}$ согласно предположению индукции находится на общей границе $\varphi = 2^{-k}\pi$ секторов Δ_k^1 и Δ_k^2. С помощью матриц A_1 и A_2 так, как это описано выше, сделаем так, чтобы решение $\tilde{x}$ на некотором отрезке $[T_k^0, T_k^1]$ блуждало в секторе Δ_k^1 в течение времени, не меньшего kT_k^0, затем – чтобы в секторе Δ_k^2 оно на некотором отрезке $[T_k^1, T_k^2]$ блуждало в течение времени, не меньшего kT_k^1, и т. д. – в секторе $\Delta_k^{r_k}$ – на некотором отрезке $[T_k^{r_k-1}, T_k^{r_k}]$ в течение времени $kT_k^{r_k-1}$. В момент $t = T_k^{r_k}$ решение $\tilde{x}$ будет находиться на луче $\varphi = \pi/2$. Тогда с помощью матриц A_3 и A_4 сделаем так, чтобы решение $\tilde{x}$ на некотором отрезке $[T_k^{r_k}, T_k^{r_k+1}]$ блуждало в секторе $\Delta_k^{r_k+1}$ в течение времени, не меньшего $kT_k^{r_k}$, затем – чтобы в секторе $\Delta_k^{r_k+1}$ оно на некотором отрезке $[T_k^{r_k+1}, T_k^{r_k+2}]$ блуждало в течение времени, не меньшего $kT_k^{r_k+1}$, и т. д. Наконец, в секторе $\Delta_k^{N_k}$ на некотором отрезке $[T_k^{N_k-1}, T_k^{N_k}]$ блуждало в течение времени $kT_k^{N_k-1}$. Положим $T_{k+1}^0 = T_k^{N_k}$, тогда $\varphi(T_{k+1}^0) = \pi - 2^{-k-1}\pi$. Шаг k, если k нечетное, завершен.

Шаг k, если k четное, отличается от четного шага только тем, что $N_k = 2^{k+1} - 2$ равных секторов, на которые разбивается сектор $\Delta_k = [2^{-k-1}\pi, \pi - 2^{-k-1}\pi]$, нумеруются последовательно по ходу часовой стрелки $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \ldots, \Delta_k^{N_k}$, и для секторов $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \ldots, \Delta_k^{r_k}$ нужное блуждание решения $\tilde{x}$ осуществляется с помощью матриц A_3 и A_4, а для секторов $\Delta_k^{r_k+1}$, $\Delta_k^{r_k+2}$, $\dots$, $\Delta_k^{N_k}$ – с помощью матриц A_1 и A_2.

Хотя на каждом интервале (T_k^i, T_k^{i+1}), $k \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, N_k - 1$, имеются моменты переключения, нас будут интересовать только моменты переключения T_k^i, $k \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, N_k - 1$, которые мы занумеруем в порядке возрастания в одну последовательность: $t_1 < t_2 < \dots$.

2.1.3. Для сектора $\Delta = [\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ и момента переключения t_j через $T(\Delta; t_j)$ обозначим множество $\{0 \leq \tau \leq t_j : \ \varphi(\tau) \in \Delta\}$, где $\varphi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору, сонаправленному с вектором $\tilde{x}(\tau)$.

Отметим важное в дальнейшем свойство, которым обладает построенное решение $\tilde{x}$: для любых сектора $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, $\alpha < \beta$, и наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существуют сектор $\Delta \equiv [\alpha_1, \beta_1] \subseteq [\alpha, \beta]$ и подпоследовательность $t_{j_k} \uparrow \infty$ последовательности (t_j) моментов переключения такие, что

$$t_{j_k}^{-1} \cdot \operatorname{mes} T(\Delta; t_{j_k}) \geq 1 - \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Решение $\tilde{x}$ обладает указанным свойством, поскольку при построении (при увеличении номера шага) каждый раз плоскость разбивается на все более мелкие секторы и решение блуждает в каждом из них время, не меньшее прошедшего времени, умноженному на номер k шага.

2.1.4. Покажем теперь, что для построенного решения $\tilde{x}$ справедливо неравенство $\hat{\rho}(\tilde{x}) \geq d$, которое с учетом оценки п.1 даст необходимое равенство

$$\hat{\rho}(\tilde{x}) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2} \hat{\mu}(L\tilde{x}) = d. \tag{2.30}$$

Пусть $\varphi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau))^{\text{т}}$, сонаправленному с вектором $\tilde{x}(\tau) = (\tilde{x}_1(\tau), \tilde{x}_2(\tau))^{\text{т}}$ в момент τ, а $\psi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\psi(\tau), \sin\psi(\tau))^{\text{т}}$, сонаправленному с вектором преобразованного решения $L\tilde{x}(\tau) \equiv (\tilde{x}_1(\tau) + k_{12}\tilde{x}_2(\tau), k_{22}\tilde{x}_2(\tau))^{\text{т}}$ в момент τ, где $L = L(k_{12}, k_{22}) \in \mathcal{G}^2$. Под угловой скоростью решения x будем понимать производную $\dot{\varphi}(\tau)$ функции $\varphi(\tau)$, а под угловой скоростью преобразованного решения Lx будем понимать производную $\dot{\psi}(\tau)$ функции $\varphi(\tau)$.

Поскольку угол $\psi(\tau)$ преобразованного решения $L\tilde{x}$, удовлетворяет уравнению (1.5) (что следует из леммы 3)

$$\dot\psi = (a_{22}(\tau)-a_{11}(\tau))\sin\psi\cos\psi-\big(k_{22}^{-1}a_{12}(\tau)+k_{12}k_{22}^{-1}(a_{22}(\tau)-a_{11}(\tau))\big)\sin^2\psi,$$

а при тех τ, для которых $\varphi(\tau)\in(0,\pi/2]$, матрица A построенной системы совпадает либо с матрицей A_1, либо с матрицей A_2, то модуль угловой скорости $\dot\psi(\tau)$ при этих $\tau\in\mathbb{R}^+$ удовлетворяет уравнению

$$|\dot\psi(\tau)| = |2d\sin\psi(\tau)\cos\psi(\tau)-(2k_1-1)k_2^{-1}\cdot d\sin^2\psi(\tau)|. \tag{2.31}$$

Аналогично, при тех $\tau\in\mathbb{R}^+$, для которых $\varphi(\tau)\in(\pi/2,\pi)$ (тогда матрица A совпадает либо с матрицей A_3, либо с матрицей A_4), модуль угловой скорости $\dot\psi(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$|\dot\psi(\tau)| = |2d\sin\psi(\tau)\cos\psi(\tau)-(2k_1+1)k_2^{-1}\cdot d\sin^2\psi(\tau)|. \tag{2.32}$$

2.1.5. Поскольку линейное преобразование с матрицей $L=L(k_{12},k_{22})$ оставляет ось абсцисс неподвижной, а вектор $(0,1)^{\text{т}}$ переводит в вектор $(k_{12},k_{22})^{\text{т}}$, то секторы $[0,\pi/2]$ и $[\pi/2,\pi]$ оно преобразует в секторы $[0,\theta]$ и $[\theta,\pi]$ соответственно, где $\theta\equiv\operatorname{arcctg}(k_{12}/k_{22})$. Следовательно, если параметр k_{12} неотрицателен, то угол θ не больше чем $\pi/2$ и сектор $[\theta,\pi)$ целиком содержит сектор $[\pi/2,\pi)$. Аналогично, если параметр k_{12} отрицателен, то угол θ больше $\pi/2$ и сектор $(0,\theta]$ целиком содержит сектор $(0,\pi/2]$.

Пусть $k_{12}\geq 0$. Рассмотрим сектор $\Delta_\varepsilon^1\equiv[3\pi/4-\varepsilon,3\pi/4]$, где $0<\varepsilon<\pi/4$. Так как этот сектор содержится в секторе $[\pi/2,\pi)$, то включение $\psi(\tau)\in\Delta_1^\varepsilon$ влечет за собой включение $\varphi(\tau)\in[\pi/2,\pi)$, а значит, согласно п. 2.1.4 для угла ψ выполнено соотношение (2.32), которое в этом случае примет вид

$$|\dot\psi(\tau)| = -d\sin 2\psi(\tau)+(2k_{12}+1)k_{22}^{-1}\cdot d\sin^2\psi(\tau),$$

и при этих τ верна оценка:

$$|\dot\psi(\tau)|\geq -d\sin 2\psi(\tau)\geq -d\sin 2\cdot(3\pi/4-\varepsilon)=d(1-2\sin^2\varepsilon)\geq d(1-2\varepsilon^2). \tag{2.33}$$

Если же параметр $k_{12}<0$, то рассмотрим сектор $\Delta_\varepsilon^2\equiv[\pi/4-\varepsilon,\pi/4]$, где $0<\varepsilon<\pi/4$. Так как этот сектор содержится в секторе $[0,\pi/2)$, то включение $\psi(\tau)\in\Delta_2^\varepsilon$ влечет за собой включение $\varphi(\tau)\in(0,\pi/2]$, а значит, согласно п. 2.1.4 для угла ψ выполнено соотношение (2.31), которое в этом случае примет вид

$$|\dot\psi(\tau)| = d\sin 2\psi(\tau)-(2k_{12}-1)k_{22}^{-1}\cdot d\sin^2\psi(\tau),$$

и, следовательно, при этих τ получается аналогичная оценка:

$$|\dot{\psi}(\tau)| \geq d \sin 2\psi(\tau) \geq d \sin 2 \cdot (\pi/4 - \varepsilon) = d(1 - 2\sin^2 \varepsilon) \geq d(1 - 2\varepsilon^2). \tag{2.34}$$

2.1.6. Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и преобразование $L = L(k_{12}, k_{22})$. Прообразы при преобразовании L секторов Δ_ε^1 и Δ_ε^2 фазовой плоскости обозначим через Δ_1^ε и Δ_2^ε соответственно. Согласно п. 2.1.3 доказательства, какими бы ни были числа ε, k_{12} и k_{22} ($0 < \varepsilon < \pi/4$, $k_{22} > 0$), для каждого $i \in \{1,2\}$ существует сектор $\delta_i^\varepsilon \subset \Delta_i^\varepsilon$ и подпоследовательность $(t_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \uparrow \infty$ последовательности (t_j) моментов переключения, такие, что

$$(t_j^i)^{-1} \cdot \operatorname{mes} T(\delta_i^\varepsilon; t_j^i) \geq 1 - \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1,2\}. \tag{2.35}$$

Для сектора $\Delta = [\alpha, \beta]$ ($0 < \alpha < \beta < \pi$) и момента переключения t_j через $P(\Delta; t_j)$ обозначим множество $\{0 \leq \tau \leq t_j : \ \psi(\tau) \in \Delta\}$, где $\psi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору, сонаправленному с вектором $L\tilde{x}(\tau)$. Поскольку секторы Δ_1^ε и Δ_2^ε являются прообразами секторов Δ_ε^1 и Δ_ε^2 соответственно и верны включения $\delta_1^\varepsilon \subset \Delta_1^\varepsilon$ и $\delta_2^\varepsilon \subset \Delta_2^\varepsilon$, то справедливы следующие соотношения:

$$T(\delta_1^\varepsilon; t_j^1) \subset T(\Delta_1^\varepsilon; t_j^1) = P(\Delta_\varepsilon^1; t_j^1) \quad \text{и} \quad T(\delta_2^\varepsilon; t_j^2) \subset T(\Delta_2^\varepsilon; t_j^2) = P(\Delta_\varepsilon^2; t_j^2). \tag{2.36}$$

Пусть $k_{12} \geq 0$. Обозначая для упрощения множества $T(\Delta_2^\varepsilon; t_j^2)$ и $P(\Delta_\varepsilon^2; t_j^2)$ через $T(j;\varepsilon)$ и $P(j;\varepsilon)$, учитывая неравенство (2.33), а также второе соотношение в (2.36), получаем

$$\gamma(L\tilde{x}, t_j^2) \equiv \int_0^{t_j^2} |\dot{\psi}(\tau)|\, d\tau \geq \int\limits_{P(j;\varepsilon)} |\dot{\psi}(\tau)|\, d\tau \geq d \cdot (1 - 2\varepsilon^2) \cdot \operatorname{mes} P(j;\varepsilon) =$$

$$= d \cdot (1 - 2\varepsilon^2) \cdot \operatorname{mes} T(j;\varepsilon),$$

а вместе с соотношениями (2.36) при $i = 2$ получим, что

$$(t_j^2)^{-1} \cdot \gamma(L\tilde{x}, t_j^2) \geq (t_j^2)^{-1} \cdot \operatorname{mes} T(\delta_2; t_j^2) \cdot d(1 - 2\varepsilon^2) \geqslant d(1-\varepsilon)(1 - 2\varepsilon^2).$$

Если $k_{12} < 0$, то воспользовавшись оценкой (2.34), а также первым из соотношений (2.36) и неравенством (2.35) при $i = 1$, получим аналогичную оценку

$$(t_j^1)^{-1} \gamma(L\tilde{x}, t_j^1) \geq d(1-\varepsilon)(1 - 2\varepsilon^2).$$

Следовательно, для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ и любого преобразования $L \in \mathcal{G}^2$ справедливо соотношение

$$\hat{\mu}(L\tilde{x}) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\gamma(L\tilde{x}, t) \geq d - O(\varepsilon),$$

откуда, в силу произвольности выбора числа ε и преобразования $L \in \mathcal{G}$, получаем требуемое неравенство

$$\inf_{L\in\mathcal{G}} \hat{\mu}(Lx) \geq d.$$

Равенство (2.30) доказано.

2.1.7 Заменяя в рассуждениях пунктов 2.1.2 – 2.1.6 число d числом $\tilde{d} \in (0, d]$, получаем, что для любого числа $\tilde{d} \in (0, d]$ существует система $A \in \mathcal{T}_d^2$, для одного из решений $\tilde{x}$ которой верно равенство $\hat{\rho}(\tilde{x}) = \tilde{d}$, т.е. для любого числа $d > 0$ область значений сужения функции $\hat{\rho}(x)$ на множество $S(\mathcal{T}_d)$ включает в себя отрезок $[0, d]$ ($\hat{\rho}(\tilde{x}) = 0$ на решениях треугольных систем с постоянными коэффициентами), следовательно, справедливо включение

$$[0, d] \subseteq \mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}_d^2).$$

2.2. Воспользовавшись результатами пункта 1, а также применяя лемму 4 к результатам пункта 2, получим что для любого натурального числа $n > 1$ и произвольного чилса $d > 0$ справедливо равенство

$$[0, d] = \mathrm{Sp}_{\hat{\rho}}(\mathcal{T}_d^n).$$

Теорема доказана.

Для натурального $n > 1$ обозначим через $\mathbb{R}_T^n$ множество векторов $m \equiv (m_1, \ldots, m_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}_*^n$, у которых только последняя координата отлична от 0

$$\mathbb{R}_T^n \equiv \{m \in \mathbb{R}_*^n \mid m_n \neq 0,\ m_r = 0, r = 1, \ldots n - 1\}.$$

Теорема 6. *Для любых чисел $n > 1, n \in \mathbb{N}$, и $d > 0$, и любого вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ справедливы соотношения*

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}_d^n) = \overline{\mathbb{R}}^+, \quad m \notin \mathbb{R}_T^n$$

и

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}_d^n) = \{0, \infty\}, \quad m \in \mathbb{R}_T^n.$$

Доказательство.

Зафиксируем натуральное число $n > 1$, положительное число d и поочередно докажем оба равенства.

1. Пусть у ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ только последняя координата m_n отлична от 0. Рассмотрим тогда систему $A \in \mathcal{T}^n_d$ с диагональной матрицей $A = \mathrm{diag}\{d, \dots, d\}$ и пусть x – некоторое ее ненулевое решение. Тогда выражение $(x, m) \equiv x_1 m_1 + \dots + x_n m_n$ примет вид

$$(x(\tau), m) = m_n x_n(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Как уже неоднократно отмечалось, для последней координаты x_n вектор-функции x всегда выполнено ровно одно из двух утверждений: либо $x_n(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, либо $x_n(t) \neq 0$ на $\mathbb{R}^+$. Это следует из свойств решения дифференциального уравнения вида $\dot{z} = a(t)z,\ z \in \mathbb{R}$ [71, с. 63], а также того факта, что скалярная функция $x_n = x_n(t)$ удовлетворяет уравнению такого вида. Следовательно, выражение $(x(\tau), m)$ всегда либо равно 0, либо не обнуляется при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$, что зависит от выбора начальных условий для координаты x_n. А значит, величина $\nu_m(x)$ может принимать только 2 значения – это 0 и ∞. Данные значения достигаются на решениях x и y со следующими начальными условиями: $x_i(0) = 1, i = 1, \dots, n$, и, соответственно, $y_n(0) = 0, y_i(0) = 1, \dots, n-1$. Второе равенство теоремы доказано.

2. Перейдем к доказательству первого равенства. Заметим, что если у вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ как минимум две координаты отличны от 0, то согласно теореме 3 будет справедливо соотношение

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{D}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+,$$

которое вместе с вложением $\mathcal{D}^n_d \subset \mathcal{T}^n_d$ сразу же дает требуемое равенство

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}^n_d) = \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Следовательно, осталось рассмотреть случай, когда у вектора m всего лишь одна координата ненулевая, причем эта координата не последняя (т.е. ее порядковый номер меньше n).

2.1. Для начала рассмотрим случай $n = 2$, предварительно зафиксировав вектор $m = (m_1, 0)^{\mathrm{т}}$, где $m_1 \neq 0$.

Легко заметить, что значения 0 и ∞ величина ν_m принимает на решениях $z_1 = (e^{dt};0)^{\text{т}}$ и $z_2 = (0;e^{dt})^{\text{т}}$ системы $A \in \mathcal{T}_d^2$ с постоянными коэффициентами $a_{11}(t) = a_{22}(t) = d, a_{12}(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+$.

Докажем, что показатель ν_m может принимать любое значение $l > 0$.

2.1.1. Рассмотрим кусочно-постоянную систему $A \in \mathcal{T}_d^2$, матрица которой в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ совпадает с одной из матриц A_1 или A_2, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} & -d \\ 0 & \frac{d}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & d \\ 0 & -\frac{d}{2} \end{pmatrix},$$

а через Δ^1 и Δ^2 будем обозначать множества тех $\tau \in \mathbb{R}^+$, для которых $A(\tau) = A_1$ и $A(\tau) = A_2$, соответственно.

Пусть x – ненулевое решение такой системы A. Пусть $\varphi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau))^{\text{т}}$, сонаправленному с вектором $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau))^{\text{т}}$ в момент τ. Под угловой скоростью решения x будем понимать производную $\dot\varphi(\tau)$ функции $\varphi(\tau)$. Тогда согласно лемме 3 на множествах Δ^1 и Δ^2 угловая скорость вектор-функции x удовлетворяет уравнениям

$$\dot\varphi(\tau) = d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau) + d\sin^2\varphi(\tau), \quad \tau \in \Delta^1,$$

и

$$\dot\varphi(\tau) = -d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau) - d\sin^2\varphi(\tau), \quad \tau \in \Delta^2,$$

соответственно, которые могут быть представлены в виде уравнений с разделяющимися переменными, следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{d\sin\varphi\cos\varphi + d\sin^2\varphi} = d\tau \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{-d\sin\varphi\cos\varphi - d\sin^2\varphi} = d\tau.$$

Тогда, если числа $0 < t_0 < t_1 < t_2 < +\infty$ удовлетворяют соотношениям

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1, \qquad (t_0, t_1] \in \Delta^1, \quad (t_1, t_2] \in \Delta^2, \tag{2.37}$$

и при этом $0 < \varphi_i < 3\pi/4$, где $\varphi_i \equiv \varphi(t_i), i \in \{0,1,2\}$, то будет справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \quad = \quad \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{d\sin\varphi\cos\varphi + d\sin^2\varphi} \quad = \quad \frac{1}{d}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{(\sin^2\varphi)^{-1}\,d\varphi}{\cos\varphi(\sin\varphi)^{-1} + 1} \quad =$$

$$= -\frac{1}{d}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{\mathrm{ctg}\,\varphi+1} == \frac{1}{d}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_0} \frac{d(\mathrm{ctg}\,\varphi+1)}{\mathrm{ctg}\,\varphi+1} = \frac{1}{d}(\ln|\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0+1|-\ln|\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1+1|) \tag{2.38}$$

и, аналогично,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{-d\sin\varphi\cos\varphi - d\sin^2\varphi} = \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{d\sin\varphi\cos\varphi + d\sin^2\varphi} =$$
$$= \frac{1}{d}(\ln|\,\mathrm{ctg}\,\varphi_2+1| - \ln|\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1+1|). \tag{2.39}$$

Выражения, стоящие в левой части обоих соотношений (2.38) и (2.39) равны между собой (что следует из (2.37)), следовательно, равны между собой и выражения, стоящие в правых частях соотношений, откуда в частности следует, что $\varphi_0 = \varphi_2$. Это, в свою очередь, означает, что решение x на промежутке $(t_0, t_2]$ если и отклоняется от своего исходного положения $\varphi(t_0) = \mathrm{arctg}(x_2(t_0)/x_1(t_0))$, то к моменту t_2 обязательно возвращается в него (т.е. $\varphi(t_2) = \varphi(t_0)$).

Также из соотношения (2.38) легко заметить, что если $\varphi(t_0) \equiv \varphi_0 = \pi/2$, то решение x за конечное время не сможет достигнуть положений $\varphi = 0$ и $\varphi = 3\pi/4$ а, следовательно, $0 < \varphi(\tau) < 3\pi/4$ на промежутке $[t_0, t_2]$ и справедливы оценки

$$\dot\varphi(\tau) = d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau) + d\sin^2\varphi(\tau) > 0, \quad \tau\in[t_0, t_1]$$

и

$$\dot\varphi(\tau) = -d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau) - d\sin^2\varphi(\tau) < 0, \quad \tau\in[t_1, t_2].$$

Это, в свою очередь, означает, что решение x в каждый момент времени $\tau \in (t_0, t_1]$ и, аналогично, в каждый момент времени $\tau \in (t_1, t_2]$ осуществляет движение по фазовой плоскости строго в одном направления (против или, соответственно, по ходу часовой стрелки) и на промежутке $(t_0, t_2]$ пересекает луч φ_0 фазовой плоскости не более одного раза.

2.1.2. Для произвольного числа $l > 0$ построим участки постоянства (длина которых будет зависеть от этого числа l) для системы A так, чтобы для одного из решений этой системы выполнялось равенство

$$\nu_m(x) = l.$$

Участки постоянства будут строиться по индукции с шагом k. На каждом шаге будет построена пара промежутков. Промежутки, построенные на k-ом шаге, будут обозначаться Δ_k^1 и Δ_k^2, а их объединение – через Δ_k. На промежутках Δ_k^1 матрица A будет совпадать с матрицей A_1, а на промежутках Δ_k^2 – с матрицей A_2. На первом шаге в качестве промежутков $\Delta_1^1 = \Delta_1^1(l)$, $\Delta_1^2 = \Delta_1^2(l)$ возьмем промежутки $(0, \pi/2l]$ и $(\pi/2l, \pi/l]$. Обозначим общую длину всех промежутков постоянства построенных на шагах $1, ..., k-1$ через $T_k = T_k(l)$, тогда на k-ом шаге участками постоянства будут промежутки $\Delta_k^1 = \Delta_k^1(l) \equiv (T_k, T_k + \pi/2l]$ и $\Delta_k^2 = \Delta_k^2(l) \equiv (T_k + \pi/2l, T_k + \pi/l]$, соответственно. Очевидно, таким образом заданная система определена на $\mathbb{R}^+$.

Рассмотрим теперь решение x системы $A = A(l)$, которое удовлетворяет начальным условиям $x(0) = (0, 1)^{\mathrm{т}}$ и отметим, что для данного решения выполнено условие $\varphi(0) = \pi/2$. Заданная таким образом система $A = A(l)$ и выбранное решение x обладают всеми свойствами, указанными в п. 2.1.1. В частности, на каждом промежутке Δ_m^1 решение x начинает движение из положения $\varphi_0 \equiv \varphi(T_m) = \pi/2$ и двигается строго в направлении увеличения угла (против движения часовой стрелки при традиционном расположении осей) пока $\tau \in \Delta_m^1$. Спустя время $\pi/2l$ (равное mes Δ_m^1), вектор x меняет направление движения на противоположное (двигается уже по направлению движения часовой стрелки) и на промежутке Δ_m^2 двигается строго в этом направлении, за то же время $\pi/2l$ возвращаясь в исходное положение. Таким образом, вектор x на любом полуинтервале длины π/l ровно один раз пересекает луч $\varphi = \pi/2$ и только в этот момент функция (x, m) обращается в 0 (в этот момент $(x, m) = 0 \cdot m_1 + 0 \cdot x_2 = 0$), при этом из условия $\dot{\varphi}(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+$, согласно лемме 6 следует, что в эти моменты обнуления производная $(\dot{x}, m)$ не равна 0. Следовательно, согласно лемме 5 будет верно равенство

$$\nu_m(x) = l,$$

откуда для зафиксированного ранее вектора m сразу вытекает требуемое соотношение

$$\mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{T}_d^2) = \overline{\mathbb{R}}^+. \tag{2.40}$$

2.2. Рассмотрим теперь ненулевой вектор $m \in \mathbb{R}_*^n$ и пусть m_j – его единственная ненулевая координата и $j < n$. Рассмотрим систему $B(\tau, l)$

с матрицей размерности $n\times n$, у которой на диагонали, на всех позициях кроме (j,j) и $(j+1,j+1)$ стоят числа d, коэффициенты b_{jj}, b_{j+1j+1}, а также b_{jj+1} таковы, что матрица

$$\begin{pmatrix} b_{jj}(\tau,l) & b_{jj+1}(\tau,l) \\ 0 & b_{j+1}(\tau,l) \end{pmatrix}$$

совпадает для заданного $l\in\mathbb{R}^+$ с построенной в п. 2.1.2 матрицей $A=A(l)$ при всех $\tau\in\mathbb{R}^+$, а все остальные коэффициенты этой системы тождественно равны 0.

Пусть теперь $\tilde{x}$ – решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}_{j+1}(0)=1,\ \tilde{x}_i(0)=0,\ i\neq j$. Перенумеруем координаты вектора $\tilde{x}$ следующим образом: пусть $k_1=j, k_2=j+1$, а $k_3,\ldots,k_n$ – все оставшиеся координаты этого вектора, упорядоченные по возрастанию. Тогда в каждый момент $\tau\in\mathbb{R}^+$ поставим в соответствие вектору $\tilde{x}$ строку из n скалярных функций $(r(\tau),\varphi_0(\tau),\varphi_1(\tau),\ldots,\varphi_{n-2}(\tau))$, для которой будет справедливо соотношение (2.13), где $\varphi_0=\varphi_0(\tau)$ – непрерывная (по τ) ветвь угла, образуемого вектором $\tilde{x}=\tilde{x}(\tau)$ с положительным направлением оси Ox_j в плоскости Ox_jx_{j+1} и отсчитываемого в положительном (против хода часовой стрелки) направлении. С учетом начальных условий данное соотношение примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{k_1}(\tau) \\ \tilde{x}_{k_2}(\tau) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r(\tau)\cos\varphi_0(\tau) \\ r(\tau)\sin\varphi_0(\tau) \end{pmatrix}, \quad x_{k_r}(\tau)=0, \quad r=3,\ldots,n, \quad \tau\in\mathbb{R}^+,$$

а, следовательно, решение $\tilde{x}$ будет осуществлять движение исключительно в плоскости Ox_jx_{j+1}, причем его траектория в этой плоскости будет полностью совпадать с траекторией решения x (с начальными условиями $x_1(0)=0, x_2(0)=1$) двумерной системы A из п 2.1, а именно: на любом полуинтервале длины π/l вектор $\tilde{x}$ ровно один раз будет пересекать луч $\varphi_0=\pi/2$ и в этот момент функция $(\tilde{x},m)$ будет обращаться в 0 (в этот момент $(\tilde{x},m)=0\cdot\tilde{x}_j+m_{j+1}\cdot 0=0$), а производная $(\dot{\tilde{x}},m)$ будет ненулевой. Следовательно, будет справедливо соотношение

$$\nu(\tilde{x},m)=l,$$

из которого и следует обобщение равенства (2.40) на случай произвольного n.

Теорема доказана.

2.3 Точные границы спектров систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка

В множестве $\mathcal{M}^2$ выделим подмножество систем

$$\mathcal{E}_d^2 \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^2 \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \right\}$$

с ограниченными коэффициентами $|a_i(t)| \le d,\ \tau \in \mathbb{R}^+,\ 1 \le i \le 2$.

В множестве $\mathbb{R}^2_*$ каждому числу $d > 0$ поставим в соответствие подмножества векторов

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-} \equiv \left\{ m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_* \mid \left|\frac{m_2}{m_1}\right| < \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}},\ m_1 \in \mathbb{R}_*,\ m_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0} \equiv \left\{ m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_* \mid \left|\frac{m_2}{m_1}\right| = \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}},\ m_1 \in \mathbb{R}_*,\ m_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^+} \equiv \left\{ m \in \mathbb{R}^2_* \mid m \notin \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-} \cup \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0} \right\}.$$

Теорема 7. *Для любого числа $d > 0$ справедливы соотношения*

$$\operatorname{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{E}_d^2) = \begin{cases} [0, \lambda(d)], & m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}, \\ [0, \lambda(d)] \cup \{\infty\}, & m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0}, \\ \overline{\mathbb{R}}^+, & m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^+}, \end{cases}$$

где

$$\lambda(d) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sqrt{4d - d^2}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{d}{\sqrt{4d - d^2}}\right)\right)^{-1}, & 0 < d < 4, \\ 1, & d = 4, \\ \dfrac{\pi}{2}\sqrt{d^2 - 4d}\left(\ln\left(\dfrac{d + \sqrt{d^2 - 4d}}{d - \sqrt{d^2 - 4d}}\right)\right)^{-1}, & d > 4. \end{cases}$$

Доказательство.

Сразу же отметим, что для произвольных $d > 0$ и $m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_*$ значение 0 величина ν_m принимает на решении $z = (t^2; 2t)^{\text{т}}$ системы

$A \in \mathcal{E}_d^2$ с постоянными коэффициентами $a_1(t) = a_2(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, функция $(z(t), m) = m_1t^2 + 2m_2t$ на $\mathbb{R}^+$ обнуляется не более 2-ух раз, и, следовательно, $\nu_m(z) = 0$.

Для произвольного ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ через $\varphi(\tau)$ будем обозначать угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau))^{\mathrm{т}}$, сонаправленному с вектором $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau))^{\mathrm{т}}$ в момент τ, а под угловой скоростью решения x в дальнейшем будет пониматься производная $\dot\varphi(\tau)$ функции $\varphi(\tau)$. Известно [64, с. 24], что угловая скорость произвзольного ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет уравнению

$$\dot\varphi(\tau) = -\sin^2\varphi(\tau) - a_2(\tau)\cos^2\varphi(\tau) - a_1(\tau)\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau). \qquad (2.41)$$

1. Зафиксируем число $d > 0$ и докажем первое равенство теоремы.

1.1. Для каждого вектора $m \equiv (m_1, m_2)^{\mathrm{т}}$ из множества $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$ через m^* будем обозначать любой ортогональный ему вектор, а через $\tilde{\mathbb{R}}^2_{\mathcal{E}_d}$ будем обозначать множество всех таких векторов

$$\tilde{\mathbb{R}}^2_{\mathcal{E}_d} \equiv \left\{ m^* \in \mathbb{R}^2_* \mid (m, m^*) = 0,\ m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-} \right\}.$$

Заметим, что если в некоторый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ решение (вектор) $x = x(\tau)$ системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ принадлежит множеству $\tilde{\mathbb{R}}^2_{\mathcal{E}_d}$, то угловая скорость, соответствующая данному решению, в этот момент отрицательна. Действительно, если $\cos\varphi(\tau) \neq 0$, то

$$\begin{gathered}\dot\varphi(\tau) \le -\sin^2\varphi(\tau) + d\cos^2\varphi(\tau) + d|\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)| = \\ = -\cos^2\varphi(\tau)(|\operatorname{tg}\varphi(\tau)| - (d + \sqrt{d^2+4d})/2)(|\operatorname{tg}\varphi(\tau)| - (d - \sqrt{d^2+4d})/2) < 0,\end{gathered} \qquad (2.42)$$

если же $\cos\varphi(\tau) = 0$, то из (2.41) следует, что $\dot\varphi(\tau) = -1$. Поясним оценку (2.42). Вектор $x(\tau)$ принадлежит множеству $\tilde{\mathbb{R}}^2_{\mathcal{E}_d}$, а значит существует вектор $\hat m \equiv (\hat m_1, \hat m_2) \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$ такой, что $(x(\tau), \hat m) = x_1(\tau)\hat m_1 + x_2(\tau)\hat m_2 = 0$ и при этом $|\hat m_2/\hat m_1| < 2/(d + \sqrt{d^2+4d})$, откуда следует соотношение

$$|\operatorname{tg}\varphi(\tau)| \equiv \left|\frac{x_2(\tau)}{x_1(\tau)}\right| = \left|\frac{\hat m_1}{\hat m_2}\right| > \frac{d + \sqrt{d^2+4d}}{2}. \qquad (2.43)$$

Т.е. второй множитель в оцениваемом выражении – отрицательный. Последний множитель в оцениваемом выражении (2.42) принимает только положительные значения в связи с тем, что $|\operatorname{tg}\varphi(\tau)| > 0$ и $\sqrt{d^2+4d} > d$. Оцениваемое выражение содержит два положительных и один отрицательный множитель, и как следствие, принимает только отрицательные значения.

Таким образом, если вектор m принадлежит множеству $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$, то любое решение x системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ будет пересекать любой вектор m^* фазовой плоскости, ортогональный вектору m (и, следовательно, принадлежащий множеству $\tilde{\mathbb{R}}^2_{\mathcal{E}_d}$), без остановки и строго в одном определенном направлении (по направлению движения часовой стрелки при традиционном расположении осей). При этом каждому такому моменту пересечения будет соответствовать нуль функции (x, m). Соответственно, частота нулей координаты (x, m) решения x будет тем больше, чем быстрее решение будет делать полуоборот на фазовой плоскости относительно вектора m^*. Т.е. максимальное значение функции ν_m на множестве всех решений $S_*(\mathcal{E}_d^2)$ будет достигаться на том решении, которое при всех $\tau \in \mathbb{R}^+$ будет двигаться по фазовой плоскости строго в одном определенном направлении (по направлению движения часовой стрелки при традиционном расположении осей) с максимально возможной (для данного фиксированного $d > 0$) по модулю угловой скоростью в каждый момент времени τ. Под максимально возможной скоростью подразумевается следующее: на каком бы луче $\varphi = \alpha$ не находилось искомое решение в некоторый момент τ, угловая скорость любого другого решения из множества $S_*(\mathcal{E}_d^2)$, оказавшегося в какой бы то ни было момент $t \in \mathbb{R}^+$ на том же луче $\varphi = \alpha$, либо на любом из лучей $\varphi = \alpha + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, по модулю не превзойдет значение $\dot{\varphi}(\tau)$. Другими словами, подходящим будет такое решение $\tilde{x}$, у которого угловая скорость $\dot{\varphi}$ все время отрицательна

$$\dot{\varphi}(\tau) < 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{2.44}$$

и для любого момента $\tau \in \mathbb{R}^+$ и луча $\varphi = \alpha$, кроме того, удовлетворяет равенству

$$|\dot{\varphi}(\tau)| = \max_{z \in S_*(\mathcal{E}_d^2)} \max_{\substack{t \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{N}: \\ \varphi_z(t) = \alpha + 2\pi k}} |\dot{\varphi}_z(t)|, \tag{2.45}$$

где $\varphi_z(t)$ - какая-либо непрерывная ветвь угла, соответствующая вектору $(\cos\varphi_z(t), \sin\varphi_z(t))$, сонаправленному в момент t с некоторым решением (вектором) z, а $\dot{\varphi}_z(t)$ – угловая скорость этого решения.

1.2. Для ранее заданного числа $d > 0$ построим систему $A \in \mathcal{E}_d^2$, для одного из решений которой будут выполняться условия (2.44) и (2.45).

Сперва оценим сверху модуль угловой скорости произвольного ненулевого решения $z \in S_*(\mathcal{E}_d^2)$. Для этого обозначим

$$\begin{aligned} \Phi^1 &\equiv \{\varphi \in \mathbb{R}^+ |\ -\frac{\pi}{2} - \pi n \le \varphi \le -\pi n, n \in \mathbb{Z}\}, \\ \Phi^2 &\equiv \{\varphi \in \mathbb{R}^+ |\ -\pi - \pi n \le \varphi \le -\frac{\pi}{2} - \pi n, n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

а также

$$\begin{aligned} \Theta^1(z) &\equiv \{\tau \in \mathbb{R}^+ |\ \varphi_z(\tau) \in \Phi_1\}, \\ \Theta^2(z) &\equiv \{\tau \in \mathbb{R}^+ |\ \varphi_z(\tau) \in \Phi_2\}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Отметим, что объединение множеств $\Theta^1(z)$ и $\Theta^2(z)$ дает все $\mathbb{R}^+$. Тогда для любого решения z и значения $\alpha \in \mathbb{R}$ при тех τ, что $\varphi_z(\tau) = \alpha$ справедлива оценка

$$|\dot\varphi_z(\tau)| \le \begin{cases} \sin^2\alpha + d\cos^2\alpha + d\sin\alpha\cos\alpha, & \alpha \in \Phi_1, \\ \sin^2\alpha + d\cos^2\alpha - d\sin\alpha\cos\alpha, & \alpha \in \Phi_2, \end{cases} \tag{2.48}$$

которая следует из вида уравнения (2.41), определения множеств (2.46) и ограниченности коэффициентов a_1, a_2 по модулю числом d на $\mathbb{R}^+$.

Отметим также, что всякое решение системы $A \in \mathcal{E}_d^2$, коэффицент a_2 которой равен $a_2(\tau) = d, \tau \in \mathbb{R}^+$, пересекает оси абсцисс и ординат на фазовой плоскости двигаясь исключительно в одном определенном направлении (по направлению движения часовой стрелки при традиционном расположении осей). Действительно, из (2.41) следует, что если $\tau \in \mathbb{R}^+ : \varphi(\tau) = \pi/2 + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, то в этот в момент угловая скорость $\dot\varphi(\tau) = -1$, а если $\tau \in \mathbb{R}^+ : \varphi(\tau) = \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, то $\dot\varphi(\tau) = -d$ и, следовательно, $\dot\varphi(\tau) < 0$ в этот момент. Это в частности означает, что если в некоторый момент $\tau \in \mathbb{R}^+ : \varphi(\tau) = \pi/2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, то либо найдется момент $t > \tau$, для которого $\varphi(\tau) = \pi/2 \cdot (k+1)$, либо для любого $t > \tau$ будет справедливо включение $\varphi(t) \in (\pi/2 \cdot k, \pi/2 \cdot (k+1))$.

Перейдем теперь к выбору коэффициентов a_1, a_2 для системы A, положим

$$a_1(\tau) = \begin{cases} d, & \tau \in \Theta^1 \\ -d, & \tau \in \Theta^2, \end{cases} \qquad a_2(\tau) = d, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{2.49}$$

где множества $\Theta^1 \equiv \Theta^1(\tilde x)$ и $\Theta^2 \equiv \Theta^2(\tilde x)$ соответсвуют решению $\tilde x$ данной системы с начальными условиями $\tilde x_1(0) = 0,\ \tilde x_2(0) = 1$ и устроены следующим образом: в момент $t_1 = 0$ выполнено $\varphi(t_1) = \pi/2$, следовательно, либо найдется момент t_2, такой, что $\varphi(t_2) = \pi/2 \cdot 2 = \pi$, либо $\varphi(\tau) \in (\pi/2, \pi), \tau \in \mathbb{R}^+$, и в этом случае положим $t_2 = +\infty$ и $t_j = 0, j > 1$. Далее, аналогично, либо существует момент t_3 такой, что $\varphi(t_3) = \pi/2 \cdot 3$, либо $\varphi(\tau) \in (\pi, 3\pi/2), \tau \in \mathbb{R}^+$, и в этом случае положим $t_3 = +\infty$ и $t_j = 0, j > 2$ и т.д. Тогда множества Θ^1 и Θ^2 определяются соотношениями

$$\Theta^1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty}[t_{2k-1}, t_{2k}) \quad \text{и} \quad \Theta^2 = \bigcup_{k=1}^{+\infty}[t_{2k}, t_{2k+1}).$$

Отметим, что при таком выборе функций a_1, a_2 система A принадлежит множеству $\mathcal{E}_d^2$, т.к. функции a_1, a_2 кусочно непрерывны и ограничены по модулю числом d на $\mathbb{R}^+$, а угловая скорость решения $\tilde{x}$, в свою очередь, удовлетворяет соотношению

$$\dot{\varphi}(\tau) = \begin{cases} -\sin^2\varphi(\tau) - d\cos^2\varphi(\tau) - d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau), & \tau \in \Theta^1, \\ -\sin^2\varphi(\tau) - d\cos^2\varphi(\tau) + d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau), & \tau \in \Theta^2, \end{cases} \tag{2.50}$$

что также следует из выбора коэффициентов и вида уравнения (2.41). Тогда из соотношения (2.50) вытекает, что

$$\dot{\varphi}(\tau) < 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{2.51}$$

Действительно, выражение $-\sin^2\varphi(\tau) - d\cos^2\varphi(\tau)$ всегда отрицательно, а выражение $-d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)$ неположительно, когда аргумент φ принадлежит множеству Φ^1 (т.е. когда $\tau \in \Theta^1$), аналогично, выражение $d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)$ неположительно, когда аргумент φ принадлежит множеству Φ^2 (т.е. когда $\tau \in \Theta^2$).

Неравенство (2.51), в свою очередь, означает, что выполнено условие (2.44) и решение $\tilde{x}$ в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ будет двигаться по фазовой плоскости строго в одном направлении (по направлению уменьшения угла φ). При этом из вида уравнения (2.50) также следует, что для решения $\tilde{x}$ и любого луча фазовой плоскости $\alpha \in \mathbb{R}$ знаки неравенства в соотношении (2.48) можно заменить на знаки равенства и решение $\tilde{x}$ на каждом луче фазовой плоскости будет двигаться с максимально возможной по модулю угловой скоростью среди всех решений из множества $S_*(\mathcal{E}_d^2)$, находящихся в тот или иной момент на этом же луче α, либо на любом из лучей $\varphi = \alpha + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, т.е. будет выполнено условие (2.45).

Следовательно, при фиксированном значении числа $d > 0$, для любого вектора $m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$ на решении $\tilde{x}$ построенной системы A будет достигаться максимально возможное значение функции ν_m на множестве $S_*(\mathcal{E}_d^2)$. Кроме того, необходимо заметить, что это значение будет одинаковым для всех $m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$, т.к. делая полуоборот вокруг некоторого вектора p^*, ортогонального некоторому вектору $p \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$, решение x (двигаясь строго в одном определенном направлении по фазовой плоскости) ровно один раз пересекает каждый луч фазовой полуплоскости, образованной вектором p^*. Следовательно, для любого вектора q найдется ортогональный ему вектор q^* из указанной полуплоскости, который это решение также пересечет, совершая полуоборот. А это, в свою очередь, означает, что функция (x, q) также ровно один раз обратится в нуль. Тогда с учетом леммы 5 получим, что

$$\nu_q(\tilde{x}) = \nu_p(\tilde{x}), \quad p, q \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}.$$

1.3. Вычислим теперь величину $\nu_m(\tilde{x})$, которая, как следует из п. 1.2., будет одинакова для всех $m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$. В качестве вектора m возьмем вектор $m_0 \equiv (1, 0)^{\text{т}}$, для которого по определению $\nu_{m_0}(\tilde{x}) \equiv \nu(\tilde{x})$.

1.3.1. Для начала перепишем уравнение (2.41) в виде уравнения с разделяющимися переменными, получим:

$$\frac{d\varphi}{-\sin^2\varphi - d\cos^2\varphi - f(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi} = dt, \tag{2.52}$$

где

$$f(\varphi) \equiv \begin{cases} d, & \varphi \in \Phi_1, \\ -d, & \varphi \in \Phi_2. \end{cases}$$

Здесь переход от функции, зависящей от аргумента τ к функции от аргумента φ правомерен в связи с тем, как определялись множества (2.46) и (2.47). Заметим, что если в выражении (2.50) функцию $\dot{\varphi}$ рассматривать как функцию от переменной φ, то из вида правой части этого выражения будет следовать, что функция $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi)$ – периодическая с периодом π. Это в частности означает, что время, за которое решение совершает любой полуоборот относительно вектора $m_0^* \equiv (0, 1)^{\text{т}}$, ортогонального вектору m_0, всегда одинаково. Обозначим тогда через T время, за которое решение $\tilde{x}$ переместится из положения $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в положение $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

(как уже ранее упоминалось, решение $\tilde{x}$ осуществляет движение по направлению уменьшения угла φ). Положениям $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (и только им) будут как раз-таки соответствовать нули функции $(\tilde{x}, m_0)$. Следовательно, с учетом периодичности, время T – это время, прошедшее с любого момента обнуления функции $(\tilde{x}, m_0)$, до момента ее следующего обнуления.

Проинтегрируем правую часть уравнения (2.52) на отрезке $[0, T]$ по переменной t, тогда левую часть необходимо проинтегрировать в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$ по переменной φ, получим:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{-\sin^2\varphi - d\cos^2\varphi - f(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi} = \int\limits_0^T d\tau. \tag{2.53}$$

Интеграл в правой части равенства (2.53) равен T, следовательно, вычислив интеграл в левой части этого равенства, мы найдем время, прошедшее с любого момента обнуления функции $(\tilde{x}, m_0)$, до момента ее следующего обнуления. Поменяем местами пределы интегрирования в левой части соотношения (2.53) и преобразуем ее:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi}{\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} + d\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{f(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi + f(\varphi)\operatorname{tg}\varphi + d} =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi - d\operatorname{tg}\varphi + d} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi + d\operatorname{tg}\varphi + d}. \tag{2.54}$$

В последнем переходе мы разбили промежуток интегрирования на две части и воспользовались тем, что на отрезках $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ и $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция f принимает постоянные значения $-d$ и d, соответственно. Осуществим замену переменной $\operatorname{tg}\varphi = u$ в подынтегральных выражениях (2.54), при этом изменятся также и пределы интегрирования. Выражение (2.54) примет вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{du}{(u - \frac{d}{2})^2 + d - \frac{d^2}{4}} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{du}{(u + \frac{d}{2})^2 + d - \frac{d^2}{4}} \equiv I_1 + I_2 \equiv I. \tag{2.55}$$

Интегралы I_1, I_2 могут быть вычислены различными способами в зависимости от знака выражения

$$d-\frac{d^2}{4}=\frac{d(4-d)}{4}, \tag{2.56}$$

которое в дальнейшем будет обозначаться через d_0. Необходимо рассмотреть три случая: $d_0>0$, $d_0=0$ и $d_0<0$.

1.3.1.1. Вычислим интеграл I для случая $d_0>0$:

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\frac{1}{d_0}\cdot du}{\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}-\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)^2+1}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{d_0}\cdot du}{\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}+\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)^2+1}= \\
&= \frac{1}{\sqrt{d_0}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}-\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)}{\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}-\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)^2+1}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}+\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)}{\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}+\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)^2+1}\right)= \\
&= \frac{1}{\sqrt{d_0}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}-\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}+\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{d_0}}+\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}\right)= \\
&= \frac{1}{\sqrt{d_0}}\left(\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)\right)\right)= \\
&= \frac{1}{\sqrt{d_0}}\left(\pi-2\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)\right).
\end{aligned}$$

1.3.1.2. Вычислим интеграл I для случая $d_0=0$. Т.к. число d по условию положительно, то из равенства $d_0=0$ следует, что $d=4$, имеем:

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{du}{(u-2)^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{du}{(u+2)^2}= \\
&= \left(-(u-2)^{-1}\Big|_{-\infty}^{0}-(u+2)^{-1}\Big|_{0}^{+\infty}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=1.
\end{aligned}$$

1.3.1.3. Вычислим интеграл I для случая $d_0<0$:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\frac{1}{-d_0}\cdot du}{\left(\frac{u}{\sqrt{-d_0}}-\frac{d}{2\sqrt{-d_0}}\right)^2-1}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{-d_0}\cdot du}{\left(\frac{u}{\sqrt{-d_0}}+\frac{d}{2\sqrt{-d_0}}\right)^2-1}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-d_0}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{-d_0}} - \frac{d}{2\sqrt{-d_0}}\right)}{\left(\frac{u}{\sqrt{-d_0}} - \frac{d}{2\sqrt{-d_0}}\right)^2 - 1} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{u}{\sqrt{-d_0}} + \frac{d}{2\sqrt{-d_0}}\right)}{\left(\frac{u}{\sqrt{-d_0}} + \frac{d}{2\sqrt{-d_0}}\right)^2 - 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-d_0}} \left(\ln\left| \frac{\frac{u}{\sqrt{-d_0}} - \frac{d}{2\sqrt{-d_0}} - 1}{\frac{u}{\sqrt{-d_0}} - \frac{d}{2\sqrt{-d_0}} + 1} \right|\Bigg|_{-\infty}^{0} + \ln\left| \frac{\frac{u}{\sqrt{-d_0}} + \frac{d}{2\sqrt{-d_0}} - 1}{\frac{u}{\sqrt{-d_0}} + \frac{d}{2\sqrt{-d_0}} + 1} \right|\Bigg|_{0}^{+\infty} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-d_0}} \left(\left(\ln\left| \frac{-\frac{d}{2\sqrt{-d_0}} - 1}{-\frac{d}{2\sqrt{-d_0}} + 1} \right| - 0 \right) + \left(0 - \ln\left| \frac{\frac{d}{2\sqrt{-d_0}} - 1}{\frac{d}{2\sqrt{-d_0}} + 1} \right| \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-d_0}} \left(\ln\left| \frac{\left(\frac{d}{2\sqrt{-d_0}} + 1\right)^2}{\left(\frac{d}{2\sqrt{-d_0}} - 1\right)^2} \right| \right) = \frac{1}{\sqrt{-d_0}} \left(\ln\left| \frac{(d + 2\sqrt{-d_0})}{(d - 2\sqrt{-d_0})} \right| \right).$$

Тогда, возвращаясь к равенству (2.53), получим:

$$T = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_0}} \left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{d}{2\sqrt{d_0}}\right)\right), & d_0 > 0, \\ 1, & d_0 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-d_0}} \left(\ln\left|\frac{(d+2\sqrt{-d_0})}{(d-2\sqrt{-d_0})}\right|\right), & d_0 < 0. \end{cases}$$

А с учетом обозначения (2.56) и того факта, что число d положительное, получим:

$$T = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4d-d^2}} \left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{d}{\sqrt{4d-d^2}}\right)\right), & 0 < d < 4, \\ 1, & d = 4, \\ \frac{2}{\sqrt{d^2-4d}} \ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-4d}}{d-\sqrt{d^2-4d}}\right), & d > 4. \end{cases} \tag{2.57}$$

1.3.2. Таким образом, скалярная функция $(\tilde{x}, m_0)$ на любом полуинтервале длины $T = T(d)$ (где T определяется соотношением (2.57)) обнуляется ровно один раз, при этом из условия $\dot{\varphi}(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+$, согласно лемме 6 следует, что в эти моменты обнуления производная $(\dot{\tilde{x}}, m)$ не равна 0. Следовательно, согласно лемме 5 будет справедливо равенство

$$\nu_{m_0}(\tilde{x}) \equiv \nu(\tilde{x}) = \frac{\pi}{T} \equiv \frac{\pi}{T(d)} \equiv \lambda(d).$$

Это означает, что для любого вектора $m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$ справедливо неравенство

$$\check{\nu}_m(x) \le \lambda(d), \quad x \in S_*(\mathcal{E}_d^2),$$

причем существует система $A \in \mathcal{E}_d^2$, для одного из решений которой данное неравенство превращается в равенство.

1.3.3. Осталось показать, что при все том же фиксированном значении числа $d > 0$, для любого числа d_* из отрезка $[0, \lambda(d)]$ также существует система $A \in \mathcal{E}_d^2$, для одного из решений которой (назовем его $y \in S_*(A)$) будет справедливо равенство

$$\nu_m(y) = d_*, \quad m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}. \tag{2.58}$$

Для этого достаточно доказать непрерывность функции $\lambda = \lambda(d_*)$, доопределенной нулем в точке $d_* = 0$ на полупрямой $[0, +\infty)$.

Из вида выражения (2.57) вытекает, что функция $\lambda = \lambda(d_*)$ непрерывна на промежутках $(0, 4)$ и $(4, +\infty)$, следовательно, достаточно доказать следующие равенства

$$\lim_{d_* \to +0} \lambda(d_*) = 0, \qquad \lim_{d_* \to 4-0} \lambda(d_*) = \pi, \qquad \lim_{d_* \to 4+0} \lambda(d_*) = \pi.$$

1.3.3.1. Воспользовавшись определением функции λ, вычислим первый предел:

$$\lim_{d_* \to +0} \lambda(d_*) = \lim_{d_* \to +0} \frac{\pi\sqrt{4d_* - d_*^2}}{\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{d_*}{\sqrt{4d_* - d_*^2}}\right)} = \frac{0}{\pi - 0} = 0,$$

т.к.

$$\sqrt{4d_* - d_*^2} \sim \sqrt{d_*} \quad \text{при} \quad d_* \to 0,$$

и

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{d_*}{\sqrt{4d_* - d_*^2}}\right) \sim \operatorname{arctg}\sqrt{d_*} \quad \text{при} \quad d_* \to 0.$$

1.3.3.2. Для вычисления второго предела, применим правило Лопиталя [21, с. 245]:

$$\lim_{d_* \to 4-0} \lambda(d_*) = \lim_{d_* \to 4-0} \frac{\pi\sqrt{4d_* - d_*^2}}{\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{d_*}{\sqrt{4d_* - d_*^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{d_* \to 4-0} \frac{\left(\pi\sqrt{4d_* - d_*^2}\right)'}{\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{d_*}{\sqrt{4d_* - d_*^2}}\right)\right)'} = \lim_{d_* \to 4-0} \pi \cdot \left(\frac{d_*}{2} - 2\right) = \pi.$$

Также отметим, что все необходимые условия теоремы Лопиталя выполнены: выражения, стоящие в числителе и знаменателе под знаком предела дифференцируемы в окрестности точки $d_* = 4$ и стремятся к 0 при $d_* \to 4 - 0$, а производная от выражения, стоящего в знаменателе, не обнуляется в окрестности точки $d_* = 4$.

1.3.3.3. Для вычисления третьего предела, также применим правило Лопиталя:

$$\lim_{d_* \to 4+0} \lambda(d_*) = \lim_{d_* \to 4+0} \frac{\pi\sqrt{4d_* - d_*^2}}{2\ln\left(\frac{d_* + \sqrt{4d_* - d_*^2}}{d_* - \sqrt{4d_* - d_*^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{d_* \to 4+0} \frac{\left(\pi\sqrt{4d_* - d_*^2}\right)'}{\left(2\ln\left(\frac{d_* + \sqrt{4d_* - d_*^2}}{d_* - \sqrt{4d_* - d_*^2}}\right)\right)'} = \lim_{d_* \to 4+0} \pi \cdot \frac{(2 - d_*)^2}{4} = \pi.$$

Аналогично, все необходимые условия теоремы Лопиталя выполнены: выражения, стоящие в числителе и знаменателе под знаком предела дифференцируемы в окрестности точки $d_* = 4$ и стремятся к 0 при $d_* \to 4+0$, а производная от выражения, стоящего в знаменателе, не обнуляется в окрестности точки $d_* = 4$.

Из пп. 1.3.3.1.-1.3.3.3. вытекает, что функция $\lambda = \lambda(d)$ непрерывна на полупрямой $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной функции [21, с. 158] можно утверждать, что при все том же фиксированном значении числа $d > 0$ для любого числа $d_* \in [0, \lambda(d)]$, существует число $d^* \in [0, d]$ такое, что

$$\lambda(d^*) = d_*. \tag{2.59}$$

Тогда, если в пункте 1.3.1 при выборе коэффициентов a_1, a_2 системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ в соотношении (2.49) число d заменить числом d^* и рассмотреть решение $x \in S_*(\mathcal{E}_d^2)$, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$, то получим аналогичную цепочку равенств

$$\nu_m(x) = \lambda(d^*) = d_*.$$

Следовательно, для любого числа $d > 0$ и вектора $m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$ область значений сужения функции ν_m на множество $S(\mathcal{E}_d^n)$ представляет собой отрезок $[0, \lambda(d)]$, где

$$\lambda(d) \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sqrt{4d-d^2}\left(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{d}{\sqrt{4d-d^2}}\right)\right)^{-1}, & 0<d<4,\\[2ex] \pi, & d=4,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\sqrt{d^2-4d}\left(\ln\left(\dfrac{d+\sqrt{d^2-4d}}{d-\sqrt{d^2-4d}}\right)\right)^{-1}, & d>4. \end{cases}$$

Первая часть теоремы доказана.

2. Докажем теперь третье равенство.

Зафиксируем число $d > 0$ и рассмотрим произвольный вектор $m \equiv (m_1, m_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^+}$, для которого из определения множества $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^+}$ следует, что

$$\left|\frac{m_2}{m_1}\right| > \frac{2}{d+\sqrt{d^2+4d}}.$$

Тогда сразу же отметим, что значение ∞ величина ν_m принимает на решении $z = (e^{\lambda_1 t}; \lambda_1 e^{\lambda_1 t})^{\text{т}}$, $\lambda_1 \equiv -\frac{m_1}{m_2}$, системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ с постоянными коэффициентами a_1, a_2, которые определяются соотношениями

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad \lambda_2 \equiv \frac{d-\sqrt{d^2+4d}}{d+\sqrt{d^2+4d}} \cdot \lambda_1,$$

и, как следствие, ограничены по модулю числом d:

$$|a_1| = \left|-\frac{m_1}{m_2} \cdot \left(1 + \frac{d-\sqrt{d^2+4d}}{d+\sqrt{d^2+4d}}\right)\right| < \frac{d+\sqrt{d^2+4d}}{2} \cdot \frac{2d}{d+\sqrt{d^2+4d}} = d,$$

$$|a_2| = \left|\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d-\sqrt{d^2+4d}}{d+\sqrt{d^2+4d}}\right)\right| < \frac{(d+\sqrt{d^2+4d})^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{d^2+4d}-d}{d+\sqrt{d^2+4d}} = d,$$

что подтверждает включение $A \in \mathcal{E}_d^2$. Действительно, выражение (z, m) при всех $t \in \mathbb{R}^+$ будет равно 0:

$$(z, m) = e^{\lambda_1 t} m_1 + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} m_2 = e^{\lambda_1 t}(m_1 + \lambda_1 m_2) = 0.$$

Далее обозначим через $m^* \equiv (m_1^*, m_2^*)$ вектор ортогональный вектору m, лежащий при этом в правой полуплоскости относительно оси Ox_2

фазовой плоскости (на самой оси Ox_2 вектор m^* лежать не может, т.к. в этом случае исходный вектор m принадлежал бы множеству $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^-}$). Другими словами, за m^* примем тот вектор, у которого первая координата положительна ($m_1^* > 0$). Также обозначим через α угол, который вектор m^* образует с положительным направлением оси Ox_1, т.е.

$$\alpha \equiv \operatorname{arctg} \frac{m_2^*}{m_1^*},$$

и заметим, что из равенства $(m, m^*) = 0$ следует, что

$$\left|\frac{m_2^*}{m_1^*}\right| < \frac{d + \sqrt{d^2 + 4d}}{2} \quad \text{и} \quad |\operatorname{tg} \alpha| < \frac{d + \sqrt{d^2 + 4d}}{2}. \tag{2.60}$$

Зафиксируем теперь произвольное число $K > 0$ и построим систему $A \in \mathcal{E}_d^2$, для одного из решений которой (назовем его $\hat{x}$) будет справедливо равенство

$$\nu_m(\hat{x}) = K.$$

2.1. Рассмотрим случай, когда вектор m^* лежит в первой четверти фазовой плоскости (т.е. помимо m_1^*, еще и $m_2^* > 0$). Искомую систему $A \in \mathcal{E}_d^2$ в этом случае будем строить как кусочно-постоянную, матрица которой на участках постоянства совпадает с одной из следующих матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & d \end{pmatrix}.$$

Участки постоянства будут состоять из одинаковых по длине промежутков (состоящих каждый из пары полуинтервалов), которые будут строиться по индукции с шагом k. Полуинтервалы, построенные на k-ом шаге, будем обозначать как Δ_k^1 и Δ_k^2, $k \in \mathbb{N}$, а их объединение через Δ_k. На промежутках Δ_k^1 матрица A будет совпадать с матрицей A_1, а на промежутках Δ_k^2 – с матрицей A_2.

Перед началом построения промежутков Δ_k произведем некоторые вспомогательные вычисления, которыми мы воспользуемся при построении. Для начала заметим, что для любого решения системы A соответствующая ему угловая скорость при всех $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi}(\tau) = \begin{cases} -\sin^2 \varphi(\tau), & \tau \in \Delta_k^1, \\ -\sin^2 \varphi(\tau) + d\cos^2 \varphi(\tau) + d \sin \varphi(\tau) \cos \varphi(\tau), & \tau \in \Delta_k^2, \end{cases} \tag{2.61}$$

а при тех $\tau \in \Delta_k^1$, что $\varphi(\tau) \in (0, \pi/2)$, удовлетворяет соотношению

$$\dot{\varphi}(\tau) = -\sin^2 \varphi(\tau) < 0, \quad \tau \in \Delta_k^1, \tag{2.62}$$

а если $\tau \in \Delta_k^2$ таково, что $0 < \varphi(\tau) < \alpha$ (откуда в т.ч. следует, что $0 < \operatorname{tg} \varphi(\tau) < \operatorname{tg} \alpha$), то для таких τ еще и соотношению

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}(\tau) = -\sin^2 \varphi(\tau) + d \cos^2 \varphi(\tau) + d \sin \varphi(\tau) \cos \varphi(\tau) = \\ &= -\cos^2 \varphi(\tau)(\operatorname{tg} \varphi(\tau) - (d + \sqrt{d^2 + 4d})/2)(\operatorname{tg} \varphi(\tau) - (d - \sqrt{d^2 + 4d})/2) > 0. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Доказательство последнего неравенства с учетом оценки (2.60) полностью повторяет аналогичное доказательство неравенства (2.42) из п.1.1. Соотношения (2.62) и (2.63) в том числе означают, что при указанных условиях, движение вектора решения на фазовой плоскости происходит строго в одном направлении (по или против хода часовой стрелки).

Теперь предположим, что некоторое решение системы с матрицей A_1 в момент $\tau = 0$ находится на луче $\varphi = \alpha$ ($\varphi(0) = \alpha$). Тогда для произвольного числа $\delta \in (0, \alpha)$ обозначим через $T_1(\delta)$ момент, в который это решение в первый раз окажется на луче $\varphi = \alpha - \delta$. Перепишем первое уравнение (2.61) в виде уравнения с разделяющимися переменными

$$dt = \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

и проинтегрируем левую часть от 0 до $T_1(\delta)$, тогда правую часть уравнения необходимо проинтегрировать в пределах от α до $\alpha - \delta$, получим:

$$T_1(\delta) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha-\delta} \frac{d\varphi}{-\sin^2 \varphi} = \int\limits_{\alpha-\delta}^{\alpha} \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}\bigg|_{\alpha-\delta}^{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \delta)} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \tag{2.64}$$

Функция $\operatorname{tg}(\alpha - \delta)$ (как функция от переменной δ) на интервале $(0, \alpha)$ строго убывает, принимая все значения (кроме граничных) от $\operatorname{tg} \alpha$ до 0. Следовательно, на этом промежутке функция $T_1 = T_1(\delta)$ строго возрастает, принимая все значения из интервала $(0, +\infty)$.

Аналогично предположим, что некоторое решение системы с матрицей A_2 в момент $\tau = 0$ находится на луче $\varphi = \alpha - \delta$ и для произвольного числа $\delta \in (0, \alpha)$ обозначим через $T_2(\delta)$ момент, в который это решение в первый раз окажется на луче $\varphi = \alpha$. Тогда перепишем второе уравнение (2.61) в виде уравнения с разделяющимися переменными и проинтегрируем его левую часть от 0 до $T_2(\delta)$ – в таком случае правую часть уравнения необходимо проинтегрировать в пределах от $\alpha-\delta$ до α, получим:

$$T_2(\delta)=\int\limits_{\alpha-\delta}^{\alpha}\frac{d\varphi}{-\sin^2\varphi+d\cos^2\varphi+d\sin\varphi\cos\varphi}=\int\limits_{\alpha}^{\alpha-\delta}\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi-d\operatorname{tg}\varphi-d}=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\alpha-\delta}\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{(\operatorname{tg}\varphi-d_1)(\operatorname{tg}\varphi-d_2)}=\int\limits_{\alpha}^{\alpha-\delta}\left(\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi-d_1}-\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi-d_2}\right)=$$
$$=\frac{1}{d_1-d_2}\left(\ln|\operatorname{tg}\varphi-d_1|-\ln|\operatorname{tg}\varphi-d_2|\right)\Big|_{\alpha}^{\alpha-\delta}=$$
$$=d_0\cdot(\ln(d_1-\operatorname{tg}(\alpha-\delta))-\ln(d_1-\operatorname{tg}\alpha)-$$
$$-\ln(\operatorname{tg}(\alpha-\delta)-d_2)+\ln(\operatorname{tg}\alpha-d_2))=$$

$$=d_0\cdot\left(\ln\left(\frac{(\operatorname{tg}(\alpha-\delta)-d_1)(\operatorname{tg}\alpha-d_2)}{(\operatorname{tg}\alpha-d_1)(\operatorname{tg}(\alpha-\delta)-d_2)}\right)\right)=$$
$$=d_0\cdot\left(\ln\left(\frac{(\operatorname{tg}\alpha-d_2)}{(\operatorname{tg}\alpha-d_1)}\cdot\left(1+\frac{d_1-d_2}{d_2-\operatorname{tg}(\alpha-\delta)}\right)\right)\right),\quad(2.65)$$

где $d_0\equiv(d_1-d_2)^{-1}, d_1\equiv(d+\sqrt{d^2+4d})/2$, $d_2\equiv(d-\sqrt{d^2+4d})/2$. Функция $1+(d_1-d_2)/(d_2-\operatorname{tg}(\alpha-\delta))$ убывает, когда δ пробегает значения от 0 до α, при этом дробь $(\operatorname{tg}\alpha-d_2)/(\operatorname{tg}\alpha-d_1)$ в силу (2.60) отрицательна, следовательно, выражение стоящее под логарифмом – возрастающая функция, причем $T_2(0)=0$.

Таким образом, значение функции $T_1=T_1(\delta)$ (2.64) для фиксированного $\delta\in(0,\alpha)$ есть время, за которое любое решение системы с матрицей A_1 перемещается из положения $\varphi=\alpha$ в положение $\varphi=\alpha-\delta$, а $T_2=T_2(\delta)$ (2.65) – это время, за которое любое решение системы с матрицей A_2 проходит обратный путь (перемещается из положение $\varphi=\alpha-\delta$ в положение $\varphi=\alpha$). При этом, как уже было отмечено ранее, из соотношений (2.62) и (2.63) следует, что решение с начальными условиями $\varphi(0)=\alpha$ или $\varphi(0)=\alpha-\delta$ на промежутках $[0,T_1(\delta)]$ или, соответственно, $[0,T_2(\delta)]$, двигается по фазовой плоскосоти строго в одном определенном направлении (по или против направления движения часовой стрелки). Также необходимо отметить, что из вида соотношений (2.64) и (2.65) следует, что если $\varphi(0)\in(0,\alpha)$, то $\varphi(\tau)\in(0,\alpha),\tau\in\mathbb{R}^+$.

Следовательно, если для некоторых чисел $k \in \mathbb{N}$ и $T_0 > 0$ положить $\Delta_k^1 \equiv (T_0, T_0+T_1(\delta)], \Delta_k^2 \equiv (T_0+T_1(\delta), T_0+T_1(\delta)+T_2(\delta)]$ на полуинтервале длины $T(\delta) \equiv T_1(\delta) + T_2(\delta)$ решение x системы A, удовлетворяющее услвоиям $x_1(T) = m_1^*$, $x_2(T) = m_2^*$, ровно один раз попадет в положение $\varphi = \alpha$ и этому (и только этому) моменту будет соответствовать нуль функции (x, m^*).

Тогда, раз функция $T = T(\delta)$ строго возрастает на интервале $(0, \alpha)$ от 0 до $+\infty$ (как сумма двух строго возрастающих функций, одна из которых возрастает на этом интервале от 0 до $+\infty$, а вторая при этом принимает нулевое значение в точке $\tau = 0$), то для фиксированного ранее числа $K \in \mathbb{R}^+$ найдется число $\delta^* \in (0, \alpha)$ такое, что

$$T(\delta^*) = \frac{\pi}{K}.$$

Данный факт следует из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции [21, с. 158].

Обозначим через T_1^* и T_2^* значения функций $T_1 = T_1(\delta)$ (2.64) и $T_2 = T_2(\delta)$ (2.65) в точке δ^* и вернемся к построению участков постоянства Δ_k. На первом шаге, в качестве промежутков Δ_1^1, Δ_1^2 возьмем промежутки $(0, T_1^*]$ и $(T_1^*, T_1^* + T_2^*]$. На втором шаге участками постоянства будут промежутки $\Delta_2^1 \equiv (T_1^*+T_2^*, 2{\cdot}T_1^*+T_2^*]$ и $\Delta_2^2 \equiv (2{\cdot}T_1^*+T_2^*, 2{\cdot}(T_1^*+T_2^*)]$. Обозначим общую длину всех промежутков постоянства построенных на шагах $1, ..., k-1$ через T, тогда на k-ом шаге отрезками постоянства будут $(T, T + T_1^*]$ и $(T + T_1^*, T + T_1^* + T_2^*]$. Очевидно, что заданная таким образом система A определена на $\mathbb{R}^+$.

Пусть теперь $\hat{x}$ – решение построенной системы A, удовлетворяющее начальным условиям $\hat{x}_1(0) = m_1^*$, $\hat{x}_2(0) = m_2^*$. Из построения системы следует, что на любом полуинтервале длины $T(\delta^*) = \pi/K$ это решение ровно один раз попадет в положение $\varphi = \alpha$ и функция $(\hat{x}, m^*)$ ровно один раз обращается в 0 на этом промежутке, при этом из условия $\dot{\varphi}(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+$, согласно лемме 6 следует, что в эти моменты обнуления производная $(\dot{\hat{x}}, m)$ не равна 0. . Тогда из леммы 5 сразу следует нужное равенство

$$\nu_m(\hat{x}) = K,$$

что и требовалось доказать.

2.2. Случай, когда вектор m^* лежит во второй четверти фазовой плоскости (когда $m_1^* > 0$, $m_2^* < 0$, и, как следствие, $\alpha < 0$) рассматривается аналогично п. 2.1. В качестве матриц A_1 и A_2 в этом случае необходимо взять

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & -d \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (2.61) примет вид

$$\dot{\varphi}(\tau) = \begin{cases} -\sin^2\varphi, & \tau \in \Delta_k^1, \\ -\sin^2\varphi(\tau) + d\cos^2\varphi(\tau) - d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau), & \tau \in \Delta_k^2, \end{cases}$$

и при этом для тех $\tau \in \Delta_k^1$, что $\varphi(\tau) \in (\pi/2, \pi)$, угловая скорость ненулевого решения системы A, будет удовлетворять соотношению

$$\dot{\varphi}(\tau) = -\sin^2\varphi(\tau) < 0, \quad \tau \in \Delta_k^1, \tag{2.66}$$

а если $\tau \in \Delta_k^2$ таково, что $\alpha < \varphi(\tau) < 0$ (откуда в т.ч. следует, что $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi(\tau) < 0$), то для таких τ еще и соотношению

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}(\tau) = -\sin^2\varphi(\tau) + d\cos^2\varphi(\tau) - d\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau) = \\ = -\cos^2\varphi(\tau)(\operatorname{tg}\varphi(\tau) + (d - \sqrt{d^2+4d})/2)(\operatorname{tg}\varphi(\tau) + (d + \sqrt{d^2+4d})/2) > 0. \end{gathered} \tag{2.67}$$

Второй множитель в последнем выражении всегда отрицательный, а последний в силу оценки (2.60) и неравенства $|\operatorname{tg}\varphi(\tau)| < |\operatorname{tg}\alpha|$, всегда положительный, что и доказывает справедливость последнего соотношения.

Для $\delta \in (0, -\alpha)$ выражение (2.64) примет вид:

$$T_1(\delta) = \int\limits_{\alpha+\delta}^{\alpha} \frac{d\varphi}{-\sin^2\varphi} = \int\limits_{\alpha+\delta}^{\alpha} \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi}{-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\delta} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\delta)},$$

а выражение (2.65) будет иметь вид:

$$T_2(\delta) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\delta} \frac{d\varphi}{-\sin^2\varphi + d\cos^2\varphi - d\sin\varphi\cos\varphi} = \int\limits_{\alpha+\delta}^{\alpha} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi + d\operatorname{tg}\varphi - d} =$$

$$= \int\limits_{\alpha+\delta}^{\alpha} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{(\operatorname{tg}\varphi - d_1)(\operatorname{tg}\varphi - d_2)} = \frac{1}{d_1 - d_2}\left(\ln\left(\frac{(\operatorname{tg}\alpha - d_1)(\operatorname{tg}(\alpha+\delta) - d_2)}{(\operatorname{tg}(\alpha+\delta) - d_1)(\operatorname{tg}\alpha - d_2)}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{d_1 - d_2}\left(\ln\left(\frac{(\operatorname{tg}\alpha - d_1)}{(\operatorname{tg}\alpha - d_2)} \cdot \left(1 + \frac{d_1 - d_2}{\operatorname{tg}(\alpha+\delta) - d_1}\right)\right)\right), \tag{2.68}$$

где уже $d_1 \equiv (-d + \sqrt{d^2 + 4d})/2$, а $d_2 \equiv (-d - \sqrt{d^2 + 4d})/2$. Функция $T = T(\delta) \equiv T_1(\delta) + T_2(\delta)$ при этом все так же будет строго возрастать на интервале $(0, -\alpha)$ от 0 до $+\infty$. Действительно, функция $T_1 = T_1(\delta)$ строго возрастает от 0 до $+\infty$, когда δ пробегает значения от 0 до $-\alpha$. Функция $T_2 = T_2(\delta)$ также строго возрастает на этом промежутке (причем $T_2(0) = 0$), т.к. дробь $(\operatorname{tg}\alpha - d_1)/(\operatorname{tg}\alpha - d_2)$ отрицательна, а дробь $(d_1 - d_2)(\operatorname{tg}(\alpha + \delta) - d_1)$ убывает на интервале $(0, -\alpha)$. Следовательно, по аналогии с п.2.1. найдется число δ^* такое, что

$$T(\delta^*) = \frac{\pi}{K},$$

и в качестве T_1^*, T_2^* при построении участков Δ_k^1, Δ_k^2 необходимо взять $T_1(\delta^*)$ и $T_2(\delta^*)$. Тогда, если решение $\hat{x}$ удовлетворяет начальным условиям $\hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = \operatorname{arctg}(\alpha + \delta^*)$ (т.е. если $\varphi(0) = \alpha + \delta$), то из построения системы A будет следовать, что на любом полуинтервале длины $T(\delta^*) = \pi/K$ это решение ровно один раз попадет в положение $\varphi = \alpha$ и функция $(\hat{x}, m^*)$ ровно один раз обратится в 0 на этом промежутке. Тогда из леммы 5 также сразу будет следовать нужное равенство

$$\nu_m(\hat{x}) = K,$$

что и требовалось доказать.

3. Перейдем, наконец, к рассмотрению последнего случая, когда $m \equiv (m_1, m_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0}$. Из определения множества $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0}$ следует, что координаты вектора m связаны соотношением

$$\left|\frac{m_2}{m_1}\right| = \frac{2}{d + \sqrt{d^2 + 4d}} \equiv d_*.$$

3.1. Заметим, что решение $\hat{x}$ системы A, построенной в п. 1., совершая полуоборот относительно любого вектора $m^* \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^+}$, ровно один раз пересекает любой из векторов, ортогональных вектору $m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0}$, откуда следует включение

$$[0, \lambda(d)] \subset \operatorname{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{E}_d^2), \quad m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0}.$$

3.2. Предположим, что координаты вектора m имеют разные знаки (т.е. связаны соотношением $m_1 + d_*^{-1} m_2 = 0$). Рассмотим тогда систему $A \in \mathcal{E}_d^2$ с постоянными коэффициентами, матрица которой имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & d \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что одним из решений данной системы будет вектор-функция $x = (e^{d_*^{-1}t}; d_*^{-1}e^{d_*^{-1}t})^{\text{т}}$.

Таким образом, выражение $(x(t), m)$ при всех t будет равно 0:

$$(x(t), m) = e^{d_*^{-1}t}m_1 + d_*^{-1}e^{d_*^{-1}t}m_2 = e^{d_*^{-1}t}(m_1 + d_*^{-1}m_2) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

откуда следует, что

$$\{\infty\} \in \mathrm{Sp}_{\nu_m}(\mathcal{E}_d^2), \quad m \in \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d^0}.$$

Если же координаты вектора m одного знака (связаны соотношением $m_1 - d_*^{-1}m_2 = 0$), то в качестве матрицы A необходимо взять

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & -d \end{pmatrix}.$$

В таком случае, одним из решений данной системы будет вектор-функция $x = (e^{-d_*^{-1}t}; -d_*^{-1}e^{-d_*^{-1}t})^{\text{т}}$, и аналогично получим

$$(x(t), m) = e^{-d_*^{-1}t}m_1 - d_*^{-1}e^{-d_*^{-1}t}m_2 = e^{-d_*^{-1}t}(m_1 - d_*^{-1}m_2) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

3.3. Докажем теперь, что других значений на множестве решений $S_*(\mathcal{E}_d^2)$ величина ν_m принять не может. Пусть x – ненулевое решение системы $A \in \mathcal{E}_d^2$, для которого в некоторой момент $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено соотношение

$$(x(t), m) = 0. \tag{2.69}$$

Пусть $\varphi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))^{\text{т}}$, сонаправленному с вектором $x(\tau) = (x_1(t), x_2(t))^{\text{т}}$ в момент t. Тогда из последнего равенства вытекает соотношение

$$|\operatorname{tg}\varphi(t)| = \left|\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right| = \left|\frac{m_1}{m_2}\right| = d_*^{-1}.$$

В таком случае из оценки (2.42) следует, что угловая скорость решения x в момент t не может принимать положительных значений. При этом обнулиться угловая скорость в этот момент может в том и только в том случае, если коэффициенты матрицы A в момент t равны $a_1(t) = d$, $a_2(t) = d$.

Таким образом, если для всех моментов времени $t \in \mathbb{R}^+$, для которых выполнено равенство (2.69), коэффициенты системы A одновременно не равны d, то угловая скорость решения x в эти моменты будет отрицательной и вектор x в эти моменты будет осуществлять движение по фазовой плоскости строго в одном определенном направлении и следующий момент обнуления функции (x, m) произойдет только в том случае, если вектор x совершит полуоборот на фазовой плоскости. В таком случае, полностью повторяя рассуждения п. 1. доказательства, получим включение

$$\nu_m(x) \in [0, \lambda(d)].$$

В противном случае (если все же найдется момент $t \in \mathbb{R}^+$, для которого выполнено равенство (2.69) и $a_1(t) = a_2(t) = d$) получим, что $\dot{\varphi}(t) = 0$, откуда согласно лемме 6 будет следовать, что

$$(\dot{x}, m) = 0$$

и

$$\nu_m(x) = \infty.$$

Таким образом, других значений, кроме указанных в пп. 3.1 и 3.2, величина ν_m принять не может.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любого числа $d > 0$ и любого из показателей $\varkappa = \sigma, \zeta, \eta, \rho$ справедливо соотношение*

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(\mathcal{E}_d^2) = [0, \lambda(d)].$$

Доказательство.

В статье [64] было доказано, что для любой системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ нижние показатели блуждаемости и колеблемости связаны следующим соотношением:

$$\check{\nu}(x) = \check{\sigma}(x) = \check{\zeta}(x) = \check{\eta}(x) = \check{\rho}(x), \quad x \in S_*(A).$$

Также из текста доказательства данной статьи непосредственно вытекает справедливость данного соотношения и для верхних показателей:

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\sigma}(x) = \hat{\zeta}(x) = \hat{\eta}(x) = \hat{\rho}(x), \quad x \in S_*(A).$$

Тогда, т.к. вектор $m \equiv (0, 1)^{\mathrm{т}}$ принадлежит множеству $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_d}$ и $\nu_m(x) \equiv \nu(x)$, то будет справедливо соотношение

$$\mathrm{Sp}_\nu(\mathcal{E}_d^2) = [0, \lambda(d)],$$

откуда и вытекает нужное утверждение.

Следствие доказано.

Глава 3

Оценка спектра характеристик блуждаемости линейного уравнения

Данная глава посвящена исследованию спектра скорости блуждания, который может быть получен на множестве решений одной системы, отвечающей линейному уравнению второго порядка, а также рассмотрению вопроса о близости характеристик буждаемости к нулю для решений систем, отвечающих линейным уравнениям произвольного порядка, при условии малости коэффициентов этого уравнения.

3.1 Спектр скорости блуждания одной системы, отвечающей линейному уравнению второго порядка

В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножества систем

$$\mathcal{E}_d^n \equiv \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix} \right\}$$

с ограниченными коэффициентами $|a_i(t)| \leq d,\ \tau \in \mathbb{R}^+,\ 1 \leq i \leq n$, отвечающих *уравнениям* n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

превращающимся в систему A стандартным переходом от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}).$$

В дальнейшем, говоря о том, что для какого-либо из показателей $\varkappa = \mu, \rho, \eta, \nu_m, \sigma, \zeta$ справедливо то или иное утверждение, будем подразумевать, что данное утверждение справедливо одновременно для обоих показателей $\check{\varkappa}$ и $\hat{\varkappa}$.

Теорема 8. *Существует отрезок $K \subset \mathbb{R}^+$ такой, что для любого числа $d > 1/2$ и некоторой системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ справедливо включение*

$$K \subset \mathrm{Sp}_\mu(A).$$

Доказательство.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

фундаментальной системой решений которого будут функции

$$y_1(t) \equiv t(|\sin t| + 1), \qquad y_2(t) \equiv t(|\cos t| + 1), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.2}$$

Коэффициенты $a_1 = a_1(t), a_2 = a_2(t)$ данного уравнения определяются равенством

$$\begin{vmatrix} t(|\sin t| + 1) & t(|\cos t| + 1) & y \\ (|\sin t| + 1) + t\cos t \cdot \mathrm{sgn}(\sin t) & (|\cos t| + 1) - t\sin t \cdot \mathrm{sgn}(\cos t) & \dot{y} \\ 2\cos t \cdot \mathrm{sgn}(\sin t) - t|\sin t| & -2\sin t \cdot \mathrm{sgn}(\cos t) - t|\cos t| & \ddot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

и, соответственно, имеют вид

$$a_1(t) = -a_0^{-1}(t) \cdot \big(t^2(|\cos t| - |\sin t|) + \\ +2t(1 + |\sin t| + |\cos t|) \cdot \mathrm{sgn}(\cos t) \cdot \mathrm{sgn}(\sin t)\big)$$

$$a_2(t) = -a_0^{-1}(t) \cdot ((t^2 + |\sin t| + |\cos t| + 2) \cdot \mathrm{sgn}(\cos t) \cdot \mathrm{sgn}(\sin t) + \\ + t(|\cos t| - |\sin t|)), \tag{3.3}$$

где

$$a_0(t) \equiv t^2\,(1 + |\sin t| + |\cos t|) \cdot \mathrm{sgn}(\cos t) \cdot \mathrm{sgn}(\sin t).$$

Из вида функций a_1, a_2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ с некоторго момента $T = T(\varepsilon)$ они не превосходят по модулю число $1/2+\varepsilon$. Действительно, это следует из соотношений

$$\lim_{t\to+\infty}|a_1(t)| = \lim_{t\to+\infty}\frac{|\cos t| - |\sin t|}{1+|\cos t|+|\sin t|} \le \frac{1}{2},$$
$$\lim_{t\to+\infty}|a_2(t)| = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+|\cos t|+|\sin t|} \le \frac{1}{2},$$

которые, в свою очередь, для любого $t \in \mathbb{R}$ вытекают из оценок $|\cos t| + |\sin t| \ge \cos^2 t + \sin^2 t \ge 1$ и $|\cos t| - |\sin t| \le 1$.

Тогда, зафиксировав произвольное число $d > 1/2$ ($d = 1/2 + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$), выберем число $T = T(\varepsilon)$ так, чтобы функции a_1, a_2 (3.3) были ограничены по модулю числом d при всех $\tau \ge T$, и рассмотрим уравнение $\hat{a} \in \mathcal{E}_d^2$, коэффициенты которого на интервале $(0, T)$ тождествено раны 0, а при всех остальных $t \in \mathbb{R}^+$ совпадают с коэффициентами a_1, a_2 (3.3). Уравнение $\hat{a}$, очевидно, принадлежит множеству $\mathcal{E}_d^2$.

Любое решение уравнения $\hat{a}$ представимо в виде

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где функции y_1, y_2 на промежутке $[T, +\infty)$ определяются соотношениями (3.2). В дальнейшем, для доказательства теоремы ограничимся рассмотрением семейства решений, у которых $c_1 = 1$, а $c_2 = c$, $c \in \mathbb{R}^+$, и для числа $c \in \mathbb{R}^+$ соответствующее ему решение будем обозначать через y_c.

Пусть теперь в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функция $x_c(t) \equiv \psi y_c(t) \equiv (y_c(t), \dot{y}_c(t))$, $c \in \mathbb{R}^+$, сонаправлена с вектором $(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{\dot{y}_c(t)}{y_c(t)} = \frac{t\cos t\cdot\operatorname{sgn}(\sin t) - ct\sin t\cdot\operatorname{sgn}(\cos t)}{t(|\sin t|+1) + ct(|\cos t|+1)} +$$

$$+\frac{(|\sin t|+1) + c(|\cos t|+1)}{t(|\sin t|+1)+ct(|\cos t|+1)} = \frac{\cos t\cdot\operatorname{sgn}(\sin t) - c\sin t\cdot\operatorname{sgn}(\cos t)}{(|\sin t|+1)+c(|\cos t|+1)} + \frac{1}{t} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\tilde{c}\cos(t+\alpha)}{\tilde{c}\sin(t+\alpha)+(c+1)} + 1/t, & \sin t \ge 0, \cos t \ge 0 \\ \frac{\tilde{c}\cos(t-\alpha)}{\tilde{c}\sin(t-\alpha)+(c+1)} + 1/t, & \sin t \ge 0, \cos t \le 0 \\ \frac{-\tilde{c}\cos(t+\alpha)}{-\tilde{c}\sin(t+\alpha)+(c+1)} + 1/t, & \sin t \le 0, \cos t \le 0 \\ \frac{-\tilde{c}\cos(t-\alpha)}{-\tilde{c}\cos(t-\alpha)+(c+1)} + 1/t, & \sin t \le 0, \cos t \ge 0 \end{cases}, \tag{3.4}$$

где $\tilde{c} = \sqrt{1+c^2}$, $\cos\alpha = 1/(\sqrt{1+c^2})$, $\sin\alpha = c/(\sqrt{1+c^2})$.

Таким образом, из соотношения (3.4) следует, что при $n \to +\infty, n \in \mathbb{N}$, на промежутках $[2\pi n, 2\pi n + \pi/2]$ и $[2\pi n + \pi, 2\pi n + 3\pi/2]$ функция $\operatorname{tg} \varphi(t)$ строго убывает, пробегая при этом значения от

$$\frac{\tilde{c}\cos\alpha}{\tilde{c}\sin\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi n} = \frac{1}{2c+1} + \frac{1}{2\pi n}$$

$$\text{и} \quad \frac{\tilde{c}\cos\alpha}{\tilde{c}\sin\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+1)} = \frac{1}{2c+1} + \frac{1}{2\pi(n+1)}$$

до

$$-\frac{\tilde{c}\sin\alpha}{\tilde{c}\cos\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+1/2)} = -\frac{c}{c+2} + \frac{1}{2\pi(n+1/2)}$$

$$\text{и} \qquad -\frac{\tilde{c}\sin\alpha}{\tilde{c}\cos\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+3/2)} = -\frac{c}{c+2} + \frac{1}{2\pi(n+3/2)},$$

соответственно, а на промежутках $[2\pi n + \pi/2, 2\pi n + \pi]$ и $[2\pi n + 3\pi/2, 2\pi n + 2\pi]$ строго убывает, пробегая значения от

$$\frac{\tilde{c}\sin\alpha}{\tilde{c}\cos\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+1/2)} = \frac{c}{c+2} + \frac{1}{2\pi(n+1/2)}$$

$$\text{и} \quad \frac{\tilde{c}\sin\alpha}{\tilde{c}\cos\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+3/2)} = \frac{c}{c+2} + \frac{1}{2\pi(n+3/2)}$$

до

$$-\frac{\tilde{c}\cos\alpha}{\tilde{c}\sin\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+1)} = -\frac{1}{2c+1} + \frac{1}{2\pi(n+1)}$$

$$\text{и} \quad -\frac{\tilde{c}\cos\alpha}{\tilde{c}\sin\alpha + c + 1} + \frac{1}{2\pi(n+2)} = -\frac{1}{2c+1} + \frac{1}{2\pi(n+2)},$$

соответственно.

Тогда, с учетом равенства $\operatorname{arctg} p + \operatorname{arctg} q = \operatorname{arctg}((p+q)/(1-pq)), pq < 1$, при $n \to +\infty,\ n \in \mathbb{N}$, для $c \in [1, +\infty]$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+2\pi} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+2\pi} |\dot{\varphi}(\tau)| d\tau =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi/2} + \int\limits_{2\pi n+\pi/2}^{2\pi n+\pi} + \int\limits_{2\pi n+\pi}^{2\pi n+3\pi/2} + \int\limits_{2\pi n+3\pi/2}^{2\pi n+2\pi} \right) - \dot{\varphi}(\tau) d\tau =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\varphi(\tau) \Big|_{2\pi n+\pi/2}^{2\pi n} + \varphi(\tau) \Big|_{2\pi n+\pi}^{2\pi n+\pi/2} + \varphi(\tau) \Big|_{2\pi n+3\pi/2}^{2\pi n+\pi} + \varphi(\tau) \Big|_{2\pi n+2\pi}^{2\pi n+3\pi/2} \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2c+1}+\frac{1}{2\pi n}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{c}{c+2}+\frac{1}{2\pi(n+1/2)}\right)\right)+\\
&+\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{c+2}+\frac{1}{2\pi(n+1/2)}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2c+1}+\frac{1}{2\pi(n+1)}\right)\right)+\\
&+\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2c+1}+\frac{1}{2\pi(n+1)}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{c}{c+2}+\frac{1}{2\pi(n+3/2)}\right)\right)+\\
&+\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{c+2}+\frac{1}{2\pi(n+3/2)}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2c+1}+\frac{1}{2\pi(n+2)}\right)\right)=\\
&= \frac{2}{2\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2c+1}+\operatorname{arctg}\frac{c}{c+2}\right)+\frac{2}{2\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{c+2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2c+1}\right)=\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{c+2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2c+1}\right)=\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{c}{c+2}+\frac{1}{2c+1}\right):\left(1-\frac{c}{c+2}\cdot\frac{1}{2c+1}\right)\right)=\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2(c^2+c+1)}{(2c+1)(c+2)}\cdot\frac{(c+2)(2c+1)}{2(c^2+2c+1)}\right)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1-\frac{c}{(c+1)^2}\right)\equiv I(c).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Полученное выражение (обозначаемое далее как $I = I(c)$) зависит только от параметра c и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$, принимая все значения из отрезка

$$
K \equiv \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3/4), 1/2\right]. \tag{3.6}
$$

Также из соотношения (3.5) вытекает равенство

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi n} |\dot{e}_{x_c}(\tau)|d\tau = I(c). \tag{3.7}
$$

Действительно, из соотношения (3.5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_1, что для любого натурального $n \geq N_1$ будет выполнено равенство

$$
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+2\pi} |\dot{e}_{x_c}(\tau)|d\tau - I(c) = \varepsilon_n, \qquad |\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{3}.
$$

Также для любого $c \in [1, +\infty)$ найдется такое натуральное число N_2, для которого будут выполнены оценки

$$\frac{1}{2\pi N_2} \int\limits_0^{2\pi N_1} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \frac{N_1 \cdot (I(c) + \varepsilon)}{N_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для любого $n > N_2$ будет справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int\limits_0^{2\pi n + 2\pi} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau - I(c) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi n} \int\limits_0^{2\pi N_1} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau + \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=N_1}^{n} \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k + 2\pi} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau - I(c) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\pi n} \int\limits_0^{2\pi N_1} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=N_1}^{n} (I(c) + \varepsilon_n) - I(c) \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + |\varepsilon_n| + \left| \frac{N_1 \cdot (I(c) + \varepsilon)}{N_2} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

из которой и вытекает равенство (3.7).

Таким образом, будет справедливо соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \gamma(x_c, t) \ = \ \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau \ = \ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi n} \int\limits_0^{2\pi n} |\dot{e}_{x_c}(\tau)| d\tau \ = \ I(c),$$

из которого следует, что для любого значения β из отрезка K (3.6) найдется решение y_c уравнения $\hat{a}$, а вместе с ним и решение $x_c \equiv \psi y_c$ соответствующей системы $\hat{A} \in \mathcal{E}_d^2$, для которого будет выполнено равенство

$$\mu(x_c) = \beta.$$

Следовательно, получено требуемое включение

$$K \subset \mathrm{Sp}_\mu(A),$$

где K – отрезок (3.6).

Теорема доказана.

3.2 Достаточное условие близости характеристик блуждаемости к нулю систем, отвечающим линейным уравнениям

Теорема 9. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, а также любого из показателей $\varkappa = \eta, \rho$ существует такое число $d > 0$, что для любой системы $A \in \mathcal{E}_d^n$ справедливо неравенство*

$$\varkappa(x) < \varepsilon, \quad x \in S_*(A).$$

Доказательство.

1. В работе [66] доказано, что для любого решения x системы $A \in \mathcal{M}^n$ справедлива оценка

$$\mu(x) \le ||A|| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}^+, |u|=1} |A(t)u|.$$

При этом для любого решения x системы $A \in \mathcal{M}^n$ и любого преобразования $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ преобразованное решение $y \equiv Lx$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y} = LA(t)L^{-1}y, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

и, следовательно, справедлива аналогичная оценка

$$\mu(Lx) \equiv \mu(y) \le ||LAL^{-1}|| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}^+, |u|=1} |LA(t)L^{-1}u|. \tag{3.8}$$

Кроме того, норма вектора $LA(t)L^{-1}u$, в каждый момент $t \in \mathbb{R}^+$ может быть оценена [33, с. 171]

$$|LA(t)L^{-1}u| \le ||LA(t)L^{-1}||_E \cdot |u| = ||LA(t)L^{-1}||_E \equiv \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2(t)},$$

где $||\cdot||_E$ – норма Фробениуса, а $b_{ij} = b_{ij}(t)$ – ij-ый элемент матрицы $LA(t)L^{-1}$.

Таким образом, для любого решения x системы $A \in \mathcal{M}^n$ и любого преобразования $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\mu(Lx) \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}_{ij}^2}, \quad \tilde{b}_{ij} = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |b_{ij}(t)|. \tag{3.9}$$

2. Рассмотрим преобразование

$$L = diag\{k_1, k_2, ..., k_{n-1}, 1\}, \quad k_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.10}$$

Обратным к L будет проеобразование

$$L^{-1} = diag\{k_1^{-1}, k_2^{-1}, ..., k_{n-1}^{-1}, 1\},$$

тогда матрица LA примет вид

$$LA = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{n-1} \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix},$$

а матрица LAL^{-1} примет вид

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \cdot k_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{n-1} \cdot k_n^{-1} \\ -k_1^{-1} \cdot a_n & -k_2^{-1} \cdot a_{n-1} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

3. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и, положив $k_i = \frac{\varepsilon^{n-i}}{n^{n-i}}, i = 1, \ldots, n-1$, в преобразовании (3.10), а также взяв $d = \frac{\varepsilon^{n+1}}{n^n}$ и рассматривая произвольную систему A из множества $\mathcal{E}_d^n$, получим оценку для элементов b_{ij} матрицы LAL^{-1} (3.11):

$$|b_{ij}(t)| \leq k_{i-1} \cdot k_i^{-1} = \frac{\varepsilon^{n-i}}{n^{n-i}} \cdot \frac{n^{n-i-1}}{\varepsilon^{n-i-1}} = \frac{\varepsilon}{n}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$|b_{ij}(t)| \leq k_j^{-1} \cdot |a_{n+1-j}(t)| = \frac{n^{n-i}}{\varepsilon^{n-i}} \cdot \frac{\varepsilon^{n+1}}{n^n} \leq \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда соотношение (3.9) примет вид:

$$\mu(Lx) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}_{ij}^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n^2}} \leq \sqrt{n^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{n^2}} = \varepsilon, \quad x \in S_*(A).$$

Из последней оценки сразу же следует необходимая цепочка неравенств

$$\eta(x) \leq \rho(x) \equiv \inf_{L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \mu(Lx) \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 10. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $d > 0$, что для любой системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ справедливо неравенство*

$$\mu(x) < \varepsilon, \quad x \in S_*(A).$$

Доказательство.

Зафикисируем число $0 < \varepsilon < 1$ и подберем такое число $d = d(\varepsilon)$, чтобы для любого ненулевого решения x системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ выполнялась требуемая оценка

$$\mu(x) < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Пусть x – произвольное ненулевое решение некоторой системы $A \in \mathcal{E}_d^2$, а $\varphi(\tau)$ – угол, соответствующий единичному вектору $(\cos\varphi(\tau), \sin\varphi(\tau))^{\text{т}}$, сонаправленному с вектором $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau))^{\text{т}}$ в момент τ. Под угловой скоростью решения x в дальнейшем будет пониматься производная $\dot{\varphi}(\tau)$ функции $\varphi(\tau)$. Известно [64, с. 24], что угловая скорость любого решения $x \in S_*(A)$ системы $A \in \mathcal{E}_d^2$ в каждый момент времени $\tau \in \mathbb{R}^+$ удовлетвореяет уравнению

$$\dot{\varphi}(\tau) = -\sin^2\varphi(\tau) - a_2(\tau)\cos^2\varphi(\tau) - a_1(\tau)\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau). \tag{3.13}$$

Для произвольных числа $n \in \mathbb{Z}$ и угла $\alpha \in (0, \pi)$ через Φ_n^α будем обозначать

$$\Phi_n^\alpha \equiv [2\pi\cdot n + \alpha,\ 2\pi\cdot n + \pi - \alpha]\ \cup [2\pi\cdot n + \pi + \alpha,\ 2\pi\cdot(n+1) - \alpha],$$

а через Δ_n^α и $\tilde{\Delta}_n^\alpha$ будем обозначать

$$\Delta_n^\alpha \equiv \{\tau \in \mathbb{R}^+ |\ \varphi(\tau) \in \Phi_n^\alpha\}, \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta}_n^\alpha \equiv \mathbb{R}^+ \setminus \Delta_n^\alpha.$$

Тогда если для зафиксированного ранее ε и некоторого $n \in \mathbb{Z}$ момент времени τ принадлежит множеству Δ_n^ε, то в этот момент будут справедливы оценки

$$\dot{\varphi}(\tau) \le -\sin^2\varphi(\tau) + d\cdot\cos^2\varphi(\tau) + d\cdot|\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)| \le -\sin^2\varepsilon + 2d,$$

и

$$|\dot{\varphi}(\tau)| \ge |\sin^2\varphi(\tau)| - |d\cdot\cos^2\varphi(\tau) + d\cdot\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)| \ge \sin^2\varepsilon - 2d.$$

Таким образом, если $-\sin^2\varepsilon + 2d < 0$, то из первой оценки следует, что решение x системы $A \in \mathcal{E}_d^n$ в секторах $[2\pi\cdot n + \varepsilon,\ 2\pi\cdot n + \pi - \varepsilon]$ и

$[2\pi\cdot n+\pi+\varepsilon,\ 2\pi\cdot(n+1)-\varepsilon]$, $n\in\mathbb{Z}$, фазовой плоскости движется строго в направлении уменьшения угла, попадая в эти секторы исключительно через их правые границы. Из второй оценки при этом вытекает, что время движения вектора из правой границы в левую указанных секторов не превосходит

$$\frac{\pi-2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon-2d}<\frac{\pi}{\sin^2\varepsilon-2d}. \tag{3.14}$$

Если же для некоторого $n\in\mathbb{Z}$ момент времени τ принадлежит множеству $\tilde{\Delta}_n^{\sqrt{d}}$ (которое, в свою очередь, является подмножеством множества $\tilde{\Delta}_n^{\varepsilon}$, когда $-\sin^2\varepsilon+2d<0$), то в этот момент справедлива оценка

$$|\dot{\varphi}(\tau)|\le|\sin^2\varphi(\tau)|+d\cdot\cos^2\varphi(\tau)+d\cdot|\sin\varphi(\tau)\cos\varphi(\tau)|<\sin^2\sqrt{d}+2d.$$

Также заметим, что если $\sqrt{d}\le\varepsilon$, то в этот момент τ имеем:

$$|\dot{\varphi}(\tau)|<\sin^2\varepsilon+2d. \tag{3.15}$$

Таким образом, время, которое решение x затратит на переход от левой границы секторов $[2\pi\cdot n-\sqrt{d},\ 2\pi\cdot n+\sqrt{d}]$ и $[2\pi\cdot n+\pi-\sqrt{d},\ 2\pi\cdot(n+1)+\sqrt{d}]$ к их правой границе при любом $n\in\mathbb{Z}$ будет не меньше, чем

$$\frac{2\sqrt{d}}{\sin^2\sqrt{d}+2d}>\frac{2\sqrt{d}}{(\sqrt{d})^2+2d}=\frac{2}{3\sqrt{d}}. \tag{3.16}$$

Тогда для фиксированного ранее $0<\varepsilon<1$ возьмем $d=(\sin^6\varepsilon)/2$ и предположим, что решение x совершило полной оборот на фазовой плоскости из положения $\varphi=2\pi\cdot n$ в положение $\varphi=2\pi\cdot(n-1)$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}$. Отметим, что при таком выборе d выполнено $-\sin^2\varepsilon+2d<0$ (и, следовательно, $\tilde{\Delta}_n^{\sqrt{d}}\subseteq\tilde{\Delta}_n^{\varepsilon}$), и перейдем к оценке отношения $\operatorname{mes}\Delta_n^{\varepsilon}/\operatorname{mes}\tilde{\Delta}_n^{\varepsilon}$, с учетом оценок (3.14) и (3.16) получим:

$$\begin{gathered}\frac{\operatorname{mes}\Delta_n^{\varepsilon}}{\operatorname{mes}\tilde{\Delta}_n^{\varepsilon}}<\frac{\operatorname{mes}\Delta_n^{\varepsilon}}{\operatorname{mes}\tilde{\Delta}_n^{\sqrt{d}}}<\frac{\pi}{\sin^2\varepsilon-2d}:\frac{2}{3\sqrt{d}}=\\ =\frac{3\pi\sin^3\varepsilon}{2(\sin^2\varepsilon-2\sin^6\varepsilon)}=\frac{3\pi\sin\varepsilon}{2-4\sin^4\varepsilon}<3\pi\cdot\varepsilon.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Также для заданного $\varepsilon>0$ найдется число $T>0$, для которого при любом $n\in\mathbb{N}$ и $t>T$ справедлива оценка

$$\frac{\operatorname{mes}\Delta_n^{\varepsilon}}{t}\le\varepsilon. \tag{3.18}$$

Это следует из того факта, что величина $\operatorname{mes}\Delta_n^\varepsilon$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $d = (\sin^6\varepsilon)/2$ ограничена сверху числом

$$2 \cdot \frac{\pi}{\sin^2\varepsilon - \sin^6\varepsilon},$$

что, в свою очередь, вытекает из (3.14).

Тогда перейдем к оценке величины $\gamma(x,t)$ при $t > T$. Пусть к моменту $t > T$ решение x совершило ровно $m \in \mathbb{N}$ полных оборотов на фазовой плоскости. В таком случае без ограничения общности можно считать, что промежуток $(0,t]$ полностью содержит ровно m пар промежутков $\Delta_{k_1}^\varepsilon \cup \tilde{\Delta}_{k_1}^\varepsilon, \ldots, \Delta_{k_m}^\varepsilon \cup \tilde{\Delta}_{k_m}^\varepsilon$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ (чего можно добиться за счет преобразования поворота L, такого, что $\mu(Lx) = \mu(x)$). При этом найдется такое число $k_{m+1} \in \mathbb{Z}$, что промежуток $\Delta \equiv (0,t] \backslash (\Delta_{k_1}^\varepsilon \cup \tilde{\Delta}_{k_1}^\varepsilon \cup \cdots \cup \Delta_{k_m}^\varepsilon \cup \tilde{\Delta}_{k_m}^\varepsilon)$ целиком содержится в множестве$\Delta_{k_{m+1}}^\varepsilon \cup \tilde{\Delta}_{k_{m+1}}^\varepsilon$. Оценим величину $\frac{1}{t}\gamma(x,t)$, получим:

$$\frac{1}{t}\gamma(x,t) \equiv \frac{1}{t}\int_0^t |\dot{\varphi}(\tau)|\,d\tau \leq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^m \left(\int_{\Delta_{k_i}} + \int_{\tilde{\Delta}_{k_i}} |\dot{\varphi}(\tau)|\,d\tau\right) + \frac{1}{t}\int_\Delta |\dot{\varphi}(\tau)|\,d\tau \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^m (1+2d)\cdot\operatorname{mes}\Delta_{k_i}}{t} + \frac{\sum_{i=1}^m (\sin^2\varepsilon + 2d)\cdot\operatorname{mes}\tilde{\Delta}_{k_i}}{t} +$$

$$+ \frac{1}{t}\cdot(1+2d)\cdot\operatorname{mes}\Delta_{k_{i+1}} + \frac{1}{t}\cdot(\sin^2\varepsilon + 2d)\cdot\operatorname{mes}\tilde{\Delta}_{k_{i+1}} \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^m (1+2d)\cdot 3\pi\cdot\varepsilon\cdot\operatorname{mes}\tilde{\Delta}_{k_i}}{\sum_{i=1}^m \operatorname{mes}\tilde{\Delta}_{k_i}} + 3\sin^2\varepsilon + (1+2d)\cdot\varepsilon + (\sin^2\varepsilon + 2d).$$

Оценка первого слагаемого в последнем переходе следует из неравенства (3.17), и, следовательно, первое слагаемое оценивается числом $(1+2d)\cdot 3\pi\varepsilon$, второе слагаемое очевидно не превосходит число $3\varepsilon^2$, оценка третьего слагаемого, в свою очередь, следует из (3.18), а оценка четвертого слагаемого в первом переходе вытекает из соотношения (3.15).

Таким образом, при $t > T$ справедлива оценка

$$\frac{1}{t}\gamma(x,t) \leq (1+\sin^6\varepsilon)\cdot(3\pi\cdot\varepsilon) + 3\varepsilon^2 + (1+\sin^6\varepsilon)\cdot\varepsilon + (\sin^2\varepsilon + \sin^6\varepsilon) \leq (6\pi+7)\cdot\varepsilon$$

откуда и следует требуемое неравенство (3.12).

Теорема доказана.

Заключение

В работе проведено исследование спектров характеристик колеблемости и блуждаемости для диагональных и треугольных линейных однородных дифференциальных систем (с ограниченными коэффициентами), а также для систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям (с ограниченными коэффициентами).

Установлены точные границы спектров всех характеристик колеблемости, а также показателей блуждаемости и блуждания на множестве решений линейных однородных уравнений второго порядка, а также диагональных и треугольных линейных систем произвольной размерности. Установлены точные границы спектра скорости блуждания на множестве решений диагональных линейных систем произвольной размерности. Доказано существование линейной системы, отвечающей линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка, спектр скорости блуждания которой содержит отрезок числовой прямой. Установлена близость показателей блуждания и блуждаемости к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

Интересным остается вопрос о нахождении точных границ спектра: скорости блуждания на множестве решений треугольных линейных систем произвольной размерности, всех характерстик колеблемости и блуждаемости на множестве решений линейных однородных уравнений третьего и более высоких порядков. Кроме того, неизученным остается вид спектра верхнего показателя блуждаемости на множестве решений произвольной двумерной линейной треугольной системы. Также открытым остается вопрос о близости скорости блуждания к нулю для решений систем, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям произвольного порядка с малыми коэффициентами.

Литература

[1] Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 25. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2005. С. 3–17.

[2] Асташова И.В. О поведении на бесконечности решений квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2009. **45**. № 11. С. 1671.

[3] Асташова И.В. О задаче Н.А. Изобова для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. № 6. С. 898–899.

[4] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

[5] Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. **22**. №11. С. 1843–1853.

[6] Барабанов Е.А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №12. С. 1592–1600.

[7] Бурлаков Д.С., Сергеев И. Н. Замечательные равенства, связывающие колеблемость и блуждаемость решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 899.

[8] Быков В.В. Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. **51**. Вып. 5. С. 186.

[9] Быков В.В. Классификация Бэра σ-показателей Изобова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №11. С. 1574.

[10] Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[11] Былов Б.Ф. Почти приводимые системы. Автореф. дисс... докт. физ.-мат. наук. Мн.: АН БССР, 1966.

[12] Былов Б.Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1970. **6**. №2. С. 243–252.

[13] Ветохин А.Н. О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. **31**. №5. С. 909–910.

[14] Ветохин А.Н. Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова в равномерной топологии // Дифференц. уравнения. 1999. **35**. №11. С. 1578–1579.

[15] Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. **91**. №5. С. 999–1002.

[16] Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. **42**. №2. С. 207–222.

[17] Глызин Д.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения. 2005. **41**. №2. С. 268–273.

[18] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Матем. сб. 205:6 (2014). С. 21—86.

[19] Дементьев Ю.И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научный вестник МГТУ ГА. Серия Математика. 1999. №16. С. 5–10.

[20] Дементьев Ю.И. Подвижность показателей Ляпунова под действием бесконечно малых возмущений // Дифференц. уравнения. 2001. **37**. №11. С. 1575.

[21] Зорич В.А. Математический анализ I. М.: ФАЗИС, 1997.

[22] Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. **1**. №4. С. 469–477.

[23] Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т.12. С. 71–146.

[24] Изобов Н.А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. 1976. **12**. №11. С. 1954–1966.

[25] Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. **26**. №1. С. 5–8.

[26] Изобов Н.А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Матем. заметки. 1984. **35**. № 2. С. 189–199.

[27] Изобов Н.А. О кнезеровских решениях // Дифференц. уравнения. 1985. **21**. № 4. С. 581–588.

[28] Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №12. С. 2034–2055.

[29] Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[30] Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1962. **144**. Ш. С. 33–36.

[31] Кигурадзе И.Т. Об условиях колеблемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. **10**. № 8. С. 11387–1398. и № 9. С. 1586–1594.

[32] Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. № 6. С. 207–219.

[33] Колатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

[34] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} - p(x)y = 0$ // Тр. Моск. матем. об-ва. 1961. 10. С. 419–436.

[35] Кондратьев В.А. О колеблемости решений дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков // Докл. АН СССР. 1968. **118**.№ 1. С. 22–24.69.

[36] Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969. **24**. №2. С. 43–96.

[37] Левин А.Ю. Избранные труды. Ярославль, Рыбинск: Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2010.

[38] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных систем // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №11. С. 1670–1671.

[39] Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 907.

[40] Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. **25**. №2. С. 209–212.

[41] Макаров Е.К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. 1996. **32**. №12. С. 1710–1711.

[42] Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. **10**. №1. С. 99–104.

[43] Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. № 10. С. 1775–1784.

[44] Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. №8. С. 1408–1416.

[45] Миценко В.В. Блуждаемость решений двумерных треугольных и диагональных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. №6. С. 907–908.

[46] Миценко В.В. О блуждаемости решений двумерных диагональных и треугольных дифференциальных систем // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2014. С. 221–241.

[47] Миценко В.В. О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных диференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №6. С. 851–852.

[48] Миценко В.В. Спектр верхнего показателя блуждаемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №10. С. 1347–1352.

[49] Mitsenko V.V. Spectrum of the upper wanderability exponent of solutions of two-dimensional triangular differential systems // Differential Equations. 2014. **50**. №10. C. 1336–1341.

[50] Миценко В.В. О спектрах характеристик блуждаемости линейных дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения. 2015. **51**. №6. С. 822–824.

[51] Mitsenko V.V. Wandering of Solutions of Two-Dimensional Diagonal and Triangular Systems of Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. 2015. **210**. №3. C. 251–263.

[52] Морозов О.И. Критерий полуустойчивости сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной линейной системы // Дифференц. уравнения. 1990. **26**. №12. С. 2181.

[53] Морозов О.И. Достаточные условия полуустойчивости сверху показателей Ляпунова неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1991. **27**. №11. С. 2012.

[54] Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. №2. С. 226–235.

[55] Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. **43**. №8. С. 1048–1054.

[56] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. **31**. №6. С. 925–931.

[57] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. **19**. №2. С. 253–259.

[58] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.

[59] Сергеев И.Н. Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. **40**. №11. С. 1576.

[60] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. **44**. №11. С. 1577.

[61] Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. **45**. №6. С. 908.

[62] Сергеев И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №6. С. 902.

[63] Сергеев И.Н. Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. **46**. №11. С. 1667–1668.

[64] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

[65] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных уравнений малого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. №6. С. 906–907.

[66] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия матем. 2012. Т.76. №1. С. 149–172.

[67] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. 2013. **204**. №1. С. 119–138.

[68] Сергеев И.Н. Неупорядоченность верхних характеристик полной колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**. №6. С. 852–853.

[69] Фурсов А.С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. №11. С. 2011–2012.

[70] Фурсов А.С. Размерность пространства решений медленного роста линейной неоднородной системы // Успехи матем. наук. 1994. **49**. Вып. 4. С. 143.

[71] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[72] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[73] Чантурия Т.А. Интегральные признаки колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. № 3. С. 470–482.

[74] Чантурия Т.А. О колеблемости решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида // Дифференц. уравнения. 1986. **22**. № 11. С. 1905–1915.