ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

ВЕТОХИН Александр Николаевич

МЕТОД НЕОРДИНАРНЫХ СЕМЕЙСТВ В ТЕОРИИ БЭРОВСКИХ КЛАССОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук
профессор И. Н. Сергеев

Москва 2016

Содержание

Введение

§ 1 Постановки задач и обзор литературы

Одним из основных направлений качественной теории дифференциальных уравнений является изучение характеристических показателей, которые первоначально были введены А.М. Ляпуновым [46] в связи с исследованием устойчивости по первому приближению.

Развитие теории линейных систем привело к созданию целого ряда новых показателей: все они или определяются непосредственно через показатели Ляпунова, или являются их модификациями, а потому также могут, в широком смысле, называться *ляпуновскими* (во избежание путаницы для каждого из них, как правило, предусмотрено и свое собственное название). Библиография по теории показателей Ляпунова в обзорах [31, 38] и книгах [17, 39] насчитывает более тысячи наименований.

I. Вопросы непрерывности ляпуновских показателей. Важное место в теории показателей Ляпунова занимает вопрос о характере их зависимости от коэффициентов системы.

Как показал О. Перрон [90] показатели Ляпунова *не являются непрерывными* функционалами на пространстве линейных однородных систем с *равномерной топологией* (на положительной полуоси времени). Он же предложил и первые достаточные условия на линейную систему, при которых она является точкой непрерывности показателей Ляпунова [91].

Впоследствии необходимые и достаточные условия, при которых линейная система является точкой полунепрерывности сверху показателей Ляпунова, были полностью изучены: сначала для старшего показателя — Р.Э. Виноградом [25] и В.М. Миллионщиковым [50], а затем и для любого показателя — И.Н. Сергеевым [73].

Критерии полунепрерывности снизу к настоящему времени гораздо менее изучены. Так, в работе [25] приведено достаточное условие полунепрерывности снизу младшего показателя Ляпунова, а в работе [50] доказана его необходимость. Далее, Н.А. Изобов [32] получил критерий полунепрерывности снизу старшего показателя Ляпунова в двумерном случае, а затем И.Н. Сергеев [74] указал критерий полунепрерывности снизу каждого из показателей Ляпунова в трехмерном случае.

В работах [18, 19, 49] найден критерий непрерывности одновременно всех показателей Ляпунова линейной системы. Кроме того, к задачам о нахождении достижимых границ подвижности этих показателей тесно примыкают работы о различных видах управления показателями Ляпунова [69], а также другими характеристиками асимптотического поведения решений линейных систем [70].

Рассматривая множества линейных систем, возникающих как системы в вариациях по начальным значениям (или параметрам) вдоль решений нелинейных систем, и изучая их показатели Ляпунова или другие ляпуновские показатели, нередко приходится отказываться от топологии равномерной сходимости коэффициентов на полупрямой. Действительно, поскольку теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий (или параметров) обеспечивает близость решений лишь на любых заранее заданных компактах оси времени, то только такая близость и гарантируется для соответствующих этим решениям линейных систем в вариациях.

Таким образом, на пространстве линейных систем, наряду с топологией равномерной сходимости, приходится рассматривать и более слабую *компактно-открытую топологию* (т. е. топологию равномерной сходимости коэффициентов на каждом компакте положительной полуоси).

Несомненный интерес вызывает и самая общая ситуация, когда коэффициенты системы, непрерывные на полуоси времени, еще и непрерывно (возможно, равномерно по времени) зависят от параметра из некоторого метрического пространства. Тогда ляпуновские показатели такой системы (точнее, семейства систем) можно рассматривать как функционалы, определенные на этом метрическом пространстве, и ставить вопросы об их непрерывности или полунепрерывности по параметру, а также о типичности точек такой непрерывности или полунепрерывности.

Существует несколько, не эквивалентных друг другу, подходов к тому, какие свойства называть типичными, а какие — нет. В диссертации используется понятие типичности, введенное и изученное Р. Бэром [20, 87], а именно: свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру*, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ (т. е. множество, представимое в виде счетного пересечения открытых подмножеств).

II. Классификация Бэра ляпуновских показателей. В 1980–1983 гг. В.М. Миллионщиков в цикле своих работ открыл новое направление в качественной теории дифференциальных уравнений: он предложил для описания зависимости ляпуновских показателей от параметров использовать классификацию Бэра разрывных функций [20].

В частности, он установил [52], что для любого семейства линейных систем, непрерывно зависящих от параметра из метрического пространства, показатели Ляпунова, рассматриваемые как функции на этом метрическом пространстве, принадлежат второму классу Бэра, т. е. представимы в виде двух поточечных пределов от непрерывных функций (более того, для вычисления значений этих функций достаточно иметь информацию о системе лишь на некотором конечном участке временной полуоси, своем для каждой функции [15, 76]).

В дальнейшем В.М. Миллионщиковым и его учениками были получены оценки сверху для номеров бэровских классов целого ряда ляпуновских показателей [3], [54]–[57], [59]–[61], [67], [79], [81]–[85]. В результате возник естественный вопрос о неулучшаемости полученных результатов, т. е. об адекватных оценках для тех же номеров бэровских классов снизу.

Первой работой в указанном направлении была, по всей видимости, работа М.И. Рахимбердиева [71, 1982 г.], в которой с помощью довольно тонких построений установлено, что показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра на пространстве линейных однородных систем с равномерной (а тем более и с компактно-открытой) топологией.

В дальнейшем, с помощью аналогичных построений, другими авторами была доказана непринадлежность первому классу Бэра еще некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с равномерной топологией [67] или с компактно-открытой топологией [1, 2, 4]. Отметим, что для каждой характеристики приходилось изобретать свой способ доказательства непринадлежности первому классу Бэра.

Поэтому возникла необходимость в получении универсальных и сравнительно просто проверяемых условий, позволяющих доказывать непринадлежность показателей первому классу Бэра. Методы же доказательства непринадлежности показателей второму, третьему и т. д. классам Бэра некоторое время оставались неизвестными.

Функционалы, представимые в виде нескольких поточечных пределов от непрерывных функций, встречаются не только в теории показателей Ляпунова, но и в теории динамических систем. Одним из таких функционалов является *топологическая энтропия* [86] динамической системы, представляющая собой скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с произвольно хорошей, но конечной точностью. Можно сказать, что топологическая энтропия описывает одним числом полную экспоненциальную сложность орбитальной структуры.

Изучению свойств топологической энтропии, рассматриваемой как функционал на множествах отображений компактных метрических пространств и гладких многообразий с различными топологиями, посвящено немало работ (см., например, книгу [41] или обзор [42]). В частности [41], имеет место полунепрерывность снизу топологической энтропии на пространстве непрерывных отображений отрезка, наделенном равномерной топологией, причем в общем случае этого нельзя утверждать.

III. Приложения теории Бэра. Опишем несколько возможных приложений теории Бэра к теории показателей Ляпунова.

Во-первых, для записи ляпуновских показателей обычно используется несколько предельных переходов. Поэтому возникает вопрос, можно ли уменьшить количество пределов в формуле для данного показателя. На этот вопрос помогает ответить бэровская теория разрывных функций, причем как раз в той части, которая связана с оценкой номера класса Бэра данного показателя снизу.

Во-вторых, в процессе развития теории дифференциальных уравнений уже введено в рассмотрение целое множество ляпуновских показателей, а со временем продолжают появляться все новые и новые. Поэтому не праздным оказывается вопрос, не совпадает ли новая характеристика с какой-либо из введенных ранее. Ответ на этот вопрос иногда может дать теория классов Бэра.

Например, минимальные полунепрерывные сверху мажоранты показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с равномерной топологией принадлежат первому классу Бэра (на том же пространстве, в силу определения), а сами показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра, следовательно, эти характеристики асимптотического поведения решений заведомо различны.

В-третьих, если две функции принадлежат разным классам Бэра, то существует хотя бы одна точка, в которой эти функции принимают разные значения. Эту информацию можно использовать для доказательства существования объектов с определенными свойствами: скажем, из приведенного выше примера непосредственно вытекает существование линейной системы, которая не является точкой полунепрерывности сверху показателей Ляпунова (ни в равномерной, ни тем более в компактно-открытой топологии).

В-четвертых, принадлежность того или иного показателя конкретному классу Бэра позволяет гарантировать наличие у него определенных свойств. Например, если показатель принадлежит первому классу Бэра, то, в силу теоремы Бэра о функциях первого класса, в типичной по Бэру точке он непрерывен. Если показатель представим в виде поточечного предела от неубывающей (невозрастающей) последовательности функций первого класса Бэра, то в типичной по Бэру точке он полунепрерывен снизу (сверху). Если показатель принадлежит конечному (причем любому) классу Бэра, то найдется такое всюду плотное множество типа G_δ, что его сужение на это множество есть непрерывная функция.

IV. Основные результаты диссертации. Остановимся подробнее на основных результатах автора, включенных в настоящую диссертацию.

Цель работы. Центральное место в предлагаемом исследовании занимает вопрос о принадлежности или непринадлежности конкретных ляпуновских характеристик тому или иному классу Бэра, причем основной акцент в диссертации сделан именно на доказательстве непринадлежности.

Благодаря проведенному исследованию, удалось получить окончательные ответы на целый ряд вопросов, поставленных В.М. Миллионщиковым на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ имени М.В. Ломоносова в 1991–1995 гг. (когда семинаром руководили профессора В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов).

Метод диссертации. Основным методом работы является построение *специальных семейств* линейных систем, непрерывно (возможно, равномерно по независимой переменной) зависящих от параметра, с *неординарным*, иногда даже экзотическим, или «уродливым», поведением ляпуновских показателей. С помощью таких семейств автору удалось установить, в частности, непринадлежность тех или иных показателей первому, второму или третьему классам Бэра на пространстве линейных систем с непрерывными и ограниченными на полуоси коэффициентами, наделенном компактно-открытой или равномерной топологией.

Мажоранты показателей Ляпунова и другие показатели. В.М. Миллионщиков в одном из своих докладов [58, 1991 г.] поставил задачу о нахождении минимального бэровского класса, которому принадлежит минимальная полунепрерывная сверху мажоранта k-го показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией (в равномерной топологии она, будучи полунепрерывной функцией, принадлежит первому классу Бэра). Позднее И.Н. Сергеев установил, что она принадлежит второму классу Бэра [78, 2002 г.].

В первой главе диссертации выделены простые условия, при выполнении которых ляпуновский показатель не принадлежит первому классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [106]. С их помощью во второй главе диссертации доказано, что минимальная полунепрерывная сверху мажоранта k-го показателя Ляпунова не принадлежит первому классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [106], а также является наименьшей функцией первого класса Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией, оценивающей k-й показатель Ляпунова сверху [102].

Кроме того, в первой главе диссертации получены простые условия, при выполнении которых ляпуновский показатель не принадлежит первому классу Бэра на пространстве линейных систем с равномерной топологией [106]. С их помощью в третьей главе доказана непринадлежность первому классу Бэра на этом пространстве δ-показателей [106], индекса условной экспоненциальной устойчивости решений линейной системы [108, 115], конструктивного показателя Изобова [108, 112] и сигма-показателя Изобова [107].

В то же время для любого семейства линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства, в диссертации установлено, что все эти показатели, рассматриваемые как функционалы на этом метрическом пространстве, принадлежат второму классу Бэра, а в случае полноты этого пространства все они, за исключением индекса условной экспоненциальной устойчивости, в типичной по Бэру точке полунепрерывны сверху.

Миноранты показателей Ляпунова и другие показатели. В своем докладе [62, 1993 г.] В.М. Миллионщиков поставил задачу о нахождении минимального класса Бэра, которому принадлежит максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией (принадлежащая в равномерной топологии опять же первому классу Бэра). В.В. Быков и Е.Е. Салов установили, что она принадлежит третьему классу Бэра [16, 2003 г.] (ранее это было установлено И.Н. Сергеевым для трехмерного случая [75, 1995 г.]).

Используя результат Р. Бэра [88, 1909 г.], автор в первой главе диссертации установил необходимые условия принадлежности функции второму классу Бэра на произвольном метрическом пространстве. С помощью этих условий во второй главе диссертации доказано, что максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го показателя Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией не принадлежит второму классу Бэра [105].

Также в третьей главе установлено, что размерность векторного подпространства, определяемого k-м показателем Ляпунова, на пространстве линейных систем, наделенном компактно-открытой или равномерной топологией, принадлежит третьему классу Бэра и не принадлежит второму [108, 113].

Отметим, что доказательство непринадлежности минимальной полунепрерывной сверху мажоранты k-го показателя Ляпунова первому классу Бэра и непринадлежности максимальной полунепрерывной снизу миноранты k-го показателя Ляпунова второму классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией составляют содержание кандидатской диссертации автора [21, 1997 г.].

В докладе [62, 1993 г.] В.М. Миллионщиков, в предположении, что коэффициенты линейной системы непрерывно зависят от параметра из некоторого полного метрического пространства, поставил вопрос о типичности точек полунепрерывности снизу миноранты k-го показателя Ляпунова, рассматриваемой как функция этого параметра.

Во второй главе диссертации построено такое семейство линейных систем, непрерывно зависящее от вещественного параметра, что множество точек полунепрерывности целого ряда ляпуновских показателей, рассматриваемых как функционалы от этого параметра, пусто [96], [99]. В частности, для этого семейства оказалось пустым (а значит, нетипичным) и множество точек полунепрерывности снизу максимальной полунепрерывной снизу миноранты k-го показателя Ляпунова [99].

В случае не менее чем двумерного фазового пространства во второй главе диссертации также построено такое семейство линейных систем, равномерно непрерывно по времени зависящих от вещественного параметра, что множество точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова, рассматриваемых как функционалы от этого параметра, пусто [93]. Отметим, что В.М. Миллионщиковым [53] была доказана типичность по Бэру полунепрерывности сверху показателей Ляпунова семейства линейных систем, непрерывно зависящих от параметра из полного метрического пространства.

Н.А. Изобов в работе [34, 1982 г.] ввел старший экспоненциальный показатель линейной системы, который является достижимой границей подвижности вверх старшего показателя Ляпунова при экспоненциально убывающих возмущениях исходной системы. В.Г. Агафонов по заданию В.М. Миллионщикова установил, что этот показатель не принадлежит первому классу Бэра [2, 1993 г.] и принадлежит третьему классу Бэра [3, 1994 г.] на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией.

В третьей же главе диссертации доказано, что старший экспоненциальный показатель не принадлежит на том же пространстве и второму классу Бэра [97].

Вспомогательные показатели Миллионщикова. Для исследования стохастической устойчивости показателей Ляпунова линейных систем В.М. Миллионщиков ввел верхние и нижние вспомогательные показатели [51, 1970 г.], старшие из которых совпадают с верхним центральным показателем, а младшие с нижним центральным показателем, введенными Р.Э. Виноградом [25, 1957 г.]. Тогда же В.М. Миллионщиков предположил, что промежуточный верхний и соответствующий ему нижний вспомогательный показатели совпадают. В дальнейшем О.Г. Илларионовой была построена трехмерная система, для которой промежуточные вспомогательные показатели не совпадают [40, 1988 г.].

В.Г. Феклин по заданию В.М. Миллионщикова установил [79, 1992 г.], что нижние вспомогательные показатели принадлежат третьему классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией (заметим, что старший вспомогательный показатель, совпадая с минимальной полунепрерывной сверху мажорантой старшего показателя Ляпунова, принадлежит даже второму классу Бэра). Затем К.Е. Ширяев установил [81, 1995 г.], что вспомогательные показатели не принадлежат первому классу Бэра на том же пространстве.

В третьей главе диссертации установлено, что все нижние вспомогательные показатели, кроме старшего, не принадлежат и второму классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [104].

Используя результат Л.В. Келдыш [43, 45, 1945 г.], автор в первой главе диссертации получил необходимые условия принадлежности функции третьему классу Бэра (они могут быть обобщены и на произвольный конечный класс Бэра) на произвольном метрическом пространстве. С помощью этих условий в третьей главе диссертации установлена непринадлежность промежуточных верхних вспомогательных показателей третьему классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией [104].

Отсюда, кстати попутно, вытекает, что никакие промежуточные верхние и нижние вспомогательные показатели не могут полностью совпадать друг с другом.

Правильные по Ляпунову системы. Один из важнейших классов линейных систем образуют правильные системы, которые были введены А.М. Ляпуновым в связи с исследованием экспоненциальной устойчивости неавтономной системы по первому приближению. Рассматривая семейства линейных систем, в которые параметр входит как множитель при матрице коэффициентов системы, а сама эта система правильна по Ляпунову, Ю.С. Богданов в 1980 г. поставил вопрос о пустоте множества (в дальнейшем будем называть его множеством неправильности данного семейства) тех значений параметра, при которых соответствующая система является неправильной.

Н.А. Изобов и Е.К. Макаров в работах [36, 48, 1988 г.] построили такие семейства систем, линейно зависящие от вещественного параметра, множества неправильности которых могут оказаться следующими: множеством значений произвольной бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии, не содержащей нуля и единицы; объединением значений таких прогрессий, замыкание которого счетно; дополнение до $\mathbb{R}$ такой арифметической прогрессии; множество $\mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$.

В четвертой главе диссертации доказано, что для любого семейства систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства, множество неправильности является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ [114, 1995 г.], а также существуют такие полное метрическое пространство и семейство систем, непрерывно (равномерно по времени, при не менее чем двумерном фазовом пространстве) зависящих от параметра, что множество неправильности не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ [103, 2000 г.].

В дальнейшем Е.А. Барабанов в работе [7, 2009 г.], в частности, доказал, что множество вещественной прямой тогда и только тогда есть множество неправильности некоторого семейства линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра, когда оно является множеством типа $G_{\delta\sigma}$.

В.М. Миллионщиков предложил два естественных расширения подмножества правильных линейных систем [63, 64, 65, 1993 г.]. Первое — это подмножество линейных систем, у которых показатели Ляпунова инвариантны относительно экспоненциально убывающих возмущений. Второе — подмножество линейных систем, которые обобщенными ляпуновскими преобразованиями приводимы к диагональным системам с упорядоченными диагоналями. В докладе В.М. Миллионщикова [66] анонсировано включение второго множества в первое и поставлен вопрос о его строгости.

В четвертой главе диссертации доказано, что второе множество включено в первое и установлено, что это включение строгое [100].

Топологическая энтропия. В книге [41, стр. 501] установлено, что топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из [0, 1] в [0, 1] с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией, а следовательно, принадлежит первому классу Бэра. В работе [89, 1973 г.] установлено, что в случае произвольного компактного риманова многообразия топологическая энтропия не является полунепрерывной ни снизу, ни сверху даже на пространстве диффеоморфизмов с C^1-топологией, и поставлен вопрос о классе Бэра, которому принадлежит топологическая энтропия.

В пятой главе диссертации доказано, что топологическая энтропия на пространстве непрерывных отображений компактного метрического пространства с равномерной топологией принадлежит второму бэровскому классу [109] (ранее это было доказано для липшицевых отображений в [98] и для произвольного равностепенно непрерывного семейства непрерывных отображений в [92]), и установлено, что, вообще говоря, топологическая энтропия не является функцией первого бэровского класса даже на пространстве липшицевых отображений с равномерной топологией [98].

Кроме того, в пятой главе доказано, что для любого семейства непрерывных отображений, непрерывно зависящих от параметра из полного метрического пространства, в типичной по Бэру точке топологическая энтропия, рассматриваемая как функция на этом метрическом пространстве, полунепрерывна снизу [109], и предъявлен пример такого семейства, для которого утверждение о полунепрерывности снизу топологической энтропии нельзя заменить непрерывностью [94].

V. Теоретическая и практическая ценность. Исследование имеет теоретический характер. Его результаты и методы могут быть полезны специалистам, занимающимся качественной теорией дифференциальных уравнений, в частности, теорией показателей Ляпунова и ее приложениями к вопросам устойчивости.

VI. Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

- в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений — руководители проф. $\boxed{\text{В. А. Кондратьев}}$, проф. $\boxed{\text{В. М. Миллионщиков}}$, проф. Н. Х. Розов, проф. И. Н. Сергеев, проф. И. В. Асташова, проф. А. В. Боровских, сделано более 30 докладов по теме диссертации в 1995–2015 гг.;

- в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова на семинаре «Проблемы нелинейной динамики: качественный анализ и управление» — руководитель академик РАН С. В. Емельянов, (неоднократно, 2013–2014 гг.);

- в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова на семинаре по динамическим системам — руководители академик РАН $\boxed{\text{Д. В. Аносов}}$, проф. А. М. Степин (неоднократно, 2013–2015 гг.);

- в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова на семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов» — руководитель академик РАН В. А. Садовничий (2014 г.);

- в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова на семинаре «Гамильтоновы системы и статистическая механика» — руководители академик РАН В. В. Козлов, чл.-корр. РАН Д. В. Трещев, проф. С. В. Болотин (2015 г.);

- в МЭСИ на межвузовском семинаре «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (МЭСИ – МГУ им. М. В. Ломоносова — МГТУ им. Н. Э. Баумана) — руководители проф. И. В. Асташова, проф. В. А. Никишкин, проф. А. В. Филиновский (неоднократно, 2013–2014 гг.);

- на совместном научном семинаре Киевского Политехнического института и механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Методы нелинейного анализа в задачах математики и механики». Москва, 2012 г.;

- на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И. Г. Петровского. Москва, 2007 г.;

- на международной конференции «Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii». Donetsk, 2013 г.;

- на второй международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 2013 г.;

- на международной научной конференции «Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова», посвященной 75-летию со дня рождения В. М. Миллионщикова. Москва, 2014 г.;

- на всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 2015 г.

- на международной математической конференции «6 Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (пленарный доклад). Республика Беларусь, Минск, 2015 г.

VII. Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 24 работах [92]–[115], из них 15 — в изданиях, рекомендованных ВАК [92]–[106].

VIII. Структура и объем диссертации. Текст диссертации состоит из введения и пяти глав, а также списка цитированной литературы. Общий объем работы составляет 181 страницу, библиография содержит 115 наименований.

§ 2 Формулировки основных результатов

В. М. Миллионщиков в работе [52] для любого $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ установил, что k-ый показатель Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной ограниченной оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, определяется формулой

$$\lambda_k(A) = \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t, 0)|_L\|,$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $X_A(t, 0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\overline{\lambda}_k(A)$ минимальную полунепрерывную сверху мажоранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\overline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\{B\colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B),$$

а через $\underline{\lambda}_k(A)$ максимальную полунепрерывную снизу миноранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\{B\colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{2}$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено по $t \in \mathbb{R}^+$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$. По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и отображению (2) образуем функции

$$\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot)), \tag{3}$$

$$\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)), \tag{4}$$

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{5}$$

Для полного метрического пространства $\mathfrak{M}$ В. М. Миллионщиковым было установлено, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ и каждого отображения (2) функция (3) в типичной по Бэру точке пространства $\mathfrak{M}$ полунепрерывна сверху [53]. Напомним, что свойство называется *типичным по Бэру*, если имеется всюду плотное множество типа G_δ, состоящее из точек, обладающих этим свойством. Естественно возникает вопрос о типичности полунепрерывности снизу функции (3).

Теорема I [96] (теорема IV §2 гл. II). *Для* $\mathfrak{M} \equiv [0, 1]$ *и любого* $n \geqslant 1$ *существует такое отображение (2), что для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *множество точек полунепрерывности снизу функций (3)–(5) пусто.*

Наложим на отображение (2) дополнительное ограничение

$$\lim_{\nu \to \mu} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(\nu, t) - A(\mu, t)\| = 0, \quad \mu \in \mathfrak{M}, \tag{6}$$

означающее его равномерную по $t \in \mathbb{R}^+$ непрерывность по μ. Для $\mathfrak{M} \equiv [0, 1]$ и $n \geqslant 2$, М. И. Рахимбердиев [71] построил такое отображение (2), удовлетворяющее условию (6), что функция (3) разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, при этом множество точек полунепрерывности снизу функции (3) является всюду плотным на $[0, 1]$. Естественно возникает вопрос о существовании такого отображения (2), удовлетворяющего свойству (6), что множество точек полунепрерывности снизу функции (3) пусто.

Теорема II [93] (теорема V §2 гл. II). *Для* $\mathfrak{M} \equiv [0, 1]$ *и любых* $n \geqslant 2$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *существует такое отображение (2), удовлетворяющее свойству (6), что множество точек полунепрерывности снизу функции (3) пусто.*

Изучим поведение функций (4), (5) с точки зрения бэровской классификации функций. Напомним, что функциями *нулевого* класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями *p-го класса* Бэра называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса Бэра.

Отметим, что из теоремы I и теоремы Бэра о функциях первого класса вытекает, что функции (3)–(5), вообще говоря, **не принадлежат** первому бэровскому классу.

Теорема III [105] (теорема VIII §4 гл. II). *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\,1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1,\ldots,n\}$ найдется отображение (2), для которого функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Н. А. Изобов в работе [34] ввел экспоненциальный показатель

$$\nabla(A) = \sup_{B\in K_0} \lambda_n(A+B),$$

который отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при непрерывных возмущениях системы (1), принадлежащих множеству

$$K_0 = \{B(\cdot) : \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|B(t)\| < 0\}.$$

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и отображению (2) образуем функцию

$$\mu \mapsto \nabla(A(\mu,\cdot)). \tag{7}$$

Изучим поведение функции (7) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема IV [97] (теорема XII §6 гл. III). *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\,1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (2), для которого функция (7) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

В. М. Миллионщиков в работе [51] ввел верхние вспомогательные показатели системы (1), определяемые формулами

$$\overline{\nu}_k(A) = \varlimsup_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT,(j-1)T), \quad k = 1,\ldots,n,$$

и нижние вспомогательные показатели —

$$\underline{\nu}_k(A) = \varliminf_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT,(j-1)T), \quad k = 1,\ldots,n,$$

где $\delta_k(t,\tau)$ — k-е сингулярное число оператора Коши $X_A(t,\tau)$ системы (1). По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и отображению (2) образуем функции

$$\mu \mapsto \overline{\nu}_k(A(\mu,\cdot)), \tag{8}$$

$$\mu \mapsto \underline{\nu}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{9}$$

Изучим поведение функций (8), (9) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема V [104] (теорема XIII §7 гл. III). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\, 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого* $n \geqslant 2$ *и каждого* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *найдется отображение (2), для которого функция (9) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Теорема VI [104] (теорема XIV §8 гл. III). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\, 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого* $n \geqslant 2$ *при каждом* $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ *найдется отображение (2), для которого функция (8) всюду разрывна и не принадлежит третьему классу Бэра, а при* $k = 1$ *— не принадлежит второму.*

Следуя работе Н. А. Изобова [36], для произвольного отображения (2) обозначим через W_n подмножество тех значений параметра $\mu \in \mathfrak{M}$, при которых система $\dot{x} = A(\mu, t)x$ неправильна по Ляпунову, т. е. удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A(\mu, \cdot) > \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\mu, \tau) d\,\tau.$$

Теорема VII [114] (теорема IV §3 гл. IV). *Для любого метрического пространства* $\mathfrak{M}$ *и каждого отображения (2), подмножество* W_n *является множеством типа* $G_{\delta\sigma}$ *в пространстве* $\mathfrak{M}$*.*

Теорема VIII [103] (теоремы V, VI §3 гл. IV). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\, 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого* $n \geqslant 1$ *найдется отображение (2) (а при* $n \geqslant 2$*, удовлетворяющее свойству (6)), для которого подмножество* W_n *не является множеством типа* $F_{\sigma\delta}$ *в пространстве* $\mathfrak{M}$*.*

В. М. Миллионщиков в работах [63, 64, 65] предложил два расширения множества правильных линейных систем. Первое EI_n множество систем вида (1) таких, что для всякой непрерывной оператор-функции $B \in K_0$ система $\dot{y} = (A(t) + B(t))y$ имеет те же показатели Ляпунова, что и система (1). Второе GROD_n множество систем вида (1), которые заменой переменных $x = Q_A(t)y$, где $Q_A : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая оператор-функция, удовлетворяющая условиям

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q_A(t)\| \leqslant 0, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q_A^{-1}(t)\| \leqslant 0,$$

приводимы к диагональным системам

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} p_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_n(t) \end{pmatrix} y$$

с упорядоченной диагональю

$$p_1(t) \leqslant \ldots \leqslant p_n(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

В докладе [66] анонсирована справедливость включения

$$\mathrm{GROD}_n \subset \mathrm{EI}_n \tag{10}$$

и поставлен вопрос о его строгости. В диссертации приведено доказательство включения (10) и установлена его строгость.

Теорема IX [100] (теорема IX §4 глава IV). *Пусть $n \geqslant 2$, тогда $GROD_n \neq EI_n$.*

Напомним определение топологической энтропии динамической системы [41, стр. 120]. Пусть X— компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$— непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \le i \le n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x, \varepsilon, n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x, y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ обозначает минимальное количество элементов (f, ε, n)-покрытия. Топологической энтропией динамической системы, порожденной непрерывным отображением f называется

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и непрерывному отображению

$$f : \mathfrak{M} \times X \to X, \tag{11}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f_\mu(\cdot)). \tag{12}$$

Изучим поведение функции (12) с точки зрения бэровской классификации функций.

Теорема X [109] (теоремы II, III §2 гл. V). *Для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (11) функция (12) принадлежит второму классу Бэра, а если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке функция (12) полунепрерывна снизу.*

Естественно возникает вопрос о существовании отображения (11), для которого функция (12) не принадлежит первому бэровскому классу. Для построения такого отображения в диссертации рассматривается компактное метрическое пространство $\mathcal{B}$ [41, стр. 61], которое состоит из последовательностей $\{\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \ldots) : \ \mu_k \in \{0,\, 1\}\}$ с метрикой

$$d_0(\mu,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k\colon \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Теорема XI [94] (теорема V §3 гл. V). *Пусть $\mathfrak{M} \equiv X \equiv \mathcal{B}$ тогда найдется отображение (11), являющееся гомеоморфизмом из X в X и удовлетворяющее условию Липшица при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, для которого функция (12) всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу.*

I Некоторые факты и результаты из бэровской классификации функций и теории линейных систем дифференциальных уравнений

§ 1 Лебеговские множества бэровских функций

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное метрическое пространство. Напомним, что функциями *нулевого* класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями *p-го класса* Бэра называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

Более тонкой классификацией разрывных функций является классификация функций при помощи их *лебеговских множеств* [80, стр. 223–224]. Пусть G, F — две системы подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, а f — отображение из $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{R}$. Если для любого $p \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathfrak{M} : f(x) > p\}$ принадлежит системе G, то скажем, что функция f принадлежит классу $(G, *)$; если множество $\{x \in \mathfrak{M} : f(x) \geqslant p\}$ принадлежит системе F, то функция f принадлежит классу $(*, F)$, если же $f \in (G, *) \bigcap (*, F)$, то скажем, что функция f принадлежит классу (G, F).

Рассмотрим ситуацию, когда G — система открытых подмножеств, а F — система замкнутых подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, G_δ — система подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, которые можно представить в виде пересечения счетного числа множеств из системы G, F_σ — система подмножеств метрического пространства $\mathfrak{M}$, которые можно представить в виде объединения счетного числа множеств из системы F и т. д. Тогда [80, стр. 236] класс непрерывных функций (G, F) совпадает с нулевым классом Бэра на $\mathfrak{M}$, класс *полунепрерывных снизу* функций $(G, *)$ — с классом функций, являющихся поточечными пределами неубывающих последовательностей непрерывных функций, класс *полунепрерывных сверху* функций $(*, F)$ — с классом функций, являющихся поточечными пределами невозрастающих последовательностей непрерывных функций, класс (F_σ, G_δ) — с первым классом Бэра на $\mathfrak{M}$. Аналогично [80, стр. 231], функции второго класса Бэра принадлежат классу $(G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta})$ и, возможно, какому-либо из классов $(F_\sigma, *)$, $(*, G_\delta)$ и т. д.

Доказательства формулируемых ниже утверждений не приводятся, поскольку близкие утверждения содержатся, например, в [44] или [80].

1. *Пусть λ — функционал p-го класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Тогда $\lambda\,|_E$ также является функционалом p-го класса Бэра, каково бы ни было подмножество $E \subset \mathfrak{M}$ [44, стр. 386].*

2. *Пусть отображение $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ метрических пространств $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}$ непрерывно, а функционал $\lambda\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра. Тогда функционал $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на $\mathfrak{B}$ [44, стр. 386].*

3. *Пусть функционал $\lambda\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра, а функция $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ первому классу. Тогда функционал $\delta(\lambda(\cdot))$ принадлежит $p+1$-му классу Бэра на $\mathfrak{M}$ [44, стр. 385].*

4. *Для того, чтобы характеристическая функция некоторого множества F была функцией второго (третьего) класса Бэра, необходимо и достаточно, чтобы F было множеством типа $G_{\delta\sigma}$ и $F_{\sigma\delta}$ (типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ и $G_{\delta\sigma\delta}$) [44, стр. 382].*

5. *Если функционал λ принадлежит первому, второму или третьему бэровскому классу, то для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}$ множество $\lambda^{-1}(F)$ является множеством типа G_δ, $F_{\sigma\delta}$ или $G_{\delta\sigma\delta}$ соответственно [44, стр. 382].*

6. *Пусть $Q_1, Q_2, \ldots$ — всюду плотные подмножества типа G_δ в полном метрическом пространстве, тогда $\bigcap\limits_i Q_i$ также является всюду плотным подмножеством типа G_δ [44, стр. 428].*

7. *Если функционалы λ_1 и λ_2 принадлежат p-му классу Бэра, то функционалы $\max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ принадлежат тому же классу Бэра [80, стр. 224].*

8. *Если функционал λ полунепрерывен сверху, то существует такая последовательность непрерывных функционалов $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$, что*

$$\lambda = \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m$$

[80, стр. 237].

Множество $\mathcal{B}$ последовательностей $\{\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \ldots) : \mu_k \in \{0, 1\}\}$, наделенное метрикой

$$d_0(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k \colon \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu \end{cases}$$

образует компактное метрическое пространство [5, стр. 154].

9. *Пространство $\mathcal{B}$ гомеоморфно множеству Кантора на отрезке* $[0, 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой числовой прямой [41, стр. 61].*

Построим метрическое пространство $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ [5, стр. 154] следующим образом: точками пространства $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m, \ldots)$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется формулой

$$d(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ \frac{1}{\min\{k \colon \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

10. *Пространство $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке* $[0, 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой числовой прямой [5, стр. 155].*

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейное пространство M_n систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

где $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная оператор-функция. Обозначим через M_n^u метрическое пространство, точками которого являются системы вида (1) (или просто оператор-функции, которыми эти системы определяются), с метрикой

$$\varrho(A, B) = \sup_{t \in [0,\infty)} \|A(t) - B(t)\|, \tag{2}$$

которая определяет топологию равномерной сходимости коэффициентов на $\mathbb{R}^+$. Наделим пространство M_n системой полунорм

$$\rho_k(A, B) = \sup_{t \in [0,k]} \|A(t) - B(t)\|, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{3}$$

которая определяет на пространстве M_n компактно-открытую топологию. Получившееся топологическое пространство, обозначим через M_n^c. Отметим, что топологическое пространство M_n^c можно превратить в полное метрическое пространство [44, стр. 221]. Заметим, что, хотя и метрика (2), и система полунорм (3) зависят от нормы $\|\cdot\|$, которая определена в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, но топологии, задаваемые ими, не зависят от этой нормы. В дальнейшем, для определенности, будем считать, что норма в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ определена следующей формулой

$$\|A\| = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(Ax, Ax)}, \quad (x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, т. е. любое открытое подмножество в M_n^c является открытым в M_n^u, то

11. *Из принадлежности функции p-му классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u; если же функция не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u, то она не принадлежит этому классу на M_n^c.*

§ 2 Теоремы Р. Бэра, Л. В. Келдыш и следствия из них

Напомним, что свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру*, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ, т. е. множество, представимое в виде счетного пересечения открытых подмножеств.

Р. Бэр установил, в случае полного метрического пространства $\mathfrak{M}$, необходимое условие принадлежности функций первому классу Бэра.

Теорема I [80, стр. 241–242]. *Если функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра, то в типичной по Бэру точке он непрерывен.*

Выведем несколько следствий из теоремы I для некоторых функций второго класса Бэра.

Лемма 1 [6]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство. Тогда любой функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, представимый в виде поточечного предела невозрастающей последовательности функций первого класса Бэра, в типичной по Бэру точке полунепрерывен сверху.*

Доказательство. Поскольку функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ представим в виде поточечного предела невозрастающей последовательности функций первого класса Бэра

$$\lambda(\mu) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\mu), \quad \lambda_1(\mu) \geqslant \lambda_2(\mu) \geqslant \dots ,$$

то, в силу теоремы I, множество D_n точек непрерывности каждой функции λ_n является всюду плотным множеством типа G_δ. Пересечение всех D_n снова является всюду плотным множеством типа G_δ (см. п. 6 § 1 гл. I), каждая точка которого является точкой непрерывности всех функционалов λ_n. Действительно, пусть $\mu_0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ и $\varepsilon > 0$. При достаточно большом n окажется $\lambda_n(\mu_0) < \lambda(\mu_0) + \varepsilon$. Зафиксируем такое n, найдем $\mathcal{O}(\mu_0)$ окрестность точки μ_0 такую, что для всякого $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ будет $\lambda_n(\mu) < \lambda(\mu_0) + \varepsilon$. Так как $\lambda(\mu) \leqslant \lambda_n(\mu)$, то для $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ окажется $\lambda(\mu) < \lambda(\mu_0) + \varepsilon$, откуда и вытекает утверждение леммы 1.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство. Тогда любой функционал $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, представимый в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра, в типичной по Бэру точке полунепрерывен снизу.*

Установим несколько необходимых условий принадлежности функций 1-му, 2-му и 3-му классу Бэра.

Лемма 3. *Пусть λ — произвольный функционал на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если λ принадлежит первому классу Бэра, то для любой* *непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B} \to \mathfrak{M}$ и всяких непересекающихся всюду плотных подмножеств P_1, P_2, содержащихся в $\mathcal{B}$, пересечение замыканий множеств $\lambda(\varphi(P_1))$ и $\lambda(\varphi(P_2))$ непусто.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B} \to \mathfrak{M}$, что пересечение замыканий указанных в лемме множеств пусто. Пусть Z_1 замыкание первого из этих множества, а Z_2 — замыкание второго из них. Следовательно, для любой точки $\mu_0 \in \mathcal{B}$ и любых двух последовательностей $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \mu_0,$$

верно неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\varphi(\nu_n)) \neq \lim_{n\to\infty} \lambda(\varphi(\xi_n)).$$

Следовательно, каждая точка $\mu_0 \in \mathcal{B}$ является точкой разрыва функции $\lambda(\varphi(\cdot))$. С другой стороны, функция $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}$, а следовательно, в силу теоремы I, в $\mathcal{B}$ найдется точка непрерывности функции $\lambda(\varphi(\cdot))$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Для любого натурального числа q обозначим через P_q множество тех последовательностей из $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, у которых все члены, кроме, быть может, конечного числа, больше q. Обозначим через $\mathbf{E}$ пересечение всех множеств P_q, т. е. множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности.

Р. Бэр доказал [88], что характеристическая функция множества $\mathbf{E}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Используя этот результат, докажем следующую лемму (необходимое условие принадлежности функционала второму классу Бэра).

Лемма 4 [105]. *Пусть λ — произвольный функционал на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если λ принадлежит второму классу Бэра, то для любой непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$ пересечение замыканий множеств $\lambda(\varphi(\mathbf{E}))$ и $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E}))$ непусто.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$, что пересечение замыканий указанных в лемме множеств пусто. Пусть Z_1 замыкание первого из этих множества, а Z_2 — замыкание второго. Так как отображение $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, то множества $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1))$ и $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2))$ являются множествами типа $F_{\sigma\delta}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, а множества $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R}\setminus Z_1))$ и $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R}\setminus Z_2))$ являются множествами типа $G_{\delta\sigma}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Заметим, что

$$\mathbf{E} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R}\setminus Z_2)) \subset \mathbf{E},$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{E} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R}\setminus Z_1)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{E},$$

а значит, множества $\mathbf{E}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{E}$ являются одновременно множествами типа $F_{\sigma\delta}$ и $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Следовательно, в силу п. 4 § 1 гл. I, характеристическая функция множества $\mathbf{E}$ является функцией второго класса Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, что противоречит результату Р. Бэра. Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\mathbf{S}$ множество тех последовательностей $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, у которых бесконечно много различных μ_i, каждое из которых повторяется бесконечное число раз. Л. В. Келдыш было установлено, что характеристическая функция множества $\mathbf{S}$ не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ [43], [45]. Используя этот результат, докажем следующую лемму (необходимое условие принадлежности функционала третьему классу Бэра).

Лемма 5 [104]. *Пусть λ– произвольный функционал на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если λ принадлежит третьему классу Бэра на $\mathfrak{M}$, то для любой непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$ пересечение замыканий множеств $\lambda(\varphi(\mathbf{S}))$ и $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{S}))$ непусто.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{M}$ такая, что пересечение замыканий множеств $\lambda(\varphi(\mathbf{S}))$ и $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(N)\setminus\mathbf{S}))$ пусто. Пусть Z_1 замыкание множества $\lambda(\varphi(\mathbf{S}))$, а Z_2 замыкание множества $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{S}))$. Так как отображение $\lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит третьему классу на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, то множества $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1))$ и $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2))$ являются множествами типа $G_{\delta\sigma\delta}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, а множества $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R\setminus Z_1))$ и $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R\setminus Z_2))$ являются множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Заметим, что

$$\mathbf{S} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_2)) \subset \mathbf{S},$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S} \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(\mathbb{R} \setminus Z_1)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S},$$

а значит, множества $\mathbf{S}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{S}$ являются одновременно множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ и $G_{\delta\sigma\delta}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Следовательно, в силу п. 4 § 1 гл. I, характеристическая функция множества $\mathbf{S}$ является функцией третьего класса Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, что противоречит результату Л. В. Келдыш. Лемма 5 доказана.

§ 3 Необходимые условия принадлежности остаточных показателей первому классу Бэра на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Для произвольной оператор-функции A обозначим через $X(A)$ множество тех оператор-функций, которые совпадают с A на всей полуоси кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, $\overline{X}(A)$ – замыкание множества $X(A)$ в пространстве M_n^u. Отметим, что множество $\overline{X}(A)$ допускает простое описание

Лемма 6 [106]. *Для всякой функции $A \in M_n$ выполнено равенство*

$$\overline{X}(A) = \{B \in M_n : \lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}.$$

Доказательство. 1. Докажем включение

$$\overline{X}(A) \subset \{B \in M_n : \lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}.$$

Пусть $C \in \overline{X}(A)$ и $\varepsilon > 0$, тогда существует функция $B \in X(A)$ такая, что

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|C(t) - B(t)\| < \varepsilon,$$

и такое число $T_\varepsilon > 0$, что $A(t) = B(t)$ вне отрезка $[0; T_\varepsilon]$, следовательно,

$$\sup_{t\in[T_\varepsilon,\infty)} \|C(t) - A(t)\| = \sup_{t\in[T_\varepsilon,\infty)} \|C(t) - B(t)\| \leqslant \sup_{t\in[0,\infty)} \|C(t) - B(t)\| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - C(t)\| = 0.$$

2. Докажем обратное включение

$$\overline{X}(A) \supset \{B \in M_n : \lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}.$$

Пусть $C \in M_n : \lim\limits_{t\to\infty} \|A(t) - C(t)\| = 0$. Построим последовательность функций $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset X(A)$, где

$$A_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ A(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|A(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|A_m(t) - C(t)\| =$$
$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|A(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) - C(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,\infty)} \|A(t) - C(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,\infty)} \|A(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^u. Из пунктов 1 и 2 следует утверждение леммы 6.

Следуя [73], показатель $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ назовем остаточным, если для любой системы A и любой системы $B \in X(A)$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Теорема II [106]. *Пусть остаточный показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Тогда для любых двух функций $A, B \in M_n$, из условия*

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0$$

вытекает равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Доказательство. Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in M_n$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0 \text{ и } \lambda(A) \neq \lambda(B).$$

В силу леммы 6, функция B принадлежит множеству $\overline{X}(A)$.

Пусть $C \in \overline{X}(A)$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|B_m(t) - C(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) - C(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^u и, в силу остаточности показателя λ, имеем $\lambda(B_m) = \lambda(B)$.

Аналогично построим последовательность функций $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ сходящуюся к C такую, что $\lambda(A_m) = \lambda(A)$. Таким образом, каждая точка $C \in \overline{X}(A)$ не является точкой непрерывности показателя $\lambda|_{\overline{X}(A)}$.

С другой стороны, показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u, следовательно, показатель λ принадлежит первому классу Бэра на множестве $\overline{X}(A)$. Так как множество $\overline{X}(A)$ является замкнутым, то его можно считать полным метрическим пространством с метрикой индуцированной метрикой пространства M_n^u. В силу теоремы I § 2 гл. I, в этом пространстве должна существовать хотя бы одна точка непрерывности показателя $\lambda|_{\overline{X}(A)}$. Полученное противоречие доказывает теорему II.

Отметим, что для полунепрерывных остаточных показателей результат аналогичный теореме II был установлен И. Н. Сергеевым в работе [72].

Установим критерий принадлежности остаточного показателя первому классу Бэра на пространстве M_n^c.

Теорема III [106]. *Остаточный показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c тогда и только тогда, когда для любых двух функций $A, B \in M_n$ верно равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из того, что постоянная функция является остаточным показателем первого класса Бэра.

Докажем необходимость. Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in M_n$, удовлетворяющие условиям $\lambda(A) \neq \lambda(B)$. Обозначим

$$\mathcal{E} = \{C \in M_n : \sup_{t \geqslant 0} \|C(t)\| \leqslant \max\{\sup_{t \geqslant 0} \|A(t)\|, \sup_{t \geqslant 0} \|B(t)\|\}\}.$$

Пусть $C \in \mathcal{E}$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Из определения последовательности $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ получаем

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0,k]} \|B_m(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^c и, в силу остаточности показателя λ, имеем $\lambda(B_m) = \lambda(B)$.

Аналогично, построим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ сходящуюся к C такую, что $\lambda(A_m) = \lambda(A)$. Таким образом, каждая точка $C \in \mathcal{E}$ не является точкой непрерывности показателя $\lambda|_{\mathcal{E}}$.

С другой стороны показатель λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c, следовательно функционал λ принадлежит первому классу Бэра на множестве $\mathcal{E}$.

Докажем, что множество $\mathcal{E}$ является замкнутым в пространстве M_n^c. Пусть $(V_m)_{m=1}^{\infty}$ произвольная последовательность функций из $\mathcal{E}$ такая, что

$$\lim_{m \to \infty} V_m = V_0. \tag{4}$$

Докажем, что функция V_0 принадлежит множеству $\mathcal{E}$. Пусть $t^* \in \mathbb{R}^+$ и $k > t^*$. Так как, в силу (7), имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0,k]} \|V_m(t) - V_0(t)\| = 0,$$

то получаем, что функция V_0 непрерывна в точке t^* и

$$V_0(t^*) \leqslant \max\{\sup_{t\geqslant 0}\|A(t)\|, \sup_{t\geqslant 0}\|B(t)\|\}.$$

Таким образом, множество $\mathcal{E}$ является замкнутым. Следовательно, его можно считать полным метрическим пространством с метрикой индуцированной метрикой пространства M_n^c. В силу теоремы I § 2 гл. I, в этом пространстве должна существовать хотя бы одна точка непрерывности показателя $\lambda|_{\mathcal{E}}$. Полученное противоречие доказывает теорему III.

§ 4 О непрерывной зависимости от параметра коэффициентов линейных систем

В дальнейшем, будем часто рассматривать ситуацию, когда коэффициенты системы, непрерывные на полуоси времени, еще и непрерывно (возможно, равномерно по времени) зависят от параметра из некоторого метрического пространства. Тогда ляпуновские показатели такой системы (точнее, семейства систем) можно рассматривать как функционалы, определенные на этом метрическом пространстве.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{5}$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено по $t \in \mathbb{R}^+$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$.

Лемма 7 [97]. *Отображение $\varphi : \mathfrak{M} \to M_n^c$, определяемое формулой $\varphi(\mu) = A(\mu, \cdot)$, является непрерывным.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$. В силу непрерывности отображения (5) для каждой точки $t \in [0, r]$ найдется ее окрестность $\mathcal{V}(t) \subset [0, r]$ и окрестность $\mathcal{U}_t(\mu_0)$ точки $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ такие, что для любой точки $(\mu, \tau) \in \mathcal{U}_t(\mu_0) \times \mathcal{V}(t)$ выполнено неравенство $\|A(\mu_0, t) - A(\mu, \tau)\| < \varepsilon$. Из компактности отрезка $[0, r]$ следует существование конечного набора точек $(t_k)_{k=1}^m \subset [0, r]$ такого, что

$$[0, r] \subset \bigcup_{k=1}^m \mathcal{V}(t_k).$$

Пусть

$$\mathcal{U}(\mu_0) = \bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{U}_{t_k}(\mu_0).$$

Тогда для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in[0,\,r]} \|A(\mu_0,t) - A(\mu,t)\| < \varepsilon,$$

которое доказывает лемму 7.

Установим критерий принадлежности показателя p-му классу Бэра на пространстве M_n^c.

Теорема IV. *Показатель $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^c тогда и только тогда, когда для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (5) функция $\mu \mapsto \lambda(A(\mu,\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. `Достаточность.` Пусть $\mathfrak{M} = M_n^c$. Рассмотрим отображение $P : M_n^c \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой $P(A,t) = A(t)$. По определению отображение P непрерывно по совокупности переменных и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого. В силу п. 2 § 1 гл. I функционал $A \mapsto \lambda(P(A,\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^c. Так как для любой системы $A \in M_n$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(P(A,\cdot))$, то функционал $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^c.

`Необходимость.` Допустим, что существуют метрическое пространство $\mathfrak{M}$ и отображение P_0 вида (5) такие, что функция $\mu \mapsto \lambda(P_0(\mu,\cdot))$ не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

В силу леммы 7, отображение $\varphi_0 : \mathfrak{M} \to M_n^c$, определяемое формулой $\varphi_0(\mu) = P_0(\mu,\cdot)$ является непрерывным, а следовательно, сложная функция $\mu \mapsto \lambda(\varphi_0(\mu)) = \lambda(P_0(\mu,\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие, доказывает теорему IV.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{6}$$

является отображением вида (5) непрерывным по $\mu \in \mathfrak{M}$ равномерно по

$t \in \mathbb{R}^+$, т. е. для любого $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ выполнено равенство

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(\mu_0, t) - A(\mu, t)\| = 0$$

Лемма 8. *Отображение $\psi : \mathfrak{M} \to M_n^u$, определяемое формулой $\varphi(\mu) = A(\mu, \cdot)$, является непрерывным.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности по $t \in \mathbb{R}^+$ отображения (6), найдется окрестность $\mathcal{U}(\mu_0)$ точки $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ такая, что для каждого значения $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ и любого $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено неравенство $\|A(\mu_0, t) - A(\mu, t)\| < \varepsilon$. Таким образом, для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu_0)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(\mu_0, t) - A(\mu, t)\| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Установим критерий принадлежности показателя p-му классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема V. *Показатель $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u тогда и только тогда, когда для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (6) функция $\mu \mapsto \lambda(A(\mu, \cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. `Достаточность.` Пусть $\mathfrak{M} = M_n^u$. Рассмотрим отображение $Q : M_n^u \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой $Q(A, t) = A(t)$. В силу определения отображение Q непрерывно по совокупности переменных, причем равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого. В силу п. 2 § 1 гл. I функционал $A \mapsto \lambda(Q(A, \cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u. Так как для любой системы $A \in M_n$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(Q(A, \cdot))$, то функционал $\lambda : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u.

`Необходимость.` Допустим, что существуют метрическое пространство $\mathfrak{M}$ и отображение A_0 вида (6) такие, что функция $\lambda(A_0(\mu, \cdot))$ не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

В силу леммы 8, отображение $\varphi_0 : \mathfrak{M} \to M_n^u$, определяемое формулой $\varphi_0(\mu) = A_0(\mu, \cdot)$ является непрерывным, а следовательно функция $\mu \mapsto$

$\lambda(\varphi_0(\mu)) = \lambda(A_0(\mu,\cdot))$ принадлежит p-му классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие, доказывает теорему V.

Докажем теорему о непрерывной зависимости решений систем линейных уравнений от коэффициентов системы в удобной для дальнейшего использования форме. Для этого приведем (без доказательства) лемму Гронуолла-Беллмана [29, стр. 108].

Лемма 9. *Пусть*

$$f(t) \leqslant \alpha e^{\gamma(t-t_0)} + \beta \int\limits_{t_0}^{t} e^{\gamma(t-\tau)} p(\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где $p(t)$ — неотрицательная непрерывная функция, тогда

$$f(t) \leqslant \alpha e^{\gamma(t-t_0)+\beta\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}.$$

Обозначим $X_A(t,\tau)$ — оператор Коши системы (1). Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению (5), построим функцию

$$\mu \mapsto X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau). \tag{7}$$

Лемма 10 [97]. *Пусть $t \geqslant \tau \geqslant 0$, тогда для любого отображения (5) функция (7) является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть μ_0, $\mu \in \mathfrak{M}$. При помощи метода вариации произвольной постоянной для оператора Коши системы $\dot{x} = A(\mu_0,t)x$ получаем

$$X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau) = E + \int\limits_{\tau}^{t} A(\mu_0,s) X_{A(\mu_0,\cdot)}(s,\tau)\, ds.$$

Отсюда

$$\|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant \|E\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|A(\mu_0,s)\| \cdot \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(s,\tau)\|\, ds.$$

Используя оценку

$$a_{\mu_0} = \sup_{t\geqslant 0} \|A(\mu_0,t)\| < \infty,$$

и лемму Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant e^{a_{\mu_0}(t-\tau)}. \tag{8}$$

Представим систему $\dot{x} = A(\mu,t)x$ в виде $\dot{x} = A(\mu_0,t)x+(A(\mu,t)-A(\mu_0,t))x$. При помощи метода вариации произвольной постоянной для оператора Коши этой системы получаем

$$\begin{gathered} X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau) = X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)+ \\ +\int\limits_\tau^t X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,s)(A(\mu,s)-A(\mu_0,s))X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\,ds. \end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда, используя оценку (8), имеем

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| + \int\limits_\tau^t \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,s)\|\|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\|X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{a_{\mu_0}(t-\tau)} + \int\limits_\tau^t e^{a_{\mu_0}(t-s)}\|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\|X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\|\,ds.$$

По лемме Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant e^{a_{\mu_0}(t-\tau)} e^{\int\limits_\tau^t \|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\,ds}.$$

Из этого неравенства и формулы (9) следует

$$\begin{gathered} \|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau) - X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\tau^t \|X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,s)\|\|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\|X_{A(\mu,\cdot)}(s,\tau)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\tau^t e^{a_{\mu_0}(t-s)}\|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\| e^{a_{\mu_0}(s-\tau)} e^{\int\limits_\tau^s \|A(\mu,q)-A(\mu_0,q)\|\,dq}\,ds = \\ = \int\limits_\tau^t e^{a_{\mu_0}(t-\tau)} e^{\int\limits_\tau^s \|A(\mu,q)-A(\mu_0,q)\|\,dq} \|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\,ds \leqslant \\ \leqslant e^{a_{\mu_0}t} \int\limits_\tau^t e^{\int\limits_\tau^s \|A(\mu,q)-A(\mu_0,q)\|\,dq} \|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\,ds = \\ = e^{a_{\mu_0}t}\left(e^{\int\limits_\tau^t \|A(\mu,s)-A(\mu_0,s)\|\,ds} - 1\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Пусть число $T > t$. Из леммы 7 получаем

$$\lim_{\mu\to\mu_0} \sup_{t\in[0;T]} \|A(\mu,t) - A(\mu_0,t)\| = 0.$$

Тогда, в силу (10), получаем

$$\lim_{\mu\to\mu_0} \|X_{A(\mu,\cdot)}(t,\tau) - X_{A(\mu_0,\cdot)}(t,\tau)\| = 0.$$

Следовательно, функция (7) является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Лемма 10 доказана.

§ 5 Достаточные условия ляпуновской эквивалентности линейных систем

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{y} = B(t)y, \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{11}$$

где $B : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная ограниченная оператор-функция. Напомним, что система (11) ляпуновски эквивалентна линейной дифференциальной системе (1), если существуют фундаментальные матрицы $Y_B(t)$, $X_A(t)$ этих систем, для которых выполнено неравенство [28, стр. 227]

$$\sup_{t\geqslant 0}(\|Y_B(t)X_A^{-1}(t)\| + \|X_A(t)Y_B^{-1}(t)\|) < \infty.$$

В книге [47] приведен целый ряд достаточных условий ляпуновской эквивалентности линейных систем, но, для дальнейшего изложения, нам потребуется достаточное условие ляпуновской эквивалентности линейных систем в следующей форме.

Лемма 11 [108]. *Если интеграл*

$$K = \int_0^{+\infty} e^{\tau^2}\|A(\tau) - B(\tau)\|\, d\tau \tag{12}$$

сходится, то системы A и B ляпуновски эквивалентны.

Доказательство. Обозначим

$$a = \sup_{t\geqslant 0}\|A(t)\|, \quad b = \sup_{t\geqslant 0}\|B(t)\|.$$

В силу сходимости интеграла (12), найдется такое $t_0 \geqslant \max\{2\sqrt{a}, 2\sqrt{b}\}$, что

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{\tau^2} \|A(\tau) - B(\tau)\| \, d\tau < \frac{1}{2}. \tag{13}$$

На пространстве W_{t_0} — непрерывных ограниченных матричных функций, заданных на $[t_0, +\infty)$, наделенном метрикой

$$\sup_{t \geqslant t_0} \|Z_1(t) - Z_2(t)\|,$$

рассмотрим интегральный оператор

$$F(Z(t)) = E + \int\limits_{t}^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s) - A(s))X_A(s,0)Z(s)\, ds, \tag{14}$$

где $X_A(t,0)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Докажем, что оператор F, определяемый формулой (14), сжимает W_{t_0}.

1. Покажем, что $F : W_{t_0} \to W_{t_0}$. Используя оценки

$$\|X_A(t,0)\| \leqslant e^{at}, \quad \|X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant e^{at},$$

для любой функции $Z \in W_{t_0}$, получаем

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geqslant t_0} \|F(Z(t))\| \leqslant \|E\| + \int\limits_{t}^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s) - A(s))\| \|X_A(s,0)\| \|Z(s)\| \, ds \leqslant \\
\leqslant 1 + \sup_{t \geqslant t_0} \|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s) - A(s))\| \|X_A(s,0)\| \, ds \leqslant \\
\leqslant 1 + \sup_{t \geqslant t_0} \|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{2as} \|(B(s) - A(s))\| \, ds \leqslant \\
\leqslant 1 + \sup_{t \geqslant t_0} \|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2} \|(B(s) - A(s))\| \, ds \leqslant 1 + \tfrac{1}{2} \sup_{t \geqslant t_0} \|Z(t)\| < +\infty.
\end{aligned}$$

Далее, для любых t_1, $t_2 : t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$ получаем

$$\begin{aligned}
\|F(Z(t_1)) - F(Z(t_2))\| \leqslant \\
\leqslant \sup_{t \geqslant t_0} \|Z(t)\| \int\limits_{t_1}^{t_2} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s) - A(s))\| \|X_A(s,0)\| \, ds \leqslant \\
\leqslant \sup_{t \geqslant t_0} \|Z(t)\| e^{2at_2} (a+b)(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $F(Z(\cdot))$ непрерывна на $\mathbb{R}^+$. Следовательно $F: W_{t_0} \to W_{t_0}$. 2. Покажем, что для любых $Z_1,\ Z_2 \in W_{t_0}$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\geqslant t_0} \|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t) - Z_1(t)\|.$$

В силу неравенства (13), имеем

$$\|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s) - A(s))\| \|X_A(s,0)\| \|Z_2(s) - Z_1(s)\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t) - Z_1(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{2as} \|(B(s) - A(s))\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t) - Z_1(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2} \|(B(s) - A(s))\|\, ds \leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t) - Z_1(t)\|,$$

беря супремум по $t \geqslant t_0$ от левой части неравенства, получаем

$$\sup_{t\geqslant t_0} \|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\geqslant t_0} \|Z_2(t) - Z_1(t)\|.$$

Итак, мы доказали, что оператор F сжимает W_{t_0}. Применяя принцип сжатых отображений, получаем, что уравнение

$$Z(t) = E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s) - A(s)) X_A(s,0) Z(s)\, ds \tag{15}$$

имеет решение $\widetilde{Z}(t)$, непрерывное и ограниченное на полуоси $[t_0, +\infty)$ и притом единственное.

Дифференцируя по t тождество

$$X_A(t,0)\widetilde{Z}(t) = X_A(t,0)(\int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s) - A(s)) X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\, ds),$$

получаем, что матричная функция $Y_B(t) = X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)$ является решением системы уравнений $\dot{y} = B(t)y$. В силу оценок

$$0 \leqslant \lim_{t\to+\infty} \|\widetilde{Z}(t) - E\| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} \sup_{t\geqslant t_0} \|\widetilde{Z}(t)\| \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\| \|(B(s) - A(s))\| \|X_A(s,0)\|\, ds = 0,$$

для любого $t \geqslant t_0$, получаем

$$\det(Y_B(t)) = \det(X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)) \neq 0.$$

Таким образом, матричная функция $Y_B(t)$ является фундаментальной матрицей для системы уравнений $\dot y = B(t)y$.

Пусть

$$N = \sup_{t\geqslant t_0} \|\widetilde{Z}(t)\| < \infty.$$

В силу (15), для матрицы $Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)$, при $t \geqslant t_0$, получаем

$$\begin{gathered}
Y_B(t)X_A^{-1}(t,0) = X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)X_A^{-1}(t,0) = \\
= X_A(t,0)(E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds)X_A^{-1}(t,0) = \\
= E + X_A(t,0)(\int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds)X_A^{-1}(t,0).
\end{gathered}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{gathered}
\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant \\
\leqslant 1 + e^{2at}\int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|B(s)-A(s)\|\|X_A(s,0)\|\|\widetilde{Z}(s)\|\,ds \leqslant \\
\leqslant 1 + Ne^{2at}\int\limits_t^{+\infty} e^{2as}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant \\
\leqslant 1 + N\int\limits_t^{+\infty} e^{4as}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant \\
\leqslant 1 + N\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant 1 + \tfrac{N}{2}.
\end{gathered} \tag{16}$$

При $t < t_0$, найдется такое $C > 0$, что

$$\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant Ce^{bt}e^{at} \leqslant Ce^{(a+b)t_0} < \infty. \tag{17}$$

Таким образом, из (16) и (17) следует для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| < \infty$. Меняя в предыдущих рассуждениях системы A и B местами, для всех $t \geqslant 0$ получаем неравенство $\|X_A(t)Y_B^{-1}(t,0)\| < \infty$. Лемма доказана.

Следуя [73], показатель λ назовем *ляпуновски инвариантным*, если для любых двух ляпуновски эквивалентных систем A и B выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$B : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n \tag{18}$$

удовлетворяет двум условиям:

1. кусочно-непрерывно и ограничено по $t \in \mathbb{R}^+$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$;

2. для любой точки $\mu^* \in \mathfrak{M}$ и любого $T > 0$ найдется такая окрестность $\mathcal{U}(\mu^*)$ точки μ^*, что для любого $\mu \in \mathcal{U}(\mu^*)$ выполнено тождество $B(\mu, \cdot)|_{[0,T]} \equiv B(\mu^*, \cdot)|_{[0,T]}$.

Лемма 12. *Пусть λ ляпуновски инвариантный показатель. Тогда для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и отображения (18) существует такое отображение*
$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{19}$$
непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathfrak{M}$ выполнено равенство $\lambda(A(\mu, \cdot)) = \lambda(B(\mu, \cdot))$.

Доказательство. По точкам разрыва $(\xi_m)_{m=1}^{\infty} : \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots$ кусочно-непрерывной функции $B(\mu, \cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что
$$\varepsilon_m \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant m} (\xi_{k+1} - \xi_k), \quad \sum_{m=1}^{\infty} e^{(\xi_m + \varepsilon_m)^2} \varepsilon_m \leqslant 1.$$
построим функцию $A(\mu, \cdot)$ следующим образом
$$A(\mu, t) = \begin{cases} K_m \cdot (t - \xi_m - \varepsilon_m) + B(\mu, \xi_m + \varepsilon_m), & \text{при } t \in [\xi_m - \varepsilon_m; \xi_m + \varepsilon_m]; \\ B(\mu, t), & \text{при остальных } t, \end{cases}$$
$$K_m = \frac{B(\mu, \xi_m + \varepsilon_m) - B(\mu, \xi_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$
Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $B(\mu, \cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [\xi_m - \varepsilon_m, \xi_m + \varepsilon_m]$ функция $A(\mu, \cdot)$ совпадает с функцией $B(\mu, \cdot)$, а на любом из отрезков $[\xi_m - \varepsilon_m, \xi_m + \varepsilon_m]$ график функции $A(\mu, \cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(\xi_m - \varepsilon_m, B(\mu, \xi_m - \varepsilon_m))$ и точку с координатами $(\xi_m + \varepsilon_m, B(\mu, \xi_m + \varepsilon_m))$. Так как
$$\int_0^{\infty} e^{t^2} \|A(\mu, t) - B(\mu, t)\| \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\xi_m - \varepsilon_m}^{\xi_m + \varepsilon_m} e^{t^2} \|A(\mu, t) - B(\mu, t)\| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}\|A(\mu,t)-B(\mu,t)\|\sum_{m=1}^{\infty}e^{(\xi_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 4,$$

то, в силу леммы 11, система $\dot{y}=A(\mu,t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot{x}=B(\mu,t)x$, а следовательно для любого $\mu\in\mathfrak{M}$ выполнено равенство $\lambda(A(\mu,\cdot))=\lambda(B(\mu,\cdot))$.

Рассмотрим отображение $A:\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+\to\mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой $(\mu,t)\mapsto A(\mu,t)$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $\varepsilon>0$, $(\mu^*,t^*)\in\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+$ и $m>t^*+1$. Возьмем такую окрестность $\mathcal{U}(\mu^*)$, что $B(\mu,t)|_{[0,m]}=B(\mu^*,t)|_{[0,m]}$, а $\delta\in(0,1)$ такое, что для любого $t\in(t^*-\delta,t^*+\delta)$ выполнено неравенство $\|A(\mu^*,t)-A(\mu^*,t^*)\|<\varepsilon$. Тогда для любой точки (μ,t) такой, что $\mu\in\mathcal{U}(\mu^*)$ и $|t-t^*|<\delta$, в силу тождества $A(\mu^*,t)|_{[0,m-1]}\equiv A(\mu,t)|_{[0,m-1]}$, выполнено неравенство $\|A(\mu^*,t^*)-A(\mu,t)\|=\|A(\mu^*,t^*)-A(\mu^*,t)\|<\varepsilon$. Лемма доказана.

II Бэровская классификация мажорант и минорант показателей Ляпунова

§ 1 Уточнение бэровского класса показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на полупрямой $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функцией. В работе [52], для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$, получены формулы для показателей Ляпунова

$$\lambda_k(A) = \lim_{m\to\infty} a_m^k(A), \; a_m^k(A) = \lim_{s\to\infty} \min_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \max_{j\in\{m,\ldots,s\}} \frac{1}{j} \ln \|X_A(j,0)|_L\|, \tag{2}$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $X_A(t,0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Из формулы (2) и леммы 10 § 5 гл. I получаем, что показатели Ляпунова принадлежат второму классу Бэра на пространствах M_n^u и M_n^c. Более того, они представимы в виде поточечного предела невозрастающей последовательности функций $(a_m^k)_{m=1}^\infty$, которые являются функциями первого класса Бэра на пространствах M_n^u и M_n^c.

Докажем, что формула (2) является оптимальной не только количеству предельных переходов, но и по типу монотонности последовательности, от которой берется внешний предел.

Теорема I [95]. *Пусть $n \geqslant 2$, тогда для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ не может быть представлена в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 2 § 2 гл. I, для любой точки $A \in M_n$ в типичной по Бэру точке множества $\overline{X}(A)$, рассматриваемого как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из M_n^u, функция $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$ полунепрерывна снизу. Из формулы (2) и леммы 1 § 2 гл. I следует, что в типичной по Бэру точке множества $\overline{X}(A)$ функция $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$ полунепрерывна сверху. Таким образом, для любой точки $A \in M_n$ множество $\overline{X}(A)$ содержит хотя бы одну точку непрерывности функции $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$. Докажем, что для любой системы $B \in \overline{X}(A)$ выполнено равенство

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(B). \tag{3}$$

Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in M_n$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0, \text{ и } \lambda_k(A) \neq \lambda_k(B).$$

Пусть $C \in \overline{X}(A)$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|B_m(t) - C(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} \|B(t) - C(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) - C(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,\infty)} \|B(t) - C(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^u и, в силу остаточности функционала λ_k, имеем $\lambda_k(B_m) = \lambda_k(B)$. Аналогично построим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty}$, сходящуюся к C, для которой выполнено равенство $\lambda_k(A_m) = \lambda_k(A)$. Таким образом, каждая точка $C \in \overline{X}(A)$ не является точкой непрерывности функционала $\lambda_k|_{\overline{X}(A)}$. Полученное противоречие доказывает равенство (3).

С другой стороны, рассмотрим исходную систему

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, A(t), 3, \ldots, 3\}x,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & 0 \\ 0 & -0{,}51 \end{pmatrix} x, \quad t \geqslant 1,$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda_1(A) = -1, \ldots, \lambda_{k-1}(A) = -1, \lambda_k(A) = -0{,}51,$$

$$\lambda_{k+1}(A) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}(t\sin(\ln t) - 1,02t + 1,02) = -0,02,$$
$$\lambda_{k+2}(A) = 3, \ldots, \lambda_n(A) = 3,$$

и возмущенную систему

$$\dot{y} = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, B(t), 3, \ldots, 3\}y,$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & e^{-0{,}51t} \\ 0 & -0,51 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 1.$$

Эта система имеет решения

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{t\sin(\ln t) - 1{,}02t + 1{,}02} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{t\sin(\ln t) - 1{,}02t - 0{,}51} \int\limits_1^t e^{-\tau\sin(\ln\tau)}\, d\tau \\ e^{-0{,}51t + 0{,}51} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две последовательности $e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}$ и $e^{2\pi m - \frac{2\pi}{3}}$. Для любого $\tau \in [e^{2\pi m - \frac{2\pi}{3}}; e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}]$ справедливы неравенства

$$2\pi m - \frac{2\pi}{3} \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m - \frac{\pi}{2}, \; \sin\ln\tau \leqslant \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -\tau\sin(\ln\tau) \geqslant \frac{\sqrt{3}\tau}{2}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}^{e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin(\ln\tau)}\,d\tau \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}})=\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}})e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}.$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}\sin\ln e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\int\limits_{1}^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\int\limits_{e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}^{e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\frac{2}{\sqrt{3}}(1-e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}})e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}.$$

Следовательно характеристический показатель решения x_{k+1} не менее $-0,02+e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi}$, а решения x_k равен $-0,02$. Таким образом, показатели возмущенной системы удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1(B)=-1,\ldots,\lambda_{k-1}(B)=-1,\lambda_k(B)=-0{,}02,$$

$$\lambda_{k+1}(B)\geqslant -0,02+e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi},\lambda_{k+2}(B)=3,\ldots,\lambda_n(B)=3.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\|A(t)-B(t)\|=\lim_{t\to\infty}e^{-0{,}51t}=0,$$

то получаем противоречие с (3). Теорема I доказана.

В случае $n=1$, для показателя Ляпунова системы (1) справедлива формула

$$\lambda_1(A)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau,$$

а следовательно функция $\lambda_1(\cdot):M_1\to\mathbb{R}$ является непрерывной на пространстве M_1^u.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы I следует, что для $n\geqslant 2$ и каждого $k\in\{1,\ldots,n\}$ функция $\lambda_k(\cdot):M_n\to\mathbb{R}$ не может быть представлена в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра на пространстве M_n^c. Установим этот факт для любого $n \in \mathbb{N}$, не опираясь на теорему I.

Теорема II [95]. *Пусть $n \geqslant 1$, тогда для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ не может быть представлена в виде поточечного предела неубывающей последовательности функций первого класса Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 2 § 2 гл. I, в типичной по Бэру точке множества

$$\mathcal{E} = \{A \in M_n : \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| \leqslant 1\},$$

рассматриваемого как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из M_n^c, функция $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$ полунепрерывна снизу. Из формулы (2) и леммы 1 § 2 гл. I следует, что в типичной по Бэру точке множества $\mathcal{E}$ функция $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$ полунепрерывна сверху. Таким образом, множество $\mathcal{E}$ содержит хотя бы одну точку непрерывности функции $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$. Докажем, что для любой системы $B \in \mathcal{E}$ выполнено равенство

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(B). \tag{4}$$

Допустим противное, что существуют две функции $A, B \in \mathcal{E}$, удовлетворяющие условию $\lambda_k(A) \neq \lambda_k(B)$. Пусть $C \in \mathcal{E}$. Построим последовательность функций $(B_m)_{m=1}^{\infty}$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1. \end{cases}$$

Для любого $k < m$ выполнено равенство

$$\sup_{t \in [0,k]} \|B_m(t) - C(t)\| = 0,$$

следовательно

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in [0,k]} \|B_m(t) - C(t)\| = 0.$$

Таким образом, последовательность $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ сходится к функции C в пространстве M_n^c и, в силу остаточности функционала λ_k, имеем $\lambda_k(B_m) =$

$\lambda_k(B)$. Аналогично построим последовательность $(A_m)_{m=1}^{\infty}$, сходящуюся к C, для которой выполнено равенство $\lambda_k(A_m) = \lambda_k(A)$. Следовательно, каждая точка $C \in \mathcal{E}$ не является точкой непрерывности функционала $\lambda_k|_{\mathcal{E}}$. Полученное противоречие доказывает равенство (4).

С другой стороны, рассмотрим две диагональные системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1\}x, \quad \dot{y} = \operatorname{diag}\{0, \ldots, 0\}y.$$

Для первой системы $\lambda_k = 1$, а для второй $\lambda_k = 0$. Таким образом, получаем противоречие с (4). Теорема II доказана.

§ 2 Множество точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова их мажорант и минорант

Пусть $\mathfrak{M}$ полное метрическое пространство. В. М. Миллионщиков установил [53], что для любого непрерывного и ограниченного по совокупности переменных отображения

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n \tag{5}$$

и любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ в типичной по Бэру точке функция

$$\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot)) \tag{6}$$

полунепрерывна сверху.

В данном параграфе построены отображения вида (5), для которых множества точек полунепрерывности снизу функции (6), функции

$$\mu \mapsto \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)), \tag{7}$$

где $\overline{\lambda}_k(A)$ — минимальная полунепрерывная сверху *мажоранта* k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемая формулой

$$\overline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\{B\colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B),$$

и функции

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)), \tag{8}$$

где $\lambda_k^{\min}(A)$ — максимальная полунепрерывная снизу *миноранта* k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемая формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\{B\colon \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \|B(t)\|<\varepsilon\}} \lambda_k(A+B),$$

являются пустымы. В частности, получен ответ на один из вопросов, поставленных в [62].

Для всякой непрерывной функции $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ условимся обозначать через $\overline{q}$ ее верхнее среднее:

$$\overline{q} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t q(\tau)\, d\tau.$$

Лемма 1. *Пусть $\{\alpha_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченная последовательность непрерывных функций на $\mathfrak{M}$. Тогда существует такая непрерывная и ограниченная функция $q : \mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, что*

$$\overline{q}(\mu,\cdot) = \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu).$$

Доказательство. На $\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+$ определим функцию $a(\cdot,\cdot)$ следующим образом

$$a(\mu,t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t\in[0,2); \\ \alpha_m(\mu), & \text{при } t\in[m!,(m+1)!), \end{cases} \qquad m = 2,3,4,\ldots .$$

Пусть

$$L = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{\mu\in\mathfrak{M}} |\alpha_m(\mu)| < +\infty,$$

тогда для любой пары $(\mu,t)\in\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+$ имеем $|a(\mu,t)| \leqslant L$.

Зафиксируем $\mu\in\mathfrak{M}$. Для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой номер m_ε, что для любого $m\geqslant m_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\alpha_m(\mu) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu) + \varepsilon,$$

а следовательно, получаем

$$\overline{a}(\mu,\cdot) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t a(\mu,\tau)\, d\tau = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{m!}^t a(\mu,\tau)\, d\tau \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем

$$\overline{a}(\mu,\cdot) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu).$$

С другой стороны имеем цепочку неравенств

$$\overline{a}(\mu,\cdot) = \varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\int\limits_0^t a(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \tfrac{1}{(m+1)!}\int\limits_0^{(m+1)!} a(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{(m+1)!}[\alpha_m(\mu)((m+1)!-m!)-Lm!] = \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu).$$

Таким образом, имеем

$$\overline{a}(\mu,\cdot) = \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu).$$

По кусочно-непрерывной функции $a(\mu,\cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon_m \leqslant 1,$$

построим функцию $q(\mu,\cdot)$ следующим образом

$$q(\mu,t) = \begin{cases} k_m(t-m!-\varepsilon_m)+a(\mu,m!+\varepsilon_m), & \text{при } t\in[m!-\varepsilon_m; m!+\varepsilon_m];\\ a(\mu,t) & \text{при остальных } t,\end{cases}$$

$$k_m = \frac{a(\mu,m!+\varepsilon_m)-a(\mu,m!-\varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$

Эта функция непрерывна при $t\in\mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $a(\mu,\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [m!-\varepsilon_m, m!+\varepsilon_m]$ функция $q(\mu,\cdot)$ совпадает с функцией $a(\mu,\cdot)$, а на любом из отрезков $[m!-\varepsilon_m, m!+\varepsilon_m]$ график функции $q(\mu,\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(m!-\varepsilon_m, a(\mu,m!-\varepsilon_m))$ и точку с координатами $(m!+\varepsilon_m, a(\mu,m!+\varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^{\infty} |q(\mu,t)-a(\mu,t)|\,dt = \sum_{m=2}^{\infty}\int\limits_{m!-\varepsilon_m}^{m!+\varepsilon_m} |q(\mu,t)-a(\mu,t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}|q(\mu,t)-a(\mu,t)|\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m \leqslant 2L,$$

то, в силу неравенств

$$\int\limits_0^t a(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t |a(\mu,\tau)-q(\mu,\tau)|\,d\tau + \int\limits_0^t q(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant 2L + \int\limits_0^t q(\mu,\tau)\,d\tau,$$

$$\int\limits_0^t q(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t |q(\mu,\tau)-a(\mu,\tau)|\,d\tau + \int\limits_0^t a(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant 2L + \int\limits_0^t a(\mu,\tau)\,d\tau,$$

получаем равенство $\overline{a}(\mu,\cdot)=\overline{q}(\mu,\cdot)$.

Рассмотрим отображение $q:\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $(\mu^*,t^*)\in\mathfrak{M}\times\mathbb{R}^+$ и $\varepsilon>0$. Возьмем натуральное m настолько большим, чтобы $t^*\in[0,m!-1]$, а $\delta_1\in(0,1)$ такое, что для любого $t\in(t^*-\delta_1,t^*+\delta_1)$ выполнено неравенство $|q(\mu^*,t)-q(\mu^*,t^*)|<\varepsilon$. В силу непрерывности функций $\alpha_k(\cdot)$, $k\in\{2,\ldots,m\}$ на $\mathfrak{M}$ найдется такое $\delta_2\in(0,1)$, что для любого μ из открытого шара $U_{\delta_2}(\mu^*)$ с центром в точке μ^* и радиусом δ_2 и каждого $k\in\{2,\ldots,m\}$ выполнено неравенство $|\alpha_k(\mu)-\alpha_k(\mu^*)|<\varepsilon$, а следовательно, получаем неравенство

$$\sup_{t\in[0,m!-1]}|q(\mu^*,t)-q(\mu,t)|<\varepsilon.$$

Тогда для любой точки (μ,t) такой, что $|t-t^*|<\delta_1$ и $\mu\in U_{\delta_2}(\mu^*)$ выполнено

$$|q(\mu^*,t^*)-q(\mu,t)|\leqslant|q(\mu^*,t^*)-q(\mu^*,t)|+|q(\mu^*,t)-q(\mu,t)|<2\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Используем лемму 1 для построения таких отображений вида (5), что множество точек полунепрерывности снизу функций (6)–(8) пусто.

Теорема III [99]. *Пусть $\mathfrak{M}\equiv\mathcal{B}$, тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ существует такое отображение (5), что для любого $k\in\{1,\ldots,n\}$ и каждой функции (6)–(8) множество точек полунепрерывности снизу пусто.*

Доказательству теоремы III предпошлем лемму.

Лемма 2. *Существует непрерывная и ограниченная функция $q:\mathcal{B}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ такая, что множество точек полунепрерывности снизу функции, определенной формулой $\mu\mapsto\overline{q}(\mu,\cdot)$ пусто.*

Доказательство. Рассмотрим равномерно ограниченную последовательность $\{\alpha_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ непрерывных функций на пространстве $\mathcal{B}$, определенных следующим образом

$$\alpha_m((\mu_1, \mu_2, \ldots)) = \mu_k - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\mu_1 + \ldots + \mu_{k-1} + 1), \quad m = 2, 3, 4, \ldots .$$

По этой последовательности, используя лемму 1, построим непрерывную и ограниченную функцию $q : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\overline{q}(\mu, \cdot) = \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu).$$

Обозначим через $\mathcal{K}_0$, множество тех последовательностей из $\mathcal{B}$, у которых все члены, начиная с некоторого, равны 0. Для всякого $\mu \in \mathcal{K}_0$ найдется такое m_0, что

$$\alpha_m(\mu) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\mu_1 + \ldots + \mu_{m_0-1} + 1),$$

при $t \geqslant m_0$. Следовательно, имеем неравенство

$$\overline{q}(\mu, \cdot) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\mu_1 + \ldots + \mu_{m_0-1} + 1) > -1. \tag{9}$$

Для всякого $\mu \notin \mathcal{K}_0$ обозначим через $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ возрастающую последовательность номеров элементов последовательности μ, которые равны 1. Имеем

$$\overline{q}(\mu, \cdot) = \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} (1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\mu_1 + \ldots + \mu_{m_k-1} + 1)) = 0. \tag{10}$$

Для произвольного элемента $\mu \in \mathcal{B}$. Построим последовательность $\{\mu^{(s)}\} \subset \mathcal{K}_0$

$$\mu^{(s)} = (\mu_1, \ldots, \mu_s, \underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, 0, \ldots), \quad \lim_{n\to\infty} d(\mu, \mu^{(s)}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s} = 0,$$

для которой выполнено свойство

$$\varliminf_{s\to\infty} \overline{q}(\mu^{(s)}, \cdot) \leqslant \lim_{s\to\infty} -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(s + 1) = -1. \tag{11}$$

Таким образом, из (9)—(11) имеем

$$\varliminf_{s\to\infty} \overline{q}(\mu^{(s)}, \cdot) < \overline{q}(\mu, \cdot),$$

следовательно точка μ не является точкой полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \overline{q}(\mu, \cdot)$. В силу произвольности точки μ, получаем, что множество точек полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \overline{q}(\mu, \cdot)$ пусто. Лемма доказана.

Доказательство теоремы III. Определим отображение $A : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ формулой

$$A(\mu, t) = q(\mu, t)E, \quad \mu \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{12}$$

где q — функция, существование которой утверждается в лемме 2, а E — единичная матрица. Непрерывность отображения Q вытекает из непрерывности функции q. Показатели Ляпунова, их миноранты и мажоранты системы (1) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ удовлетворяют неравенствам [17, стр. 164]

$$\omega(A) \leqslant \underline{\lambda}_k(A) \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \overline{\lambda}_k(A) \leqslant \Omega(A),$$

где

$$\omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A(jT, (j+1)T)\|^{-1}$$

нижний центральный показатель,

$$\Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A((j+1)T, jT)\|$$

верхний центральный показатель, где $X_A(t, s)$ — оператор Коши системы (1). Так как для системы (1) с матрицей (12) справедливы равенства

$$\|X_{A(\mu,\cdot)}(jT, (j+1)T)\|^{-1} = \|X_{A(\mu,\cdot)}((j+1)T, jT)\| = e^{\int\limits_{jT}^{(j+1)T} q(\mu,\tau)\, d\tau},$$

то получаем для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\omega(A(\mu, \cdot)) = \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)) = \lambda_k(A(\mu, \cdot)) = \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)) = \Omega(A(\mu, \cdot)) = \overline{q}(\mu, \cdot).$$

Теорема доказана.

Оказывается, для случая, когда пространство $\mathfrak{M}$ является единичным отрезком с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, может быть построено отображение (5), для которого множество точек полунепрерывности снизу функций (6)–(8) пусто.

Теорема IV [96]. *Пусть* $\mathfrak{M} \equiv [0,\, 1]$, *тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует непрерывное отображение (5) такое, что для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и каждой функции (6)–(8) множество точек полунепрерывности снизу пусто.*

Доказательству теоремы IV предпошлем лемму.

Лемма 3. *Существует такая непрерывная функция* $q : [0;\, \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *что множество полунепрерывности снизу функции, определенной формулой* $\mu \mapsto \overline{q}(\mu, \cdot)$ *пусто.*

Доказательство. Рассмотрим равномерно ограниченную последовательность $\{\alpha_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ непрерывных функций на отрезке $[0;\, \frac{2}{3}]$, определенных следующим образом

$$\alpha_m(\mu) = |\sin(\pi\mu 2^m)| - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{m} |\sin(2^l\pi\mu)|, \quad m = 2, 3, 4, \ldots .$$

По этой последовательности, в силу леммы 1, построим непрерывную и ограниченную функцию $q : [0;\, \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\overline{q}(\mu, \cdot) = \varlimsup_{m\to\infty} \alpha_m(\mu).$$

Пусть μ — двоично рациональное число, т. е. существует такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\mu = \sum_{s=1}^{m_0} \frac{p_s}{2^s}, \quad p_s \in \{0;\, 1\}.$$

При $m > m_0$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha_m(\mu) = |\sin(\pi 2^m \textstyle\sum_{s=1}^{m_0} \frac{p_s}{2^s})| - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \textstyle\sum_{l=1}^{m} |\sin(2^l\pi \textstyle\sum_{s=1}^{m_0} \frac{p_s}{2^s})|) = \\ = -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \textstyle\sum_{l=1}^{m_0-1} |\sin(2^l\pi \textstyle\sum_{s=1}^{m_0} \frac{p_s}{2^s})|). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\overline{q}(\mu, \cdot) \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} (-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{m_0-1} |\sin(2^l\pi \sum_{s=1}^{m_0} \frac{p_s}{2^s})|) > -1. \tag{13}$$

Пусть μ — двоично иррациональное число, т. е.

$$\mu = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s}{2^s}, \quad p_s \in \{0;\, 1\},$$

и существует такая бесконечная последовательность номеров $\{s'\}$, что $p_{s'+2} = 1$, $p_{s'+1} = 0$. Так как

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{p_{s'+2}}{4} + \frac{p_{s'+3}}{8} + \ldots \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2},$$

получаем

$$|\sin(2^{s'}\pi\mu)| = |\sin(2^{s'}\pi\sum_{s=1}^{\infty}\frac{p_s}{2^s})| = |\sin(\pi\sum_{s=s'}^{\infty}\frac{p_s}{2^{s-s'+2}})| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

следовательно $\alpha_{s'}(\mu) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$. Таким образом, получаем

$$\overline{q}(\mu, \cdot) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - 1. \tag{14}$$

Для каждого $\mu = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{p_s}{2^s} \in [0;\, \frac{2}{3}]$ построим последовательность чисел

$$\mu^{(n)} = \sum_{s=1}^{n}\frac{p_s}{2^s} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \ldots + \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{s=1}^{n}\frac{p_s}{2^s} + \frac{1}{3\cdot 2^n}(1 - \frac{1}{4^n}).$$

Пусть $m > 3n > 12$, тогда

$$|\sin(2^m\pi\mu^{(n)})| = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{k}|\sin(2^l\pi\mu^{(n)})| \geqslant \sum_{l=n+2}^{2n+2}|\sin(2^l\pi(\sum_{s=1}^{n}\tfrac{p_s}{2^s} + \tfrac{1}{3\cdot 2^n}(1 - \tfrac{1}{4^n})))| =$$
$$= |\sin(\tfrac{4\pi}{3}(1 - \tfrac{1}{4^n}))| + \ldots + |\sin(\tfrac{2^{n+2}\pi}{3}(1 - \tfrac{1}{4^n}))| \geqslant \tfrac{\sqrt{2}n}{2},$$

следовательно имеем

$$\alpha(\mu^{(n)}) \leqslant -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1).$$

Таким образом, получаем

$$\overline{q}(\mu^{(n)}, \cdot) \leqslant -\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1).$$

Итак, для произвольного числа $\mu \in [0;\, \frac{2}{3}]$ построили такую последовательность $(\mu^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{n\to\infty}|\mu - \mu^{(n)}| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\overline{a}(\mu^{(n)}, \cdot) \leqslant \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1) = -1. \tag{15}$$

Таким образом, из (13)—(15) имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \overline{a}(\mu^{(n)}, \cdot) < \overline{a}(\mu, \cdot).$$

Следовательно, точка μ не является точкой полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \overline{q}(\mu, \cdot)$. В силу произвольности точки μ получаем, что множество точек полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \overline{q}(\mu, \cdot)$ пусто. Лемма доказана.

Доказательство теоремы IV. Определим отображение $A : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ формулой

$$A(\mu, t) = q(\frac{3}{2}\mu, t)E, \quad \mu \in [0,\, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

где q — функция, существование которой утверждается в лемме 3, а E — единичная матрица. Непрерывность отображения A вытекает из непрерывности функции q. Так как для любого $\mu \in [0, 1]$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеем (см. доказательство теоремы III)

$$\omega(A(\mu, \cdot)) = \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)) = \lambda_k(A(\mu, \cdot)) = \overline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot)) = \Omega(A(\mu, \cdot)) = \overline{q}(\mu, \cdot),$$

то доказательство теоремы немедленно следует из леммы 3. Теорема доказана.

Наложим на функцию (5) дополнительное ограничение

$$\lim_{\nu\to\mu} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(\nu, t) - A(\mu, t)\| = 0, \quad \mu \in \mathfrak{M}, \tag{17}$$

означающее ее равномерную по $t \in \mathbb{R}^+$ непрерывность по μ. М. И. Рахимбердиев [71] построил, при $n \geqslant 2$, такое отображение (5), удовлетворяющее условию (17), что функция (6) разрывна в каждой точке отрезка $[0; 1]$, и множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным на $[0; 1]$. Естественно возникает вопрос о существовании такого отображения (5), удовлетворяющего свойству (17), что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) пусто.

Теорема V [93], [110]. *Пусть $\mathfrak{M} \equiv [0,\, 1]$, тогда для любого $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ найдется такое отображение (5), удовлетворяющее условию (17), что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) пусто.*

Доказательству теоремы предпошлем четыре леммы.

Лемма 4. *Пусть*

$$\alpha_k(\mu) = |\sin(\pi\mu 2^k)| - \frac{3}{\pi}\mathrm{arctg}(1+\sum_{l=1}^{k}|\sin(2^l\pi\mu)|), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \mu \in [\tfrac{1}{6}; \tfrac{1}{3}].$$

Тогда для любого $\mu \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \alpha_k(\mu) > -\frac{3}{2}.$$

Доказательство. Пусть μ — двоично-рациональное число, т. е. существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\mu = \sum_{s=1}^{k_0} \frac{m_s}{2^s}, \quad m_s \in \{0;\, 1\}.$$

При $k > k_0$ получаем

$$\alpha_k(\mu) = |\sin(\pi 2^k \sum_{s=1}^{k_0} \frac{m_s}{2^s})| - \frac{3}{\pi}\,\mathrm{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi \sum_{s=1}^{k_0} \frac{m_s}{2^s})|) =$$

$$= -\frac{3}{\pi}\,\mathrm{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k_0-1} |\sin(2^l \pi \sum_{s=1}^{k_0} \frac{m_s}{2^s})|).$$

Откуда получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \alpha_k(\mu) = -\frac{3}{\pi}\,\mathrm{arctg}(1 + \sum_{l=1}^{k_0-1} |\sin(2^l \pi \sum_{s=1}^{k_0} \frac{m_s}{2^s})|) > -\frac{3}{2}.$$

Пусть μ — двоично-иррациональное число, т. е.

$$\mu = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{2^s}, \quad m_s \in \{0;\, 1\},$$

и существует такая бесконечная последовательность таких номеров $\{s'\}$, что $m_{s'+2} = 1$, $m_{s'+1} = 0$. Так как

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{m_{s'+2}}{4} + \frac{m_{s'+3}}{8} \ldots \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2},$$

получаем

$$|\sin(2^{s'}\pi\mu)| = |\sin(2^{s'}\pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{2^s})| = |\sin(\pi \sum_{s=s'+2}^{\infty} \frac{m_s}{2^{s-s'}})| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а следовательно, имеем

$$\alpha_{s'}(\mu) = |\sin(\pi 2^{s'}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{m_s}{2^s})| - \frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}(1+\sum_{l=1}^{s'}|\sin(2^l\pi\sum_{s=1}^{\infty}\frac{m_s}{2^s})|) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}.$$

Откуда получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\alpha_k(\mu) \geqslant \overline{\lim_{s'\to\infty}}\,\alpha_{s'}(\mu) > \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Для каждого* $\mu \in [\frac{1}{6};\, \frac{1}{3}]$ *найдется такая последовательность чисел* $\{\mu^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset [\frac{1}{6};\, \frac{1}{3}]$, *что*

$$\lim_{n\to\infty}|\mu - \mu^{(n)}| = 0, \text{ и } \lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\alpha_k(\mu^{(n)}) = -\frac{3}{2}.$$

Доказательство. Для каждого $\mu = \sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{m_s}{2^s} \in [\frac{1}{6};\, \frac{1}{3}]$ построим последовательность чисел

$$\mu^{(n)} = \sum_{s=1}^{n}\frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \ldots + \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{s=1}^{n}\frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{3\cdot 2^n}(1 - \frac{1}{4^n}).$$

Пусть $k > 3n > 12$, тогда

$$|\sin(2^k\pi\mu^{(n)})| = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{k}|\sin(2^l\pi\mu^{(n)})| \geqslant \sum_{l=n+2}^{2n+1}|\sin(2^l\pi(\sum_{s=1}^{n}\tfrac{m_s}{2^s} + \tfrac{1}{3\cdot 2^n}(1-\tfrac{1}{4^n})))| =$$
$$= |\sin(\tfrac{4\pi}{3}(1-\tfrac{1}{4^n}))| + \ldots + |\sin(\tfrac{2^{n+1}\pi}{3}(1-\tfrac{1}{4^n}))| \geqslant \tfrac{\sqrt{2}n}{2}.$$

Следовательно, получаем неавенство

$$\alpha_k(\mu^{(n)}) \leqslant -\frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}n}{2} + 1),$$

откуда, используя лемму 4, получаем утверждение леммы 5. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{M} \equiv [\frac{1}{6},\, \frac{1}{3}]$, *тогда для* $n = k = 2$ *найдется такое отображение (5), удовлетворяющее условию (17), что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) пусто.*

Доказательство. Для каждого $\mu \in [\frac{1}{6};\, \frac{1}{3}]$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = B(\mu,t)x, \text{ где } B(\mu,t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(\mu,t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$a(t)=\begin{cases} 6, & \text{при } t\in[2^{2k-1};2^{2k});\\ -6, & \text{при } t\in[2^{2k};2^{2k+1}),\end{cases}$$

$$b(\mu,t)=\begin{cases} e^{\alpha_k(\mu)t}, & \text{при } t\in[2^{2k-1};2^{2k});\\ 0, & \text{при } t\in[2^{2k};2^{2k+1}),\end{cases}\qquad k=1,2,3,\ldots\,,$$

значения a и b на $[0;\,2)$ не играют роли; для простоты считаем здесь $a(t)=b(\mu,t)=0$. Для функции a имеем

$$\begin{gathered}\varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\int\limits_2^t a(\tau)\,d\tau=\varlimsup_{k\to\infty}\tfrac{6}{2^k}\sum_{s=2}^{k}(-1)^s(2^s-2^{s-1})=\\ =\varlimsup_{k\to\infty}\tfrac{6}{2^k}\cdot\tfrac{(-2)^k+2}{3}=\lim_{m\to\infty}\tfrac{2^{2m+1}+4}{2^{2m}}=2,\end{gathered}\tag{19}$$

$$\begin{gathered}\varliminf_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\int\limits_2^t a(\tau)\,d\tau=\varliminf_{k\to\infty}\tfrac{6}{2^k}\sum_{s=2}^{k}(-1)^s(2^s-2^{s-1})=\\ =\varliminf_{k\to\infty}\tfrac{6}{2^k}\cdot\tfrac{(-2)^k+2}{3}=\lim_{m\to\infty}-\tfrac{2^{2m}-4}{2^{2m-1}}=-2.\end{gathered}\tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем

$$\int\limits_0^{2^{2k}}a(\tau)\,d\tau=(2+\varepsilon_k)2^{2k},\ \text{где } \varepsilon_k\to 0,\ \text{при } k\to\infty,\tag{21}$$

$$\int\limits_0^{2^{2k-1}}a(\tau)\,d\tau=(-2-\delta_k)2^{2k-1},\ \text{где } \delta_k\to 0,\ \text{при } k\to\infty.\tag{22}$$

Для $s\in[2^{2k-1};2^{2k}]$ имеем

$$\int\limits_0^{s}a(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^{2^{2k-1}}a(\tau)\,d\tau+\int\limits_{2^{2k-1}}^{s}a(\tau)\,d\tau=(-2-\delta_k)2^{2k-1}+6(s-2^{2k-1}),\tag{23}$$

а следовательно, в силу (21)–(23) получаем

$$\int\limits_0^{2^{2k}}b(\mu,s)e^{\int\limits_s^{2^{2k}}a(\tau)\,d\tau}\,ds\geqslant e^{\int\limits_0^{2^{2k}}a(\tau)\,d\tau}\int\limits_{2^{2k-1}}^{2^{2k}}e^{\alpha_k(\mu)s}e^{-\int\limits_0^{s}a(\tau)\,d\tau}\,ds=$$

$$=e^{(2+\varepsilon_k)2^{2k}}\int\limits_{2^{2k-1}}^{2^{2k}}e^{\alpha_k(\mu)s+(2+\delta_k)2^{2k-1}-6(s-2^{2k-1})}\,ds=$$

$$=e^{(2+\varepsilon_k)2^{2k}+(8+\delta_k)2^{2k-1}+(\alpha_k(\mu)-6)2^{2k-1}}\frac{1}{6-\alpha_k(\mu)}\left(1-e^{(\alpha_k(\mu)-6)2^{2k-1}}\right).$$

Таким образом, из последнего неравенства имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\int\limits_0^t b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds \geqslant 3+\frac{1}{2}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\alpha_k(\mu). \tag{24}$$

С другой стороны, из неравенств

$$\begin{gathered} e^{\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \leqslant D_\varepsilon e^{(2+\varepsilon)t},\ e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \leqslant D_\varepsilon e^{(2+\varepsilon)t},\ e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau} \leqslant e^{6(t-s)}, \\ b(\mu,t)\leqslant D_\varepsilon e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon)t},\ \text{где}\ \alpha(\mu)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\alpha_k(\mu), \end{gathered} \tag{25}$$

получаем

$$\int\limits_0^t b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds = \int\limits_0^{\frac{1}{2}t} b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds + \int\limits_{\frac{1}{2}t}^t b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant D_\varepsilon e^{(2+\varepsilon)t}\int\limits_0^{\frac{1}{2}t} D_\varepsilon e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon)s}D_\varepsilon e^{(2+\varepsilon)s}\,ds + \int\limits_{\frac{1}{2}t}^t D_\varepsilon e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon)s}e^{6(t-s)}\,ds =$$

$$= D_\varepsilon^3 e^{(2+\varepsilon)t}\frac{1}{2+\alpha(\mu)+2\varepsilon}\left(e^{(2+\alpha(\mu)+2\varepsilon)\frac{1}{2}t}-1\right)+$$
$$+D_\varepsilon e^{6t}\frac{1}{6-\alpha(\mu)-\varepsilon}\left(e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon-6)\frac{1}{2}t}-e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon-6)t}\right).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\int\limits_0^t b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds \leqslant 3+\frac{1}{2}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\alpha_k(\mu). \tag{26}$$

Таким образом, из (24) и (26), получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\int\limits_0^t b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds = 3+\frac{1}{2}\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\alpha_k(\mu).$$

Рассмотрим два решения системы (18)

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \\ 0 \end{pmatrix},\quad x_2(t)=\begin{pmatrix} \int\limits_0^t b(\mu,s)e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau}\,ds \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристические показатели решений $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ удовлетворяют равенствам

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x_1(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau = 2,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x_2(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \int\limits_0^t b(\mu, s) e^{\int\limits_s^t a(\tau)\, d\tau} ds = 3 + \frac{1}{2} \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k(\mu). \tag{27}$$

Следовательно, в силу леммы 4, имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x_2(t)\| > \frac{9}{4}.$$

Таким образом, решения $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ имеют различные характеристические показатели, а значит, образуют нормальную фундаментальную систему решений системы (18), и для показателей Ляпунова этой системы выполнены соотношения

$$\lambda_1(B(\mu, \cdot)) = 2, \quad \lambda_2(B(\mu, \cdot)) > \frac{9}{4}. \tag{28}$$

Пусть последовательность чисел $\{\mu^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$ из леммы 5. Тогда, из (8) и (9) имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_2(B(\mu^{(n)}, \cdot)) < \lambda_2(B(\mu, \cdot)).$$

Следовательно, точка μ не является точкой полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \lambda_2(B(\mu, \cdot))$. В силу произвольности точки μ получаем, что множество точек полунепрерывности снизу этой функции пусто.

По кусочно-непрерывной матричной функции $B(\mu, t)$ построим непрерывную по совокупности переменных такую матричную функцию $Q(\mu, t)$, $(\mu, t) \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}] \times [0; +\infty)$, удовлетворяющую свойству (17), что $\lambda_2(Q(\mu, \cdot)) = \lambda_2(B(\mu, \cdot))$ при всех $\mu \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$. Зафиксируем какую-либо последовательность $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющую неравенству

$$\xi_k \leqslant e^{-2^{k+2}} \cdot 2^{-k}.$$

Обозначим $c_k = 2^k - \xi_k$ и $d_k = 2^k + \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. В силу определения величины ξ_k верно неравенство $d_k < c_{k+1}$. Матричную функцию определим следующим образом:

$$Q(\mu, t) = \begin{cases} \frac{(t-c_k)B(\mu, c_k) - B(\mu, d_k)(t-d_k)}{2\xi_k}, & \text{при } t \in [c_k; d_k]; \\ B(\mu, t), & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

При каждом фиксированном $\mu \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$ функция $Q(\mu, t)$ является непрерывной функцией переменной $t \in [0; +\infty)$. Действительно, согласно определению функции $Q(\mu, \cdot)$, она на множестве $[0; +\infty) \setminus \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [c_k; d_k]$ совпадает с функцией $B(\mu, \cdot)$, которая по построению непрерывна на этом множестве, а на любом из отрезков $[c_k; d_k]$, $k \in \mathbb{N}$, график функции $Q(\mu, \cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точки с координатами $(c_k; B(\mu, c_k))$ и $(d_k; B(\mu, d_k))$. Поскольку имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\infty e^{t^2} \|Q(\mu, t) - B(\mu, t)\| \, dt = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{c_k}^{d_k} e^{t^2} \|Q(\mu, t) - B(\mu, t)\| \, dt \leqslant 12 \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = 12,$$

то в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot{y} = Q(\mu, t) y$ преобразованием Ляпунова приводится к системе $\dot{x} = B(\mu, t) x$. Поскольку при преобразовании Ляпунова показатели Ляпунова не изменяются, как это следует из их определения, то для любого $\mu \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$ верно равенство $\lambda_2(Q(\mu, \cdot)) = \lambda_2(B(\mu, \cdot))$.

Зададим отображение $Q : [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}] \times [0; +\infty) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ равенством $(\mu, t) \mapsto Q(\mu, t)$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, в области $G_1^k = \{(\mu, t) : t \in [c_k; d_k]\}$, $k \in \mathbb{N}$ функция $Q(\mu, t)$ непрерывна, поскольку, как это следует из ее определения является суммой произведения непрерывных функций. В области $G_2^k = \{(\mu, t) : t \in (d_k; c_{k+1})\}$ она непрерывна, так как совпадает с непрерывной в этой области функцией $B(\mu, t)$. На конец заметим, что в области G_2^k предельные значения функции $Q(\mu, t)$ на прямых $t = d_k$ и $t = c_{k+1}$ совпадает со значениями $B(\mu, d_k)$ и $B(\mu, c_{k+1})$ соответственно на этих прямых. Следовательно, отображение Q непрерывно по совокупности переменных.

Докажем, что отображение Q удовлетворяет свойству (17) на отрезке $[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$. Пусть $\mu_0 \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$. Из определения величины $\alpha_k(\mu)$ для любых $\mu \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$ и $t \in [0; +\infty)$ имеем

$$\begin{gathered} \|B(\mu_0, t) - B(\mu, t)\| = \\ = \|B(\mu_0, t) - \operatorname{diag}\{B(\mu, t)\} + \operatorname{diag}\{B(\mu, t)\} - B(\mu, t)\| \leqslant \\ \leqslant |b(\mu_0, t)| + |b(\mu, t)| \leqslant 2 e^{(1 - \frac{3}{\pi} \operatorname{arctg}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}))t}. \end{gathered} \tag{29}$$

Для произвольного положительного числа ε найдется $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $t \geqslant 2^{k_\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$e^{(1-\frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}(1+\frac{\sqrt{3}}{2}))t} < \varepsilon. \tag{30}$$

В силу непрерывности функций $\alpha_k(\cdot)$, $k \in \{1,\ldots,k_\varepsilon\}$, найдется такая окрестность точки μ_0, что для любого μ из этой окрестности выполнено неравенство

$$\sup_{t\in[0;2^{k_\varepsilon}]} \|B(\mu_0,t)-B(\mu,t)\| < \varepsilon. \tag{31}$$

В силу (37)—(39) получаем

$$\sup_{t\in[0;+\infty)} \|B(\mu_0,t)-B(\mu,t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\sup_{t\in[0;2^{k_\varepsilon}]} \|B(\mu_0,t)-B(\mu,t)\|, \sup_{t\in(2^{k_\varepsilon};+\infty)} \|B(\mu_0,t)-B(\mu,t)\|\} < \varepsilon.$$

Отображение Q удовлетворяет свойству (6). Действительно, согласно определению функции $Q(\mu,\cdot)$, она на множестве $[0;+\infty) \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [c_k;d_k]$ совпадает с функцией $B(\mu,\cdot)$, а на каждом из отрезков $[c_k;d_k]$, $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{t\in[c_k;d_k]} \|Q(\mu_0,t)-Q(\mu,t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[c_k;d_k]} \|\frac{(t-c_k)B(\mu_0,c_k)-B(\mu_0,d_k)(t-d_k)}{2\xi_k} -$$

$$-\frac{(t-c_k)B(\mu,c_k)-B(\mu,d_k)(t-d_k)}{2\xi_k}\| <$$

$$< \frac{(t-c_k)\varepsilon+(d_k-t)\varepsilon}{2\xi_k} = \varepsilon.$$

Таким образом, получаем

$$\sup_{t\in[0;+\infty)} \|Q(\mu_0,t)-Q(\mu,t)\| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{M} \equiv [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$, *тогда для* $n=2$ *и* $k=1$ *найдется такое отображение (5), удовлетворяющее условию (17), что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) пусто.*

Доказательство. Пусть B — отображение, построенное в лемме 6. Для каждого $\mu \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = C(\mu, t)x, \text{ где } C(\mu, t) = B(\mu, t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Используя (21)—(23), получаем

$$|\int\limits_{+\infty}^{2^{2k-2}} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{2^{2k-2}} a(\tau)\,d\tau} ds| = \int\limits_{2^{2k-2}}^{+\infty} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{2^{2k-2}} a(\tau)\,d\tau} ds \geqslant$$

$$\geqslant e^{\int\limits_{0}^{2^{2k-2}} a(\tau)\,d\tau} \left(\int\limits_{2^{2k-2}}^{2^{2k-1}} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{0} a(\tau)\,d\tau} ds + \int\limits_{2^{2k-1}}^{2^{2k}} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{0} a(\tau)\,d\tau} ds \right) =$$

$$= e^{(2+\varepsilon_{k-1})2^{2k-2}} \int\limits_{2^{2k-1}}^{2^{2k}} e^{(\alpha_k(\mu)-3)s+(2+\delta_k)2^{2k-1}-6(s-2^{2k-1})}\,ds =$$

$$= e^{(2+\varepsilon_{k-1})2^{2k-2}+(\delta_k+\alpha_k(\mu)-1)2^{2k-1}} \frac{1}{9-\alpha_k(\mu)} \left(1 - e^{(\alpha_k(\mu)-9)2^{2k-1}}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \int\limits_{t}^{+\infty} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds \geqslant 2 \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k(\mu). \tag{33}$$

С другой стороны, из неравенств (25) имеем

$$|\int\limits_{+\infty}^{t} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds| = \int\limits_{t}^{+\infty} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds =$$

$$= \int\limits_{t}^{2t} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds + \int\limits_{2t}^{+\infty} b(\mu, s)e^{-3s} e^{\int\limits_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t}^{2t} D_\varepsilon e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon-3)s} e^{6(s-t)}\,ds + D_\varepsilon e^{(2+\varepsilon)t} \int\limits_{2t}^{+\infty} D_\varepsilon e^{(\alpha(\mu)+\varepsilon-3)s} D_\varepsilon e^{(2+\varepsilon)s)}\,ds =$$

$$= D_\varepsilon e^{\alpha(\mu)+\varepsilon-3} \frac{1}{-3-\alpha(\mu)-\varepsilon} (1 - e^{-(-3-\alpha(\mu)-\varepsilon)t}) +$$

$$+ D_\varepsilon^3 e^{(2\alpha(\mu)+5\varepsilon)t} \frac{1}{1-\alpha(\mu)-2\varepsilon},$$

следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \int\limits_t^{+\infty} b(\mu, s) e^{-3s} e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau} \, ds \leqslant 2 \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k(\mu). \tag{34}$$

Таким образом, из неравенств (33) и (34) получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \int\limits_t^{+\infty} b(\mu, s) e^{-3s} e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau} \, ds = 2 \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k(\mu).$$

Рассмотрим два решения системы (32)

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \int\limits_{+\infty}^t b(\mu, s) e^{-3s} e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau} \, ds \\ e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Характеристические показатели решений $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ удовлетворяют равенствам

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x_1(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau = 2,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x_2(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_{+\infty}^t b(\mu, s) e^{-3s} e^{\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau} \, ds = 2 \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k(\mu). \tag{35}$$

Следовательно, в силу леммы 4, имеем

$$1 \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x_2(t)\| > -3.$$

Таким образом, решения $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ имеют различные характеристические показатели, а значит, образуют нормальную фундаментальную систему решений системы (32), и для показателей Ляпунова этой системы выполнены соотношения

$$\lambda_2(C(\mu, \cdot)) = 2, \quad 1 \geqslant \lambda_1(C(\mu, \cdot)) > -3. \tag{36}$$

Пусть последовательность чисел $\{\mu^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$ из леммы 5. Тогда, из (35) и (36) имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_1(C(\mu^{(n)}, \cdot)) < \lambda_1(C(\mu, \cdot)).$$

Следовательно, точка μ не является точкой полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \lambda_1(C(\mu,\cdot))$. В силу произвольности точки μ получаем, что множество точек полунепрерывности снизу этой функции пусто.

Как и в лемме 6, по кусочно-непрерывной матричной функции $C(\mu,t)$ построим непрерывную по совокупности переменных такую матричную функцию $P(\mu,t)$, $(\mu,t) \in [\frac{1}{6};\frac{1}{3}] \times [0;+\infty)$, удовлетворяющую свойству (17), что $\lambda_1(P(\mu,\cdot)) = \lambda_1(C(\mu,\cdot))$ при всех $\mu \in [\frac{1}{6};\frac{1}{3}]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы V. Для $k \in \{2,\ldots,n\}$ определим отображение

$$A : [0;\,1] \times [0;+\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$$

формулой

$$A(\mu,t) = \operatorname{diag}\{\underbrace{-4,\ldots,-4}_{k-2}, Q(\frac{\mu+1}{6},t), 4,\ldots,4\}, \tag{37}$$

где Q — функция, существование которой утверждается в лемме 3. Так как для показателей Ляпунова системы $\dot{x} = A(\mu,t)x$ с матрицей коэффициентов (37) справедливы равенства

$$\lambda_1(A(\mu,\cdot)) = -4,\ldots,\lambda_{k-2}(A(\mu,\cdot)) = -4,$$

$$\lambda_{k-1}(A(\mu,\cdot)) = \lambda_1(Q(\mu,\cdot)) = 2, \quad \lambda_k(A(\mu,\cdot)) = \lambda_2(Q(\mu,\cdot)) < 3$$

$$\lambda_{k+1}(A(\mu,\cdot)) = 4,\ldots,\lambda_n(A(\mu,\cdot)) = 4,$$

то множество точек полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu,\cdot))$ пусто.

Для $k=1$ определим отображение

$$A : [0;\,1] \times [0;+\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$$

формулой

$$A(\mu,t) = \operatorname{diag}\{\underbrace{4,\ldots,4}_{n-2}, P(\frac{\mu+1}{6},t)\}, \tag{38}$$

где P — функция, существование которой утверждается в лемме 7. Так как для показателей Ляпунова системы $\dot{x} = A(\mu,t)x$ с матрицей коэффициентов (38) справедливы равенства

$$\lambda_1(A(\mu,\cdot)) = \lambda_1(P(\mu,\cdot)), \quad \lambda_2(A(\mu,\cdot)) = \lambda_2(P(\mu,\cdot)) = 2$$

$$\lambda_3(A(\mu,\cdot))=4,\ldots,\lambda_n(A(\mu,\cdot))=4,$$

то множество точек полунепрерывности снизу функции $\mu\mapsto\lambda_1(A(\mu,\cdot))$ пусто. Теорема доказана.

§ 3 Точный бэровский класс мажорант показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Обозначим через $\overline{\lambda}_k(A)$ минимальную полунепрерывной сверху мажоранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\overline{\lambda}_k(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\{B\colon \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\|B(t)\|<\varepsilon\}}\lambda_k(A+B).$$

В докладе [58] поставлена задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит функция $\overline{\lambda}_k(\cdot)$ на пространстве M_n^c, а в [78] установлено, что она принадлежит второму классу Бэра. Следующая теорема утверждает, что она не принадлежит первому классу Бэра.

Теорема VI [106]. *Для $n\geqslant 1$ и всякого $k\in\{1,\ldots,n\}$ функция $\overline{\lambda}_k(\cdot):M_n\to\mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Рассмотрим две диагональные системы

$$\dot{x}=\mathrm{diag}\{1,\ldots,1\}x,\quad \dot{y}=\mathrm{diag}\{0,\ldots,0\}y.$$

Для первой системы $\overline{\lambda}_k=1$, а для второй $\overline{\lambda}_k=0$. Следовательно, в силу теоремы III § 4 гл. I, функция $\overline{\lambda}_k(\cdot):M_n\to\mathbb{R}$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c. Теорема доказана.

Найдем минимальную функцию первого класса Бэра на пространстве M_n^u, оценивающую k-й показатель Ляпунова сверху.

Теорема VII [102]. *Пусть $\varphi(\cdot):M_n\to\mathbb{R}$ — остаточный функционал первого класса Бэра на M_n^u и для любой системы $A\in M_n$ выполнены неравенства $\lambda_k(A)\leqslant\varphi(A)\leqslant\overline{\lambda}_k(A)$, тогда $\varphi(A)\equiv\overline{\lambda}_k(A)$.*

Доказательство. В силу определения функционал $\overline{\lambda}_k$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. В [73] доказана справедливость следующих равенств

$$\overline{\lambda}_k(A)=\widetilde{\lambda}_k(A),\ \text{где}\ \widetilde{\lambda}_k(A)=\sup_{B\in\overline{X}(A)}\lambda_k(B),$$

из которых вытекает, что функционал $\widetilde{\lambda}_k$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.

Пусть остаточный функционал $\varphi(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u и для произвольной системы A выполнены неравенства $\lambda_k(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \widetilde{\lambda}_k(A)$. Докажем, что $\varphi(A) \equiv \widetilde{\lambda}_k(A)$. Допустим, что существуют система A и число $\delta > 0$ такие, что выполнено равенство $\varphi(A) = \widetilde{\lambda}_k(A) - \delta$. В силу определения функционала $\widetilde{\lambda}_k$ существует такая система $B \in \overline{X}(A)$, что $\lambda_k(B) \geqslant \widetilde{\lambda}_k(A) - \frac{\delta}{2}$, а следовательно, имеем $\varphi(B) \geqslant \lambda_k(B) > \widetilde{\lambda}_k(A) - \delta = \varphi(A)$. Согласно теореме II § 3 гл. I, функционал φ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Получили противоречие, следовательно $\varphi(A) \equiv \widetilde{\lambda}_k(A) \equiv \overline{\lambda}_k(A)$. Теорема VII доказана.

§ 4 Точный бэровский класс минорант показателей Ляпунова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Обозначим через $\underline{\lambda}_k(A)$ максимальную полунепрерывной снизу миноранту k-го показателя Ляпунова системы (1), определяемую формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\{B \colon \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|B(t)\| < \varepsilon\}} \lambda_k(A + B).$$

В докладе [62] была поставлена задача о минимальном классе Бэра, которому принадлежит функция $\underline{\lambda}_k(\cdot)$ на пространстве M_n^c. В работе [14] установлена принадлежность функции $\underline{\lambda}_k(\cdot)$ третьему классу Бэра на пространстве M_n^c (ранее это было установлено для $n = 3$ в работе [75]). При $n = 1$ максимальная полунепрерывная снизу миноранта показателя Ляпунова совпадает с самим показателем Ляпунова, а следовательно принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_1^c и не принадлежит первому классу Бэра.

Пусть $\mathfrak{M}$ метрическое пространство, а отображение

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{39}$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено по второму аргументу при всяком фиксированном значении первого.

Теорема VIII [105]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\,1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ найдется отображение (39), для которого функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Так как множество иррациональных чисел на отрезке $[0,\,1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ (см. п. 10 §1 гл. I), то достаточно построить отображение (39) на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$. Рассмотрим случай $k = n$.

Лемма 8. *Если $n \geqslant 2$, то для $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$ существует такое отображение (39), что функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_n(A(\mu,\cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Для доказательства непринадлежности функции $\underline{\lambda}_n : M_n \to \mathbb{R}$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c нам понадобятся несколько следующих результатов и определений. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} u_1(t) & 0 \\ 0 & u_2(t) \end{pmatrix} x.$$

Возьмем произвольные положительные числа ε и T. Пусть $[p_k,\, p_{k+1})$, $p_k = l_k T$ интервал максимальной длины такой, что для всех sT из этого промежутка выполнено одно из неравенств

$$\Bigl|\int\limits_{sT}^{(s+1)T} (u_1(t) - u_2(t))\,dt\Bigr| \leqslant \varepsilon T, \qquad \int\limits_{sT}^{(s+1)T} (u_2(t) - u_1(t))\,dt > \varepsilon T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} (u_1(t) - u_2(t))\,dt > \varepsilon T.$$

Пусть $r_T(t)$, $R_T(t)$ — функции, определяемые равенствами

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} r_T(t)\,dt = \min_{i=1,\,2}\left(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(t)\,dt\right), \qquad \int\limits_{sT}^{(s+1)T} R_T(t)\,dt = \max_{i=1,\,2}\left(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(t)\,dt\right).$$

В [32] доказано, что

$$\underline{\lambda}_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\Psi(\varepsilon,T,t),$$
$$\Psi(\varepsilon,T,t) = \frac{\sup\limits_{\theta,\eta,\tau}\left(\int\limits_0^\tau R_T(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_\theta^\eta (R_T(\zeta)-r_T(\zeta))\,d\zeta+\int\limits_0^t r_T(\zeta)\,d\zeta\right)}{\tau+t} \qquad (40)$$

и супремум вычисляется по всем θ и η, принадлежащим всякому k-му отрезку $\max\{\tau,p_k\}\leqslant\theta\leqslant\eta\leqslant\max\{t,p_{k+1}\}$ и всем $\tau\leqslant t=\text{fix}$.

Доказательство. Каждому $\mu=(\mu_k)_{k=1}^\infty\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений $\dot{x}=U(\mu,t)x$ с кусочно-непрерывной функцией

$$U(\mu,t)=\begin{pmatrix} u(\mu,t) & 0\\ 0 & -u(\mu,t)\end{pmatrix}x,$$

где

$$u(\mu,t)=\begin{cases} 0, & \text{при } \tau_k\leqslant t<t_k;\\ 1, & \text{остальных } t,\end{cases}$$

$$\tau_k=\sum_{i=1}^k i^2+i-\min\{k,\mu_{[\log_2 k]}\},\ t_k=\sum_{i=1}^k i^2+i,\quad k=3,4,5,\ldots.$$

Отметим несколько свойств разбиений $(\tau_k)_{k=1}^\infty$ и $(t_k)_{k=1}^\infty$.

1. Для любого $k=3,4,5,\ldots$ выполнены неравенства

$$\tau_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}-\min\{k,\mu_{[\log_2 k]}\}\leqslant 2\frac{(3k)^3}{6}=9k^3,$$
$$\tau_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}-\min\{k,\mu_{[\log_2 k]}\}\geqslant\frac{k^3}{6}.$$

2. Аналогично получаем

$$t_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}\leqslant 2\frac{(3k)^3}{6}=9k^3,$$
$$t_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}\geqslant\frac{k^3}{6}.$$

3. Для любого $m=1,2,\ldots$ выполнены неравенства

$$\sum_{l=1}^{2s}(\tau_{m+l}-t_{m+l-1})(-1)^l=$$
$$-((m+1)^2+(m+1)-\min\{m+1,\mu_{[\log_2(m+1)]}\})+$$

$$+((m+2)^2+(m+2)-\min\{m+2,\mu_{[\log_2(m+2)]}\})-\ldots$$
$$\ldots-((m+2s-1)^2+(m+2s-1)-\min\{m+2s-1,\mu_{[\log_2(m+2s-1)]}\})+$$
$$+((m+2s)^2+(m+2s)-\min\{m+2s,\mu_{[\log_2(m+2s)]}\})\leqslant$$
$$\leqslant 2m+3+m+2+\ldots+2m+4s-1+m+2s\leqslant 3ms+3(s+1)^2.$$

4. Аналогично для любого $m=1,2,\ldots$, получаем

$$\sum_{l=1}^{2s+1}(\tau_{m+l}-t_{m+l-1})(-1)^{l+1}=$$
$$((m+1)^2+(m+1)-\min\{m+1,\mu_{[\log_2(m+1)]}\})-$$
$$-((m+2)^2+(m+2)-\min\{m+2,\mu_{[\log_2(m+2)]}\})+$$
$$+((m+3)^2+(m+3)-\min\{m+3,\mu_{[\log_2(m+3)]}\})-\ldots$$
$$\ldots-((m+2s)^2+(m+2s)-\min\{m+2s,\mu_{[\log_2(m+2s)]}\})+$$
$$+((m+2s+1)^2+(m+2s+1)-\min\{m+2s+1,\mu_{[\log_2(m+2s+1)]}\})\leqslant$$
$$\leqslant((m+1)^2+(m+1)-\min\{m+1,\mu_{[\log_2(m+1)]}\})+$$
$$+2m+5+m+3+\ldots+2m+4s+1+m+2s+1\leqslant$$
$$\leqslant 3(m+1)^2+3ms+2s+3(s+1)^2.$$

Для каждого $\mu\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ вычислим $\underline{\lambda}_2(U(\mu,\cdot))$. Пусть $\mu\notin\mathbf{E}$, тогда существуют подпоследовательность $(\mu_{[\log_2 k']})_{k'=1}^{\infty}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{[\log_2 k']}\equiv q$. Возьмем произвольное число $T>2q$. Пусть

$$s_{\min}(k')=\min\{s|\, sT>t_{2^{k'}}\},\quad s_{\max}(k')=\max\{s|\, sT\leqslant t_{2^{k'+1}}\}.$$

Можно считать k' настолько большим, что $t_l-t_{l-1}>2T$ при $l\in\{2^{k'},\ldots,2^{k'+1}\}$. Итак, если $s\in\{s_{\min}(k'),\ldots,s_{\max}(k')-1\}$, то имеем

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T}(2u(\mu,\zeta)-1)\,d\zeta\geqslant 2T-2q\geqslant T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T}R_T(\mu,t)\,dt=\max_{i=1,\,2}\left(\int\limits_{sT}^{(s+1)T}u_i(\mu,t)\,dt\right)\geqslant T-q>T-\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}T.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} r_T(\mu,t)\,dt = \min_{i=1,2}\left(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(\mu,t)\,dt\right) \geqslant -\sup_{t\geqslant 0}\|U(\mu,t)\|T = -T,$$

$$\int\limits_{sT}^{(s+1)T} R_T(\mu,t)\,dt = \max_{i=1,2}\left(\int\limits_{sT}^{(s+1)T} u_i(\mu,t)\,dt\right) \geqslant -\sup_{t\geqslant 0}\|U(\mu,t)\|T = -T.$$

Итак, из формулы (40), полагая $\tau = \theta = s_{\min}(k')T$, $\eta = t = s_{\max}(k')T$, находим, что

$$\Psi(\mu,\varepsilon,T,t) \geqslant \frac{\int\limits_0^{s_{\max}(k')T} R_T(\mu,t)\,dt + \int\limits_0^{s_{\min}(k')T} r_T(\mu,t)\,dt}{s_{\max}(k')T + s_{\min}(k')T} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{1}{2}(s_{\max}(k')T - s_{\min}(k')T) - 2s_{\min}(k')T}{s_{\max}(k')T + s_{\min}(k')T} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{1}{2}(t_{2^{k'+1}} - t_{2^{k'}}) - 2t_{2^{k'}} - 4T}{t_{2^{k'+1}} + t_{2^{k'}} + T},$$

откуда получаем

$$\underline{\lambda}_2(U(\mu,\cdot)) \geqslant \overline{\lim_{k'\to\infty}} \frac{\frac{1}{2}(t_{2^{k'+1}} - t_{2^{k'}}) - 2t_{2^{k'}} - 4T}{t_{2^{k'+1}} + t_{2^{k'}} + T} \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{k'\to\infty}} \frac{\frac{1}{2}(2^{3k'+3} - 2^{3k'} - T) - 2^{3k'+1} - 4T}{2^{3k'+3} + 2^{3k'} + T} = \frac{1}{6}.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$. Рассмотрим систему $\dot{x} = (U(\mu,t) + B_m(\mu,t))x$, где

$$B_m(\mu,t) = \begin{cases} (-1)^k \frac{\pi}{2(t_k-\tau_k)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } \tau_k \leqslant t < t_k; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$k = m, m+1, \ldots .$$

У этой системы при всяком $m = 1, 2, \ldots$ показатели Ляпунова не превосходят 0. В самом деле, рассмотрим решение $x_1(t)$ с начальным условием (1, 0). Это решение ведет себя следующим образом: при $t < \tau_m$ оно идет по оси Ox и $\ln\|x_1(t)\| \leqslant \tau_m$, за время от τ_m до t_m оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^m\frac{\pi}{2}$, затем при $t_m < t < \tau_{m+1}$ идет по оси Oy и $\ln\|x_1(t)\| - \ln\|x_1(t_m)\| = -(t-t_m)$, за время от τ_{m+1} до t_{m+1} оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^{m+1}\frac{\pi}{2}$ (т.е. снова попадет на ось Ox), затем при $t_{m+1} < t < \tau_{m+2}$ идет по оси Ox и $\ln\|x_1(t)\| - \ln\|x_1(t_m)\| = (t-t_{m+1})$, и т. д., в результате получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|x_1(t)\| \leqslant \lim_{s\to\infty}\frac{\tau_m + \sum\limits_{l=1}^{2s}(\tau_{m+l}-t_{m+l-1})(-1)^l}{\tau_{m+2s}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{s\to\infty}\frac{9m^3+3ms+3(s+1)^2}{\frac{(2m+2s)^3}{6}} = 0.$$

Рассмотрим решение $x_2(t)$ с начальным условием $(0,\,1)$. Это решение ведет себя следующим образом: при $t<\tau_m$ оно идет по оси Oy и $\ln\|x_2(t)\| \leqslant -\tau_m$, за время от τ_m до t_m оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^m\frac{\pi}{2}$, затем при $t_m < t < \tau_m$ оно идет по оси Ox и $\ln\|x_2(t)\| - \ln\|x_2(t_m)\| = (t-t_m)$, за время от τ_{m+1} до t_{m+1} оно поворачивается вокруг начала координат на угол $(-1)^{m+1}\frac{\pi}{2}$ (т.е. снова попадает на ось Oy), затем при $t_{m+1}<t<\tau_{m+2}$ идет по оси Oy и

$$\ln\|x_2(t)\| - \ln\|x_2(t_m)\| = -(t-t_{m+1}),$$

и т.д. В результате

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| = \overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{-\tau_m + \sum\limits_{l=1}^{2s+1}(\tau_{m+l}-t_{m+l-1})(-1)^{l+1}}{\tau_{m+s}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{s\to\infty}\frac{-\frac{m^3}{6}+3(m+1)^2+3ms+2s+3(s+1)^2}{\frac{(2m+2s)^3}{6}} = 0.$$

Итак, построены два линейно независимых решения системы $\dot{x} = (U(\mu,t)+B_m(\mu,t))x$, с неположительными показателями, а значит, показатели Ляпунова системы не превосходят 0. Так как $\mu\in\mathbf{E}$, то для всякого $\delta>0$ существует $k(\delta)$ такое, что при всяком $m>k(\delta)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|U(\mu,t)-U(\mu,t)-B_m(\mu,t)\| \leqslant \delta.$$

Из определения следует, что

$$\underline{\lambda}_2(U_\mu) \leqslant \lim_{m\to\infty}\lambda_2(U(\mu,\cdot)+B_m(\mu,\cdot)) \leqslant 0.$$

Для отображения $(\mu, t) \mapsto U(\mu, t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя $\underline{\lambda}_2$, существует такое отображение

$$Q : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^2$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\underline{\lambda}_2(Q(\mu, \cdot)) = \underline{\lambda}_2(U(\mu, \cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \operatorname{diag}\{Q(\mu, t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}\}.$$

Из непрерывности по совокупности переменных отображения A, в силу леммы 7 § 5 гл. I, следует, что функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^c$, определяемая формулой $\mu \mapsto A(\mu, \cdot)$, непрерывна.

Допустим, что функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_n(\varphi(\mu))$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда, в силу леммы 4 § 2 гл. I замыкание множеств $\underline{\lambda}_n(\varphi(\mathbf{E}))$ и $\underline{\lambda}_n(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \backslash \mathbf{E}))$ непусто.

С другой стороны

$$\underline{\lambda}_n(\varphi(\mu)) \leqslant 0, \text{ при } \mu \in \mathbf{E}; \; \underline{\lambda}_n(\varphi(\mu)) \geqslant \frac{1}{6}, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_n(A(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Лемма доказана.

Рассмотрим случай $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Напомним [25], что нижний центральный показатель определяется формулой

$$\omega(A) = \lim_{T \to \infty} \varlimsup_{m \to \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A(jT, (j+1)T)\|^{-1}, \tag{41}$$

где $X_A(t, s)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Лемма 9 [95]. *Если $n \geqslant 2$, то для $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathbb{N})$ существует такое отображение (39), что функция $\mu \mapsto \omega(A(\mu, \cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Каждому $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений $\dot{x} = U(\mu, t)x$ с кусочно-непрерывной функцией

$$U(\mu,t) = \begin{pmatrix} u(\mu,t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; u(\mu,t) = \begin{cases} -1, & \text{при } t \in [t_{2k-1}, t_{2k}); \\ 1, & \text{при } t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{gathered} t_1 = 0,\, t_2 = 1, \ldots,\, t_k = t_{k-1} + \tau_k, \\ \tau_k = 2^{\min\{[\log_2(\log_2 k)],\, \mu_{[\log_2(\log_2 k)]}\}}. \end{gathered} \tag{43}$$

Отметим два свойства разбиения (43), которые будут использоваться ниже.

1. Так как для τ_k выполнено неравенство

$$\tau_k = 2^{\min\{[\log_2(\log_2 k)],\, \mu_{[\log_2(\log_2 k)]}\}} \leqslant 2^{\log_2(\log_2 k)} = \log_2 k,$$

   и для t_k имеем

$$t_k = 1 + 1 + \ldots + 2^{\min\{[\log_2(\log_2 k)],\, \mu_{[\log_2(\log_2 k)]}\}} \geqslant k.$$

   Получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{t_{k+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1} - \tau_{k+1}}{t_{k+1} + \tau_{k+1}} = 1. \tag{44}$$

2. Так как для $t_{2^{2^k}}$ выполнены неравенства

$$t_{2^{2^k}} = 1 + 1 + \ldots + 2^{\min\{k,\, \mu_k\}} \geqslant 2^{2^k},$$

$$t_{2^{2^k}} = 1 + 1 + \ldots + 2^{\min\{k,\, \mu_k\}} \leqslant 2^k \cdot 2^{2^k},$$

   получаем

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{t_{2^{2^k}}}{t_{2^{2^{k+1}}}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2^k+k}}{t_{2^{2^{k+1}}}} = \lim_{k\to\infty} 2^{2^k+k-2^{k+1}} = 0. \tag{45}$$

Для каждого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ вычислим $\omega(U(\mu,\cdot))$. Используя формулу (41), получим

$$\omega(U(\mu,\cdot)) = \lim_{i\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m \cdot 2^i} \sum_{j=0}^{m-1} d(\mu,i,j), \text{где}$$

$$d(\mu,i,j) = \ln \|X_{U(\mu,\cdot)}(j \cdot 2^i, (j+1)\cdot 2^i)\|^{-1}.$$

Так как оператор Коши системы (42) имеет вид

$$X_{U(\mu,\cdot)}(j \cdot 2^i, (j+1)\cdot 2^i) = \begin{pmatrix} e^{-\int\limits_{j\cdot 2^i}^{(j+1)\cdot 2^i} u(\mu,\tau)\,d\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$d(\mu,i,j)=\min\{\int\limits_{j\cdot 2^i}^{(j+1)\cdot 2^i} u(\mu,\tau)\,d\tau,\,0\}.$$

Зафиксируем $i\in\mathbb{N}$. Если $\mu\in\mathbf{E}$, то существует такое четное натуральное число h, что для любого $k>\frac{h}{2}+1$ выполнено неравенство $\mu_{[\log_2(\log_2 k)]}>i$. Вычислим $d(\mu,i,j)$ при $j>h$. Из определения функции $u(\mu,\cdot)$ получаем (при $2k\geqslant h$)

$$d(\mu,i,j)=\begin{cases}0, & \text{при } t_{2k}\leqslant j\cdot 2^i<t_{2k+1};\\ -(t_{2k+2}-t_{2k+1}), & \text{при } t_{2k+1}\leqslant j\cdot 2^i<t_{2k+2},\end{cases}$$

следовательно

$$\sum_{j=t_{2k}\cdot 2^{-i}}^{j=t_{2k+2}\cdot 2^{-i}-1} d(\mu,i,j)=-\frac{1}{2}(t_{2k+2}-t_{2k+1}),\text{при } 2k\geqslant h.$$

Пусть $m-1>h+2$, а p_m — максимальное четное число, удовлетворяющее неравенству $t_{p_m}\leqslant(m-1)\cdot 2^i$, тогда можно записать

$$\sum_{j=0}^{m-1}d(\mu,i,j)=\sum_{j=0}^{j=h-1}d(\mu,i,j)+\sum_{j=h}^{t_{p_m}\cdot 2^{-i}-1}d(\mu,i,j)+\sum_{j=t_{p_m}\cdot 2^{-i}}^{m-1}d(\mu,i,j)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}d(\mu,i,j)=\sum_{j=0}^{j=h-1}d(\mu,i,j)+(-\frac{1}{2})(t_{p_m}-t_h)+\sum_{j=t_{p_m}\cdot 2^{-i}}^{m-1}d(\mu,i,j).$$

Так как

$$\sum_{j=t_{p_m}\cdot 2^{-i}}^{m-1}d(\mu,i,j)\leqslant\sup_{t\geqslant 0}\|A_\mu(t)\|(m\cdot 2^i-t_{p_m})=m\cdot 2^i-t_{p_m},$$

то, используя (44), получаем

$$\omega(U(\mu,\cdot))=\lim_{i\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m\cdot 2^i}\sum_{j=0}^{m-1}d(\mu,i,j)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{i\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m\cdot 2^i}\left(m\cdot 2^i-\frac{3}{2}t_{p_m}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{i\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\left(1-\frac{3}{2}\frac{t_{p_m}}{m\cdot 2^i}\right)\leqslant\lim_{i\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\left(1-\frac{3}{2}\frac{t_{p_m}}{t_{p_m+2}}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, тогда существуют подпоследовательность $(\mu_{[\log_2(\log_2 k')]}) \subset (\mu_{[\log_2(\log_2 k)]})$ и натуральное число q, такие, что $\{\mu_{[\log_2(\log_2 k')]}\} \equiv q$. Фиксируем произвольное $i > q$. В силу (45) существует такое k'_0, что для всех $k' \geqslant k'_0$ выполнено условие: дробь

$$\frac{t_{2^{2^{k'+1}}} - t_{2^{2^{k'}}}}{2^i} \tag{46}$$

является четным натуральным числом. Тогда из (46) и определения функции $u(\mu, \cdot)$ заключаем, что $d(\mu, i, j) = 0$ при $T_{k'} \leqslant j \cdot 2^i < T_{k'+1}$, где $T_{k'} = t_{2^{2^{k'}}}$. Таким образом, получаем

$$\sum_{j=T_{k'} \cdot 2^{-i}}^{T_{k'+1} \cdot 2^{-i}-1} d(\mu, i, j) = 0$$

откуда, используя (45), получаем

$$\omega(U(\mu, \cdot)) \geqslant \lim_{i \to \infty} \overline{\lim_{k' \to \infty}} \frac{1}{T_{k'+1}} \left(\sum_{j=0}^{j=T_{k'} \cdot 2^{-i}-1} d(\mu, i, j) + \sum_{j=T_{k'} \cdot 2^{-i}}^{j=T_{k'+1} \cdot 2^{-i}-1} d(\mu, i, j) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k' \to \infty} -\frac{T_{k'}}{T_{k'+1}} = 0.$$

Для отображения $(\mu, t) \mapsto U(\mu, t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя ω, существует такое отображение $Q : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^2$ непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\omega(Q(\mu, \cdot)) = \omega(U(\mu, \cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \operatorname{diag}\{\underbrace{2, \ldots, 2}_{n-2}, Q(\mu, t)\}.$$

Из непрерывности отображения A, в силу леммы 7 § 5 гл. I, следует, что функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^c$, определяемая формулой $\mu \mapsto A(\mu, \cdot)$, непрерывна.

Допустим, что функция $\mu \mapsto \omega(\varphi(\mu))$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда, в силу леммы 4 § 2 гл. I, замыкание множеств $\omega(\varphi(\mathbf{E}))$ и $\omega(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \backslash \mathbf{E}))$ непусто.

С другой стороны

$$-1 \leqslant \omega(\varphi(\mu)) \leqslant -\frac{1}{2}, \text{ при } \mu \in \mathbf{E}; \, \omega(\varphi(\mu)) \geqslant 0, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu \mapsto \omega(A(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Лемма 9 доказана.

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \mathrm{diag}\{2, \ldots, 2, Q(\mu, t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{k-1}\},$$

где отображение Q из доказательства леммы 9.

В работе [50] доказано равенство $\omega(A(\mu, \cdot)) = \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$. Следовательно функция $\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu, \cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра. Теорема доказана.

Из теоремы IV § 5 гл. I и теоремы VIII получаем

Следствие 1 [105]. *Если $n > 1$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$, то функция $\underline{\lambda}_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

III Бэровская классификация некоторых вспомогательных показателей

§ 1 Точный класс Бэра δ-показателей на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Наряду с показателями Ляпунова линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной ограниченной оператор-функцией $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, часто рассматривают следующие величины. Пусть D — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$. Этот шар под действием оператора Коши $X_A(t, 0)$ системы (1) переходит в эллипсоид. Пусть

$$\delta_1(X_A(t, 0)) \leqslant \ldots \leqslant \delta_n(X_A(t, 0))$$

полуоси этого эллипсоида, которые совпадают с сингулярными числами оператора Коши $X_A(t,\, 0)$ [11, стр. 24]. В [68] введены следующие величины

$$\delta_k(A) = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \delta_k(X_A(t,\, 0)). \tag{2}$$

Для произвольной системы (1) показатели Ляпунова и показатели (2) удовлетворяют соотношениям

$$\delta_1(A) \leqslant \lambda_1(A), \ldots, \delta_{n-1}(A) \leqslant \lambda_{n-1}(A), \quad \delta_n(A) = \lambda_n(A).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{3}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \delta_k(A(\mu, \cdot)). \tag{4}$$

Изучим свойства функции (4) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема I. *Для любого отображения (3) функция (4) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Если же $\mathfrak{M}$ полно, то в типичной по Бэру точке эта функция полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Формулу (2) перепишем в виде

$$\delta_k(A) = \lim_{m\to\infty} \psi_k^m(A), \text{ где } \psi_k^m(A) = \lim_{s\to\infty} \max_{j\in\{m,\ldots,s\}} \frac{1}{j} \ln \delta_k(X_A(j,0)). \qquad (5)$$

Из леммы 10 § 5 гл. I следует, что функция $\mu \mapsto \delta_k(X_{A(\mu,\cdot)}(j,0))$ является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Таким образом, в силу формулы (5), функция (4) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

Из формулы (5) следует, что функция (4) является поточечным пределом невозрастающей последовательности функций $(\psi_k^m)_{m=1}^\infty$ первого класса Бэра. Следовательно, в силу леммы 1 § 2 гл. I, функция (4) в типичной по Бэру точке полунепрерывна сверху. Теорема I доказана.

В силу теоремы I и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 1 [106]. *Для любого $k \in \{1,\ldots,n\}$ функция $\delta_k : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции δ_k второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема II [106]. *Если $n \geqslant 2$, то функция $\delta_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [2^{2k-2}, 2^{2k-1}); \\ -1, & \text{при } t \in [2^{2k-1}, 2^{2k}), \end{cases} \qquad k = 1,2,3,\ldots,$$

и функцию

$$g(t) = \frac{1}{l}, \text{ при } t \in [2^{l-1}, 2^l), \quad l = 1,2,3,\ldots,$$

значения f и g на $[0,\,1)$ не играют роли: для простоты считаем здесь $f(t) = g(t) = 0$. Для функции f имеем

$$\begin{aligned} \varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \int_0^t f(\tau)\,d\tau &= \varlimsup_{k\to\infty} \tfrac{1}{2^k} \sum_{s=1}^k (-1)^s (2^s - 2^{s-1}) = \\ &= \varlimsup_{k\to\infty} \tfrac{(-2)^{k+1}-1}{-6\cdot 2^k} = \varlimsup_{m\to\infty} \tfrac{2^{2m+1}-1}{6\cdot 2^{2m}} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Рассмотрим две системы $\dot{x} = U_1(t)x$ и $\dot{y} = U_2(t)y$, где

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор Коши первой системы имеет вид

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а второй

$$Y(t,0) = \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau} & e^{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau} \int\limits_0^t g(s) e^{-\int\limits_0^s f(s)\,d\tau} ds \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для сингулярных чисел линейного оператора X справедливы равенства [11, стр. 24]

$$\delta_k(X) = \min_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \|X_L\|, \tag{7}$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество всех векторных подпространств $L \subseteq R^n$ размерности k, X_L — его сужение на подпространство L. Из формулы (7) для системы $\dot{x} = U_1(t)x$ имеем

$$\delta_1(U_1) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \min_{x\neq 0} \|X(t,0)x\| = 0,$$

$$\delta_2(U_1) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|X(t,0)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \max\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau,\, 0\} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $t_m = 2^{2m}$ и $T_m = 2^{2m+1}$. Тогда, согласно (6) и определению $f(t)$, имеем

$$\int\limits_0^{T_m} f(\tau)\,d\tau = (\frac{1}{3} + \varepsilon_m)T_m, \quad \varepsilon_m \to 0, \tag{8}$$

а для $s \in [t_m, T_m]$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{t_m} f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_m}^s f(\tau)\,d\tau = \\ = (-\tfrac{1}{3} - \beta_m)t_m + (s - t_m), \quad \beta_m \to 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Далее

$$\delta_2(U_2) \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln(e^{\int\limits_0^t f(s)\,ds} \int\limits_0^t g(s) e^{-\int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau} ds) \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{T_m} \ln(e^{\int\limits_0^{T_m} f(s)\,ds} \int\limits_{t_m}^{T_m} g(s) e^{-\int\limits_0^s f(\tau)\,d\tau} ds).$$

Оценим последнее выражение снизу с помощью (8) и (9). Так как

$$\int\limits_{t_m}^{T_m} g(\tau) e^{-\int\limits_0^s f(\tau)\,ds} d\tau = \frac{1}{2m+1} e^{(\frac{1}{3}+\beta_m)t_m}(1-e^{t_m-T_m}) \geqslant \frac{1}{2(2m+1)} e^{(\frac{1}{3}+\beta_m)t_m}.$$

Таким образом, для системы $\dot{x} = U_2(t)x$ получаем

$$\delta_1(U_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \min_{x\neq 0} \|Y(t,0)x\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{3},$$

$$\delta_2(U_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Y(t,0)\| \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \int\limits_0^t g(\tau) e^{\int\limits_\tau^t f(s)} ds \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{T_m}((\frac{1}{3}+\varepsilon_m)T_m + (\frac{1}{3}+\beta_m)t_m) - \ln((2m+1)2) = \frac{1}{2}.$$

По кусочно-непрерывным функциям $U_k(\cdot)$, $k=1,2$ и последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ таких, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(2^m+\varepsilon_m)^2} \varepsilon_m \leqslant 1,$$

построим функции $A_k(\cdot)$, $k=1,2$, следующим образом

$$A_k(t) = \begin{cases} R_m^k \cdot (2^m - \varepsilon_m) + U_k(2^m+\varepsilon_m), \text{ при } t \in [2^m-\varepsilon_m; 2^m+\varepsilon_m]; \\ U_k(t), \text{ при остальных } t, \end{cases}$$

$$R_m^k = \frac{U_k(2^m+\varepsilon_m) - U_k(2^m-\varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$

Эти функции непрерывны по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $U_k(\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [2^m-\varepsilon_m, 2^m+\varepsilon_m]$, функция $A_k(\cdot)$ совпадает с функцией $U_k(\cdot)$, а на любом из отрезков $[2^m-\varepsilon_m, 2^m+\varepsilon_m]$ график функции $A_k(\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(2^m-\varepsilon_m, U_k(2^m-\varepsilon_m))$ и точку с координатами $(2^m+\varepsilon_m, U_k(2^m+\varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^\infty e^{t^2}\|A_k(t)-U_k(t)\|\,dt = \sum_{m=1}^\infty \int\limits_{2^m-\varepsilon_m}^{2^m+\varepsilon_m} \|A_k(t)-U_k(t)\|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\|A_k(t)-U_k(t)\| \sum_{m=1}^\infty 2e^{(2^m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 4,$$

то в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot y = A_k(t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot x = U_k(t)x$, следовательно

$$\delta_1(A_1)=\delta_1(U_1),\ \delta_2(A_1)=\delta_2(U_1),$$

$$\delta_1(A_2)=\delta_1(U_2),\ \delta_2(A_2)=\delta_2(U_2).$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\|U_1(t)-U_2(t)\|=0,$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\|A_1(t)-A_2(t)\|=0.$$

Докажем, что функция $\delta_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Рассмотрим две блочно-диагональные системы

$$\dot x = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1,\dots,-1}_{k-1}, A_1(t), 1,\dots,1\}x,$$

$$\dot y = \operatorname{diag}\{\underbrace{-1,\dots,-1}_{k-1}, A_2(t), 1,\dots,1\}y.$$

Из формулы (2) получаем для первой системы $\delta_k(A_1)=0,\quad \delta_{k+1}(A_1)=\frac{1}{3}$, а для второй системы $\delta_k(A_2)=\frac{1}{3},\quad \delta_{k+1}(A_2)\geqslant\frac{1}{2}$. В силу теоремы II § 3 гл. I, функции $\delta_k : M_n\to\mathbb{R}$, $\delta_{k+1} : M_n\to\mathbb{R}$ не принадлежат первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Теорема II доказана.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы II, в случае $n\geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\delta_k(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c. При $n = 1$ для любой системы (1) справедливо равенство $\lambda_1(A) = \delta_1(A)$, следовательно функция $\delta_k(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c и является непрерывной на пространстве M_1^u.

§ 2 Точный класс Бэра конструктивного показателя на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Наряду с линейной системой (1), для фиксированного $m > 1$, рассмотрим возмущенную нелинейную систему

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{10}$$

с непрерывной по $t \geqslant 0$ и непрерывной по

$$y \in U_\rho(f) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < \rho(f) < +\infty\}$$

вектор-функцией $f : \mathbb{R}^+ \times U_\rho(f) \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию

$$\|f(t, y)\| \leqslant N_f \|y\|^m, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times U_\rho(f). \tag{11}$$

Введем обозначения: F_m — множество всех вектор функций, удовлетворяющих условию (11),

$$\chi(y(\cdot, y_0)) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \|y(t, y_0)\|$$

— характеристический показатель решения $y(t, y_0)$ системы (10) с начальным условием $y(0) = y_0$.

Рассмотрим величину

$$\sup_{f \in F_m} \overline{\lim_{y_0 \to 0}} \chi(y(\cdot, y_0)), \tag{12}$$

которая оценивает сверху характеристические показатели всех решений системы (10) [26]. В работе [33] доказано, что в случае отрицательности величины (12), она совпадает с конструктивным показателем системы (1), который вычисляется по формуле

$$\begin{gathered} \xi_0^\alpha(A) = \alpha, \quad \xi_k^\alpha(A) = \max_{0 \leqslant i < k} \{\ln \|X_A(k, i)\| + m\xi_i^\alpha\}, \\ \Omega_m(A) = \lim_{\alpha \to -\infty} \overline{\lim_{k \to +\infty}} \tfrac{1}{k} \xi_k^\alpha(A). \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{14}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \Omega_m(A(\mu, \cdot)). \tag{15}$$

Изучим свойства функции (15) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема III [108], [112]. *Для любого отображения (14) функция (15) принадлежит второму классу Бэра. Если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке эта функция полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Докажем, что последовательность функций

$$\Psi^\alpha(A) = \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \xi_k^\alpha(A)$$

является неубывающей. Пусть $\alpha \leqslant \beta$ и $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\xi_0^\alpha(A) = \alpha \leqslant \beta = \xi_0^\beta(A),$$

$$\ln \|X_A(1,0)\| + m\xi_0^\alpha(A) \leqslant \ln \|X_A(1,0)\| + m\xi_0^\beta(A) \Rightarrow \xi_0^\alpha(A) \leqslant \xi_0^\beta(A),$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln \|X_A(2,0)\| + m\xi_0^\alpha(A) \leqslant \ln \|X_A(2,0)\| + m\xi_0^\beta(A) \\ \ln \|X_A(2,1)\| + m\xi_1^\alpha(A) \leqslant \ln \|X_A(2,1)\| + m\xi_1^\beta(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_2^\alpha(A) \leqslant \xi_2^\beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln \|X_A(k,0)\| + m\xi_0^\alpha(A) \leqslant \ln \|X_A(k,0)\| + m\xi_0^\beta(A) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ln \|X_A(k,k-1)\| + m\xi_{k-1}^\alpha(A) \leqslant \ln \|X_A(k,k-1)\| + m\xi_{k-1}^\beta(A) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_k^\alpha(A) \leqslant \xi_k^\beta.$$

Таким образом, получаем $\Psi^\alpha(A) \leqslant \Psi^\beta(A)$. Следовательно, формулу (13) можно переписать в виде

$$\Omega_m(A) = \lim_{\alpha \to -\infty} \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \xi_k^\alpha(A) = \lim_{m \to \infty} \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \xi_k^{(-m)}(A) =$$

$$= \inf_{m \in \mathbb{N}} \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \xi_k^{(-m)}(A) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{s \in \mathbb{N}} \sup_{k \geqslant s} \frac{1}{k} \xi_k^{(-m)}(A) =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \min_{1 \leqslant m \leqslant p} \min_{1 \leqslant s \leqslant p} \lim_{j \to \infty} \max_{s \leqslant k \leqslant j} \frac{1}{k} \xi_k^{(-m)}(A).$$

Из леммы 10 § 5 гл. I следует, что функция $\mu \mapsto \xi_k^{(-m)}(A(\mu,\cdot))$ является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Таким образом, функция (15) принадлежит второму классу Бэра на этом пространстве.

Пусть
$$\psi_p(\mu) = \min_{1\leqslant m\leqslant p}\min_{1\leqslant s\leqslant p}\lim_{j\to\infty}\max_{s\leqslant k\leqslant j}\frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A(\mu,\cdot)).$$
Так как последовательность функций $(\psi_p)_{p=1}^{\infty}$ первого класса Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ является невозрастающей, то в случае полноты пространства $\mathfrak{M}$, в силу леммы 1 § 2 гл. I, функция (15) является полунепрерывной сверху в типичной по Бэру точке. Теорема III доказана.

В силу теоремы III и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 2 [108], [112]. *Для любого $k \in \{1,\ldots,n\}$ функция $\Omega_m(\cdot): M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $\Omega_m(\cdot)$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема IV [112], [108]. *Если $n \geqslant 2$, то функция $\Omega_m : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Докажем, что для любой правильной по Ляпунову системы
$$\dot{x} = A(t)x \tag{16}$$
с отрицательным старшим показателем Ляпунова выполнено равенство $\Omega_m(A) = \lambda_n(A)$. Так как система (17) правильная, то существует (см. [9] или [31, стр. 77]) оператор-функция $Q(\cdot)$ такая, что
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|Q(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\| = 0,$$
и оператор Коши системы (17) имеет вид
$$X_A(t,0) = Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t},\ldots,e^{\lambda_n(A)t}\}.$$
Можно считать, что
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\| = 0,$$
так как, в силу неравенства
$$\|Q^{-1}(t)\| \geqslant \|Q(t)\|^{-1},$$

имеем

$$0 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant - \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 1$, что для любого $t \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\|Q^{-1}(t)\| \leqslant \sqrt{C_\varepsilon} e^{\varepsilon t}, \quad \|Q(t)\| \leqslant \sqrt{C_\varepsilon} e^{\varepsilon t}.$$

Таким образом, для для оператора Коши системы (17) имеем

$$\|X_A(t,\tau)\| = \|X_A(t,0) X_A^{-1}(\tau,0)\| =$$

$$= \|Q(t) \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)(t-\tau)}, \ldots, e^{\lambda_n(A)(t-\tau)}\} Q^{-1}(\tau)\| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varepsilon e^{\lambda_n(A)(t-\tau)+\varepsilon t+\varepsilon\tau} = C_\varepsilon e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(t-\tau)+\varepsilon\tau}.$$

При помощи метода вариации произвольной постоянной для решения $y(t,\cdot)$ системы (17) получаем

$$y(t,y_0) = X_A(t,0) y_0 + \int_0^t X_A(t,\tau) f(\tau, y(\tau,y_0))\, d\tau.$$

Отсюда

$$\|y(t,y_0)\| \leqslant \|X_A(t,0)\| \|y_0\| + \int_0^t \|X_A(t,\tau)\| \|f(\tau,y(\tau,y_0))\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t} \|y_0\| + C_\varepsilon N_f \int_0^t e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(t-\tau)+\varepsilon\tau} \|y(\tau,y_0)\|^m\, d\tau,$$

а следовательно, для

$$u(t) = \|y(t,y_0)\| e^{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)t},$$

получаем неравенство

$$u(t) \leqslant C_\varepsilon \|y_0\| + C_\varepsilon N_f \int_0^t e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau} u^m(\tau)\, d\tau.$$

В силу леммы Бихари [10, стр. 198], при $\varepsilon < \frac{-\lambda_n(A)(m-1)}{m}$ и y_0, удовлетворяющем неравенству

$$(m-1)\|y_0\|^{m-1}C_\varepsilon^m N_f \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}\,d\tau < 1,$$

для нормы решения $y(t,y_0)$ получаем

$$\|y(t,y_0)\| = u(t)e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\varepsilon\|y_0\|e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t}}{\left(1-(m-1)\|y_0\|^{m-1}C_\varepsilon^m N_f \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Следовательно, получаем

$$\chi(y(\cdot,y_0)) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|y(t,y_0)\| \leqslant \lambda_n(A)+\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\lambda_n(A) = \Omega_m(A)$.

Рассмотрим систему $\dot{x} = A(t)x$, где

$$A(t) = \mathrm{diag}\{\begin{pmatrix} \pi\sin(\pi\sqrt{t})-2 & 0 \\ 0 & -\pi\sin(\pi\sqrt{t})-2 \end{pmatrix}, \underbrace{-3,\ldots,-3}_{n-2}\}.$$

Установлено [17, стр. 187], что показатели Ляпунова системы A удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = -3,\ldots,\lambda_{n-2}(A) = -3, \lambda_{n-1}(A) = \lambda_n(A) = -2,$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\,\tau = (-3)(n-2)-4.$$

Следовательно, система A является правильной. Верхний центральный показатель этой системы удовлетворяет равенству $\Omega(A) = -1$, а нижний центральный показатель — равенству $\omega(A) = -3$. Установлено [39, стр. 85], что существует система $\dot{y} = B(t)y$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty}\|A(t)-B(t)\| = 0,\ \lambda_{n-1}(B) = \omega(A) = -3.$$

В силу неравенства Ляпунова получаем

$$-1 = \Omega(A) \geqslant \lambda_n(B) \geqslant \underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}B(\tau)d\,\tau + 3(n-2) - \lambda_1(B) = -1,$$

следовательно система $\dot{y} = B(t)y$ является правильной. Допустим, что функция $\Omega_m : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространствах M_n^u. Тогда, в силу теоремы II § 3 гл. I, получаем $\Omega_m(A) = \Omega_m(B)$. С другой стороны, $\Omega_m(A) = \lambda_n(A) = -2$ и $\Omega_m(B) = \lambda_n(B) = -1$. Полученное противоречие доказывает теорему IV.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы II, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\Omega_m(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c. При $n = 1$ для любой системы (1) справедливо равенство $\lambda_1(A) = \Omega_m(A)$, следовательно функция $\Omega_m(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c и является непрерывной на пространстве M_1^u.

§ 3 Точный класс Бэра сигма-показателей Изобова на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Пусть $\lambda_n(A)$ — старший показатель Ляпунова линейной системы (1). Для заданного $\sigma > 0$, сигма-показатель [30] системы (1)

$$\nabla_\sigma(A) = \sup_{Q \in K_\sigma} \lambda_n(A + Q),$$

отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при непрерывных возмущениях системы (1), принадлежащих множеству

$$K_\sigma = \{Q(\cdot) : \sup_{t \geqslant 0} \|Q(t)\| e^{\sigma t} < \infty\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{17}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \nabla_\sigma(A(\mu, \cdot)). \tag{18}$$

Изучим свойства функции (18) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема V [97]. *Для любого отображения (17) и $\sigma > 0$ функция (18) принадлежит второму классу Бэра. Если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в типичной по Бэру точке эта функция полунепрерывна сверху.*

Доказательство. В работе [30] приведен алгоритм вычисления сигма-показателя через оператор Коши $X_A(t,s)$ системы (1)

$$\xi_1^\sigma(A) = 0, \quad \xi_k^\sigma = \max_{1\leqslant i<k}\{\ln\|X_A(k,i)\| + \xi_i^\sigma(A) - \sigma i\},$$
$$\nabla_\sigma(A) = \varlimsup_{k\to+\infty} \tfrac{1}{k}\xi_k^\sigma(A).$$

Последнюю формулу можно представить в виде

$$\nabla_\sigma(A) = \lim_{m\to+\infty} \lim_{l\to+\infty} \max_{k\in[m;l]} \tfrac{1}{k}\xi_k^\sigma(A). \tag{19}$$

Из леммы 10 § 5 гл. I следует, что функция $\mu \mapsto \xi_k^\sigma(A(\mu,\cdot))$ является непрерывной на пространстве $\mathfrak{M}$. Таким образом, в силу формулы (19) функция (18) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$.

Пусть
$$\psi_m(\mu) = \lim_{l\to+\infty} \max_{k\in[m;l]} \frac{1}{k}\xi_k^\sigma(A(\mu,\cdot)).$$

Так как последовательность функций первого класса Бэра $(\psi)_{m=1}^\infty$ на пространстве $\mathfrak{M}$ является невозрастающей, то в случае полноты пространства $\mathfrak{M}$, в силу леммы 1 § 2 гл. I, функция (18) является полунепрерывной сверху в типичной по Бэру точке. Теорема V доказана.

В силу теоремы V и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 3 [107]. *Для любого $n \geqslant 1$ функция $\nabla_\sigma(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $\nabla_\sigma(\cdot)$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема VI [107]. *Если $n \geqslant 2$, то функция $\nabla_\sigma : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Показатель любого нетривиального решения диагональной системы

$$V(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)) & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)) \end{pmatrix}$$

равен
$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)=\frac{\sigma}{2}.$$
Напомним, что коэффициент неправильности Гробмана [17, стр. 67] системы (1) определяется формулой
$$\gamma(A)=\inf_{X\in\mathfrak{X}(A)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\chi_i[X]+\chi_i[(X^{-1})^T]\},$$
где $\mathfrak{X}(A)$ — совокупность фундаментальных матриц системы $\dot{x}=A(t)x$, $\chi_i[X]$ — характеристический показатель Ляпунова ее i-ого столбца. Любая фундаментальная матрица системы $\dot{x}=V(t)x$ имеет вид
$$X(t)=C\begin{pmatrix} e^{-\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} & 0\\ 0 & e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)}\end{pmatrix},\quad \det C\neq 0,$$
следовательно характеристический показатель Ляпунова любого ее столбца равен $\frac{\sigma}{2}$. Так как
$$(X^{-1})^T(t)=(C^{-1})^T\begin{pmatrix} e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)} & 0\\ 0 & e^{-\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)}\end{pmatrix},$$
то характеристический показатель Ляпунова любого столбца матрицы $(X^{-1})^T$ равен $\frac{\sigma}{2}$, а следовательно $\gamma(V)=\sigma$. Таким образом, в силу [37], сигма-показатель системы совпадает со старшим показателем Ляпунова $\nabla_\sigma(V)=\lambda_n(V)=\frac{\sigma}{2}$.

Пусть положительное $\sigma_1<\sigma$. Рассмотрим систему
$$\dot{x}=U(t)x \tag{20}$$
с непрерывной функцией
$$U(t)=\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t)+\cos(\ln t)) & 0\\ e^{-\sigma_1 t} & \frac{\sigma}{2}(\sin(\ln t)+\cos(\ln t))\end{pmatrix}.$$
Докажем, что сигма-показатель системы (20) удовлетворяет неравенству $\nabla_\sigma(U)>\frac{\sigma}{2}$. Произвольное решение системы (20) определяется формулами
$$\begin{gathered} x_1(t)=x_1e^{-\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)},\\ x_2(t)=x_2e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)}+x_1e^{\frac{\sigma t}{2}\sin(\ln t)}\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t}e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau)-\sigma_1\tau}\,d\tau, \\ x_1,\,x_2\in\mathbb{R}. \end{gathered}\tag{21}$$

Рассмотрим две последовательности $t_m = e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}$, $t'_m = e^{\varepsilon} t_m$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$, и $\cos\varepsilon > \frac{\sigma_1}{\sigma}$. При $\tau \in [t'_m, t_m]$ справедливы неравенства

$$2\pi m - \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m - \frac{\pi}{2},$$

$$-\cos\varepsilon = \sin(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \geqslant \sin(\ln\tau),$$

$$\sigma\cos\varepsilon \leqslant -\sigma\tau\sin(\ln\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau) - \sigma_1\tau}\, d\tau \geqslant \int\limits_{t'_m}^{t_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau) - \sigma_1\tau}\, d\tau \geqslant \int\limits_{t'_m}^{t_m} e^{(\sigma\cos\varepsilon - \sigma_1)\tau}\, d\tau.$$

Так как при $r = \sigma\cos\varepsilon - \sigma_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{t'_m}^{t_m} e^{r\tau}\, d\tau = \frac{1}{r} e^{rt_m}(1 - e^{r(t'_m - t_m)}) > Ce^{rt'_m},$$

где $C = \frac{1}{r}(1 - e^{-r}) > 0$, то тем более при $t_m \geqslant e^{\frac{3\pi}{2}}$ справедлива оценка

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau) - \sigma_1\tau}\, d\tau > Ce^{rt'_m}.$$

Если положить $t^*_m = t_m e^{\pi}$, то будет

$$e^{\frac{\sigma}{2} t^*_m \sin(\ln t^*_m)} \int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t^*_m} e^{-\sigma\tau\sin(\ln\tau) - \sigma_1\tau}\, d\tau \geqslant Ce^{(\frac{\sigma}{2} + re^{-\pi})t^*_m}. \tag{22}$$

Рассмотрим решение $x(\cdot)$ системы (20) с начальными условиями

$$x_1(e^{\frac{3\pi}{2}}) = 1, \quad x_2(e^{\frac{3\pi}{2}}) = 0.$$

Из формулы (21) для решений системы (20) и неравенства (22) получаем, что характеристический показатель этого решения не меньше чем $\frac{\sigma}{2} + re^{-\pi}$. Итак, у системы уравнений (20) есть решение с показателем, большим $\frac{\sigma}{2}$, а следовательно, получаем $\nabla_\sigma(U) \geqslant \lambda_2(U) > \frac{\sigma}{2}$. Для завершения доказательства теоремы VI рассмотрим систему $\dot{x} = A(t)x$, где

$$A(t) = \{V(t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}\}$$

и систему $\dot{x} = B(t)x$, где

$$B(t) = \{U(t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}\}.$$

Для этих систем имеем

$$\nabla_\sigma(A) = \nabla_\sigma(V) < \nabla_\sigma(U) = \nabla_\sigma(B).$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma_1 t} = 0,$$

то по теореме II § 3 гл. I, получаем, что функция $\nabla_\sigma : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Теорема VI доказана.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы VI, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\nabla_\sigma(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c. При $n = 1$ для любой системы (1) справедливо равенство $\lambda_1(A) = \nabla_\sigma(A)$, следовательно функция $\nabla_\sigma(\cdot)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c и является непрерывной на пространстве M_1^u.

§ 4 Точный класс Бэра индекса условной экспоненциальной устойчивости на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Напомним, что система (1), называется условно экспоненциально устойчивой с индексом $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, если существует такое k-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, что всякое решение рассматриваемой системы, удовлетворяющее условию $x(0) \in L$ имеет отрицательный характеристический показатель

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| < 0,$$

считаем, что характеристический показатель нулевого решения равен $-\infty$. Индексом условной экспоненциальной устойчивости $\mathrm{ind}_{es}(A)$ системы (1) назовем максимальное число k, для которого система (1) условно экспоненциально устойчива с индексом k.

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{23}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \mathrm{ind}_{es}(A(\mu,\cdot)). \tag{24}$$

Изучим свойства функции (24) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема VII [108]. *Для любого отображения (23) функция (24) принадлежит второму классу Бэра.*

Доказательство. Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Поскольку в формуле (2) для показателей Ляпунова последовательность функций $(a_m^k(\cdot))_{m=1}^{\infty}$ является невозрастающей на пространстве M_n, то множество $\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$ можно представить в виде

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{A \in M_n : a_m^k(A) \geqslant 0\}.$$

Так как функции $a_m^k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежат первому классу Бэра на пространстве M_n^c, то множества $\{A \in M_n : a_m^k(A) \geqslant 0\}$ являются множествами типа G_δ в пространстве M_n^c (см. п. 5 § 1 гл. I), следовательно множество $\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$ является множеством типа G_δ в том же пространстве. Множество $\{A \in M_n : \mathrm{ind}_{es}(A) \geqslant k\}$ совпадает с множеством $M_n \setminus \{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$, которое является множеством типа F_σ. Следовательно функция $\mathrm{ind}_{es}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c. Таким образом, в силу теоремы IV § 5 гл. I, функция (24) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Теорема VII доказана.

В силу теоремы VII и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 4 [108], [113]. *Функция $\mathrm{ind}_{es}(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $\mathrm{ind}_{es}(\cdot)$ второму классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема VIII [108], [115]. *Пусть $n \geqslant 2$, тогда функция $\mathrm{ind}_{es}(\cdot) : M_n \to \{0, \ldots, n\}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u.*

Доказательство. Для принадлежности функции первому классу Бэра на пространстве M_n^u, в силу теоремы II § 3 гл. I, необходимо, чтобы для любых систем A и B, удовлетворяющих свойству

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,$$

было выполнено равенство

$$\mathrm{ind}_{es}(A) = \mathrm{ind}_{es}(B). \tag{25}$$

С другой стороны, как при доказательстве теоремы I § 1 гл. II, рассмотрим исходную систему

$$\dot{x} = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k-1}, A(t), 3,\ldots,3\}x,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & 0 \\ 0 & -0{,}51 \end{pmatrix} x, \quad t \geq 1,$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda_1(A) =, \ldots, \lambda_{k-1}(A) = -1, \lambda_k(A) = -0{,}51,$$

$$\lambda_{k+1}(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}(t\sin(\ln t) - 1,02t + 1,02) = -0.02,$$

$$\lambda_{k+2}(A) = 3, \ldots, \lambda_n(A) = 3.$$

и возмущенную систему

$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k-1}, B(t), 3,\ldots,3\}y,$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & e^{-0{,}51t} \\ 0 & -0,51 \end{pmatrix},$$

с показателями, удовлетворяющими соотношениям

$$\lambda_1(B) =, \ldots, \lambda_{k-1}(B) = -1,$$

$$\lambda_k(B) = -0{,}02, \quad \lambda_{k+1}(B) \geqslant -0,02 + e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \pi},$$

$$\lambda_{k+2}(B) = 3, \ldots, \lambda_n(B) = 3.$$

Следовательно, для первой системы $\mathrm{ind}_{es} = k+1$, а для второй — $\mathrm{ind}_{es} \leqslant k$. Так как

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{-0{,}51t} = 0,$$

то получаем противоречие с (25). Таким образом, функция $\mathrm{ind}_{es} : M_n \to \{0, \ldots, n\}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Теорема VIII доказана.

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из теоремы II, в случае $n \geqslant 2$, следует непринадлежность функции $\mathrm{ind}_{es}(\cdot)$ первому классу Бэра на пространстве M_n^c.

§ 5 Точный бэровский класс размерности векторных подпространств, определяемых показателями Ляпунова, на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Обозначим $D_k(A)$ — размерность пространства начальных значений тех решений системы (1), характеристические показатели которых не превосходят $\lambda_k(A)$, считаем, что характеристический показатель нулевого решения равен $-\infty$. Отметим, что имеет место равенство $D_n(A) = n$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По функции

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{26}$$

непрерывной по совокупности переменных и ограниченной по второму аргументу t при всяком фиксированном значении первого μ, построим функцию

$$\mu \mapsto D_k(A(\mu, \cdot)). \tag{27}$$

Изучим свойства функции (27) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема IX [108]. *Для любого отображения (26) и каждого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция (27) принадлежит третьему классу Бэра.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\delta(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau \leqslant 0; \\ 0, & \text{при остальных } \tau. \end{cases}$$

Эта функция принадлежит первому классу Бэра на $\mathbb{R}$. Из определения функции D_k получаем $D_k(A) = \delta(\lambda_1(A) - \lambda_k(A)) + \ldots + \delta(\lambda_n(A) - \lambda_k(A))$.

Функции
$$\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu,\cdot)), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
принадлежат второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ [52], а следовательно, функция (27) принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ (см. п. 3 § 1 гл. I). Теорема IX доказана.

В силу теоремы IX и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 5 [108], [115]. *Для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $D_k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной, то из принадлежности функции $D_k(\cdot)$ третьему классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u.

Теорема X [108], [113]. *Если $n \geqslant 2$, то для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $D_k : M_n \to \{0, 1, \ldots, n\}$ не принадлежит второму классу Бэра на M_n^u.*

Доказательство. Допустим, что функция $D_k(\cdot) : M_n^u \to \{1, \ldots, n\}$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда для любого непрерывного отображения $\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^u$ композиция $D_k(\Phi(\cdot)) : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to \{1, \ldots, n\}$ принадлежит второму классу Бэра.

Лемма 1. *Существует непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_2^u$ такая, что*
$$\lambda_1(\varphi(\mu)) = \lambda_2(\varphi(\mu)) = 1 \text{ при } \mu \in \mathbf{E},$$
$$1 = \lambda_1(\varphi(\mu)) < \lambda_2(\varphi(\mu)) \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность положительных чисел $t_m = e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots$. Каждому $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений
$$\dot{x} = U(\mu, t)x \tag{28}$$
с кусочно-непрерывной функцией
$$U(\mu, t) = \begin{pmatrix} -\sin(\ln t) - \cos(\ln t) & 0 \\ e^{-u(\mu,t)} & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \end{pmatrix},$$
где
$$u(\mu, t) = (1 + \frac{\mu_m}{1 + \mu_m})t, \text{ при } t \in [t_m;\, t_{m+1}).$$

Показатель любого нетривиального решения диагональной системы

$$V(\mu,t)=\begin{pmatrix} -\sin(\ln t)-\cos(\ln t) & 0 \\ 0 & \sin(\ln t)+\cos(\ln t) \end{pmatrix}$$

равен

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}t\sin(\ln t)=1.$$

Напомним, что коэффициент неправильности Гробмана [17, стр. 67] системы (1) определяется формулой

$$\gamma(A)=\inf_{X\in\mathfrak{X}(A)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\chi_i[X]+\chi_i[(X^{-1})^T]\},$$

где $\mathfrak{X}(A)$ — совокупность фундаментальных матриц системы (1), $\chi_i[X]$ — характеристический показатель Ляпунова ее i-ого столбца. Любая фундаментальная матрицы системы $\dot{x}=V(\mu,t)x$ имеет вид

$$X(t)=C\begin{pmatrix} e^{-t\sin(\ln t)} & 0 \\ 0 & e^{t\sin(\ln t)} \end{pmatrix},\quad \det C\neq 0,$$

следовательно характеристический показатель Ляпунова любого ее столбца равен 1. Так как

$$(X^{-1})^T(t)=(C^{-1})^T\begin{pmatrix} e^{t\sin(\ln t)} & 0 \\ 0 & e^{-t\sin(\ln t)} \end{pmatrix},$$

то характеристический показатель Ляпунова любого столбца матрицы $(X^{-1})^T$ равен 1, а следовательно $\gamma(V(\mu,\cdot))=2$.

Пусть $\mu\in\mathbf{E}$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_m=\infty$, тогда имеет место равенство

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\|U(\mu,t)-V(\mu,t)\|=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,-\frac{u(\mu,t)}{t}=\overline{\lim_{m\to\infty}}(-1-\frac{\mu_m}{1+\mu_m})=-2,$$

а значит, в силу [37], имеем

$$\lambda_1(U(\mu,\cdot))=\lambda_1(\mathrm{diag}\{U(\mu,\cdot))=1,$$

$$\lambda_2(U(\mu,\cdot))=\lambda_2(\mathrm{diag}\{U(\mu,\cdot))=1.$$

Пусть $\mu\notin\mathbf{E}$, т. е.

$$\underline{\lim_{m\to+\infty}}\,\mu_m<\infty,$$

тогда существует бесконечная подпоследовательность $\{\mu_{m'}\} \subset \{\mu_m\}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{m'} = q$. Произвольное решение системы (28) определяется формулами

$$x_1(t) = x_1 e^{-t\sin(\ln t)},$$
$$x_2(t) = x_2 e^{t\sin(\ln t)} + x_1 e^{t\sin(\ln t)} \int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u(\mu,\tau)} d\tau, \tag{29}$$
$$x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим две последовательности $t_{m'} = e^{2\pi m' - \frac{\pi}{2}}$ и $t^*_{m'} = e^{-\varepsilon} t_{m'}$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ и

$$\cos\varepsilon > \frac{1}{2}(1 + \frac{q}{1+q}).$$

Из определения функции $u(\mu, \cdot)$ имеем

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u(\mu,\tau)}\, d\tau \geqslant \int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - (1+\frac{q}{1+q})\tau}\, d\tau.$$

При $\tau \in [t^*_{m'};\, t_{m'}]$ справедливы неравенства

$$2\pi m' - \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m' - \frac{\pi}{2},$$
$$-\cos\varepsilon = \sin(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \geqslant \sin(\ln\tau),$$
$$2\tau\cos\varepsilon \leqslant -2\tau\sin(\ln\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - (1+\frac{q}{1+q})\tau}\, d\tau. \geqslant \int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{(2\cos\varepsilon - (1+\frac{q}{1+q}))\tau}\, d\tau.$$

Так как при

$$r = 2\cos\varepsilon - (1 - \frac{q}{1+q}) > 0$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{r\tau}\, d\tau = \frac{1}{r} e^{r t_{m'}} (1 - e^{r(t^*_{m'} - t_{m'})}) > C e^{r t_{m'}},$$

где

$$C = \frac{1}{r}(1 - e^{-re^{\frac{3\pi}{2}}(1-e^{-\varepsilon})}) > 0,$$

то тем более

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau)-u(\mu,\tau)}\,d\tau > Ce^{rt_{m'}}.$$

Если положить $T_{m'} = t_{m'}e^{\pi}$, то получим

$$e^{T_{m'}\sin(\ln T_{m'})}\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{T_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau)-u(\mu,\tau)}\,d\tau \geqslant Ce^{(1+re^{-\pi})T_{m'}}. \tag{30}$$

Рассмотрим решение $x(\cdot)$ системы (28) с начальными условиями

$$x_1(t_1) = 1, \quad x_2(t_1) = 0.$$

Из формулы (29) для решений системы и неравенства (30) получаем, что характеристический показатель этого решения не меньше, чем $1 + re^{-\pi}$.

Итак, если $\mu \in \mathbf{E}$, то у системы уравнений $\dot{x} = U(\mu, t)x$ есть решение с показателем большим 1. Таким образом, при $\mu \in \mathbf{E}$ получаем

$$\lambda_1(U(\mu,\cdot) = 1, \quad \lambda_1(U(\mu,\cdot)) < \lambda_2(U(\mu,\cdot)).$$

По кусочно-непрерывной функции $U(\mu,\cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 1,$$

построим функцию $A(\mu,\cdot)$ следующим образом

$$A(\mu,t) = \begin{cases} K_m\dot{(}t - t_m - \varepsilon_m) + U(\mu, t_m + \varepsilon_m), \text{ при } t \in [t - \varepsilon_m; t_m + \varepsilon_m]; \\ U(\mu,t), \text{ при остальных } t, \end{cases}$$

$$K_m = \frac{U(\mu, t_m + \varepsilon_m) - U(\mu, t_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}$$

Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $U(\mu,\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$, функция $A(\mu,\cdot)$ совпадает с функцией $U(\mu,\cdot)$, а на любом из отрезков $[t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$ график функции $A(\mu,\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(t_m - \varepsilon_m, U(\mu, t_m - \varepsilon_m))$ и точку с координатами $(t_m + \varepsilon_m, U(\mu, t_m + \varepsilon_m))$.

Так как

$$\int\limits_0^t e^{\tau^2}\|A(\mu,\tau)-U(\mu,\tau)\|\,d\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{t_m-\varepsilon_m}^{t_m+\varepsilon_m} e^{\tau^2}\|A(\mu,\tau)-U(\mu,\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}\|A(\mu,t)-U(\mu,t)\|\sum_{m=1}^{\infty}2e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 4,$$

в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot y = A(\mu,t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot x = U(\mu,t)x$, следовательно, для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ верны равенства

$$\lambda_1(A(\mu,\cdot)) = \lambda_1(U(\mu,\cdot)),\ \lambda_2(A(\mu,\cdot)) = \lambda_2(U(\mu,\cdot)).$$

Получили отображение $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_2^u$. Отображение φ является непрерывным. Действительно, пусть $d(\mu,\nu) = \frac{1}{m+1}$, т. е.

$$\mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_m = \nu_m.$$

Тогда получаем $U(\mu,t) = U(\nu,t)$ на отрезке $[0,t_m]$, а следовательно $A(\mu,t) = A(\nu,t)$ на отрезке $[0,t_m-1]$. Так как

$$\sup_{t\in[t_m-1,+\infty)}\|A(\mu,t)-\mathrm{diag}\{A(\mu,t)\}\| \leqslant e^{-(t_m-1)},$$

то

$$\sup_{t\geqslant 0}\|A(\mu,t)-A(\nu,t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[t_m-1,+\infty)}\|A(\mu,t)-\mathrm{diag}\{A(\mu,t)\}-A(\nu,t)+\mathrm{diag}\{A(\nu,t)\}\| \leqslant 2e^{-(t_m-1)}.$$

Лемма 1 доказана.

Завершение доказательства теоремы X. Рассмотрим отображение $\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^u$, определяемое формулой

$$\mu \mapsto P(\mu,\cdot),$$

$$P(\mu,t) = \{3,\ldots,3,A(\mu,t),\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1}\},$$

где $A(\mu,\cdot)$ из леммы 1. Это отображение непрерывно и

$$0 = \lambda_1(P(\mu,\cdot)) = \ldots = \lambda_{k-1}(P(\mu,\cdot)) < \lambda_k(P(\mu,\cdot)) =$$

$$= \lambda_{k+1}(P(\mu,\cdot)) < \lambda_{k+2}(P(\mu,\cdot)) = \lambda_n(P(\mu,\cdot)) = 3, \text{ при } \mu \in \mathbf{E};$$

$$0 = \lambda_1(P(\mu,\cdot)) = \ldots = \lambda_{k-1}(P(\mu,\cdot)) <$$

$$< \lambda_k(P(\mu,\cdot)) < \lambda_{k+1}(P(\mu,\cdot)) < \lambda_{k+2}(P(\mu,\cdot)) = \lambda_n(P(\mu,\cdot)) = 3, \text{ при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Следовательно

$$D_k(\varphi(\mu)) = k+1, \text{при } \mu \in \mathbf{E};$$
$$D_k(\varphi(\mu)) = k, \text{при } \mu \notin \mathbf{E}.$$

Итак, функция $D_k(\varphi(\mu)) - k$ совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$, а следовательно, не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Полученное противоречие доказывает теорему X.

В силу теоремы X и теоремы V § 5 гл. I, получаем

Следствие 6. *Существует такое полное метрическое пространство $\mathfrak{M}$, что для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (26) непрерывное по $\mu \in \mathfrak{M}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, для которого функция (27) не принадлежит второму классу Бэра.*

§ 6 Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Старший экспоненциальный показатель [34]

$$\nabla(A) = \sup_{Q \in K_0} \lambda_n(A+Q),$$

отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при возмущениях системы (1), принадлежащих множеству

$$K_0 = \{Q(\cdot) : \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| < 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По непрерывному и ограниченному отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n, \tag{31}$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \nabla(A(\mu,\cdot)). \tag{32}$$

Оказывается, функция (32), вообще говоря, может иметь пустое множество точек полунепрерывности сверху. Проведем соответствующее построение

Теорема XI [97]. *Пусть* $\mathcal{M} = [0,1]$. *Тогда для любого натурального* $n \geqslant 2$ *существует такое отображение (31), что множество точек полунепрерывности сверху функции (32) пусто.*

Доказательство. Для каждого $\mu \in [0, 2/3]$ построим последовательности чисел

$$p_\mu(j) = 1 + \sum_{l=1}^{j} |\sin(2^l \pi\mu)| \quad \text{и} \quad z_\mu(k) = \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{p_\mu([\log_2 s + 1])}, \qquad (33)$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа. При любых $k\, j \in \mathbb{N}$ функции $p_\mu(j)$ и $z_\mu(k)$ переменной $\mu \in \mathbb{R}^+$ являются положительными непрерывными и периодическими. В силу очевидного неравенства $1 + \sum_{l=1}^{j} |\sin(2^l\pi\mu)| \leqslant j+1$ получаем, что $z_\mu(k) \uparrow \infty$ при $k \uparrow \infty$. Определим функцию $u_\mu(t)$ следующим образом:

$$u_\mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [0, 2^{z_\mu(1)}), \\ (-1)^s \dfrac{p_\mu([\log_2 s + 1])}{p_\mu([\log_2 s + 1]) + 1}, & \text{при} \quad t \in [2^{z_\mu(s)}; 2^{z_\mu(s+1)}),\ s = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = U_\mu(t)x, \quad U_\mu(t) = \operatorname{diag}[-u_\mu(t), u_\mu(t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}]. \qquad (34)$$

Пусть μ – двоично-рациональное число, т.е. существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\mu = \sum_{l=1}^{k_0} m_l \cdot 2^{-l}, \quad m_s \in \{0, 1\}.$$

Тогда, начиная с номера k_0, для всех элементов последовательности $(p_\mu(k))_{k=1}^{\infty}$ выполнены равенства $p_\mu(k_0) = p_\mu(k_0+1) = \ldots$ Обозначим $t_0 = 2^{z_\mu(2^{k_0})}$ и $\theta = 2^{1/p_\mu(k_0)}$, тогда при $t \geqslant z_\mu(2^{k_0})$ функция $u_\mu(t) = (-1)^s p_\mu(k_0)/(p_\mu(k_0)+1)$, если $t \in [t_0\theta^s, t_0\theta^{s+1})$, $s \in \mathbb{N}$. Поэтому, как следует из работ [8, 35] (см. также монографию [39, с. 224–226]), для старшего σ-показателя $\nabla_\sigma(U_\mu)$ системы (10) имеет место представление

$$\nabla_\sigma(U_\mu) = \max\{\frac{p_\mu(k_0)}{p_\mu(k_0)+1} - \frac{\sigma}{2^{1/p_\mu(k_0)} - 1}, \frac{p_\mu(k_0)(2^{1/p_\mu(k_0)} - 1)}{(p_\mu(k_0)+1)(2^{1/p_\mu(k_0)} + 1)}\},$$

а значит, согласно равенству

$$\nabla(A) = \lim_{\sigma\to+0} \nabla_\sigma(A),$$

получаем

$$\nabla(U_\mu) = \lim_{\sigma\to+0} \nabla_\sigma(U_\mu) = \frac{p_\mu(k_0)}{p_\mu(k_0)+1}.$$

Для вычисления старшего экспоненциального показателя $\nabla(U_\mu)$ в случае, когда μ не является двоично-рациональным числом, нам понадобится

Лемма 2 [97]. *Пусть последовательность $(\theta_i)_{i=1}^\infty$ не возрастает, сходится к единице и произведение $\prod_{i=1}^\infty \theta_i$ расходится, а последовательность $(p_i)_{i=1}^\infty$, члены которой – положительные не превосходящие единицу числа, сходится к единице. Пусть, кроме того, функция $u(\cdot) : [\theta_1, +\infty) \to [-1, 1]$ задана равенством $u(t) = (-1)^{k+1} p_k$ при $t \in [T_k, T_{k+1})$, где $T_k = \prod_{i=1}^k \theta_i$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда система*

$$\dot{x} = U(t)x, \quad U(t) = \operatorname{diag}[-u(t), u(t)], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{35}$$

является правильной с нулевыми показателями Ляпунова.

Доказательство. Пусть $\chi(u) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_0^t u(\tau)d\tau$, тогда показатели Ляпунова $\lambda_1(U)$ и $\lambda_2(U)$ системы (35) удовлетворяют [17, с. 77] равенству $\lambda_1(U) = \lambda_2(U) = \chi(u)$. Для доказательства леммы в силу неравенства Ляпунова [29, с. 151]

$$2\chi(u) = \lambda_1(U) + \lambda_2(U) \geqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \operatorname{Sp} U(\tau)\, d\tau = 0,$$

достаточно показать, что величина $\chi(u)$ неположительна. Поскольку [17, с. 148–149] верно равенство $\chi(u) = \overline{\lim\limits_{l\to+\infty}}\, {T_l}^{-1} I_l$, где $I_l = \int_0^{T_l} u(\tau)d\tau$ и $u(t) < 0$ при $t \in [T_l, T_{l+1})$ с четным l, то достаточно доказать, что

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\, {T_{2k}}^{-1} I_{2k} \leqslant 0. \tag{36}$$

Выберем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть k_ε – тот нечетный номер, что $p_k > 1-\varepsilon$ при всех $k \geqslant k_\varepsilon$. Тогда для k, удовлетворяющих неравенству $2k > k_\varepsilon$, получаем

$$I_{2k} = \int\limits_0^{T_{k_\varepsilon}} u(\tau)d\tau + \sum_{l=k_\varepsilon}^{2k-1} (-1)^{l+1} p_l (T_{l+1} - T_l) \leqslant$$

$$\leqslant T_{k_\varepsilon} + \sum_{l=(k_\varepsilon+1)/2}^{k} T_{2l-1}(\theta_{2l}-1) - (1-\varepsilon) \sum_{l=(k_\varepsilon+1)/2}^{k-1} T_{2l}(\theta_{2l+1}-1).$$

Поскольку $T_l = T_{k_\varepsilon} \prod\limits_{k_\varepsilon+1}^{l} \theta_i$ при $l \geqslant k_\varepsilon + 1$, то из предыдущего равенства получаем

$$\frac{I_{2k}}{T_{2k}} \leqslant \frac{T_{k_\varepsilon}}{T_{2k}} + \sum_{l=(k_\varepsilon+1)/2}^{k} \frac{\theta_{2l}-1}{\theta_{2k}\dots\theta_{2l}} - (1-\varepsilon) \sum_{l=(k_\varepsilon+1)/2}^{k-1} \frac{\theta_{2l+1}-1}{\theta_{2k}\dots\theta_{2l+1}} =$$

$$= \frac{T_{k_\varepsilon}}{T_{2k}} + \sum_{i=k_\varepsilon+1}^{2k} (-1)^i \frac{\theta_i - 1}{p(i,2k)} + \varepsilon \sum_{i=(k_\varepsilon+3)/2}^{k} \frac{\theta_{2i-1}-1}{p(2i-1,2k)}, \qquad (37)$$

здесь и ниже обозначено $p(i,m) = \prod_{l=i}^{m} \theta_l$ $(i \leqslant m)$. Последнее слагаемое в (37) меньше ε. Действительно,

$$\sum_{i=(k_\varepsilon+3)/2}^{k} \frac{\theta_{2i-1}-1}{p(2i-1,2k)} < \sum_{i=1}^{2k} \frac{\theta_i - 1}{p(i,2k)} =$$

$$= \sum_{i=2}^{2k} \frac{T_{i-1}(\theta_i-1)}{T_{2k}} = \frac{1}{T_{2k}} \sum_{i=2}^{2k} (T_i - T_{i-1}) < \frac{T_{2k}}{T_{2k}} = 1. \qquad (38)$$

Оценим среднее слагаемое-сумму в (37). Выделяя в ней слагаемое при $i = 2k$, а затем объединяя в пары соседние слагаемые, запишем его в виде

$$\sum_{i=k_\varepsilon+1}^{2k} (-1)^i \frac{\theta_i - 1}{p(i,2k)} = \frac{\theta_{2k}-1}{\theta_{2k}} + \sum_{i=k_\varepsilon+2}^{k} \left(-\frac{\theta_{2i-1}-1}{p(2i-1,2k)} + \frac{\theta_{2i-2}-1}{p(2i-2,2k)}\right).$$

Преобразуем слагаемые в круглых скобках:

$$-\frac{\theta_{2i-1}-1}{p(2i-1,2k)} + \frac{\theta_{2i-2}-1}{p(2i-2,2k)} = \frac{1}{p(2i-1,2k)}\left(-\theta_{2i-1} + 1 + \frac{\theta_{2i-2}-1}{\theta_{2i-2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p(2i-1,2k)}\left(2 - \theta_{2i-2} - \frac{1}{\theta_{2i-2}}\right) + \frac{1}{p(2i-1,2k)}(\theta_{2i-2} - \theta_{2i-1})) < \theta_{2i-2} - \theta_{2i-1}.$$

Поэтому среднее слагаемое-сумма в (37) оценивается сверху следующим образом:

$$\sum_{i=k_\varepsilon+1}^{2k} (-1)^i \frac{\theta_i - 1}{p(i,2k)} = \frac{\theta_{2k}-1}{\theta_{2k}} + \sum_{i=k_\varepsilon+2}^{k} (\theta_{2i-2} - \theta_{2i-1}) \leqslant \frac{\theta_{2k}-1}{\theta_{2k}} + \varepsilon. \qquad (39)$$

Следовательно, в силу оценок (37)–(39) справедливо неравенство

$$\frac{I_{2k}}{T_{2k}} \leqslant \frac{T_{k_\varepsilon}}{T_{2k}} + \frac{\theta_{2k}-1}{\theta_{2k}} + 2\varepsilon,$$

а значит, переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to +\infty$ и учитывая произвольность выбора ε, получаем неравенство (36). Лемма 2 доказана.

Пусть μ – двоично-иррациональное число. Значит, в его представлении

$$\mu = \sum_{s=1}^{\infty} m_s \cdot 2^{-s},$$

где $m_s \in \{0, 1\}$, в виде двоичной дроби существует такая бесконечная последовательность номеров $\{s'\}$, что $m_{s'+1} = 0$ и $m_{s'+2} = 1$. Покажем, что в этом случае система (10) удовлетворяет условиям леммы 2. Действительно, так как

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{m_{s'+2}}{4} + \frac{m_{s'+3}}{8} \ldots \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2},$$

то верно неравенство

$$|\sin(2^{s'}\pi\mu)| = |\sin(2^{s'}\pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{2^s})| = |\sin(\pi \sum_{s=s'}^{\infty} \frac{m_s}{2^{s-s'+2}})| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, в силу (33) получаем, что $p_\mu(k) \uparrow \infty$ при $k \uparrow \infty$. Таким образом, введя обозначения $p_i = p_\mu(k)/(p_\mu(i)+1)$, $\theta_1 = 2^{z_\mu(1)}$, $\theta_i = 2^{1/p_\mu(i)}$, будем иметь, что $\lim\limits_{i\to+\infty} p_i = 1$ и $0 < p_i < 1$, $i \in \mathbb{N}$, а последовательность $(\theta_i)_{i=1}^{\infty}$ не возрастает, сходится к единице и произведение $\prod_{i=1}^{\infty} \theta_i$ расходится. Таким образом, система (10), если μ двоично-иррациональное число, удовлетворяет условиям леммы 2 и поэтому является правильной с нулевыми показателями Ляпунова.

Поскольку показатели Ляпунова правильных систем устойчивы при экспоненциально убывающих возмущениях [12, 13], [27] то для любого двоично иррационального μ верно равенство $\nabla_\sigma(U_\mu) = 0$ при любом $\sigma > 0$, а следовательно, $\nabla(U_\mu) = 0$.

По кусочно-непрерывной матричной функции $U_\mu(t)$ построим непрерывную по совокупности переменных матричную функцию $Q_\mu(t)$, $(\mu, t) \in [0, 2/3] \times \mathbb{R}^+$, такую, что $\nabla(U_\mu) = \nabla(Q_\mu)$ при всех $\mu \in [0, 2/3]$. Обозначим

$$\eta_m = \min_{\mu\in[0,2/3]} \{2^{z_\mu(m)} - 2^{z_\mu(m-1)}, 2^{z_\mu(m+1)} - 2^{z_\mu(m)}\},$$

где считаем $2^{z_\mu(0)} = 0$. Так как при каждом $k \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ функция$z_\mu(k)$ переменной $\mu \in [0, 2/3]$ непрерывна и $z_\mu(k) < z_\mu(k+1)$, то величина η_m положительна. Зафиксируем какую-либо последовательность $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющую неравенству

$$\varepsilon_m \leqslant \min\{2^{-m} \min_{\mu \in [0,2/3]} \exp(-2^{z_\mu^2(m+1)}), \eta_m/4\}.$$

Обозначим $a_\mu^m = 2^{z_\mu(m)} - \varepsilon_m$ и $b_\mu^m = 2^{z_\mu(m)} + \varepsilon_m$, $m \in \mathbb{N}$. Так как $\varepsilon_m \leqslant \eta_m/4$, то в силу определения величин η_m верно неравенство $b_\mu^m < a_\mu^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Матричную функцию $Q_\mu(\cdot)$ определим следующим образом:

$$Q_\mu(t) = \begin{cases} \dfrac{(t - a_\mu^m)U_\mu(b_\mu^m) - U_\mu(a_\mu^m)(t - b_\mu^m)}{2\varepsilon_m} & \text{при} \quad t \in [a_\mu^m, b_\mu^m], \\ U_\mu(t) & \text{при остальных} \quad t. \end{cases}$$

При каждом фиксированном $\mu \in [0, 2/3]$ функция $Q_\mu(t)$ является непрерывной функцией переменной $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, согласно определению функции $Q_\mu(\cdot)$ она на множестве $\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [a_\mu^m, b_\mu^m]$ совпадает с функцией $U_\mu(\cdot)$, которая по построению непрерывна на этом множестве, а на любом из отрезков $[a_\mu^m, b_\mu^m]$, $m \in \mathbb{N}$, график функции $Q_\mu(\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точки с координатами $(a_\mu^m, U_\mu(a_\mu^m))$ и $(b_\mu^m, U_\mu(b_\mu^m))$. Поскольку имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\infty e^{t^2} \|Q_\mu(t) - U_\mu(t)\| dt = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{a_\mu^m}^{b_\mu^m} e^{t^2} \|Q_\mu(t) - U_\mu(t)\| dt \leqslant 4 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 4,$$

то в силу леммы 11 § 5 гл. I, система $\dot{y} = Q_\mu(t)y$ преобразованием Ляпунова приводится к системе $\dot{x} = U_\mu(t)x$. Следовательно, поскольку при преобразовании Ляпунова экспоненциальные показатели системы не изменяются, как это легко следует из их определения, то для любого $\mu \in [0, 2/3]$ верно равенство $\nabla(Q_\mu(\cdot)) = \nabla(U_\mu(\cdot))$.

Зададим отображение $Q : [0, 2/3] \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ равенством $(\mu, t) \mapsto Q_\mu(t)$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, в области $D_m^1 = \{(\mu, t) : a_\mu^m \leqslant t \leqslant b_\mu^m\}$, $m \in \mathbb{N}$, функция $Q_\mu(t)$ непрерывна, поскольку, как это следует из ее определения, является суммой произведения непрерывных функций. В области же $D_m^2 = \{(\mu, t) :$

$b_\mu^m < t < a_\mu^{m+1}\}$ она непрерывна, так как совпадает с непрерывной в этой области функцией $U_\mu(t)$. Остается заметить, что в области D_m^2 предельные значения функции $Q_\mu(t)$ на кривых $t = b_\mu^m$ и $t = a_\mu^{m+1}$ совпадают с ее значениями $U_\mu(b_\mu^m)$ и $U_\mu(a_\mu^{m+1})$ соответственно на этих кривых. Следовательно, отображение Q непрерывно по совокупности переменных.

Для каждого $\mu = \sum\limits_{s=1}^{\infty} m_s \cdot 2^{-s} \in [0, 2/3]$ построим последовательность двоично-рациональных чисел вида

$$\mu^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \ldots + \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{3 \cdot 2^n}(1 - \frac{1}{4^n}). \quad (40)$$

Пусть $k > 3n > 12$, тогда

$$p_{\mu^{(n)}}(k) = 1 + \sum_{l=1}^{k} |\sin(2^l \pi \mu^{(n)})| \geqslant 1 + \sum_{l=n+2}^{2n+2} |\sin(2^l \pi (\sum_{s=1}^{n} \frac{m_s}{2^s} + \frac{1}{3 \cdot 2^n}(1 - \frac{1}{4^n})))| =$$

$$= 1 + |\sin(\frac{4\pi}{3}(1 - \frac{1}{4^n}))| + \ldots + |\sin(\frac{2^{n+2}\pi}{3}(1 - \frac{1}{4^n}))| \geqslant \frac{\sqrt{2}n}{2} + 1. \quad (41)$$

Из соотношений (40) и (41) следуют неравенства

$$\lim_{n\to\infty} |\mu - \mu^{(n)}| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \nabla(Q_{\mu^{(n)}}(\cdot)) = \nabla(U_{\mu^{(n)}}(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{\mu^{(n)}}(k_0(\mu^{(n)}))}{p_{\mu^{(n)}}(k_0(\mu^{(n)})) + 1} = 1.$$

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \nabla(Q_{\mu^{(n)}}(\cdot)) > \nabla(Q_\mu(\cdot))$. Поэтому никакая точка $\mu \in [0, 2/3]$ не является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto \nabla(Q_\mu(\cdot))$. Для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть отображение $A_\mu(t) = Q_{3\mu/2}(t)$. Теорема XI доказана.

Изучим свойства функции (32) с точки зрения бэровской классификации.

В докладе [3] утверждается, что функция (32) принадлежит третьему классу Бэра, а в докладе [2], что существует полное метрическое пространство такое, что эта функция не принадлежит первому классу Бэра.

Теорема XII [97]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\ 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (31), для которого функция (32) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Так как множество иррациональных чисел на отрезке [0, 1] с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ (см. п. 10 §1 гл. I), то достаточно построить отображение (31) на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$.

Доказательство. В работе [34] приведен алгоритм вычисления экспоненциального показателя через оператор Коши $X_A(t,s)$ системы (1)

$$\nabla(A) = \lim_{\theta\to 1+0} \varlimsup_{m\to\infty} \theta^{-m} \sum_{i=1}^{m} \ln \|X(\theta^i, \theta^{i-1})\|.$$

Каждому $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие последовательность точек $t_k^s = 2^{2^k + s\cdot 2^{-\mu_k}}, \quad s = 0, \ldots, 2^{k+\mu_k} - 1, \quad k \geqslant 1$. Перенумеруем получившиеся точки в порядке их возрастания $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ (в обозначениях мы не отмечаем зависимость t_m от μ). Построим систему уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = U_\mu(t)x, \quad U_\mu(t) = \mathrm{diag}\{-u_\mu(t), u(\mu,t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{n-2}\}, \tag{42}$$

где функция

$$u_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \in [0, t_1), \\ (-1)^m & \text{при} \quad t \in [t_m, t_{m+1}), \quad m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Пусть точка $\mu \notin \mathbf{E}$, т.е. $\varliminf\limits_{k\to\infty} \mu_k < \infty$, тогда существуют бесконечная подпоследовательность $(\mu_{k'})$ последовательности (μ_k) и число $q \in \mathbb{N}$ такие, что $\mu_{k'} = q$. Рассмотрим последовательность $(\theta_r)_{r=2}^{\infty}$, где $\theta_r = 2^{2^{-q}/r}$. Через $\Delta(k', r)$ обозначим отрезок $[2^{k'} r \cdot 2^q + 1, 2^{k'+1} r \cdot 2^q]$. Тогда при целых $i \in \Delta(k', r)$ имеем

$$\ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| = \max\{-\int\limits_{\theta_r^{i-1}}^{\theta_r^i} u_\mu(t)dt, \int\limits_{\theta_r^{i-1}}^{\theta_r^i} u_\mu(t)\,dt\} = \theta_r^i - \theta_r^{i-1}.$$

Следовательно, в силу предыдущего равенства получаем

$$\sum_{i\in\Delta(k',r)} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| = \sum_{i\in\Delta(k',r)} (\theta_r^i - \theta_r^{i-1}) = 2^{2^{k'+1}} - 2^{2^{k'}}.$$

Таким образом, если $\mu \notin \mathbf{E}$, то

$$1 \geqslant \nabla(U_\mu(\cdot)) = \lim_{r\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \theta_r^{-m} \sum_{i=1}^{m} \ln \|X(\theta_r^i, \theta_r^{i-1})\| \geqslant \lim_{k'\to\infty} \frac{2^{2^{k'+1}} - 2 \cdot 2^{2^{k'}}}{2^{2^{k'+1}}} = 1.$$

Пусть точка $\mu \in \mathbf{E}$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k = \infty$. В этом случае система (42) удовлетворяет условиям леммы 2. Действительно, введя обозначения $p_i = 1$, $\theta_i = 2^{1/\mu_{[\log_2 i]}}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа), получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = 1$, а последовательность $(\theta_i)_{i=1}^{\infty}$ не возрастает, сходится к единице и произведение $\prod_{i=1}^{\infty}\theta_i$ расходится. Поэтому система (42), если $\mu \notin \mathbf{E}$, удовлетворяет условиям леммы 2, а значит, является правильной с нулевыми показателями Ляпунова.

Поскольку показатели Ляпунова правильных систем устойчивы при экспоненциально убывающих возмущениях [12, 13], [27], то для любого $\mu \in \mathbf{E}$ верно равенство $\nabla_\sigma(U_\mu) = 0$ при любом $\sigma > 0$, а следовательно, $\nabla(U_\mu) = 0$.

По кусочно-непрерывной функции $U_\mu(\cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\varepsilon_m = \min\{(t_m - t_{m-1})/4, (t_{m+1} - t_m)/4, 2^{-m}\exp(-t_{m+1}^2)\},$$

построим функцию $A_\mu(\cdot)$ следующим образом:

$$A_\mu(t) = \begin{cases} K_\mu^m(t), & \text{при} \quad t \in [t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m], \\ U_\mu(t), & \text{при остальных} \quad t, \end{cases}$$

$$K_\mu^m(t) = \frac{(t - t_m + \varepsilon_m)U_\mu(t_m + \varepsilon_m) - (t - t_m - \varepsilon_m)U_\mu(t_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}$$

Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, согласно определению функции $A_\mu(\cdot)$ она в точках множества $\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}}[t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$ совпадает с функцией $U_\mu(\cdot)$, которая по построению непрерывна на этом множестве, а на каждом из отрезков $[t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$, $m \in \mathbb{N}$, график функции $A_\mu(\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точки с координатами $(t_m - \varepsilon_m, U_\mu(t_m - \varepsilon_m))$ и $(t_m + \varepsilon_m, U_\mu(t_m + \varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^\infty e^{t^2}\|A_\mu(t) - U_\mu(t)\|\,dt = \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{t_m-\varepsilon_m}^{t_m+\varepsilon_m} e^{t^2}\|A_\mu(t) - U_\mu(t)\|\,dt \leqslant 4\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 4,$$

то в силу леммы 11 § 5 гл. I система $\dot{y} = A_\mu(t)y$ преобразованием Ляпунова приводима к системе $\dot{x} = U_\mu(t)x$, а поскольку преобразование Ляпунова не изменяет экспоненциальный показатель системы, то для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ верно равенство $\nabla(A_\mu(\cdot)) = \nabla(U_\mu(\cdot))$.

Зададим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ равенством $A(\mu, t) = A_\mu(t)$. Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, $(\mu^*, t^*) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$ и $m > t^* + 1$. Возьмем такую окрестность $\mathcal{O}(\mu^*)$, что $U_\mu(t)|_{[0,m]} \equiv U_{\mu^*}(t)|_{[0,m]}$, а $\delta \in (0, 1)$ такое, что для любого $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ выполнено неравенство $\|A_{\mu^*}(t) - A_{\mu^*}(t^*)\| < \varepsilon$. Тогда для любой точки (μ, t), такой, что $\mu \in \mathcal{O}(\mu^*)$ и $|t - t^*| < \delta$, в силу тождества $A_{\mu^*}(t)|_{[0,m-1]} \equiv \equiv A_\mu(t)|_{[0,m-1]}$ выполнено неравенство $\|A_{\mu^*}(t^*) - A_\mu(t)\| = \|A_{\mu^*}(t^*) - A_{\mu^*}(t)\| < \varepsilon$.

Допустим, что функция $\mu \mapsto \nabla(A_\mu(\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра. Тогда, по лемме 4 § 2 гл. I, замыкания множеств $\{y \in \mathbb{R} : y = \nabla(A_\mu(\cdot)),\ \mu \in \mathbf{E}\}$ и $\{y \in \mathbb{R} : y = \nabla(A_\mu(\cdot)),\ \mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})\backslash\mathbf{E}\}$ должны иметь непустое пересечение. С другой стороны, $\nabla(A_\mu(\cdot)) \leqslant 0$ при $\mu \in \mathbf{E}$ и $\nabla(A_\mu(\cdot)) = 1$ при $\mu \notin \mathbf{E}$. Получили противоречие, следовательно, функция $\mu \mapsto \nabla(A_\mu(\cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Теорема XII доказана.

В силу теоремы XII и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 7. *При $n \geqslant 2$ функция $\nabla : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

§ 7 Точный класс Бэра нижних вспомогательных показателей Миллионщикова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Напомним, что нижний вспомогательный показатель системы (1) определяется при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой [51]

$$\underline{\nu}_k(A) = \varliminf_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT, (j-1)T),$$

где $\delta_k(t, \tau)$ — k-е сингулярное число оператора Коши $X_A(t, \tau)$ системы (1). Отметим, что при $k = n$ функция $\underline{\nu}_n(\cdot)$ совпадает с $\overline{\lambda}_n$, а поэтому принадлежит в точности второму классу на M_n^c [104], а при $k \in \{1, \ldots, n - 1\}$ функция $\underline{\nu}_k(\cdot)$ принадлежит третьему классу Бэра на M_n^c [79].

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n \tag{43}$$

непрерывному по совокупности переменных и ограниченному по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \underline{\nu}_k(A(\mu,\cdot)). \tag{44}$$

Изучим свойства функции (44) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема XIII. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке* $[0,\,1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ и каждого $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ найдется отображение (43), для которого функция (44) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Так как множество иррациональных чисел на отрезке $[0,\,1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ (см. п. 10 §1 гл. I), то достаточно построить отображение (43) на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Пусть $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. Рассмотрим множество блочно-диагональных систем вида

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{2,\ldots,2,U(t),\underbrace{-2,\ldots,-2}_{k-1}\}x, \tag{45}$$

где $U(t) : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{t\geqslant 0}\|U(t)\| \leqslant 1. \tag{46}$$

Для $k-$го нижнего вспомогательного показателя системы (45) имеем $\underline{\nu}_k = \omega(U)$, где $\omega(U)$ – нижний центральный показатель системы (45). В § 4 гл. II установлено, что существует непрерывное по совокупности переменных отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее по второму аргументу условию (46) такое, что функция $\mu \mapsto \omega(A(\mu,\cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра, а следовательно функция $\mu \mapsto \underline{\nu}_k(A(\mu,\cdot))$ не принадлежит второму классу Бэра. Теорема XIII доказана.

В силу теоремы XIII и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 8 [104]. *Для всякого $n \geqslant 2$ и $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ функция $\underline{\nu}_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

§ 8 Непринадлежность третьему классу Бэра верхних вспомогательных показателей Миллионщикова на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией

Напомним, что верхний вспомогательный показатель системы (1) определяется при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ формулой [51]

$$\overline{\nu}_k(A) = \varlimsup_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_k(jT, (j-1)T), \tag{47}$$

где $\delta_k(t, \tau)$ — k-е сингулярное число оператора Коши $X_A(t, \tau)$ системы (1). Отметим, что при $k = n$ функция $\overline{\nu}_n(\cdot)$ совпадает с $\overline{\lambda}_n$, а поэтому принадлежит в точности второму классу на M_n^c [104], функция $\overline{\nu}_1(\cdot)$ совпадает с $\underline{\nu}_1(\cdot)$, а следовательно принадлежит третьему классу Бэра на M_n^c.

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. По отображению

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \tag{48}$$

непрерывному по совокупности переменных и ограниченному по t при всяком фиксированном значении μ, построим функцию

$$\mu \mapsto \overline{\nu}_k(A(\mu, \cdot)). \tag{49}$$

Изучим свойства функции (49) с точки зрения бэровской классификации.

Теорема XIV [104]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 3$ и каждого $k \in \{2, \dots, n-1\}$ найдется отображение (48), для которого функция (49) всюду разрывна и не принадлежит третьему бэровскому классу.*

Так как множество иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ (см. п. 10 §1 гл. I), то достаточно построить отображение (48) на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Пусть $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Разделим отрезок $[(3k)!, (3k+3)!]$ на отрезки длины $g_k = \min\{k, \mu_k\}$, обозначим концы получившихся отрезков через

$$T_k^i, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{(3k+3)! - (3k)!}{\min\{k, \mu_k\}}.$$

Рассмотрим диагональную систему $\dot{x} = U(\mu, t)x$, где

$$U(\mu, t) = \begin{pmatrix} a(\mu, t) & 0 & 0 \\ 0 & b(\mu, t) & 0 \\ 0 & 0 & c(\mu, t) \end{pmatrix} x, \tag{50}$$

$$a(\mu, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i}, T_k^{3i} + \frac{g_k}{3}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+1}, T_k^{3i+1} + \frac{g_k}{3}]; \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$b(\mu, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i} + \frac{g_k}{3}, T_k^{3i} + \frac{2g_k}{3}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+1}, T_k^{3i+1} + \frac{g_k}{3}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+2}, T_k^{3i+2} + \frac{g_k}{3}]; \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$c(\mu, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i} + \frac{2g_k}{3}, T_k^{3i+1}]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_k^{3i+2}, T_k^{3i+2} + \frac{g_k}{3}]; \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Оператор Коши системы (50) имеет вид

$$X_{U(\mu,\cdot)}(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^{\int_\tau^t a(\mu,s)\,ds} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\int_\tau^t b(\mu,s)\,ds} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\int_\tau^t c(\mu,s)\,ds} \end{pmatrix}.$$

Следовательно для логарифма второго сингулярного значения оператора Коши системы (50), имеем

$$\ln \delta_2(t, \tau) = \min(\max\{\int_\tau^t a(\mu, s)\,ds, \int_\tau^t b(\mu, s)\,ds\},$$
$$\max\{\int_\tau^t b(\mu, s)\,ds, \int_\tau^t c(\mu, s)\,ds\}, \max\{\int_\tau^t a(\mu, s)\,ds, \int_\tau^t c(\mu, s)\,ds\}).$$

Пусть $\mu \in \mathbf{S}$, т. е. существует бесконечно много μ_k, каждое из которых повторяется бесконечное число раз. Обозначим $\mu(1)$ — первый элемент в последовательности $(\mu_k)_{k=1}^\infty$, который повторяется бесконечное число раз, а $(\mu_s(1))_{s=1}^\infty$ — первую бесконечную подпоследовательность последовательности $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ каждый член, которой равен $\mu(1)$, через $\mu(2)$ — второй элемент в последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$, отличный от $\mu(1)$, который повторяется бесконечное число раз, а $(\mu_s(2))_{s=1}^{\infty}$ — вторую бесконечную подпоследовательность последовательности $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ каждый член которой равен $\mu(2)$ и т. д. Так как $\mu \in \mathbf{S}$, то имеем

$$\lim_{k\to\infty} \min\{k, \mu(k)\} = \infty.$$

Из определения функций $a(\mu, t)$, $b(\mu, t)$, $c(\mu, t)$ на отрезке $[T_k^{3i}, T_k^{3i+1}]$, получаем

$$\int\limits_{T_k^{3i}}^{T_k^{3i+1}} a(\mu, t)\, dt = \int\limits_{T_k^{3i}}^{T_k^{3i+1}} b(\mu, t)\, dt = \int\limits_{T_k^{3i}}^{T_k^{3i+1}} c(\mu, t)\, dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

на отрезке $[T_k^{3i+1}, T_k^{3i+2}]$, имеем

$$\int\limits_{T_k^{3i+1}}^{T_k^{3i+2}} a(\mu, t)\, dt = \int\limits_{T_k^{3i+1}}^{T_k^{3i+2}} b(\mu, t)\, dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\},$$

$$\int\limits_{T_k^{3i+1}}^{T_k^{3i+2}} c(\mu, t)\, dt = 0,$$

на отрезке $[T_k^{3i+2}, T_k^{3i+3}]$, имеем

$$\int\limits_{T_k^{3i+2}}^{T_k^{3i+3}} a(\mu, t)\, dt = 0,$$

$$\int\limits_{T_k^{3i+2}}^{T_k^{3i+3}} b(\mu, t)\, dt = \int\limits_{T_k^{3i+2}}^{T_k^{3i+3}} c(\mu, t)\, dt = \frac{1}{3}(T_k^{3i+1} - T_k^{3i}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\}.$$

Таким образом, для любого натурального

$$j \in \{\frac{(3k)!}{\min\{k, \mu_k\}} + 1, \dots, \frac{(3k+3)!}{\min\{k, \mu_k\}}\},$$

имеем

$$\ln \delta_2(j \min\{k, \mu_k\}, (j-1)\min\{k, \mu_k\}) = \frac{1}{3}\min\{k, \mu_k\}.$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$j_s(k) - 1 = \frac{(3k)!}{\min\{k, \mu_s(k)\}}, \quad m_s(k) = \frac{(3k+3)!}{\min\{k, \mu_s(k)\}},$$

$$S_1 = \frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} \sum_{j=1}^{j_s(k)-1} \ln \delta_2(j\min\{k,\mu(k)\}, (j-1)\min\{k,\mu(k)\}),$$

$$S_2 = \frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} \sum_{j=j_s(k)}^{m_s(k)} \ln \delta_2(j\min\{k,\mu(k)\}, (j-1)\min\{k,\mu(k)\}).$$

Тогда, в силу определения системы (50), получаем

$$S_1 \geqslant -\sup_{t\geqslant 0} \|U(\mu,t)\| \frac{(j_s(k)-1)\min\{k,\mu(k)\}}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} = -\frac{(3k)!}{(3k+3)!}, \tag{51}$$

$$S_2 = \frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}} \sum_{j=j_s(k)}^{m_s(k)} \frac{1}{3}\min\{k,\mu_s(k)\} = \frac{(3(k+1))! - (3k)!}{3(3(k+1))!}. \tag{52}$$

Из формулы (47), используя (51) и (52), получаем

$$\overline{\nu}_2(U_\mu)) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m\min\{k,\mu(k)\}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{m} \ln \delta_2(j\min\{k,\mu(k)\}, (j-1)\min\{k,\mu(k)\}) \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \varlimsup_{s\to\infty} \frac{1}{m_s(k)\min\{k,\mu(k)\}}(S_1+S_2) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{(3(k+1))! - (3k)!}{3(3(k+1))!} - \frac{(3k)!}{(3k+3)!} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{S}$, т. е. может существовать только конечное число μ_k, каждое из которых встречается бесконечное много раз в последовательности $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots)$. Пусть p наибольшее из этих чисел (если таких чисел нет, то считаем $p = 0$). Для любого $T \geqslant \max\{2, 100p\}$ существует натуральное $k(T) \geqslant 100T$ такое, что для любого $k \geqslant k(T)$ будет выполнено одно из неравенств $T \geqslant 100\min\{k, \mu_k\}$ (для членов последовательности μ, повторяющихся бесконечное число раз) или $T \leqslant \frac{\min\{k,\mu_k\}}{100}$ (для членов последовательности μ, повторяющихся конечное число раз). Пусть

$$T \geqslant \max\{100p, 2\}, \quad m > (3k(T)+3)!,$$

$$k(m,T) = \max\{k \in \mathbb{N} : \, (3k+3)! \leqslant mT\},$$

$$r_1 = \min\{r \in \mathbb{N} : \, rT \geqslant (3k(m,T))!\},$$

$$r_2 = \max\{r \in \mathbb{N} : \, rT \leqslant (3k(m,T)+3)!\},$$

обозначим

$$S_1(T,m) = \frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{r_1} \ln \delta_2(jT,(j-1)T),$$

$$S_2(T,m) = \frac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln \delta_2(jT,(j-1)T),$$

$$S_3(T,m) = \frac{1}{mT}\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T).$$

Оценим сверху каждую из величин S_1, S_2, S_3. Для S_1 имеем оценку

$$\begin{gathered} S_1(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=1}^{r_1} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{(3k(m,T))!+T}{mT} < \tfrac{(3k(m,T))!+T}{(3k(m,T)+3)!}. \end{gathered} \tag{53}$$

При оценке $S_2(T,m)$ и $S_3(T,m)$ рассмотрим четыре случая.

1. Пусть

$$g(m,T) = \max\{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},\min\{k(m,T)+1,\mu_{k(m,T)+1}\}\}$$

и $T \geqslant 100g(m,T)$. Тогда, в силу определения функций $a(\mu,t)$, $b(\mu,t)$, $c(\mu,t)$, получаем

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \frac{2}{9}(T-2g(m,T)) > \frac{2}{9}(T-2\frac{T}{100}) = \frac{49}{225}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \frac{2}{9}(T+2g(m,T)) < \frac{2}{9}(T+2\frac{T}{100}) = \frac{51}{225}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} b(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \frac{1}{3}(T-2g(m,T)) > \frac{2}{9}(T-2\frac{T}{100}) = \frac{49}{150}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} b(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \frac{1}{3}(T+2g(m,T)) < \frac{1}{3}(T+2\frac{T}{100}) = \frac{51}{150}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} c(\mu,\tau)\,d\tau \geqslant \frac{2}{9}(T-2g(m,T)) > \frac{2}{9}(T-2\frac{T}{100}) = \frac{49}{225}T,$$

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} c(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \frac{2}{9}(T+2g(m,T)) < \frac{2}{9}(T+2\frac{T}{100}) = \frac{51}{225}T.$$

Таким образом, для любого $j \in \{r_1+1,\dots,r_2\}$, получаем

$$\ln\delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \frac{51}{225}T.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln\delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}T(r_2-r_1) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{51}{225}((3k(m,T)+3)!-(3k(m,T))!), \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}(\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln\delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}T(m-r_2) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}(mT-(3k(m,T)+3)!). \end{aligned} \tag{55}$$

2. Пусть

$$T < \frac{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}}{100} \text{ и } T > 100\min\{(k(m,T)+1),\mu_{k(m,T)+1}\}.$$

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i}_{k(m,T)}, T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

то в силу определения функций $a(\mu,t)$, $b(\mu,t)$, $c(\mu,t)$, получаем

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \qquad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln\delta_2(jT,(j-1)T) = 0$.

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}, T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{2}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = T, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T)=0$.

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i}_{k(m,T)}+\frac{2}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i+1}_{k(m,T)}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0,\quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=T,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T)=0$.

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)},T^{3i+1}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=T,\quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=T, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T)=T$.

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\},T^{3i+2}_{k(m,T)}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0,\quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T)=0$.

Если отрезок $[(j-1)T;jT]$ содержится в

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)},T^{3i+2}_{k(m,T)}+\frac{1}{3}\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=0,\quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=T, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt=T,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T) = T$.

Если отрезок $[(j-1)T; jT]$ содержится в

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i+3}_{k(m,T)}],$$

то

$$\int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \quad \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0, \int\limits_{(j-1)T}^{jT} a(\mu,t)\,dt = 0,$$

следовательно $\ln \delta_2(jT,(j-1)T) = 0$.

Количество отрезков $[(j-1)T; jT]$, не содержащихся ни в одном из отрезков

$$[T^{3i}_{k(m,T)}, T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{2}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i}_{k(m,T)} + \frac{2}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i+1}_{k(m,T)}],$$

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)}, T^{3i+1}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i+1}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i+2}_{k(m,T)}],$$

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)}, T^{3i+2}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}],$$

$$[T^{3i+2}_{k(m,T)} + \frac{1}{3}\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}, T^{3i+3}_{k(m,T)}],$$

не превосходит

$$3\frac{((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(r_2-r_1) + 2T + 6T\tfrac{((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T),\mu_{k(m,T)}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{68}{225}((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!). \end{gathered} \tag{56}$$

При $j = r_2+1,\ldots,m$, аналогично (55), получаем

$$\begin{gathered} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}(\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}T(m-r_2) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}((mT - (3k(m,T)+3)!). \end{gathered} \tag{57}$$

3. Пусть $T > 100\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}$ и $T < \frac{\min\{(k(m,T)+1), \mu_{k(m,T)+1}\}}{100}$. Тогда аналогично оценке (54) получаем

$$\begin{gathered} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \ln\delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{51}{225}T(r_2-r_1) \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{51}{225}(3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!), \end{gathered} \tag{58}$$

и аналогично оценке (56) получаем

$$\begin{gathered} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_2+1}^{m} \ln\delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(m-r_2) + 2T + 6T\tfrac{(m-(3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T)+1, \mu_{k(m,T)+1}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{68}{225}(mT-(3k(m,T))!). \end{gathered} \tag{59}$$

4. Пусть $T < \frac{\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}}{100}$ и $T < \frac{\min\{(k(m,T)+1), \mu_{k(m,T)+1}\}}{100}$. Тогда аналогично оценке (56) получаем

$$\begin{gathered} S_2(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_1+1}^{r_2} \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(r_2-r_1) + 2T + 6T\tfrac{((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!)}{\min\{k(m,T), \mu_{k(m,T)}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{(3k(m,T)+3)!}\tfrac{68}{225}((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))!), \end{gathered} \tag{60}$$

$$\begin{gathered} S_3(T,m) = \tfrac{1}{mT}\sum_{j=r_2+1}^{m} \delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}(\tfrac{2}{9}T(m-r_2) + 2T + 6T\tfrac{(m-(3k(m,T)+3)!)}{\min\{k(m,T)+1, \mu_{k(m,T)+1}\}}) \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{mT}\tfrac{68}{225}(mT-(3k(m,T)+3)!). \end{gathered} \tag{61}$$

Из неравенств (54)—(61), при $\mu \notin \mathbf{S}$, получаем

$$\overline{\nu}_2(U_\mu)) = \varlimsup_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\delta_2(jT,(j-1)T) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}(S_1(T,m)+S_2(T,m)+S_3(T,m)) \leqslant \varlimsup_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}(\frac{(3k(m,T))!+T}{(3k(m,T)+3)!} +$$
$$+\frac{1}{mT}\frac{68}{225}((3k(m,T)+3)! - (3k(m,T))! + mT - (3k(m,T)+3)!)) = \frac{68}{225}.$$

Для отображения $(\mu,t) \mapsto U(\mu,t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателя $\overline{\nu}_2$, существует такое отображение $Q : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^3$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ выполнено равенство $\overline{\nu}_2(U(\mu,\cdot)) = \overline{\nu}_2(Q(\mu,\cdot))$ (см. лемму 12 § 6 гл. I).

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$(\mu, t) \mapsto \mathrm{diag}\{2, \ldots, 2, Q(\mu, t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{k-2}\}.$$

Допустим, что функция $\mu \mapsto \overline{\nu_k}(A(\mu,\cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра. Тогда для непрерывного (см. лемму 7 § 5 гл. I) отображения $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \to M_n^c$, определяемого формулой $\mu \mapsto A(\mu,\cdot)$, замыкание множеств

$$\overline{\nu}_k(\varphi(\mathbf{S})) \text{ и } \overline{\nu}_k(\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{S}))$$

не пусто. С другой стороны, выполнены неравенства

$$\overline{\nu}_k(\varphi(\mu) \geqslant \frac{1}{3}, \text{ при } \mu \in \mathbf{S}, \quad \overline{\nu}_k(\varphi(\mu) \leqslant \frac{68}{225}, \text{ при } \mu \notin \mathbf{S}.$$

Получили противоречие, следовательно функция $\mu \mapsto \overline{\nu}_k(A(\mu,\cdot))$ не принадлежит третьему классу Бэра. Теорема XIV доказана.

В силу теоремы XIV и теоремы IV § 5 гл. I, получаем

Следствие 9 [104]. *Для всякого $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $\overline{\nu}_k : M_n \to \mathbb{R}$ не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c.*

IV Некоторые свойства показателей Ляпунова правильных линейных систем

§ 1 Точный бэровский класс показателей Ляпунова на пространстве правильных линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Один из важнейших классов линейных систем образуют правильные системы, которые были введены А.М. Ляпуновым в связи с исследованием экспоненциальной устойчивости неавтономной системы по первому приближению.

Хорошо известно [39, стр. 25], что показатели Ляпунова являются непрерывными функциями на множестве линейных систем, ляпуновскими преобразованиями приводимых к системам с постоянными коэффициентами, наделенном равномерной топологией. Если рассматривать класс систем, обобщенными ляпуновскими преобразованиями приводимых к системам с постоянными коэффициентами, то получим множество правильных по Ляпунову систем. Оказывается показатели Ляпунова на множестве правильных систем с равномерной топологией не являются непрерывными функциями, т. е. не принадлежат нулевому классу Бэра [22]–[24]. Поэтому не лишен смысла вопрос о точном классе Бэра, которому принадлежат показатели Ляпунова на пространстве правильных линейных систем с равномерной топологией.

Напомним, что показатели Ляпунова линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на полупрямой $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функцией определяются, как известно [52], при любом $k \in \{1, \ldots, n\}$, следующим образом

$$\lambda_k(A) = \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t, 0)|_L\|,$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-мерных векторных подпространств прстранства $\mathbb{R}^n$, $X_A(t,0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L\subset\mathbb{R}^n$. Во множестве M_n всех систем вида (1) выделим подмножество правильных систем $\mathcal{R}_n$, которое задается условием

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)=\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\,\tau.$$

Докажем некоторые формулы для показателей Ляпунова в случае, когда система (1) является правильной.

Лемма 1 [101]. *Пусть $A\in\mathcal{R}_n$. Тогда для любого $k\in\{1,\ldots,n\}$ справедливы равенства*

$$\lambda_k(A)=\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}_n)}\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|=\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}_n)}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|.$$

Доказательство. Так как $A\in\mathcal{R}_n$, то для любого $\alpha\in L$ существует предел [29, стр. 182]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|.$$

Для любых $t\in\mathbb{R}^+$, $\alpha\in L:\ \|\alpha\|=1$ имеет место неравенство $\|X_A(t,0)\alpha\|\leqslant\|X_A(t,0)|_L\|$, из которого получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|\leqslant\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|,$$

следовательно

$$\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|\leqslant\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|. \tag{2}$$

Пусть $\{e_1,\ldots,e_k\}\subset L$ — ортонормированный базис в подпространстве L. Тогда для любого $\alpha\in L:\ \|\alpha\|=1$ выполнено

$$\|X_A(t,0)\alpha\|=\|X_A(t,0)\sum_{m=1}^{k}\alpha_m e_m\|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant m\leqslant k}|\alpha_m|\sum_{m=1}^{k}\|X_A(t,0)e_m\|\leqslant k\max_{1\leqslant m\leqslant k}\|X_A(t,0)e_m\|,$$

из которого получаем

$$\varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \varlimsup_{t\to\infty}\big(\max_{1\leqslant m\leqslant k} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)e_m\| + \tfrac{1}{t}\ln k\big) = \\ = \max_{1\leqslant m\leqslant k}\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)e_m\| \leqslant \sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|. \tag{3}$$

В силу (2) и (3), имеем

$$\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\| \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\|.$$

Получаем равенство

$$\sup_{\alpha\in L:\|\alpha\|=1}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\alpha\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2 [101]. *Пусть $A\in\mathcal{R}_n$. Тогда для любого $k\in\{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство*

$$\lambda_k(A) = \lim_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|.$$

Доказательство. Так как для любого $L\in G_k(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|,$$

в силу леммы 1, получаем

$$\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}_n)} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \\ \leqslant \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| = \lambda_k(A). \tag{4}$$

Докажем, что

$$\varliminf_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\| \geqslant \lambda_k(A).$$

Так как $A\in\mathcal{R}_n$, то существует (см. [9] или [31, стр. 77]) такая оператор-функция $Q(\cdot)$, что

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q(t)\| = \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\| = 0,$$

и оператор Коши системы (1) имеет вид

$$X_A(t,0)=Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t},\ldots,e^{\lambda_n(A)t}\}.$$

Можно считать, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\|=0,$$

так как, в силу неравенства $\|Q^{-1}(t)\|\geqslant\|Q(t)\|^{-1}$, имеем

$$0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\|\geqslant\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\|\geqslant-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|Q(t)\|=0.$$

Из равенства

$$\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\ln\|\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t},\ldots,e^{\lambda_n(A)t}\}|_L\|=\lambda_k(A)t,$$

получаем

$$\lambda_k(A)\leqslant\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)X_A(t,0)|_L\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\|+\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\lambda_k(A)\leqslant\underline{\lim}_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|+\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\|=\\=\underline{\lim}_{t\to\infty}\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)}\tfrac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)|_L\|.\end{aligned}\tag{5}$$

Из (4) и (5) следует утверждение леммы.

Обозначим $\mathcal{R}_n^u$ — множество $\mathcal{R}_n$ с равномерной топологией, $\mathcal{R}_n^c$ — множество $\mathcal{R}_n$ с компактно-открытой топологией.

Теорема I [101]. *Для любого $k\in\{1,\ldots,n\}$ функция $\lambda_k(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространствах $\mathcal{R}_n^u$ и $\mathcal{R}_n^c$.*

Доказательство. Пусть $a>0:\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|\leqslant a$. Для оператора Коши системы (1) справедливо равенство

$$X_A(t,0)=X_A(t,[t])X_A([t],0)$$

($[\cdot]$ — целая часть числа), следовательно для любого $L\in G_k(\mathbb{R}^n)$ выполнены неравенства

$$\|X_A(t,0)|_L\|\leqslant\|X_A(t,[t])|_L\|\cdot\|X_A([t],0)|_L\|\leqslant$$

$$\leqslant e^{a(t-[t])}\|X_A([t],0)|_L\| \leqslant e^a\|X_A([t],0)|_L\|,$$

$$\|X_A([t],0)|_L\| \leqslant \|X_A([t],t)|_L\| \cdot \|X_A(t,0)|_L\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{a(t-[t])}\|X_A(t,0)\| \leqslant e^a\|X_A(t,0)|_L\|.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{[t]} \ln \|X_A([t],0)|_L\| \leqslant \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t-1}(\ln \|X_A(t,0)|_L\| + a) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\| \leqslant \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{[t]}(\ln \|X_A([t],0)|_L\| + a) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{[t]} \ln \|X_A([t],0)|_L\|.$$

Следовательно, для любого $k \in \{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{t} \ln \|X_A(t,0)|_L\| = \lim_{m\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{m} \ln \|X_A(m,0)|_L\|.$$

В силу леммы 2, получаем

$$\lambda_k(A) = \lim_{m\to\infty} \inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{m} \ln \|X_A(m,0)|_L\|.$$

Величины

$$\inf_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \ln \|X_A(m,0)|_L\|,$$

совпадающие с логарифмами сингулярных чисел оператора $X_A(m,0)$ [11, стр. 24], в силу непрерывной зависимости решений системы (1) от коэффициентов системы (см. лемму 10 § 5 гл. I), являются непрерывными функциями на пространстве $\mathcal{R}_n^c$. Следовательно показатели Ляпунова принадлежат первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{R}_n^c$. Так как топология равномерной сходимости мажорирует топологию компактной сходимости, то показатели Ляпунова принадлежат первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{R}_n^u$. Теорема доказана.

Оказывается в теореме I первый класс Бэра, вообще говоря, нельзя заменить полунепрерывностью. Приведем соответствующее построение.

Теорема II [111]. *Для любого $n \geqslant 2$ и любого $k \in \{1,\ldots,n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является ни полунепрерывной снизу, ни полунепрерывной сверху на пространстве $\mathcal{R}_n^u$.*

Доказательство. Рассмотрим систему $\dot{x} = A(t)x$, где

$$A(t) = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k-1}, \begin{pmatrix} \pi\sin(\pi\sqrt{t}) & 0 \\ 0 & -\pi\sin(\pi\sqrt{t}) \end{pmatrix}, 1,\ldots,1\}.$$

Установлено [17, стр. 187], что показатели Ляпунова системы A удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \ldots = \lambda_{k-1}(A) = -1,$$

$$\lambda_k(A) = \lambda_{k+1}(A) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau = 0,$$

$$\lambda_{k+2}(A) = \ldots = \lambda_n(A) = 1,$$

следовательно система $\dot{x} = A(t)x$ является правильной. Верхний центральный показатель этой системы удовлетворяет равенству $\Omega(A) = 1$, а нижний центральный показатель — равенству $\omega(A) = -1$ [17, стр. 187]. Установлено [39, стр. 85], что существует такая система $\dot{y} = B(t)y$, что

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,\ \lambda_k(B) = \omega(A) = -1.$$

В силу неравенства Ляпунова, получаем

$$1 = \Omega(A) \geqslant \lambda_{k+1}(B) \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}B(\tau)d\tau - \sum_{s\neq k+1} \lambda_s(B) = 1,$$

следовательно, система $\dot{y} = B(t)y$ является правильной. Рассмотрим последовательность правильных систем $\dot{y} = B_m(t)y$, где

$$B_m(t) = \begin{cases} A(t), & \text{при } 0 \leqslant t < m; \\ A(t)(m+1-t) + B(t)(t-m), & \text{при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t), & \text{при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|B_m(t) - A(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[m+1,+\infty)} \|B(t) - A(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|B_m(t) - A(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,+\infty)} \|B(t) - A(t)\| + \sup_{t\in[m,m+1)} \|A(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) - A(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t\in[m,+\infty)} \|B(t)-A(t)\|,$$

получаем

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0,+\infty)} \|B_m(t)-A(t)\| \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[m,+\infty)} \|B(t)-A(t)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность функций $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к системе A в пространстве $\mathcal{R}_n^u$ и $\lambda_k(B_m) = -1$, $\lambda_{k+1}(B_m) = 1$. Следовательно функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной снизу на пространстве $\mathcal{R}_n^u$, а функция $\lambda_{k+1}(\cdot) : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной сверху на пространстве $\mathcal{R}_n^u$.

Рассмотрим последовательность правильных систем $\dot{y} = A_m(t)y$, где

$$A_m(t) = \begin{cases} B(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ B(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ A(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Эта последовательность сходится к системе B в пространстве $\mathcal{R}_n^u$ и $\lambda_k(A_m) = \lambda_{k+1}(A_m) = 0$. Следовательно функция $\lambda_k(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной сверху на пространстве $\mathcal{R}_n^u$, а функция $\lambda_{k+1}(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$ не является полунепрерывной снизу на пространстве $\mathcal{R}_n^u$. Теорема доказана.

§ 2 Критерий устойчивости всех показателей Ляпунова правильных линейных систем при равномерно малых возмущениях

В предыдущем параграфе доказано, что показатели Ляпунова принадлежат в точности первому классу Бэра на множестве правильных по Ляпунову линейных систем с равномерной топологией. При помощи этого результата докажем критерий устойчивости показателей Ляпунова при равномерно малых линейных возмущениях исходной правильной системы.

Для удобства читателя напомним обозначения: M_n^u — множество систем вида (1) с равномерной топологией,

$$\overline{\lambda}_k(A) = \overline{\lim_{B\to A}}\, \lambda_k(B)$$

— минимальная полунепрерывная сверху мажоранта k-го показателя Ляпунова на пространстве M_n^u,

$$\overline{X}(A) = \{B \in M_n : \lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0\}$$

— множество бесконечно малых (б. м.) возмущений системы (1).

Теорема III [101]. *Пусть $A \in \mathcal{R}_n$, тогда следующие условия равносильны:*

1) для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot) : M_n^u \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке A,

2) выполнено включение $\overline{X}(A) \subset \mathcal{R}_n$,

3) выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t SpA(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть система $A \in \mathcal{R}_n$ является точкой непрерывности всех показателей Ляпунова в пространстве M_n^u. Допустим, что существует неправильная система $B \in \overline{X}(A)$, тогда в силу неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(B) > \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Sp}B(\tau)\, d\tau = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\, d\tau = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)$$

существует такое k_0, что $\lambda_{k_0}(A) \neq \lambda_{k_0}(B)$. Построим последовательность систем $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$B_m(t) = \begin{cases} A(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ A(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Пределом этой последовательности является система A. Так как $\lambda_{k_0}(B_m) = \lambda_{k_0}(B) \neq \lambda_{k_0}(A)$, то система A не является точкой непрерывности функции $\lambda_{k_0}(\cdot) : M_n^u \to \mathbb{R}$. Получили противоречие.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть все б. м. возмущения системы $A \in \mathcal{R}_n$ являются правильными системами. Допустим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) > \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\, d\tau.$$

В силу равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)\, d\tau,$$

найдется такое $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, что $\overline{\lambda}_{k_0}(A) > \lambda_{k_0}(A)$. В работе [73] доказано существование б. м. возмущения такого $B \in \overline{X}(A)$, что $\lambda_{k_0}(B) = \overline{\lambda}_{k_0}(A)$. Пусть C — произвольная система из $\overline{X}(A)$. Построим последовательности $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ и $(B_m)_{m=1}^{\infty}$:

$$A_m(t) = \begin{cases} C(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ A(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$B_m(t) = \begin{cases} C(t) \text{ при } 0 \leqslant t < m; \\ C(t)(m+1-t) + B(t)(t-m) \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1; \\ B(t) \text{ при } t > m+1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для этих последовательностей выполнены соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0;\infty)} \|A_m(t) - C(t)\| = 0,\ \lambda_{k_0}(A_m) = \lambda_{k_0}(A),$$
$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in[0;\infty)} \|B_m(t) - C(t)\| = 0,\ \lambda_{k_0}(B_m) = \lambda_{k_0}(B),$$

из которых следует, что каждая точка множества $\overline{X}(A)$ является точкой разрыва функции $\lambda_{k_0}(\cdot)$. С другой стороны, множество $\overline{X}(A)$ является замкнутым в пространстве $\mathcal{R}_n^u$, следовательно его можно рассматривать как полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной метрикой пространства $\mathcal{R}_n^u$. Из теоремы I следует, что функция $\lambda_{k_0}(\cdot) : \overline{X}(A) \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на $\overline{X}(A) \subset \mathcal{R}_n$, следовательно, по теореме Бэра о функциях первого класса (см. теорему I § 2 гл. I), в этом множестве есть точка непрерывности функции $\lambda_{k_0}(\cdot)$. Получили противоречие.

3) $\Rightarrow$ 1). Докажем, что система $A \in \mathcal{R}_n$ является точкой непрерывности всех показателей Ляпунова. Допустим противное, тогда существует такое

$\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального числа m найдется $k(m) \in \{1, \dots, n\}$ и система

$$B_m : \sup_{t \in \mathbb{R}+} \|A(t) - B_m(t)\| < \frac{1}{m}$$

такие, что

$$|\lambda_{k(m)}(B_m) - \lambda_{k(m)}(A)| > \varepsilon_0,$$

$$|\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}B_m(\tau)d\tau| < \frac{1}{3}\varepsilon_0.$$

Так как $k(m)$ принимает конечное число значений, то существуют $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ и бесконечная подпоследовательность $\{B_{m'}\} \subset \{B_m\}$ такие, что

$$|\lambda_{k_0}(B_{m'}) - \lambda_{k_0}(A)| > \varepsilon_0,$$

$$|\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}B_{m'}(\tau)d\tau| < \frac{1}{3}\varepsilon_0.$$

Если для бесконечной подпоследовательности $\{B_{m''}\} \subset \{B_{m'}\}$ выполнено неравенство $\lambda_{k_0}(B_{m''}) < \lambda_{k_0}(A) - \varepsilon_0$, то существует такое $k(m'') \in \{1, \dots, n\}$, что

$$\lambda_{k(m'')}(B_{m''}) > \lambda_{k(m'')}(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0,$$

так как в противном случае имеем противоречивую цепочку неравенств

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau - \frac{1}{3}\varepsilon_0 \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}B_{m''}(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1,\, k\neq k_0}^{n} \lambda_k(B_{m''}) + \lambda_{k_0}(B_{m''}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1,\, k\neq k_0}^{n} (\lambda_k(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0) + \lambda_{k_0}(A) - \varepsilon_0 = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau - \frac{2}{3}\varepsilon_0.$$

Так как $k(m'')$ принимает конечное число значений, то существуют $k_1 \in \{1, \dots, n\}$ и бесконечная подпоследовательность $\{B_{m'''}\} \subset \{B_{m''}\}$ такие, что

$$\lambda_{k_1}(B_{m'''}) > \lambda_{k_1}(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0.$$

Следовательно

$$\overline{\lambda}_{k_1}(A) = \varlimsup_{B\to A} \lambda_{k_1}(B) \geqslant \varlimsup_{m'''\to\infty} \lambda_{k_1}(B_{m'''}) \geqslant \lambda_{k_1}(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) + \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0 = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau)\, d\tau \frac{1}{3(n-1)}\varepsilon_0,$$

получили противоречие.

Если для бесконечной подпоследовательности $\{B_{m''}\} \subset \{B_{m'}\}$ выполнено неравенство $\lambda_{k_0}(B_{m''}) > \lambda_{k_0}(A) + \varepsilon_0$, то $\overline{\lambda}_{k_0}(A) \geqslant \lambda_{k_0}(A) + \varepsilon_0$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) + \varepsilon_0 = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau)\, d\tau + \varepsilon_0,$$

получили противоречие. Теорема III доказана.

§ 3 Точный дескриптивный тип множества неправильных систем в пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрическое пространство. Для непрерывного по совокупности переменных и ограниченного по t при всяком μ отображения

$$A : \mathfrak{M} \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\, \mathbb{R}^n \tag{6}$$

обозначим через W_n подмножество тех значений параметра μ, при которых система $\dot{x} = A(\mu, t)x$ является неправильной (в дальнейшем будем называть его множеством неправильности данного отображения).

Рассматривая семейства линейных систем, в которые параметр входит как множитель при матрице коэффициентов системы, а сама эта система правильна по Ляпунову, Ю.С. Богданов в 1980 г. поставил вопрос о пустоте множества неправильности.

Н. А. Изобов и Е. К. Макаров в работах [36, 48] построили такие семейства систем, линейно зависящие от вещественного параметра, множества неправильности которых могут оказаться следующими: множеством значений произвольной бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии, не содержащей нуля и единицы; объединением значений таких прогрессий, замыкание которого счетно; дополнение до $\mathbb{R}$ такой арифметической прогрессии; множество $\mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$.

Теорема IV [114]. *Для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (6), подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $H : \mu \mapsto \sigma(A(\mu, \cdot))$, где

$$\sigma(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \varlimsup_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\tau)\, d\tau.$$

Тогда множество неправильности отображения (6) можно определить как

$$W_n = \{\mu \in \mathfrak{M} : H(\mu) > 0\}.$$

Так как функция, определяемая формулой

$$\mu \mapsto \varlimsup_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\mu, \tau)\, d\tau,$$

и все функции $\mu \mapsto \lambda_k(A(\mu, \cdot))$ являются функциями второго класса на пространствах $\mathfrak{M}$, то множество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathfrak{M}$. Теорема IV доказана.

Из теоремы IV § 5 гл. I и теоремы IV, получаем

Следствие 1 [114]. *Для любого натурального числа n подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве M_n^c.*

Так как компактно-открытая топология слабее равномерной топологии, то любое открытое подмножество в M_n^c является открытым в пространстве M_n^u.

Следствие 2 [114]. *Для любого $n \geqslant 1$ подмножество W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве M_n^u.*

Построим отображение (6), для которого множество неправильности не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$.

Теорема V. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке $[0,\ 1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной* *прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (6), для которого подмножество W_n не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Так как множество иррациональных чисел на отрезке $[0,\ 1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ (см. п. 10 §1 гл. I), то достаточно построить отображение (6) на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Каждому $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему уравнений

$$\dot{x} = U(\mu, t)x, \tag{7}$$

где

$$U(\mu, t) = \mathrm{diag}\{u(\mu, t), \ldots, u(\mu, t)\},$$

$$u(\mu, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, 1); \\ 0, & \text{при } t \in [(2k-1)!, (2k)!); \quad k = 1, 2, \ldots . \\ -\frac{1}{\mu_k}, & \text{при } t \in [(2k)!, (2k+1)!), \end{cases}$$

Для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$, имеем

$$0 \geqslant \lambda_1(u(\mu, \cdot)E) = \ldots = \lambda_n(u(\mu, \cdot)E) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t u(\mu, \tau)\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k)!}((2k-1)!) = 0.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$, тогда получаем

$$0 \geqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t u(\mu, \tau)\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-\frac{1}{\mu_k}(2k+1)! - (2k)!) = 0,$$

отсюда, имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(u(\mu, \cdot)E) = \underline{\lim}_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\ u(\mu, \tau)E\, d\tau,$$

а следовательно система (7) является правильной.

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, тогда получаем

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t u(\mu,\tau)\,d\tau \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\left(-\frac{1}{\mu_k}(2k+1)! - (2k)!\right) < 0.$$

Следовательно, имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(u(\mu,\cdot)E) > \varliminf_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\; u(\mu,\tau)E\,d\tau,$$

таким образом система (7) является неправильной.

Для отображения $(\mu,t) \mapsto U(\mu,t)$, в силу ляпуновской инвариантности показателей Ляпунова, существует такое отображение

$$A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n \tag{8}$$

непрерывное по совокупности переменных и ограниченное по t при всяком фиксированном μ, что для любого $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ верны равенства

$$\lambda_k(A(\mu,\cdot) = \lambda_k(U(\mu,\cdot)), \quad k = 1,\ldots,n,$$

$$\varliminf_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\; U(\mu,\tau)\,d\tau = \varliminf_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}\; A(\mu,\tau)\,d\tau$$

(см. лемму 12 § 6 гл. I). По отображению (8), построим функцию

$$\mu \mapsto I_n(A(\mu,\cdot)), \tag{9}$$

где $I_n : M_n \to \{0,1\}$ — характеристическую функция множества правильных систем.

В силу теоремы IV, множество неправильности W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Допустим, что это множество W_n является еще и множеством типа $F_{\sigma\delta}$, тогда функция (9) принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. С другой стороны, функция (9), в силу равенств

$$I_n(W_n) = I_n(\mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \mathbf{E}) = 0, \quad I_n(\mathfrak{M} \setminus W_n) = I_n(\mathbf{E}) = 1.$$

совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$, а следовательно не принадлежит второму классу Бэра. Полученное противоречие доказывает теорему V.

Из теоремы V и теоремы IV § 5 гл. I вытекает следующий результат

Следствие 3. *Для любого $n \geqslant 1$ множество неправильных линейных систем $M_n \setminus \mathcal{R}_n$ не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^c.*

Доказательство. Допустим, что множество неправильных линейных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^c. Тогда характеристическая функция I_n множества правильных систем принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c. Следовательно, в силу теоремы IV § 5 гл. I, для любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и отображения (6) функция $\mu \mapsto I_n(A(\mu, \cdot))$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$, что противоречит теореме V.

Наложим на отображение (6) дополнительное ограничение

$$\lim_{\nu\to\mu} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(\nu, t) - A(\mu, t)\| = 0, \quad \mu \in \mathcal{M}, \tag{10}$$

означающее ее равномерную по $t \in \mathbb{R}^+$ непрерывность по μ.

Теорема VI [103]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке* $[0, 1]$ *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, тогда для любого $n \geqslant 2$ найдется отображение (6), удовлетворяющее условию (10), для которого подмножество W_n не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.*

Так как множество иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ (см. глава I, §1, п. 10), то достаточно построить отображение (6), удовлетворяющее условию (10), на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Введем обозначения. Для любой ограниченной последовательности $(\omega_r)_{r=1}^{\infty}$ построим систему

$$\dot{x} = Q(t)x, \tag{11}$$

где

$$Q(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_r \\ \omega_r & 0 \end{pmatrix}, & \text{при } t \in [2^r - r, 2^r); \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \text{при } t \in [2^r, 2^{r+1} - (r+1)). \end{cases}$$

Пусть

$$s(k)=\sum_{r=1}^{k}\ln|\cos(\omega_r r)|,\quad s=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}s(k),\quad S=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k+1}}s(k).$$

В [48] доказана следующая лемма

Лемма 3. *Если для любого $k\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$|\cos(\omega_{k+1}(k+1))|\geqslant\sin(2arctg(e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1))})),\tag{12}$$

то коэффициент неправильности системы (11) равен $S-s$.

Пусть $I_n:M_n\to\{0,1\}$ — характеристическая функция множества правильных систем. Используя лемму 3, докажем следующую

Лемма 4. *Путь $n=2$, тогда существует такое отображение (6), удовлетворяющее условию (10), что функция $\mu\mapsto I_2(A(\mu,\cdot))$ совпадает с характеристической функцией множества* $\mathbf{E}$.

Доказательство. Каждому $\mu=(\mu_k)_{k=1}^{\infty}\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ поставим в соответствие систему (11) с

$$\omega_k=\frac{1}{k}\arccos(e^{-\frac{2^{k+1}-2^k-(k+1)}{p_k}}),\quad p_k=\min\{\mu_{[\log_2 k]},k\},$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Для любого $\mu\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ имеем

$$\sin(2\mathrm{arctg}(e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1))}))=\frac{2e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1)}}{1+(e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1)})^2}\leqslant 2e^{-(2^{k+1}-2^k-(k+1))}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{2^{k+1}-2^k-(k+1)}{p_k}}=|\cos(\omega_{k+1}(k+1))|,$$

т. е. выполнено условие (12). Для любого $\mu=(\mu_k)_{k=1}^{\infty}\in\mathcal{B}(\mathbb{N})$ имеем

$$s(k)=\sum_{r=1}^{k}\ln|\cos(\omega_r r)|=\sum_{r=1}^{k}-\frac{2^{r+1}-2^r-(r+1)}{p_r}=\sum_{r=1}^{k}\frac{(r+1)}{p_r}-\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}.$$

Из определения величины s, получаем

$$s=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}s(k)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{(r+1)}{p_r}-\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{(k+1)^2}{\max\limits_{1\leqslant r\leqslant k}p_r}-\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}\right)=$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2^k}\left((k+1)^2 - \sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}\right) = -\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}.$$

С другой стороны, имеем

$$s = \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}s(k) = \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{(r+1)}{p_r} - \sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\left(1 - \sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}\right) = -\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}.$$

Следовательно, получаем

$$s = -\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}.$$

Аналогично для величины S, получаем

$$S = -\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r}.$$

Пусть $\mu \notin \mathbf{E}$, т. е. $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \mu_k < \infty$. Тогда существует бесконечная подпоследовательность $\{\mu_{k'}\} \subset \{\mu_k\}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{k'} = q$, следовательно

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} \geqslant \varlimsup_{k'\to\infty}\frac{1}{2^{2^{k'+1}}}\sum_{r=1}^{2^{k'+1}}\frac{2^r}{p_r} \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k'\to\infty}\frac{1}{2^{2^{k'+1}}}\sum_{r=2^{k'}}^{2^{k'+1}}\frac{2^r}{q} = \lim_{k'\to\infty}\frac{1}{2^{2^{k'+1}}}\frac{2^{2^{k'+1}} - 2^{2^{k'}}}{q} = \frac{1}{q}.$$

Аналогично, получаем

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} \leqslant \varliminf_{k'\to\infty}\frac{1}{2^{2^{k'+1}+1}}\sum_{r=1}^{2^{k'+1}}\frac{2^r}{p_r} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k'\to\infty}\frac{1}{2^{2^{k'+1}+1}}\sum_{r=2^{k'}}^{2^{k'+1}}\frac{2^r}{q} = \lim_{k'\to\infty}\frac{1}{2^{2^{k'+1}+1}}\frac{2^{2^{k'+1}} - 2^{2^{k'}}}{q} = \frac{1}{2q}.$$

Таким образом, имеем

$$S - s = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} - \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} \geqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{q} > 0.$$

Пусть $\mu \in \mathbf{E}$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксируем такое натуральное число k_0, что для любого $k > k_0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{p_k} < \varepsilon, \quad \frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k_0}\frac{2^r}{p_k} < \varepsilon.$$

Тогда, получаем

$$0 \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{2^k}\left(\sum_{r=1}^{k_0}\frac{2^r}{p_r} + \sum_{r=k_0+1}^{k}\frac{2^r}{p_r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\left(2^k\varepsilon + \varepsilon(2^{k+1} - 2^{k_0+1})\right) < 3\varepsilon.$$

Аналогично, получаем

$$0 \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} < \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Таким образом, имеем

$$-\frac{3}{2}\varepsilon < \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} - \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\frac{2^r}{p_r} < 3\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, получаем $S - s = 0$. Итак получили: при $\mu \notin \mathbf{E}$ система $\dot{x} = Q(\mu, t)x$ не является правильной, а при $\mu \in \mathbf{E}$ она является правильной.

По точками разрыва $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ кусочно-непрерывной функции $Q(\mu, \cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 1.$$

построим функцию $A(\mu, \cdot)$ следующим образом:

$$A(\mu, t) = \begin{cases} K_m(t - t_m - \varepsilon_m) + Q(\mu, t_m + \varepsilon_m), \text{ при } t \in [t - \varepsilon_m; t_m + \varepsilon_m]; \\ Q(\mu, t), \text{ при остальных } t, \end{cases}$$

$$K_m = \frac{Q(\mu, t_m + \varepsilon_m) - Q(\mu, t_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}$$

Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}$. Действительно, в точках непрерывности функции $Q(\mu, \cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков

$\bigcup\limits_m [t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$, функция $A(\mu, \cdot)$ совпадает с функцией $Q(\mu, \cdot)$, а на любом из отрезков $[t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$ график функции $A(\mu, \cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(t_m - \varepsilon_m, U(\mu, t_m - \varepsilon_m))$ и точку с координатами $(t_m + \varepsilon_m, Q(\mu, t_m + \varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^t e^{\tau^2} \|A(\mu, \tau) - Q(\mu, \tau)\| \, d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{t_m - \varepsilon_m}^{t_m + \varepsilon_m} e^{\tau^2} \|A(\mu, \tau) - Q(\mu, \tau)\| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{t \geqslant 0} \|A(\mu, t) - Q(\mu, t)\| \sum_{m=1}^{\infty} 2e^{(t_m + \varepsilon_m)^2} \varepsilon_m \leqslant 4,$$

в силу леммы 11 § 6 гл. I, система $\dot{y} = A(\mu, t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot{x} = Q(\mu, t)x$, следовательно, для любого $\mu \in \mathbf{E}$ верны равенства

$$\lambda_1(A(\mu, \cdot)) = \lambda_1(Q(\mu, \cdot)),\ \lambda_2(A(\mu, \cdot)) = \lambda_2(Q(\mu, \cdot))$$

и

$$\varliminf_{t \to \infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} Q(\mu, \tau) \, d\tau = \varliminf_{t \to \infty} \int\limits_0^t \mathrm{Sp} A(\mu, \tau) \, d\tau.$$

Итак, получили отображение

$$A : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\, \mathbb{R}^2 \tag{13}$$

Это отображение непрерывно по совокупности переменных. Действительно, пусть $(\mu^*, t^*) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^+$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное m настолько большим, чтобы $\frac{1}{m} < \varepsilon$ и $t^* \in [0, t_m - 1]$, а $\delta \in (0, 1)$ такое, что для любого $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ выполнено неравенство $\|A(\mu^*, t) - A(\mu^*, t^*)\| < \varepsilon$. Тогда для любой точки (μ, t) такой, что $d(\mu^*, \mu) < \frac{1}{m}$ и $|t - t^*| < \delta$, в силу равенства $A(\mu^*, t)|_{[0, t_m]} = A(\mu, t)|_{[0, t_m]}$, выполнено $\|A(\mu^*, t^*) - A(\mu, t)\| = \|A(\mu^*, t^*) - A(\mu^*, t)\| < \varepsilon$.

Докажем, что отображение (13) непрерывно по μ равномерно по t. Действительно, пусть $d(\mu, \nu) = \frac{1}{m+1}$, т. е. $\mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_m = \nu_m$. Тогда получаем $Q(\mu, t) = Q(\nu, t)$ на отрезке $[0, t_m]$, а следовательно $A(\mu, t) = A(\nu, t)$ на отрезке $[0, t_m - 1]$. Так как

$$\sup_{t \in [t_m - 1, +\infty)} \|A(\mu, t) - \mathrm{diag}\{A(\mu, t)\}\| \leqslant \frac{\pi}{m},$$

то

$$\sup_{t\geqslant 0}\|A(\mu,t)-A(\nu,t)\| =$$

$$= \sup_{t\in[t_m-1,+\infty)} \|A(\mu,t)-\operatorname{diag}\{A(\mu,t)\}-A(\nu,t)+\operatorname{diag}\{A(\nu,t)\}\| \leqslant \frac{\pi}{m}.$$

По отображению (13), построим функцию

$$\mu\mapsto I_2(A(\mu,\cdot)), \tag{14}$$

которая в силу равенств

$$I_2(W_2)=I_2(\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\mathbf{E})=0,\quad I_2(\mathfrak{M}\setminus W_2)=I_2(\mathbf{E})=1,$$

совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$. Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы VI. В силу теоремы IV, множество неправильности W_n является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Допустим, что это множество является еще и множеством типа $F_{\sigma\delta}$, тогда для отображения

$$\mu\mapsto P(\mu,\cdot)=\operatorname{diag}\{A(\mu,\cdot),\underbrace{-3,\ldots,-3}_{n-2}\},$$

где $A(\mu,\cdot)$ — отображение из леммы 4, функция $\mu\mapsto I_n(P(\mu,\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. С другой стороны, эта функция, в силу леммы 4, совпадает с характеристической функцией множества $\mathbf{E}$, а следовательно не принадлежит второму классу Бэра. Полученное противоречие доказывает теорему VI.

Из теоремы 5 § 5 гл. I и теоремы VI получаем.

Следствие 4 [103]. *Если $n\geqslant 2$, то множество неправильных систем не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^u.*

§ 4 Несовпадение двух подмножеств Миллионщикова

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{15}$$

где $A:\mathbb{R}^+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная по $t\in\mathbb{R}^+$ оператор-функция. Пусть

$$\chi(f)=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln f(t)$$

характеристический показатель функции $f(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Обозначим через EI_n множество систем вида (15) таких, что для всякой непрерывной оператор-функции $B(\cdot) :\ \chi(\|B\|) < 0$, система $\dot{y} = (A(t) + B(t))y$ имеет те же показатели Ляпунова, что и система (15) [63]. Известно [27], что множество правильных по Ляпунову систем содержится в EI_n. В докладе [65] предложено естественное расширение множества правильных по Ляпунову систем с сохранением свойства инвариантности показателей Ляпунова относительно экспоненциально убывающих возмущений. Это расширение обозначим через GROD_n — множество систем вида (15), которые обобщенным ляпуновским преобразованием приводимы к диагональным системам с упорядоченной диагональю. Напомним, что системы $\dot{x} = A(t)x$ и $\dot{y} = B(t)y$ вида (15) называются обобщенно ляпуновски эквивалентными, если существует линейное преобразование $y = Q(t)x$, с дифференцируемой матрицей Q, удовлетворяющей условиям

$$\chi(\|Q\|) \leqslant 0,\ \chi(\|Q^{-1}\|) \leqslant 0$$

и переводящее систему A в систему B.

Теорема VII [100]. *Пусть система $A \in GROD_n$, тогда для любой непрерывной оператор-функции $Q(\cdot)\ :\ \chi(Q) < 0$ система $A + Q$ обобщенным ляпуновским преобразованием приводима к системе A.*

Доказательство. Пусть $L(t)$ — обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему $\dot{x} = A(t)x$ к диагональному виду $\dot{y} = P(t)y$ с упорядоченной диагональю $p_1(t) \leqslant \ldots \leqslant p_n(t)$, при $t \in \mathbb{R}^+$. Положим $x = L(t)y$. Из системы $\dot{x} = (A(t) + Q(t))x$, где $\chi(Q) < 0$, получаем

$$\dot{y} = (L^{-1}(t)A(t)L(t) + L^{-1}(t)\dot{L}(t) + L^{-1}(t)Q(t)L(t))y,$$

отсюда

$$\dot{y} = (P(t) + B(t))y, \tag{16}$$

$$P(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) + L^{-1}(t)\dot{L}(t),\ B(t) = L^{-1}(t)Q(t)L(t),$$
$$\chi(B) = \chi(L^{-1}QL) \leqslant \chi(L^{-1}) + \chi(Q) + \chi(L) < 0.$$

Фиксируя $s \in \{1, \ldots, n\}$ в системе (16), произведем замену переменных

$$y(t) = e^{\int\limits_0^t p_s(\tau)d\tau} z(t).$$

Отсюда получаем

$$\dot{z} = (P(t) - p_s(t)E)z(t) + B(t)z(t). \tag{17}$$

Введем обозначение

$$I_{ks}(t_1, t_2) \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} (p_k(r) - p_s(r))d\,r.$$

Установлено ([29], стр. 344), что система (17) имеет ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение $z(t) : |z_k(t)| \leqslant C_1$, $k = 1, \ldots, n$, координаты которого удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$z_k(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\,\tau, \text{ если } I_{ks}(0,+\infty) = -\infty; \\ \int\limits_{+\infty}^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\,\tau, \text{ если } I_{ks}(0,+\infty) > -\infty \text{ и } k \neq s; \\ 1 + \int\limits_{+\infty}^t \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\,\tau, \text{ если } k = s. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \chi(B) < 0$, $\varepsilon \in (0; \min\{-\alpha; 1\})$, $H = \ln\varepsilon$ и C_2: $|b_{ij}(t)| \leqslant C_2 e^{(\alpha+\varepsilon)t}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

Если $I_{ks}(0,+\infty) = -\infty$, то найдутся $t_2(\varepsilon) > t_1(\varepsilon) > 0$ такие, что $I_{ks}(0, t_1(\varepsilon)) = H$ и для любого $t \geqslant t_2(\varepsilon)$ выполнено неравенство $I_{ks}(0,t) \leqslant 2H$. Следовательно, при $t > t_2(\varepsilon)$, получаем

$$e^{I_{ks}(t_1(\varepsilon),t)} = e^{I_{ks}(0,t) - I_{ks}(0,t_1(\varepsilon))} \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, при $t > t_2(\varepsilon)$, получаем

$$\begin{gathered} |z_k(t)| = |\int\limits_0^{t_1(\varepsilon)} e^{I_{ks}(\tau,t_1(\varepsilon)) + I_{ks}(t_1(\varepsilon),t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\,\tau + \\ + \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\,\tau| = \\ = |e^{I_{ks}(t_1(\varepsilon),t)} z_k(t_1(\varepsilon)) + \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^t e^{I_{ks}(\tau,t)} \sum\limits_{l=1}^n b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\,\tau| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon C_1 + nC_1C_2 \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^t e^{(\alpha+\varepsilon)\tau} d\,\tau = \varepsilon C_1 + \tfrac{nC_1C_2}{\alpha+\varepsilon}(e^{(\alpha+\varepsilon)t} - e^{(\alpha+\varepsilon)t_1(\varepsilon)}). \end{gathered}$$

Следовательно $\lim\limits_{t\to\infty}|z(t)|=0$.

Если $I_{ks}(0,+\infty)>-\infty$ и $k\neq s$, получаем

$$|z_k(t)|=|\int\limits_{+\infty}^{t}e^{I_{ks}(\tau,t)}\sum_{l=1}^{n}b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\tau|\leqslant$$
$$\leqslant nC_1C_2\int\limits_{+\infty}^{t}e^{(\alpha+\varepsilon)\tau}d\tau=-\tfrac{nC_1C_2}{\alpha+\varepsilon}e^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

следовательно $\chi(z_k)<0$.

Если $k=s$, то

$$|z_k(t)|=|\int\limits_{+\infty}^{t}\sum_{l=1}^{n}b_{kl}(\tau)z_l(\tau)d\tau|\leqslant$$
$$\leqslant nC_1C_2\int\limits_{+\infty}^{t}e^{(\alpha+\varepsilon)\tau}d\tau=-\tfrac{nC_1C_2}{\alpha+\varepsilon}e^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

следовательно $\chi(z_k-1)<0$. Таким образом $z(t)=e_s+\theta_s(t)$, где

$$e_s=(\underbrace{0,\ldots,0}_{s-1},1,0,\ldots,0),\quad \theta_s(t)=(\theta_{1s}(t),\ldots,\theta_{ns}(t)),$$

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty}|\theta_{ks}(t)|=0,\ \text{если}\ I_{ks}(0,+\infty)=-\infty,\\ \varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\ln|\theta_{ks}(t)|<0,\ \text{если}\ I_{ks}(0,+\infty)>-\infty.\end{gathered}\tag{18}$$

Возвращаясь к переменной y, получаем, что система уравнений (16) имеет систему решений

$$y_s(t)=e^{\int\limits_0^t p_s(\tau)d\tau}(e_s+\theta_s(t)),\ s=1,\ldots,n.$$

Эта система является фундаментальной, так как в силу (18) при достаточно больших t для определителя Вронского выполнено неравенство

$$W[y_1,\ldots,y_n]=e^{\int\limits_0^t\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(\tau)d\tau}\det(e_1+\theta_1(t),\ldots,e_n+\theta_n(t))\neq 0.$$

Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $c_1y_1(t)+\ldots+c_ny_n(t)$, пусть c_{k_0} — ненулевой коэффициент с наибольшим номером, тогда

$$\chi(c_1y_1+\ldots+c_ny_n)\leqslant\max_{k\leqslant k_0}\chi(y_k)=$$
$$=\max_{k\leqslant k_0}\varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\int\limits_0^t p_k(\tau)d\tau=\varlimsup_{t\to\infty}\tfrac{1}{t}\int\limits_0^t p_{k_0}(\tau)d\tau.$$

С другой стороны

$$\chi(c_1y_1+\ldots+c_ny_n)=\chi(c_1y_1+\ldots+c_{k_0}y_n)\geqslant$$

$$\geqslant\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|c_1\theta_{k_01}(t)e^{\int\limits_0^t p_1(\tau)d\tau}+\ldots+c_{k_0-1}\theta_{k_0k_0-1}(t)e^{\int\limits_0^t p_{k_0-1}(\tau)d\tau}+$$

$$+c_{k_0}(1+\theta_{k_0k_0}(t))e^{\int\limits_0^t p_{k_0}(\tau)d\tau}|=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t p_{k_0}(\tau)d\tau$$

Таким образом, система решений $Y(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))$ является нормальной. В системе (2) произведем ляпуновскую замену переменных

$$y=Y(t)e^{-\int\limits_0^t P(\tau)d\tau}z,$$

в результате которой система (2) перейдет в систему P. Следовательно система $A+B$ обобщенным ляпуновским преобразованием

$$L(t)Y(t)e^{-\int\limits_0^t P(\tau)d\tau}$$

приводима к системе A. Теорема VII доказана.

В докладе [64] утверждается, что имеет место включение $\mathrm{GROD}_n\subset\mathrm{EI}_n$, справедливость, которого также можно установить при помощи теоремы VII.

Теорема VIII [100]. *Для любого $n\geqslant 1$ верно включение $GROD_n\subset EI_n$.*

Доказательство. При обобщенных ляпуновских преобразованиях показатели не изменяются, следовательно, в силу теоремы VII, получаем $\lambda_k(A)=\lambda_k(A+B)$, $k=1,\ldots,n$. Теорема VIII доказана.

В докладе [66] поставлен вопрос о строгости включения $\mathrm{GROD}_n\subset\mathrm{EI}_n$. Докажем, что при $n\geqslant 2$ выполнено неравенство $\mathrm{GROD}_n\neq\mathrm{EI}_n$.

Теорема IX [100]. *Пусть $n\geqslant 2$, тогда $GROD_n\neq EI_n$.*

Доказательство. Доказательство достаточно провести для $n=2$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dot x=a_1(t)x,\\ \dot y=a_2(t)y\end{cases}\tag{19}$$

$$a_1(t)=\begin{cases}0, & \text{если} t\in[0;6];\\ 0, & \text{если} t\in((3k)!;(3k+1)!-1];\\ -1, & \text{если} t\in[(3k+1)!;(3k+2)!];\\ 0, & \text{если} t\in[(3k+2)!+1;(3k+3)!],\end{cases}\qquad k=1,2,3,\ldots,$$

$$a_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} t \in [0;6]; \\ 0, & \text{если} t \in ((3k)!; (3k+1)!]; \\ 0, & \text{если} t \in ((3k+1)!; (3k+2)! - 1]; \\ -1, & \text{если} t \in [(3k+2)!; (3k+3)!], \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Потребуем, чтобы функция $a_1(t)$ была аффинно линейна по t на отрезках $[(3k+1)! - 1; (3k+1)!]$ и $[(3k+2)!; (3k+2)! + 1]$, а функция $a_2(t)$ — на отрезках $[(3k+2)! - 1; (3k+2)!]$. Из неравенств

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} -\tfrac{(3n)!}{(3n+1)!} \leqslant \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \tfrac{1}{nT} \sum_{j=1}^{n} \ln ||X((j-1)T; jT)||^{-1} = \omega(A) \leqslant$$
$$\leqslant \Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \tfrac{1}{nT} \sum_{j=1}^{n} \ln ||X(jT; (j-1)T)|| \leqslant 0$$

получаем, что центральные показатели системы равны нулю. Следовательно для любой системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 \\ 0 & a_2(t) \end{pmatrix} x + B(t)x, \ \chi(B) < 0 \tag{20}$$

выполнены равенства

$$\lambda_1(A) = 0 = \omega(A) = \lambda_1(A+B) = \lambda_2(A+B) = \Omega(A) = 0 = \lambda_2(A).$$

Следовательно, система принадлежит множеству EI_n. Допустим, что система (20) принадлежит множеству GROD_n. Пусть система (20) приводима к диагональной системе

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} b_1(t) & 0 \\ 0 & b_2(t) \end{pmatrix} y$$

с упорядоченной диагональю $b_1(t) \geqslant b_2(t)$, при $t \in \mathbb{R}^+$, тогда для фундаментальных матриц систем (19) и (20)

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a_1(\tau) d\tau} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^t a_2(\tau) d\tau} \end{pmatrix} \text{ и } Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t b_1(\tau) d\tau} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^t b_2(\tau) d\tau} \end{pmatrix}$$

существует невырожденная матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ такая, что выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\left\|\begin{pmatrix} c_{11}e^{\int\limits_0^t(a_1(\tau)-b_1(\tau))d\tau} & c_{12}e^{\int\limits_0^t(a_1(\tau)-b_2(\tau))d\tau} \\ c_{21}e^{\int\limits_0^t(a_2(\tau)-b_1(\tau))d\tau} & c_{22}e^{\int\limits_0^t(a_2(\tau)-b_2(\tau))d\tau}\end{pmatrix}\right\| = \\
&= \chi(XCY^{-1}) \leqslant 0, \\
&\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\left\|\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} c_{22}e^{\int\limits_0^t(b_1(\tau)-a_1(\tau))d\tau} & c_{12}e^{\int\limits_0^t(b_1(\tau)-a_2(\tau))d\tau} \\ -c_{21}e^{\int\limits_0^t(b_2(\tau)-a_1(\tau))d\tau} & c_{11}e^{\int\limits_0^t(b_2(\tau)-a_2(\tau))d\tau}\end{pmatrix}\right\| = \\
&= \chi((XCY^{-1})^{-1}) \leqslant 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Из условия $\det C \neq 0$, следует $c_{11}c_{22} \neq 0$ или $c_{21}c_{12} \neq 0$.

Если $c_{11}c_{22} \neq 0$, то, в силу (21), получаем

$$
\chi(e^{\int\limits_0^t(b_1(\tau)-a_1(\tau))d\tau}) \leqslant 0, \quad \chi(e^{\int\limits_0^t(a_2(\tau)-b_2(\tau))d\tau}) \leqslant 0,
$$

отсюда для некоторого $t_0 > 0$ и любого $t \geqslant t_0$ получаем

$$
\int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_1(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{4}t, \quad \int\limits_0^t (a_2(\tau)-b_2(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{4}t.
$$

Следовательно

$$
\int\limits_0^t (a_2(\tau)-a_1(\tau))d\tau =
$$

$$
= \int\limits_0^t (a_2(\tau)-b_2(\tau))d\tau + + \int\limits_0^t (b_2(\tau)-b_1(\tau))d\tau + + \int\limits_0^t (b_1(\tau)-a_1(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{2}t.
$$

С другой стороны, при $t = (3k+2)! :\ t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$
\frac{(3k+2)! - 2((3k+1)!)}{(3k+2)!} \leqslant \frac{1}{(3k+2)!}\int\limits_0^{(3k+2)!} (a_2(\tau)-a_1(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{2}
$$

получили противоречие.

Если $c_{21}c_{12} \neq 0$, то

$$
\chi(e^{\int\limits_0^t(a_1(\tau)-b_2(\tau))d\tau}) \leqslant 0, \quad \chi(e^{\int\limits_0^t(b_1(\tau)-a_2(\tau))d\tau}) \leqslant 0,
$$

отсюда для некоторого $t_0 > 0$ и любого $t \geqslant t_0$ получаем

$$\int\limits_0^t (a_1(\tau) - b_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{4}t, \quad \int\limits_0^t (b_1(\tau) - a_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{4}t.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^t (a_1(\tau) - a_2(\tau))d\,\tau =$$

$$= \int\limits_0^t (a_1(\tau) - b_2(\tau))d\,\tau + \int\limits_0^t (b_2(\tau) - b_1(\tau))d\,\tau + \int\limits_0^t (b_1(\tau) - a_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{2}t.$$

С другой стороны при $t = (3k+3)! :\ t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{(3k+3)! - 2((3k+2)!)}{(3k+3)!}) \leqslant \frac{1}{(3k+3)!} \int\limits_0^{(3k+3)!} (a_1(\tau) - a_2(\tau))d\,\tau \leqslant \frac{1}{2}$$

получили противоречие. Теорема IX доказана.

V Некоторые свойства топологической энтропии отображений компактных метрических пространств

§ 1 Пример всюду разрывности топологической энтропии на пространстве липшицевых отображений компактного метрического пространства

Функционалы, представимые в виде нескольких поточечных предельных переходов от непрерывных функций, встречаются не только в теории показателей Ляпунова, но и в теории динамических систем. Примером такого функционала является *топологическая энтропия* [86].

Топологическая энтропия динамической системы, порожденной непрерывным отображением компактного метрического пространства в себя, представляет собой скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с произвольно хорошей, но конечной точностью. Можно сказать, что топологическая энтропия описывает полную экспоненциальную сложность орбитальной структуры динамической системы единственным числом.

Изучению свойств топологической энтропии, рассматриваемой как функционал на множествах отображений компактных метрических пространств и гладкий многообразий с различными топологиями посвящено много работ (см., например, книгу [41] или обзор [42]). В данной главе изучим свойства топологической энтропии непрерывных отображений с точки зрения бэровской классификации функций.

Напомним определение топологической энтропии динамической системы [41, стр. 120]. Пусть $(X,\, d)$— компактное метрическое пространство и $f : X \to X$— непрерывное отображение. На X определим систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x,\varepsilon,n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ обозначает минимальное количество элементов (f, ε, n)-покрытия. Топологической энтропией динамической системы, порожденной непрерывным отображением f, называется следующая величина

$$h^d_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

Отметим, что если метрика d' задает ту же топологию на X, что и d, то $h^d_{\mathrm{top}}(f) = h^{d'}_{\mathrm{top}}(f)$ [41, стр. 121], поэтому в дальнейшем будем опускать индекс d.

Установлено [41, стр. 501], что топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из [0, 1] в [0, 1] с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией. Вообще говоря, топологическая энтропия непрерывных отображений, непрерывно зависящих от параметра, может и не быть полунепрерывной снизу функцией этого параметра. Приведем соответствующий пример [98]. Рассмотрим, зависящую от параметра $\mu \in [0,\ 1]$ динамическую систему (X, f_μ), где

$$X = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1\}, \quad f_\mu(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0; \\ \mu \frac{z^2}{|z|}, & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $\mu \in [0,\ 1)$ и $\varepsilon > 0$, тогда найдется такое натуральное число $n(\mu, \varepsilon)$, что для любого $i \geqslant n(\mu, \varepsilon)$ и любых точек $z,\ w \in X$ выполнено

$$d(f^i_\mu(z), f^i_\mu(w)) \leqslant d(f^i_\mu(z), 0) + d(0, f^i_\mu(w)) \leqslant 2\mu^i < \varepsilon,$$

следовательно для любого натурального числа $n \geqslant n(\mu, \varepsilon)$ имеем

$$d^{f_\mu}_n(z, w) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i_\mu(z), f^i_\mu(w)) < \max\{d^{f_\mu}_{n(\mu,\varepsilon)}(z, w), \varepsilon\}.$$

Следовательно, при $n \geqslant n(\mu, \varepsilon)$ выполнено неравенство $S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leqslant S_d(f_\mu, \varepsilon, n(\mu, \varepsilon))$, отсюда

$$0 \leqslant h_{\mathrm{top}}(f_\mu) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\ln S_d(f_\mu,\varepsilon,n(\mu,\varepsilon)) = 0.$$

Таким образом, при $\mu \in [0,\,1)$ выполнено равенство $h_{\text{top}}(f_\mu) = 0$.

Пусть $\mu = 1$, положим

$$\varepsilon_k = \sqrt{2(1-\cos(\frac{2\pi}{2^k}))},\quad k = 4, 5, \ldots .$$

Для натурального числа $n \geqslant 4$ рассмотрим множество точек

$$\mathcal{Z} = \{z_m = \exp(\frac{2\pi m i}{2^{k+n}})\},\quad m = 0, \ldots, 2^{k+n}-1.$$

Если расстояние между двумя точками z_p и z_q множества $\mathcal{Z}$ удовлетворяет неравенству $d(z_p,z_q) \geqslant \varepsilon_k$, то $d_n^{f_1}(z_p,z_q) \geqslant \varepsilon_k$. Если расстояние между двумя различными точками z_p и z_q этого множества удовлетворяет неравенству $d(z_p,z_q) < \varepsilon_k$, то найдется такое $l \leqslant n-1$, что $d_n^{f_1}(z_p,z_q) \geqslant d(f_1^l(z_p), f_1^l(z_q)) \geqslant \varepsilon_k$. Таким образом, для любых двух точек выполнено неравенство $d_n^{f_1}(z_p,z_q) \geqslant \varepsilon_k$. Отсюда получаем $S_d(f_1,\varepsilon_k,n) \geqslant 2^{k+n}$, следовательно

$$h_{\text{top}}(f_1) = \lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\ln S_d(f_1,\varepsilon_k,n) \geqslant \ln 2.$$

Таким образом, функция

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f_\mu) \tag{1}$$

разрывна в точке $\mu = 1$. Более того, функция (1) не является полунепрерывной снизу в точке $\mu = 1$.

Как уже отмечалось выше, топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из $[0,\,1]$ в $[0,\,1]$ с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией. Следовательно, в силу теоремы Бэра о функциях первого класса (см. теорему I § 2 гл. I), в типичной по Бэру точке топологическая энтропия непрерывна. Для компактных пространств X отличных от отрезка, топологическая энтропия может быть всюду разрывной даже на пространстве липшицевых отображений с равномерной топологией. Проведем соответствующее построение.

На множестве функций $f : X \to X$, удовлетворяющих условию Липшица с константой $K > 0$ определим топологию равномерной сходимости, введя метрику

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(y)),$$

получившееся метрическое пространство обозначим $Lip_K(X)$.

Теорема I [92]. *Пусть $K > 1$, тогда функция $h_{\text{top}} : Lip_K(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^+$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра.*

Доказательство теоремы I будет разбито на ряд лемм.

Лемма 1. *Для любого $f \in Lip_K(\mathcal{B})$ выполнено равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\rho(f,g) < \varepsilon} h_{\text{top}}(g) = 0.$$

Доказательство. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ и $f(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots)$. Рассмотрим отображение

$$g_{n_0}(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots).$$

В силу определения, для отображения g_{n_0} выполнено неравенство

$$\rho(f, g_{n_0}) = \max_{x \in \mathcal{B}} d(f(x), g_{n_0}(x)) \leqslant \frac{1}{n_0},$$

из которого получаем

$$\lim_{n_0 \to \infty} \rho(f, g_{n_0}) = 0. \qquad (2)$$

Докажем, что $g_{n_0} \in Lip_K(\mathcal{B})$. Пусть x, $y \in \mathcal{B}$.

1. Если $d(f(x), f(y)) \geqslant \frac{1}{n_0}$, то $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) = d(f(x), f(y)) \leqslant Kd(x, y)$.

2. Если $d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{1}{n_0+1}$, то $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) \leqslant d(x, y) \leqslant Kd(x, y)$.

Вычислим топологическую энтропию отображения g_{n_0}. Пусть $k_0 : \frac{1}{n_0} > \frac{K}{k_0}$. Если $d(x, y) < \frac{1}{k_0}$, то $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) < \frac{1}{n_0}$. В противном случае, из включения $g_{n_0} \in Lip_K(\mathcal{B})$, имеем $\frac{1}{n_0} \leqslant d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) < Kd(x, y) < K\frac{1}{k_0}$. Следовательно, для любого n выполнено равенство

$$B_{g_{n_0}}(x, \frac{1}{k_0}, 0) = B_{g_{n_0}}(x, \frac{1}{k_0}, n).$$

Таким образом, для любого n получаем $S_d(g_{n_0}, \frac{1}{k_0}, n) \leqslant 2^{k_0}$, откуда

$$h_{\text{top}}(g_{n_0}) = \lim_{k_0 \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(g_{n_0}, \frac{1}{k_0}, n) = \lim_{k_0 \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{k_0}{n} = 0.$$

В силу (2), получаем

$$0 \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\rho(f,g)<\varepsilon} h_{\mathrm{top}}(g) \le \lim_{n_0\to\infty} h_{\mathrm{top}}(g_{n_0}) = 0.$$

Лемма доказана.

На пространстве $\mathcal{B}$ определим отображение $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ (сдвиг на один элемент влево) по формуле $\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Оценим снизу топологическую энтропию этого отображения. Для $\varepsilon = \frac{1}{k}$ рассмотрим множество точек

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{B} : d(x, 0) \geqslant \frac{1}{n+k-2}\}.$$

Для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из $\mathcal{N}$ имеем $d^n_\sigma(x^{(1)}, x^{(2)}) > \frac{1}{k}$. Мощность множества $\mathcal{N}$ равна $2^{n+k-2} - 1$, а следовательно, получаем неравенство

$$S_d(\sigma, \frac{1}{k}, n) \geqslant 2^{k+n-2} - 1.$$

Таким образом, имеем

$$h_{\mathrm{top}}(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(\sigma, \frac{1}{k}, n) \geqslant \ln 2.$$

Лемма 2. *Для любого $f \in Lip_K(\mathcal{B})$ выполнено неравенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\rho(f,g)<\varepsilon} h_{\mathrm{top}}(g) \geqslant \ln 2.$$

Доказательство. Пусть $f \in Lip_K(\mathcal{B})$, $f(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots)$. Для натурального числа n_0, удовлетворяющего неравенству $1 + \frac{1}{n_0} < K$, рассмотрим отображение

$$\sigma_{n_0}(x_1, x_2, \ldots) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \ldots).$$

В силу определения σ_{n_0} выполнено неравенство

$$\rho(f, \sigma_{n_0}) = \max_{x\in\mathcal{B}} d(f(x), \sigma_{n_0}(x)) \leqslant \frac{1}{n_0},$$

из которого получаем

$$\lim_{n_0\to\infty} \rho(f, \sigma_{n_0}) = 0. \tag{3}$$

Докажем, что $\sigma_{n_0} \in Lip_K(\mathcal{B})$.

1. Пусть $d(p_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = \frac{1}{l}$, $l = 1, 2, \ldots, n_0$, тогда $d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = d(f(x), f(y)) \leqslant K \cdot d(x, y)$.

2. Пусть $d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = \frac{1}{n_0+1}$ и $d(x, y) = \frac{1}{l}$, $l = 1, 2, \ldots, n_0 + 1$, тогда $d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) \leqslant \frac{1}{n_0+1} \leqslant K \cdot d(x, y)$.

3. Пусть $d(x, y) = \frac{1}{n_0+1+l}$, $l = 1, 2, \ldots$, тогда

$$d(\sigma_{n_0}(x), \sigma_{n_0}(y)) = \frac{1}{n_0 + l} = \frac{1}{n_0 + l} \cdot \frac{n_0 + 1 + l}{n_0 + 1 + l} =$$

$$= \frac{n_0 + 1 + l}{n_0 + l} \cdot \frac{1}{n_0 + 1 + l} = (1 + \frac{1}{n_0 + l}) \cdot d(x, y) \leqslant K \cdot d(x, y).$$

Оценим снизу топологическую энтропию отображения σ_{n_0}. Это отображение, начиная с n_0, является сдвигом на один элемент влево, следовательно топологическая энтропия отображения σ_{n_0} не менее $\ln 2$. В силу (3), получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\rho(f,p) < \varepsilon} h_{\text{top}}(p) \geqslant \lim_{n_0 \to \infty} h_{\text{top}}(\sigma_{n_0}) \geqslant \ln 2.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы I. В силу лемм 1 и 2, каждая точка полного метрического пространства $Lip_K(\mathcal{B})$ является точкой разрыва топологической энтропии. Следовательно, в силу теоремы Бэра о функциях первого класса (см. теорему I § 2 гл. I), функция $h_{\text{top}} : Lip_K(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}^+$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве $Lip_K(\mathcal{B})$. Теорема доказана.

§ 2 Принадлежность второму бэровскому классу и типичная полунепрерывность снизу топологической энтропии

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и непрерывному по совокупности переменных отображению

$$f : \mathfrak{M} \times X \to X, \tag{4}$$

образуем функцию

$$\mu \longmapsto h_{\text{top}}(f_\mu(\cdot)). \tag{5}$$

Теорема II [109]. *Для любого отображения (4) функция (5) принадлежит второму классу Бэра на пространстве* $\mathfrak{M}$.

Теорема III [109]. *Если* $\mathfrak{M}$*— полное метрическое пространство, то для любого отображения (4) в типичной по Бэру точке пространства* $\mathfrak{M}$ *функция (5) полунепрерывна снизу.*

Предварительно докажем несколько вспомогательных лемм, которые будут использованы для доказательства теорем II и III.

По метрикам $d_{\mathfrak{M}}$ и d на пространствах $\mathfrak{M}$ и X соответственно, зададим метрику $d_{\mathfrak{M}\times X}$ на $\mathfrak{M}\times X$ формулой

$$d_{\mathfrak{M}\times X}((\mu,\nu),(x,y)) = \max\{d_{\mathfrak{M}}(\mu,\nu), d(x,y)\}.$$

Лемма 3. *Для произвольного* $\mu_0\in\mathfrak{M}$ *и положительного числа* ε *найдется такое* $\delta_{\mu_0}(\varepsilon)\in(0;\varepsilon)$, *что для любых* $\mu\in\mathfrak{M}$, x, $y\in X$, *удовлетворяющих условию* $d_{\mathfrak{M}\times X}((\mu,\mu_0),(x,y))<\delta_{\mu_0}(\varepsilon)$, *выполнено неравенство* $d(f_\mu(x),f_\mu(y))<\varepsilon$.

Доказательство. Возьмем положительное число ε. В силу непрерывности отображения (4) для каждой точки $x\in X$ найдется ее окрестность $\mathcal{V}_x(\varepsilon)$ в пространстве X и открытый шар $\mathcal{U}_{\mu_0,\,x}(\varepsilon)$ с центром в точке $\mu_0\in\mathfrak{M}$, такие, что для любой точки $(\mu,y)\in\mathcal{U}_{\mu_0,\,x}(\varepsilon)\times\mathcal{V}_x(\varepsilon)$ выполнено неравенство $d(f_{\mu_0}(x),f_\mu(y))<\varepsilon$. Из компактности пространства X следует существование такого конечного набора точек $(x_k)_{k=1}^n\subset X$, что

$$X\subset\bigcup_{k=1}^n\mathcal{V}_{x_k}(\varepsilon).$$

Пусть

$$\mathcal{U}_{\mu_0}(\varepsilon)=\bigcap_{k=1}^n\mathcal{U}_{\mu_0,\,x_k}(\varepsilon),$$

тогда для любого $\mu\in\mathcal{U}_{\mu_0}(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\sup_{x\in X} d(f_{\mu_0}(x),f_\mu(x))<\varepsilon. \tag{6}$$

В силу компактности пространства X отображение $f_{\mu_0}:X\to X$ является равномерно непрерывным на X, то есть для ε найдется такое $\sigma_{\mu_0}(\varepsilon)\in(0;\varepsilon)$, что из неравенства $d(x,y)<\sigma_{\mu_0}(\varepsilon)$ вытекает неравенство

$$d(f_{\mu_0}(x),f_{\mu_0}(y))<\varepsilon. \tag{7}$$

Пусть $\delta_{\mu_0}(\varepsilon)$ — наименьшее из двух чисел: радиуса шара $\mathcal{U}_{\mu_0}(\frac{\varepsilon}{3})$ и числа $\sigma_{\mu_0}(\frac{\varepsilon}{3})$. Тогда из неравенств (6) и (7) для любых $\mu \in \mathfrak{M}$, x, $y \in X$ таких, что $d_{\mathfrak{M}\times X}((\mu,\mu_0),(x,y)) < \delta_{\mu_0}(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$d(f_\mu(x), f_\mu(y)) \leqslant d(f_\mu(x), f_{\mu_0}(x)) + d(f_{\mu_0}(x), f_{\mu_0}(y)) + d(f_{\mu_0}(y), f_\mu(y)) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 [92]. *Для произвольных $\mu_0 \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $\alpha_{\mu_0,n}(\varepsilon) \in (0;\,\varepsilon)$, что для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ такого, что $d_{\mathfrak{M}}(\mu,\mu_0) < \alpha_{\mu_0,n}(\varepsilon)$ и любых x, $y \in X$ выполнено неравенство $d_n^{f_\mu}(x,y) \leqslant 2\varepsilon + d_n^{f_{\mu_0}}(x,y)$.*

Доказательство. Положим

$$\alpha_{\mu_0,n}(\varepsilon) = \underbrace{\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\ldots\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}}_{n-1}(\frac{1}{2}\varepsilon)\ldots)),$$

где $\delta_{\mu_0}(\varepsilon) \in (0;\,\varepsilon)$ из леммы 3. Для любого $x \in X$ и $\mu \in \mathfrak{M}$ такого, что $d_{\mathfrak{M}}(\mu,\mu_0) < \alpha_{\mu_0,n}(\varepsilon)$, в силу леммы 3 получаем

$$d(f_\mu(x), f_{\mu_0}(x)) \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\ldots\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}}_{n-2}(\frac{1}{2}\varepsilon)\ldots)) < \varepsilon. \tag{8}$$

Для любого $i = 2,\ldots,n-2$ выполнена оценка

$$\begin{gathered}
d(f^i_{\mu_0}(x), f^i_\mu(x)) \leqslant d(f_{\mu_0}(f^{i-1}_{\mu_0}(x)), f_{\mu_0}(f^{i-1}_\mu(x)))+\\
+d(f_{\mu_0}(f^{i-1}_\mu(x)), f_\mu(f^{i-1}_\mu(x))) \leqslant\\
\leqslant \underbrace{\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\ldots\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}}_{n-i-1}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ldots)) + \underbrace{\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\ldots\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}}_{n-2}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ldots)) \leqslant\\
\leqslant \delta_{\mu_0}(\underbrace{\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\ldots\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}}_{n-i-2}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ldots)) < \varepsilon.
\end{gathered} \tag{9}$$

Для $i = n-1$ выполнена оценка

$$\begin{gathered}
d(f^{n-1}_\mu(x), f^{n-1}_{\mu_0}(x)) \leqslant d(f_{\mu_0}(f^{n-2}_{\mu_0}(x)), f_{\mu_0}(f^{n-2}_\mu(x)))+\\
+d(f_{\mu_0}(f^{n-2}_\mu(x)), f_\mu(f^{n-2}_\mu(x))) <\\
< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \underbrace{\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}(\ldots\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}}_{n-2}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)\ldots)) < \varepsilon
\end{gathered} \tag{10}$$

Из неравенств (8)—(10) следует

$$d_n^{f_\mu}(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i_\mu(x), f^i_\mu(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(d(f^i_\mu(x), f^i_{\mu_0}(x)) + d(f^i_{\mu_0}(x), f^i_{\mu_0}(y)) + d(f^i_{\mu_0}(y), f^i_\mu(y))) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^i_{\mu_0}(x), f^i_{\mu_0}(y)) + \varepsilon = 2\varepsilon + d^{f_{\mu_0}}_n(x, y).$$

Лемма доказана.

Лемма 5 [92]. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждого непрерывного отображения $f : X \to X$ пространство (X, d^f_n) является компактным.*

Доказательство. В силу компактности пространства X отображение $f : X \to X$ является равномерно непрерывным на X, то есть для любого положительного числа ε найдется такое $\delta(\varepsilon) \in (0; \varepsilon)$, что из неравенства $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ вытекает неравенство $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Для произвольных $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $n = 2, 3, \ldots$ имеет место включение

$$B_f(x, \varepsilon, 0) \supset B_f(x, \varepsilon, n) \supset B_f(x, \underbrace{\delta(\ldots\delta}_{n-1}(\varepsilon)\ldots), 0),$$

а следовательно метрики d^f_n и d порождают одну и ту же топологию на пространстве X. Таким образом, из компактности пространства X получаем компактность пространства (X, d^f_n). Лемма 5 доказана.

Лемма 6 [92]. *Пусть множество $E \subset X$ является (f, ε, n)–покрытием для непрерывного отображения $f : X \to X$. Тогда существует такое натуральное число m, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon - \frac{1}{m} > 0$, что множество E является $(f, \varepsilon - \frac{1}{m}, n)$–покрытием.*

Доказательство. Так как множество $E \subset X$ является (f, ε, n)– покрытием, то справедливо включение

$$X \subset \bigcup_{x\in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

В силу равенства

$$B_f(x, \varepsilon, n) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_f(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n),$$

множество шаров $\{B_f(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n),\ m \in \mathbb{N},\ x \in E\}$ образует счетное покрытие компактного пространства (X, d^f_n). Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\{B_f(x_j, \varepsilon - \frac{1}{m_j}, n),\ j = 1, \ldots, J\}$, и положим $m^* = \max_{j=1,\ldots,J} m_j$. Тогда множество шаров $\{B_f(x, \varepsilon - \frac{1}{m^*}, n),\ x \in E\}$— тоже покрытие компактного пространства (X, d_n^f), и лемма верна при $m = m^*$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7 [92]. *Для любого натурального n и любого положительного числа ε функция $\mu \mapsto S_d(f_\mu, \varepsilon, n)$ полунепрерывна сверху в каждой точке пространства $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mu_0 \in \mathfrak{M}$. Пусть множество $E_{\mu_0} \subset X$ является $(f_{\mu_0}, \varepsilon, n)$–покрытием т. е.

$$X \subset \bigcup_{x \in E_{\mu_0}} B^{f_{\mu_0}}(x, \varepsilon, n).$$

По лемме 6 существует такое натуральное число m, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon - \frac{1}{m} > 0$, что множество E_{μ_0} является $(f_{\mu_0}, \varepsilon - \frac{1}{m}, n)$–покрытием. Пусть $d_{\mathfrak{M}}(\mu, \mu_0) < \alpha_{\mu_0, n}(\frac{1}{2m\varepsilon})$, где $\alpha_{\mu_0, n}(\cdot)$ из леммы 4.

Тогда, в силу леммы 4, для любого $x \in X$ и любого $y \in B_{f_{\mu_0}}(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n)$ получаем

$$d_n^{f_\mu}(x, y) \leqslant \frac{1}{m} + d_n^{f_\mu}(x, y) < \varepsilon,$$

следовательно, точка y принадлежит шару $B^{f_\mu}(x, \varepsilon, n)$. Таким образом, выполнено включение $B_{f_{\mu_0}}(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n) \subset B_{f_\mu}(x, \varepsilon, n)$, т. е. множество E_{μ_0} является (f_μ, ε, n)–покрытием.

Таким образом, имеем $S_d(f_\mu, \varepsilon, n) \leqslant S_d(f_{\mu_0}, \varepsilon, n)$ для любого μ из некоторой окрестности μ_0, а следовательно функция $\mu \mapsto S_d(f_\mu, \varepsilon, n)$ полунепрерывна сверху в точке μ_0 пространства $\mathfrak{M}$. Лемма 7 доказана.

В книге [41, стр. 123] установлена следующая

Лемма 8. *Для любого непрерывного отображения $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ справедлива формула*

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

Доказательство теоремы II. По лемме 7 функция $\mu \mapsto S_d(f_\mu, \varphi, \varepsilon, n)$ полунепрерывна сверху, следовательно (см. п. 8, § 1, гл. 1) существует последовательность непрерывных функций $\mu \mapsto g_d^m(f_\mu, A, \varepsilon, n)$ на пространстве $\mathfrak{M}$ такая, что

$$\frac{1}{n} \ln S_d(\cdot, \varepsilon, n) = \inf_{m \in \mathbb{N}} g_d^m(\cdot, \varepsilon, n).$$

Отсюда, в силу леммы 8, получаем

$$h_{\text{top}}(f_\mu) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f_\mu, \varepsilon, n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \varliminf_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} g_d^m(f_\mu, \varphi, \frac{1}{k}, n) =$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{l\geq n} \inf_{m\in\mathbb{N}} g_d^m(f_\mu, \frac{1}{k}, l) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant p} \max_{1\leqslant n\leqslant p} \lim_{q\to\infty} \min_{n\leqslant l\leqslant q} \min_{1\leq m\leqslant q} g_d^m(f_\mu, \frac{1}{k}, l).$$

Из непрерывности функций $\mu \mapsto g_d^m(\cdot, \varepsilon, n)$ следует непрерывность функций

$$\mu \mapsto \min_{n\leq l\leq q} \min_{1\leq m\leq q} g_d^m(f_\mu, \frac{1}{k}, l)$$

(см. п. 7, § 1, гл. 1). Отсюда функции

$$\mu \mapsto \lim_{q\to\infty} \min_{n\leq l\leq q} \min_{1\leq m\leq q} g_d^m(f_\mu, \frac{1}{k}, l)$$

принадлежат первому классу Бэра, следовательно, функции

$$\mu \mapsto \Psi_p(f_\mu) = \max_{1\leq k\leq p} \max_{1\leq n\leq p} \lim_{q\to\infty} \min_{n\leq l\leq q} \min_{1\leq m\leq q} \varphi_d^m(f_\mu, \frac{1}{k}, l)$$

также принадлежат первому классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$ (см. п. 7, § 1, гл. 1). Следовательно функция $\mu \mapsto h_{\text{top}}(f_\mu)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Теорема II доказана.

Доказательство теоремы III. Докажем, что в типичной по Бэру точке пространства $\mathfrak{M}$ функция $\mu \mapsto h_{\text{top}}(f_\mu))$ полунепрерывна снизу. Для любого натурального числа p функция

$$\Psi_p(f) = \sup_{1\leqslant k\leqslant p} \sup_{1\leqslant n\leqslant p} \lim_{q\to\infty} \inf_{n\leqslant l\leqslant q} \inf_{1\leqslant m\leqslant q} g_d^m(f_\mu, \frac{1}{k}, l).$$

принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathfrak{M}$. Так как последовательность $(\Psi_p(f_\mu))_{p=1}^\infty$ является неубывающей, то по лемме 2, § 2, гл. 1 получаем, что в типичной по Бэру точке функция

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f_\mu) = \lim_{p\to\infty} \Phi_p(f_\mu)$$

полунепрерывна снизу. Теорема III доказана.

Пусть $\mathfrak{M} = Lip_K(\mathcal{B})$, а отображение (4) имеет вид $f_{f(\cdot)}(x) = f(x)$. В силу теоремы III и леммы 1 получаем, что

Теорема IV. *Для любого положительного числа $K > 1$, в типичной точке пространства $Lip_K(\mathcal{B})$ топологическая энтропия равна нулю.*

Отметим, что при $K \leqslant 1$ топологическая энтропия равна нулю в каждой точке пространства $Lip_K(\mathcal{B})$.

§ 3 Непринадлежность топологической энтропии первому бэровскому классу

Оказывается, в теореме II второй класс Бэра, вообще говоря, нельзя заменить на первый класс Бэра. Приведем соответствующее построение.

Теорема V [94]. *Существуют непрерывное отображение $g : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ и константа $K > 0$, такие, что*

1. *при всяком фиксированном значении первого аргумента $\mu \in \mathcal{B}$ функция $g(\mu, \cdot) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ является гомеоморфизмом из $\mathcal{B}$ в себя;*
2. *для каждого $\mu \in \mathcal{B}$ и любых $x, y \in \mathcal{B}$ выполнено неравенство $d(g(\mu, x), g(\mu, y)) \leqslant Kd(x, y)$;*
3. *для каждого $\mu \in \mathcal{B}$ и любых $u, v \in g(\mu, \mathcal{B})$ выполнено неравенство $d(g^{-1}(\mu, u), g^{-1}(\mu, v)) \leqslant Kd(u, v)$;*
4. *функция $\mu \longmapsto h_{\mathrm{top}}(g(\mu, \cdot))$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{B}$.*

Доказательство теоремы будет разбито на ряд лемм. Рассмотрим множество бесконечных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \{0, 1\}$; на этом множестве введем метрику

$$d_{\mathcal{BM}}(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B; \\ \frac{1}{\min\{\max\{i,\, j \colon a_{ij} \neq b_{ij}\}\}}, & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через $\mathcal{BM}$.

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{BM}$, определяемое формулой

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \ldots)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_9 & \ldots \\ x_4 & x_3 & x_8 & \ldots \\ x_5 & x_6 & x_7 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В силу определения отображение φ является гомеоморфизмом из $\mathcal{B}$ на $\mathcal{BM}$.

Лемма 9. *Для любых $x, y \in \mathcal{B}$ выполнено неравенство*

$$d_{\mathcal{BM}}(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \sqrt{2d_{\mathcal{B}}(x, y)}.$$

Доказательство. Если $d_{\mathcal{B}}(x, y) = 0$, то $d_{\mathcal{BM}}(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$. Пусть $d_{\mathcal{B}}(x, y) = \frac{1}{k}$, где $k = 1, 2, \ldots$, тогда имеем ($[\cdot]$ — целая часть числа)

$$d_{\mathcal{BM}}(\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{1}{[\sqrt{k-1}] + 1} = \frac{\sqrt{k}}{[\sqrt{k-1}] + 1}\sqrt{d_{\mathcal{B}}(x, y)} \leqslant \sqrt{2d_{\mathcal{B}}(x, y)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Для любых $A, B \in \mathcal{BM}$ выполнено неравенство*

$$d_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(B)) \leqslant 4d^2_{\mathcal{BM}}(A, B).$$

Доказательство. Если $d_{\mathcal{B}}(x, y) = 0$, то $d_{\mathcal{BM}}(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = 0$. Если $d_{\mathcal{BM}}(A, B) = \frac{1}{k}$, где $k = 1, 2, \ldots$, то

$$d_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(B)) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2 + 1} = \frac{k^2}{((k-1)^2 + 1)k^2} \leqslant 4d^2_{\mathcal{BM}}(A, B).$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть отображение $f : \mathcal{BM} \to \mathcal{BM}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $K > 0$, тогда отображение $\varphi^{-1}(f(\varphi)) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $8K^2$.*

Доказательство. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{B}$ в силу лемм 9 и 10 получаем

$$d_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(f(\varphi(x))), \varphi^{-1}(f(\varphi(y)))) \leqslant 4d^2_{\mathcal{BM}}(f(\varphi(x)), f(\varphi(y))) \leqslant$$

$$\leqslant 4(Kd_{\mathcal{BM}}(\varphi(x), \varphi(y)))^2 \leqslant 8K^2 d_{\mathcal{B}}(x, y).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим отображение $f : \mathcal{B} \times \mathcal{BM} \to \mathcal{BM}$, определяемое формулой

$$f\left((\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots), \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11+\mu_1} & a_{12+\mu_2} & a_{13+\mu_3} & \ldots \\ a_{2-\mu_1 1} & a_{2-\mu_2 2} & a_{2-\mu_3 3} & \ldots \\ a_{3-\mu_1 1} & a_{3-\mu_2 2} & a_{3-\mu_3 3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В силу определения отображение f непрерывно и является гомеоморфизмом из $\mathcal{BM}$ в себя при каждом фиксированном $\mu \in \mathcal{B}$.

Лемма 12. *Для каждого $\mu \in \mathcal{B}$ и любых $A, B \in \mathcal{BM}$ и $C, D \in f(\mu, \mathcal{BM})$ выполнены неравенства*

$$d_{\mathcal{BM}}(f(\mu, A), f(\mu, B)) \leqslant 2d_{\mathcal{BM}}(A, B),$$

$$d_{\mathcal{BM}}(f^{-1}(\mu, C), f^{-1}(\mu, D)) \leqslant 2d_{\mathcal{BM}}(C, D).$$

Доказательство. Если $d_{\mathcal{BM}}(A, B) = d_{\mathcal{BM}}(C, D) = 0$, то

$$d_{\mathcal{BM}}(f(\mu, A), f(\mu, B)) = d_{\mathcal{BM}}(f^{-1}(\mu, C), f^{-1}(\mu, D)) = 0.$$

Если $d_{\mathcal{BM}}(A, B) = d_{\mathcal{BM}}(C, D) = 1$, то

$$d_{\mathcal{BM}}(f(\mu, A), f(\mu, B)) \leqslant 1, \quad d_{\mathcal{BM}}(f^{-1}(\mu, C), f^{-1}(\mu, D)) \leqslant 1.$$

Пусть $d_{\mathcal{BM}}(A, B) = d_{\mathcal{BM}}(C, D) = \frac{1}{n}$, где $n = 2, 3, \ldots$, тогда

$$d_{\mathcal{BM}}(f(\mu, A), f(\mu, B)) \leqslant \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \leqslant 2d_{\mathcal{BM}}(A, B),$$

$$d_{\mathcal{BM}}(f^{-1}(\mu, C), f^{-1}(\mu, D)) \leqslant \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \leqslant 2d_{\mathcal{BM}}(C, D).$$

Лемма доказана.

В пространстве $\mathcal{B}$ выделим подмножества: P_0, состоящее из последовательностей $\mu \in \mathcal{B}$, у которых, начиная с некоторого номера, все элементы равны нулю, и P_1, состоящее из последовательностей $\mu \in \mathcal{B}$ у которых, начиная с некоторого номера, все элементы равны единице.

Лемма 13. *Если $\mu \in P_1$, то $h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)) \geqslant \ln 2$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in P_1$, тогда найдется такое натуральное число n_0, что для любого $k \geqslant n_0$ выполнено равенство $\mu_k = 1$. Пусть $n > n_0$. Рассмотрим множество матриц Q из $\mathcal{BM}$, коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 1,\ j = n_0, \dots, n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что мощность множества Q равна 2^{n-n_0+1}. Пусть $A, B \in Q$ и $A \neq B$, тогда

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} d_{\mathcal{BM}}(f^i(\mu, A), f^i(\mu, B)) \geqslant \frac{1}{n_0}.$$

Если $\varepsilon < \frac{1}{2n_0}$, то величина $S_d(f_\mu, \varepsilon, n)$ не менее, чем мощность множества Q, а следовательно, $h_{\mathrm{top}}(f(\mu(\cdot)) \geqslant \ln 2$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Если $\mu \in P_0$, то $h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in P_0$, тогда найдется такое натуральное число n_0, что для любого $k \geqslant n_0$ выполнено равенство $\mu_k = 0$. Пусть $\varepsilon < \frac{1}{n_0}$. Рассмотрим множество R матриц из $\mathcal{BM}$, коэффициенты которых удовлетворяют условиям ($[\cdot]$ — целая часть числа)

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 1, \dots, [\frac{1}{\varepsilon}] + 1,\ j = 1, \dots, [\frac{1}{\varepsilon}] + 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что мощность множества R равна $2^{([\frac{1}{\varepsilon}]+1)^2}$. Пусть $B \in \mathcal{BM}$, тогда найдется матрица $A \in R$, удовлетворяющая неравенству $d_{\mathcal{BM}}(A, B) < \varepsilon$, а следовательно, выполнено неравенство

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} d_{\mathcal{BM}}(f^i(\mu, A), f^i(\mu, B)) < \varepsilon.$$

Таким образом, величина $S_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, n)$ не превосходит мощности множества R, а значит, топологическая энтропия отображения $f(\mu, \cdot)$ равна нулю. Лемма доказана.

Доказательство теоремы V. Рассмотрим сложное отображение $g(\mu, \cdot) = \varphi^{-1}(f(\mu, \varphi(\cdot))) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, которое является гомеоморфизмом из $\mathcal{B}$ в себя. В силу лемм 9–14, для любых $x, y \in \mathcal{B}$ получаем неравенство

$$d_{\mathcal{B}}(g(\mu, x), g(\mu, y)) = d_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(f(\mu, \varphi(x))), \varphi^{-1}(f(\mu, \varphi(y)))) \leqslant$$

$$\leqslant 4d^2_{\mathcal{BM}}(f(\mu,\varphi(x)), f(\mu,\varphi(y))) \leqslant 16d^2_{\mathcal{BM}}(\varphi(x),\varphi(y)) \leqslant 32d_{\mathcal{B}}(x,y),$$

а следовательно, отображение $g(\mu,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица. Аналогично обратное отображение $g^{-1}(\mu,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $g(\mu,\mathcal{B})$.

Далее, при $\mu \in P_1$ в силу леммы 13 и инвариантности топологической энтропии относительно топологического сопряжения выполнено неравенство $h_{\mathrm{top}}(g(\mu,\cdot)) = h_{\mathrm{top}}(\varphi^{-1}(f(\mu,\varphi(\cdot)))) \geqslant \ln 2$, а при $\mu \in P_0$ в силу леммы 14 выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(g(\mu,\cdot)) = h_{\mathrm{top}}(\varphi^{-1}(f(\mu,\varphi(\cdot)))) = 0$.

Следовательно, любая точка пространства $\mathcal{B}$ является точкой разрыва, а поэтому функция $\mu \longmapsto h_{\mathrm{top}}(g(\mu,\cdot))$ не принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{B}$. Теорема V доказана.

Так как множество Кантора на отрезке [0, 1] с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой гомеоморфно пространству $\mathcal{B}$ (см. глава I, §1, п. 9), то справедливо

Следствие 1 [109]. *Пусть $\mathfrak{M} \equiv X$ — множество Кантора на отрезке* [0, 1] *с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой тогда найдется отображение (4), являющееся гомеоморфизмом из X в X при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, для которого функция (5) всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу.*

Заключение

Диссертация вносит фундаментальный вклад в развитие теории показателей Ляпунова. Автором решен ряд крупных проблем из теории бэровской классификации показателей Ляпунова. Отметим следующие результаты:

1) доказана непринадлежность минимальных полунепрерывных сверху мажорант показателей Ляпунова первому классу Бэра;

2) доказано, что максимальные полунепрерывные снизу миноранты показателей Ляпунова, экспоненциальный показатель Изобова, нижние вспомогательные показатели Миллионщикова (кроме старшего) не принадлежат второму классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией;

3) доказана непринадлежность промежуточных верхних вспомогательных показателей Миллионщикова третьему классу Бэра на пространстве линейных систем с компактно-открытой топологией;

4) доказано, что для любого семейства систем, непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства, множество неправильности является множеством типа $G_{\delta\sigma}$, а также существуют такие полное метрическое пространство и семейство систем, непрерывно (равномерно по времени, при не менее чем двумерном фазовом пространстве) зависящих от параметра, что множество неправильности не является множеством типа $F_{\sigma\delta}$;

5) доказано, что для любого семейства непрерывных отображений, непрерывно зависящих от параметра из метрического пространства, топологическая энтропия, рассматриваемая как функция на этом метрическом пространстве принадлежит второму классу Бэра, и предъявлен пример такого семейства, для которого топологическая энтропия не принадлежит первому классу Бэра.

Список литературы

[1] *Агафонов В. Г.* К бэровской классификации показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1466.

[2] *Агафонов В. Г.* О классе Бэра показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1092–1093.

[3] *Агафонов В. Г.* О классе Бэра верхнего показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1089.

[4] *Агафонов В. Г.* О классе Бэра показателей Ляпунова однородных и неоднородных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 905–906.

[5] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

[6] *Аринъш Е. Г.* Об одном обобщении теоремы Бэра // УМН. 1953. Т. 8, № 3. С. 105–108.

[7] *Барабанов Е. А.* О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1067–1084.

[8] *Барабанов Е. А.* О свойствах старшего σ-показателя // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 739–744.

[9] *Басов В. П.* Исследование устойчивости движения для некоторого класса периодических систем // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н. ЛГУ, Л. 1949.

[10] *Беккенбах Э., Беллман Э.* Неравенства // М.: Мир. 1965.

[11] *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры // М.: Наука, 1983.

[12] *Богданов Ю. С.* К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104, № 6. С. 813–814.

[13] *Богданов Ю. С.* Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1957. Т. 41, № 4. С. 481–498.

[14] *Быков В. В.* Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 5. С. 186.

[15] *Быков В. В.* О связи классов Бэра функционалов и формул // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 852.

[16] *Быков В. В., Салов Е. Е.* О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика. 2003. № 1. С. 33–40.

[17] *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости // М.: Наука. 1966.

[18] *Былов Б. Ф., Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1785–1793.

[19] *Былов Б. Ф., Изобов Н. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794–1803.

[20] *Бэр Р.* Теория разрывных функций // М.-Л.: ГТТИ. 1932.

[21] *Ветохин А. Н.* Бэровская классификация функций и ее приложения к теории показателей Ляпунова // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н. МГУ им. М. В. Ломоносова, М. 1996.

[22] *Виноград Р. Э.* Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91, № 5. С. 999–1002.

[23] *Виноград Р. Э.* Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, № 6. С. 645–650.

[24] *Виноград Р. Э.* Неустойчивость младшего характеристических показателей правильной системы // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 541–544.

[25] *Виноград Р. Э.* О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. Т. 42, № 2. С. 207–222.

[26] *Виноград Р. Э.* Необходимый и достаточный критерий и точная асимптотика устойчивости по первому приближению // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 5. С. 800–813.

[27] *Гробман Д. М.* Характеристические показателей систем, близких к линейным // Матем. сборник. 1952. Т. 30, № 1. С. 121–166.

[28] *Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука. 1970.

[29] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости // М.: Наука. 1967.

[30] *Изобов Н. А.* О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1186–1192.

[31] *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.

[32] *Изобов Н. А.* Минимальный показатель двумерной линейной дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 848–858.

[33] *Изобов Н. А.* О старшем показателе системы с возмущениями порядка выше первого // Вестник Белорусского университета. Серия 1. 1969, № 3. С. 6–9.

[34] *Изобов Н. А.* Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8.

[35] *Изобов Н. А., Барабанов Е. А.* О виде старшего σ-показателя линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 2. С. 359–362.

[36] *Изобов Н. А., Макаров Е. К.* О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1870–1880.

[37] *Изобов Н. А., Степанович О. П.* Об экспоненциально убывающих возмущениях, сохраняющих характеристические показатели линейной диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 934–943.

[38] *Изобов Н. А.* Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 12. С. 2034–2055.

[39] *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

[40] *Илларионова О. Г.* О вспомогательных показателях линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та прикл. механики им. Векуа. 1988. Т. 31. С. 80–98.

[41] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М. Факториал, 1999.

[42] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.

[43] *Келдыш Л. В.* Структура B-множеств // Тр. МИАН, 1945, Т. 17. С. 1–74.

[44] *Куратовский К.* Топология. Т. 1 // М.: Мир. 1966.

[45] *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических иножествах и их приложениях. М., 1953.

[46] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // М.-Л.: Гостехиздат. 1950.

[47] *Мазаник С. А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. Мн.: БГУ, 2008.

[48] *Макаров Е. К.* О множествах неправильности линейных систем с параметром при производной // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2091–2098.

[49] *Миллионщиков В. М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775–1784.

[50] *Миллионщиков В. М.* Доказательство достижимости центральных показателей // Сибирск. матем. журнал. 1969. Т. 10, № 1. С. 99–104.

[51] *Миллионщиков В. М.* К теории характеристических показателей Ляпунова // Математические заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 503–513.

[52] *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.

[53] *Миллионщиков В. М.* Типичное свойство показателей Ляпунова // Математические заметки. 1986. Т. 40, № 2. С. 203–217.

[54] *Миллионщиков В. М.* О классах Бэра центральных показателей // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 12. С. 2190.

[55] *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова как функции параметра // Математический сборник. 1988. Т. 137, № 3. С. 364–380.

[56] *Миллионщиков В. М.* Относительные показатели Боля и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1087.

[57] *Миллионщиков В. М.* Классификация по Бэру относительных мажорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, №6. С. 1088 — 1089.

[58] *Миллионщиков В. М.* Нерешенная задача о мажорантах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1457.

[59] *Миллионщиков В. М.* О мажорантах показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С. 1090.

[60] *Миллионщиков В. М.* Класс Бэра показателя Изобова // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, №11. С. 2009.

[61] *Миллионщиков В. М.* О классе Бэра указателей условной устойчивости // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, №6. С. 1085.

[62] *Миллионщиков В. М.* Задачи о минорантах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014–2015.

[63] *Миллионщиков В. М.* Экспоненциально-инвариантные системы // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014.

[64] *Миллионщиков В. М.* Линейные системы, обобщенно приводимые к упорядоченно-диагональному виду // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2020.

[65] *Миллионщиков В. М.* Об одном классе линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1090–1091.

[66] *Миллионщиков В. М.* Нерешенная задача о классах линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2092.

[67] *Морозов О. И.* О бэровском классе показателей Ляпунова неоднородных линейных систем // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1991, № 6. С. 22–30.

[68] *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. ММО, 1968, Т. 19. С. 179–210.

[69] *Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.

[70] *Попова С. Н.* Об управлении коэффициентами неправильности линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 858–859.

[71] *Рахимбердиев М. И.* О бэровском классе показателей Ляпунова // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925–931.

[72] *Сергеев И. Н.* Инвариантность центральных показателей относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1719.

[73] *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.

[74] *Сергеев И. Н.* Критерий полунепрерывности снизу показателей Ляпунова трехмерных линейных систем // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49, вып. 4. С. 142.

[75] *Сергеев И. Н.* К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1600–1601.

[76] *Сергеев И. Н.* Бэровские классы формул для показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2092–2093.

[77] *Сергеев И. Н.* О достижимости минимальных показателей в классе бесконечно малых возмущений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000, № 3. С. 61–63.

[78] *Сергеев И. Н.* Класс Бэра максимальных показателей линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1574.

[79] *Феклин В. Г.* Классификация нижних вспомогательных показателей по Бэру // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 2009.

[80] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

[81] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра некоторых показателей линейных систем в компактно-открытой топологии // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 905.

[82] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра вспомогательных логарифмических показателей // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 906.

[83] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра экстраординарных показателей Боля в компактно-открытой топологии // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 1598.

[84] *Ширяев К. Е.* О классе Бэра стапенных вспомогательных показателей // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1099.

[85] *Ширяев К. Е.* Вспомогательные показатели Боля в неравномерных шкалах // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 6. С. 1099.

[86] *Adler R. L., Konheim A. G., Mc An drew M. H.* Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 1965. 114, 2. P. 309–319.

[87] *Baire R.* Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1906. V. 30. P. 1–48.

[88] *Baire R.* Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1909. V. 32. P. 97–136.

[89] *Misiurewicz M.* Diffeomorphism without any measure with maximal entropy // Bull Acad Pol. sci, Math, astron et phys. 1973. 21. 10. P. 903–910.

[90] *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 31. Hf. 5. S. 748–766.

[91] *Perron O.* Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist // J. reine und angew. Math. 1931. Bd. 142. S. 254–270.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК

[92] *Ветохин А. Н.* О свойствах топологической энтропии на равностепенно непрерывном множестве отображений // Математические заметки. 2016. Т. 96. Вып. 3. С. 333–341.

[93] *Ветохин А. Н.* Пустота множества точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 3. С. 282–291.

[94] *Ветохин А. Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов. // Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 44–48.

[95] *Vetokhin A. N.* On Lebesgue Sets Determined by Asymptotic Characteristics of Solutions of Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. October 2015. Volume 210, Issue 2, pp. 186-199.

[96] *Ветохин А. Н.* О множестве точек полунепрерывности снизу показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1669–1671.

[97] *Ветохин А. Н.* К бэровской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1302–1311.

[98] *Ветохин А. Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // Математические заметки. 2013. Т. 93. Вып. 3. С. 347–356.

[99] *Ветохин А. Н.* К задаче о минорантах показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 950–952.

[100] *Ветохин А. Н.* О несовпадении двух множеств линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 6. С. 784–788.

[101] *Ветохин А. Н.* О свойствах показателей Ляпунова правильных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 417–423.

[102] *Ветохин А. Н.* Об одном свойстве центральных показателей // Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1. Математика. Механика. 2002. № 1. С. 52–53.

[103] *Ветохин А. Н.* Точный дескриптивный тип множества правильных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1128–1129.

[104] *Ветохин А. Н.* Точный класс Бэра вспомогательных показателей // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 10. С. 1424–1426.

[105] *Ветохин А. Н.* Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1313–1317.

[106] *Ветохин А. Н.* К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1039–1042.

Прочие публикации

[107] *Ветохин А. Н.* О свойствах сигма-показателя Изобова // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2000. Т. 4. С. 20–24.

[108] *Ветохин А. Н.* Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями // Сборник «Современные проблемы математики и механики». Том IX. Математика. Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2015. С. 11–28.

Тезисы докладов

[109] *Ветохин А. Н.* Метод неординарных семейств в теории бэровских классов показателей Ляпунова // Международная математическая конференция «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы Международной научной конференции. Минск, 7–10 декабря 2015 г. — Институт математики НАН Беларуси, 2015. С. 20–24.

[110] *Ветохин А. Н.* Некоторые свойства показателей Ляпунова линейных систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова «Теория управления и математическое моделирование». Удмуртский государственный университет. Ижевск, 2015. Изд-во: Удмуртский государственный университет (Ижевск), 2015. С. 44–45.

[111] *Ветохин А. Н.* О точном классе Бэра показателей Ляпунова на множестве правильных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 6. С. 905.

[112] *Ветохин А. Н.* Некоторые свойства конструктивного показателя // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 6. С. 853.

[113] *Ветохин А. Н.* О векторных пространствах, определяемых показателями Ляпунова и характеристиках условной экспоненциальной устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 12, С. 2095.

[114] *Ветохин А. Н.* О топологической структуре множество правильных систем // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 11. С. 1937.

[115] *Ветохин А. Н.* О характеристиках условной экспоненциальной устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 9. С. 1601.