МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.982.256

Флеров Александр Алексеевич

ИЗБРАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ С КОНЕЧНОЗНАЧНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Бородин Петр Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Балашов Максим Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО "Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Дружинин Юрий Юрьевич, кандидат физико-математических наук преподаватель математики в ГБОУ "Лицей №1158" г. Москвы

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО **"Тульский государственный университет"**

Защита диссертации состоится 10 июня 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "МГУ им. М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан   апреля 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических
наук, профессор **В. В. Власов**

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена вопросам геометрической теории приближений в нормированных пространствах, связанным с исследованием свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией.

Актуальность темы. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, M — непустое подмножество X. *Метрической проекцией* элемента $x \in X$ на M называется множество $P_M(x) = \{y \in M : \rho(x, M) = \|x - y\|\}$, где величина $\rho(x, M) := \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$ есть расстояние от x до M. Оператор P_M, ставящий в соответствие элементу x его метрическую проекцию на множество M, называется *оператором метрического проектирования*. Множество M называется множеством *существования*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ содержит хотя бы один элемент, и множеством *единственности*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ состоит из не более чем одного элемента. Если множество M является одновременно и множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ метрическая проекция на M однозначна, то M называется *чебышевским*[1].

Свойства множества быть множеством существования, единственности или чебышевским множеством относятся к числу основных аппроксимативных свойств.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевость, единственность, существование и т.д.) с их тополого-геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, связность и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

Свое начало геометрическая теория приближений (как, впрочем, и теория приближений в целом) берет в классической работе П. Л.Чебышева[2], в которой впервые было введено понятие *наилучшего приближения* и, в частности, была установлена чебышевость множества P_n алгебраических многочленов степени не выше n и множества R_{mn} рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В своей работе П. Л. Чебышев фактически описал оператор

[1] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // ДАН СССР, **118**:1 (1958), 17–19.

[2] *Чебышев П. Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // 1859, в кн.: Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., Т.2, М.-Л., АН СССР, 1947, 151–235.

метрического проектирования на множества P_n и R_{mn} (теорема об альтернансе).

Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в 60-е годы XX века благодаря, в первую очередь, работам В. Кли на Западе и работам наших соотечественников Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина, а затем работам В. И. Бердышева, Л. П. Власова, А. Л. Гаркави, Е. В. Ошмана, Э. Асплунда, Х. Беренса, Д. Борвейна, Д. Браесса, А. Брауна, А. Брондстеда, Д. Вулберта, Ч. Данхэма, Ф. Дойча, Л. Заийчека, И. Зингера, Й. Линденштраусса, Р. Фелпса, Э. Чини, М. Эдельстейна и др.

Большая часть исследований по геометрической теории приближений в нашей стране была проведена представителями научной школы С. Б. Стечкина, внесшими большой вклад в дальнейшее развитие теории: А. Р. Алимовым, П. В. Альбрехтом, В. И. Андреевым, В. С. Балаганским, А. А. Васильевой, В. И. Ивановым, М. И. Карловым, С. В. Конягиным, В. А. Кощеевым, Е. Д. Лившицем, Ю. В. Малыхиным, А. В. Мариновым, К. С. Рютиным, Г. Ф. Устиновым, И. Г. Царьковым и др., а также М. В. Балашовым, П. А. Бородиным, Г. Е. Ивановым, В. П. Фонфом и многими другими математиками.

Напомним определения гладкости и строгой выпуклости пространства: пространство X называется *гладким*, если через всякую точку единичной сферы $S(X)$ этого пространства проходит единственная опорная гиперплоскость; пространство X называется *строго выпуклым*, если единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков.

Геометрические свойства чебышевских множеств одними из первых начали исследовать Л. Бунт и Т. Мотцкин, а в дальнейшем Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин и В. Кли. Результатами их исследований являются, в частности, следующие две теоремы:

Теорема А. [3,4,5,6] *Подмножество конечномерного гладкого строго выпуклого банахова пространства является чебышевским тогда и только тогда, когда оно замкнуто и выпукло.*

---

[3] *Bunt L.* Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen // Thesis. Univ. Groningen, Amsterdam, 1934.

[4] *Motzkin Th.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 562–567.

[5] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // ДАН СССР, **118**:1 (1958), 17–19.

[6] *Klee V.* A characterization of convex sets // Amer. Math. Mon., **56** (1949), 247–249.

Теорема B. [7,8] *Двумерное банахово пространство является гладким тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество выпукло.*

В дальнейшем были получены многие результаты по описанию чебышевских множеств в различных пространствах, наиболее важные из них отражены в обзорах[9,10,11,12,13], посвященных геометрической теории приближений. На сегодняшний день самой известной нерешенной задачей геометрической теории приближений является проблема Кли-Ефимова-Стечкина, также известная как *"проблема выпуклости чебышевских множеств"*: всякое ли чебышевское множество в гильбертовом пространстве выпукло?

Таким образом, чебышевские множества активно исследовались рядом крупных математиков, а в двумерных банаховых пространствах получили достаточно полное описание в геометрических терминах.

В сравнении с чебышевскими множествами, множества с многозначной и, более узко, конечнозначной метрической проекцией мало изучались. Исторически изучение таких множеств началось с размерностного анализа множества точек неединственности. Именно, будем обозначать через $T = T(M)$ множество точек $\{x \in X \ : \ |P_M(x)| \leqslant 1\}$. *Множеством точек неединственности* называется множество $X \setminus T$. С. Б. Стечкин[14] заложил основы направления геометрической теории приближений по изучению плотностных и категорных свойств точек существования, единственности и неединственности для множеств с достаточно произвольной структурой. В частности, он построил пример такого множества в евклидовой плоскости, что множество точек неединственности $X \setminus T$ плотно в некотором круге. Размерностные характеристики множеств неединственности в конечномер-

---

[7] *Motzkin Th.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 562–567.

[8] *Motzkin Th.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 773–779.

[9] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН, **71**:1(427) (2016), 3–84.

[10] *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // УМН, **51**:6(312) (1996), 125–188.

[11] *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН, **28**:6(174) (1973), 3–66.

[12] *Гаркави А. Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, 75–132.

[13] *Царьков И. Г.* Геометрическая теория приближения в работах С. Б. Стечкина // Известия Тульского гос. ун-та, Матем., **11**:1 (2005), 236–260.

[14] *Стечкин С. Б.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Revue de Math. pures et appl., **8**:1 (1963), 5–18.

ных пространствах были исследованы в работах Х. Паука[15], П. Эрдеша[16]. Бесконечномерные аналоги этих результатов были получены С. В. Конягиным[17], доказавшим, что множество точек единственности произвольного замкнутого множества в сепарабельном банаховом пространстве имеет II категорию, и Л. Зайичеком, который, в частности, доказал[18], что в строго выпуклом сепарабельном пространстве множество неединственности покрывается счетным числом липшицевых гиперповерхностей. Л. Зайичек[19] и М. И. Карлов[20] построили примеры множеств в евклидовой плоскости, представляющих собой различные уточнения результатов Стечкина о мере точек неединственности.

Более детальный анализ множества неединственности начался сравнительно недавно. Для данного множества $M \subset X$ положим $T_n = T_n(M) = \{x \in X : |P_M(x)| = n\}$. Ф. де Бласи и др. авторами[21,22,23] для различных значений n исследовалась мера множества T_n при некоторых ограничениях на структуру множества M и условиях на пространство X. П. Каннарса и Р. Пейроне[24] рассмотрели условия на структуру множества M и пространства X, при которых множество T_n является связным. Х. Беренс и К. Бартке[25] описали множество T_n для случая евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$. В их работе, в частности, доказано, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество $X \setminus T$ есть объединение счетного числа ограниченно компактных множеств, имеющих хаусдорфову размерность $n-1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем в $\mathbb{R}^2$ множество

[15] Pauc C. Sur la relation entre un point et une de ses projections sur un ensemble // Rev. Sci., **77**:8 (1939), 657–658.

[16] *Erdös P.* Some remarks on the measurability of certain sets // Bull. of the Amer. Math. Soc., **51**:10 (1945), 728–731.

[17] *Конягин С. В.* Аппроксимативные свойства произвольных множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // ДАН СССР, **239**:2 (1978), 261–264.

[18] Zajiček L. On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces // Comment. Math. Univ. Carolinae, **19**:3 (1978), 513–523.

[19] *Заийчек Л.* Метрическая проекция и метрическая функция в пространствах Банаха // Теория приближения функций. Труды международной конференции по теории приближения функций, Наука, М., 1987, 179–182.

[20] *Karlov M. I.* Approximative property of compact C^2-manifolds in Hilbert space // East J. on Appr., **2**:2 (1996), 197–203.

[21] *De Blasi F.* Some geometric properties of typical compact convex sets in Hilbert spaces // Studia Math., **135**:2 (1999), 143–162.

[22] *De Blasi F., Zamfirescu T.* Cardinality of the metric projection on typical compact sets in Hilbert spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **126**:1 (1999), 37–44.

[23] *De Blasi F., Zhivkov N.* Properties of typical bounded closed convex sets in Hilbert space // Abstr. Appl. Anal., **4** (2005), 423–436.

[24] *Cannarsa P., Peirone R.* Unbounded components of the singular set of the distance function in $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), 4567–4581.

[25] *Bartke K., Berens H.* Eine beschreibung der nichteindeutigkeitsmenge für die beste approximation in der Euklidischen ebene // Journal of Approximation Theory, **47**:1 (1986), 54–74.

$X \setminus T$ представляется в виде счетного объединения спрямляемых кривых в случае, когда множество M компактно.

Следует отдельно отметить существование ряда работ[26,27,28,29], в которых изучается вопрос о конечности множества элементов наилучшего или локально наилучшего приближения посредством рациональных функций, экспоненциальных сумм и проч. в различных функциональных пространствах. Работы такого типа наиболее интересны с точки зрения непосредственных приложений теорем о множествах с конечнозначной метрической проекцией.

Сформулируем еще один примечательный результат, связанный со множествами с конечнозначной метрической проекцией. Для этого нам понадобятся несколько определений. Последовательность $\{y_n\} \subset M$ называется *минимизирующей* для элемента $x \in X$, если $\|y_n - x\| \to \rho(x, M)$ при $n \to \infty$. Множество M называется *аппроксимативно компактным*, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из M. П. А. Бородин и И. А. Пятышев[30] установили, что в любом банаховом пространстве X из достаточно широкого класса, в частности, во всех пространствах $l_p, 1 \leqslant p < \infty$, существует такое не аппроксимативно компактное ограниченное множество M, что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$. Неизвестно, можно ли построить такое множество с дополнительным условием $|P_M(x)| \leqslant k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$. В случае $k = 1$ и $X = l_2$ построение такого множества означало бы отрицательное решение проблемы выпуклости.

Упомянем также о работах А. Брауна[31,32], А. Н. Дранишникова[33,34] и

[26] *Braess D.* Chebyshev Approximation by γ-polynomials, II // Journal of Approximation Theory, **11** (1974), 16–37.

[27] *Braess D.* On Rational L_2-Approximation // Journal of Approximation Theory, **18** (1976), 136–151.

[28] *Diener I.* On Nonuniqueness in Nonlinear L_2-Approximation // Journal of Approximation Theory, **51** (1987), 54–67.

[29] *Verfürth R.* On the number of local best approximations by exponential sums // Journal of Approximation Theory, **34** (1982), 306–323.

[30] *Бородин П. А., Пятышев И. А.* Пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией // Матем. заметки, **86**:2 (2009), 170–174.

[31] *Brown A.* Chebyshev Sets and Facial Systems of Convex Sets in Finite-Dimensional Spaces // Proc. London Math. Soc. (3), **41**:2 (1980), 297–339.

[32] *Brown A.* Chebyshev sets and the shapes of convex bodies // Methods of Functional Analysis in Approximation Theory, Proc. Int. Conf., Bombay, 1985, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **76**, Birkhaüser, Basel, 1986, 98–121.

[33] Дранишников А. Н. Многозначные абсолютные ретракты и абсолютные экстензоры в размерности 0 и 1 // УМН, **39**:5(239) (1984), 241–242.

[34] Дранишников А. Н. Абсолютные F-значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. матем. журн. **27**:3 (1986), 74–86.

В. В. Федорчука[35,36], посвященных изучению конечнозначных и многозначных ретракций. Взаимосвязь конечнозначных ретракций с геометрической теорией приближений и, в частности, со множествами с многозначной метрической проекцией, рассмотрена, например, в работе А. Р. Алимова[37] и в обзоре А. Р. Алимова и И. Г. Царькова[38].

При исследовании множеств с конечнозначной метрической проекцией, как обобщений чебышевских множеств, естественно возникает следующая задача: можно ли доказать какие-либо аналоги теорем A и B, если в их формулировке заменить чебышевское множество на такое множество M, что для всякого $x \in X$ имеет место неравенство $1 \leqslant |P_M(x)| \leqslant n$, где $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число? Эта задача для $n = 2$ исследуется в I и II главах диссертации.

Другой класс множеств с, как правило, конечнозначной метрической проекцией, исследуемый в диссертации, — класс так называемых *локально чебышевских* множеств, то есть множеств M, удовлетворяющих следующему условию: для любого элемента $y \in M$ найдется такое положительное число $r = r(y)$, что множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ — чебышевское; здесь $U_r(y) = \{z \in X : \|z - y\| < r\}$. Отметим, что во многих ситуациях множества с конечнозначной метрической проекцией являются локально чебышевскими множествами.

Интересный пример возникновения локально чебышевских множеств в прикладной задаче теории приближений рассмотрен в работе А. Р. Алимова и И. Г. Царькова[39] и связан с уравнением эйконала.

Понятие локально чебышевского множества было предложено М. В. Балашовым по аналогии с понятием локально выпуклого множества: множество $M \subset X$ называется локально выпуклым[40], если для любого элемента $y \in M$ найдется такое число $r = r(y) > 0$, что каждое множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ выпукло. Взаимосвязь локально выпуклых и выпуклых множеств в банаховых пространствах в неявном виде исследовалась в работе А. В. Арутю-

---

[35] *Федорчук В. В.* Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // УМН, **41**:6(252) (1986), 121–159.

[36] *Федорчук В. В.* Многозначные ретракции и характеризации n-мягких отображений // Тр. ММО, **51**, Издательство Московского университета, М., 1988, 169–207.

[37] *Алимов А. Р.* Выпуклость ограниченных чебышевских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **14**:4(2) (2014), 489–497.

[38] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН, **71**:1(427) (2016), 3–84.

[39] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН, **71**:1(427) (2016), 3–84.

[40] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа // Физматлит, М., 2007.

нова[41], в которой, в частности, был установлен следующий результат:

Теорема C. *Всякое связное замкнутое локально выпуклое множество в банаховом пространстве является выпуклым.*

При этом заметим, что из выпуклости замкнутого множества его локальная выпуклость следует очевидным образом.

В III главе диссертации, в попытке получить аналог теоремы C, исследуется следующая задача, поставленная М. В. Балашовым: когда из локальной чебышевости множества в банаховом пространстве следует его чебышевость "глобальная", и наоборот? При этом вводится и оказывается полезным понятие *ограниченно чебышевского* множества, то есть такого множества M, пересечение которого с произвольным замкнутым шаром является чебышевским множеством.

Цель работы: исследование аппроксимативных и геометрических свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией; исследование множеств с не более чем двузначной метрической проекцией на нормированной плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве; исследование локально чебышевских и ограниченно чебышевских множеств в различных банаховых пространствах.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказано, что двумерное банахово пространство является гладким тогда и только тогда, когда всякое его замкнутое подмножество с не более чем двузначной метрической проекцией 2-выпукло, то есть всякая точка выпуклой оболочки этого множества лежит на отрезке с концами в этом множестве.

2. Доказана 2-выпуклость множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ при некоторых дополнительных условиях.

3. Исследованы локально чебышевские множества на плоскости. Доказано, что в двумерном банаховом пространстве всякое связное замкнутое локально чебышевское множество является чебышевским. Приведен пример замкнутого связного локально чебышевского, но не чебышевского множества в пространстве $C[0,1]$.

4. Исследованы ограниченно чебышевские множества на плоскости. Доказано, что двумерное банахово пространство является строго выпуклым

[41] *Арутюнов А. В.* Выпуклые свойства преобразования Лежандра // Матем. заметки, **28**:2 (1980), 255–264.

тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество является ограниченно чебышевским. Для каждого натурального $n \geqslant 3$ приведен пример строго выпуклого n-мерного пространства X_n, в котором есть чебышевское, но не ограниченно чебышевское множество.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, выпуклого анализа, методы современной геометрической теории приближений и геометрии банаховых пространств.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по геометрической теории приближений в МГУ под руководством профессора П. А. Бородина (неоднократно, 2010–2016);
- семинар "Теория приближений" в МГУ под руководством профессора И. Г. Царькова, доцента А. С. Кочурова, доцента А. А. Васильевой и научного сотрудника А. Р. Алимова (2013, 2016);
- научный семинар кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством профессора А. В. Арутюнова (2015);
- семинар "Тригонометрические и ортогональные ряды' в МГУ под руководством профессора М. К.Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко и профессора М. И. Дьяченко (2016).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная конференция «Теория приближений», посвященная 90-летию со дня рождения С.Б. Стечкина (2010);
- школа С. Б. Стечкина по теории функций в г. Миасс (2013, 2014);
- на международной конференции "Вероятность, анализ и геометрия" в МГУ (2014);
- на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (2015).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора (две из них — в журналах из перечня ВАК), список которых приведён в конце автореферата. Все результаты получены автором самостоятельно.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 61 наименования. Общий объем диссертации — 68 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В главе I исследуется вопрос об описании пространств, в которых всякое замкнутое множество с не более чем двузначной метрической проекцией является 2-выпуклым. Получен следующий аналог теоремы B.

Теорема 1.1. *Двумерное банахово пространство является гладким тогда и только тогда, когда всякое его замкнутое подмножество с не более чем двузначной метрической проекцией 2-выпукло.*

В главе II исследуются множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Напомним, что хаусдорфовым расстоянием между ограниченными множествами M и N нормированного пространства X называется величина

$$h(M,N) = \max\{\varepsilon > 0 : N \subset M_\varepsilon \text{ и } M \subset N_\varepsilon\},$$

где A_ε обозначает ε-раздутие множества A, т. е. множество вида $\bigcup_{x\in A} \overline{U_\varepsilon(x)}$.

Теорема 2.1. *Пусть непустое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^3$ таково, что выполняются следующие условия:*

1) $1 \leqslant |P_M(x)| \leqslant 2$ для всякого элемента $x \in \mathbb{R}^3$;

2) множество $T_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |P_M(x)| = 2\}$ замкнуто;

3) для любого элемента $x \in T_2$ найдутся такие $K = K(x) > 0$ и $\delta_0 = \delta_0(x) > 0$, что для всякого $x' \in U_{\delta_0}(x) \cap T_2$ имеем $h(P_M(x), P_M(x')) \leqslant K|x' - x|$.

Тогда M является 2-выпуклым.

Наложение условий 2) и 3) в теореме 2.1 является вынужденным, так как получить доказательство теоремы в более общем случае пока не удается.

В главе III исследуются локально чебышевские и ограниченно чебышевские множества. Доказан следующий аналог теоремы C.

Теорема 3.1. *В двумерном банаховом пространстве X всякое связное замкнутое локально чебышевское множество M является чебышевским.*

Теорема 3.1 не распространяется на произвольные банаховы пространства. Именно, в § 3.4 приведен пример замкнутого связного локально чебышевского, но не чебышевского множества в пространстве $C[0,1]$. Этот пример идейно восходит к известному примеру Ч. Данхэма[42] несвязного чебышевского множества в $C[0,1]$.

Получен следующий критерий строгой выпуклости двумерного банахова пространства в терминах ограниченной чебышевости.

Теорема 3.2. *Двумерное банахово пространство является строго выпуклым тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество является ограниченно чебышевским.*

В качестве следствия из теоремы 3.2 получен критерий строгой выпуклости двумерного банахова пространства в терминах локальной чебышевости.

Следствие 3.1. *Двумерное банахово пространство является строго выпуклым тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество является локально чебышевским.*

Следующий результат устанавливает эквивалентность понятий чебышевского, ограниченно чебышевского и локально чебышевского множества в случае строго выпуклого двумерного пространства.

Следствие 3.2. *В двумерном строго выпуклом банаховом пространстве X следующие условия на множество $M \subset X$ эквивалентны:*

а) M чебышевское;

б) M ограниченно чебышевское;

в) M связное, замкнутое и локально чебышевское.

Теорема 3.2 не обобщается на более чем двумерные пространства. Именно, в § 3.5 с помощью одного результата И. Г. Царькова[43] для каждого натурального $n \geqslant 3$ приводится пример строго выпуклого n-мерного пространства X_n, в котором есть чебышевское, но не локально чебышевское (а значит, и не ограниченно чебышевское) множество. Исходя из этого примера, доказывается следующий критерий.

[42] *Dunham C.* Chebyshev Sets in C[0,1] which are not suns // Canad. Math. Bull., **18**:1 (1975), 35–37.

[43] *Царьков И. Г.* Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки, **36**: 1 (1984), 73–87.

Теорема 3.3. *Пусть n-мерное строго выпуклое банахово пространство X_n ($n \geqslant 3$) таково, что всякое его ограниченное чебышевское подмножество выпукло. Тогда следующие условия на чебышевское множество $M \subset X_n$ эквивалентны:*

а) M невыпуклое;

б) M не локально чебышевское.

В заключении диссертационной работы намечены направления дальнейших исследований. Сформулированы следующие основные гипотезы.

1. В трехмерном гладком и строго выпуклом банаховом пространстве X всякое замкнутое множество $M \subset X$ с не более чем двузначной метрической проекцией является 2-выпуклым.

2. В произвольном конечномерном банаховом пространстве X всякое связное замкнутое локально чебышевское множество M является чебышевским.

Благодарности

В первую очередь автор приносит благодарность своим родителям и близким, без которых его диссертационная работа не была бы написана никогда. Автор признателен А. Р. Алимову и И. Г. Царькову за полученные замечания. Автор очень благодарен своему научному руководителю П. А. Бородину за постановку задач и сопутствие в работе.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации из официального перечня ВАК:

[1] *Флеров А. А.* О множествах с не более чем двузначной метрической проекцией на плоскости // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1, Матем. Механ., 2013, №6, 14–19.

[2] *Флеров А. А.* Локально чебышевские множества на плоскости // Матем. заметки, **97**:1 (2015), 142–149.

Прочие публикации:

[3] *Флеров А. А.* О множествах с многозначной метрической проекцией на плоскости // Совр. методы теории функций и смежные проблемы, матер. Международной конф.: Воронежская зимняя матем. школа, ВГУ Воронеж, 2015, 146–147.