МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
кафедра теории функций и функционального анализа

На правах рукописи

УДК 517.982.256

Флеров Александр Алексеевич

ИЗБРАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ С КОНЕЧНОЗНАЧНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор П. А. Бородин

Москва — 2016

Содержание

Введение

Диссертация посвящена вопросам геометрической теории приближений в нормированных пространствах, связанным с исследованием свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, M — непустое подмножество X. *Метрической проекцией* элемента $x \in X$ на M называется множество $P_M(x) = \{y \in M : \rho(x, M) = \|x - y\|\}$, где величина $\rho(x, M) := \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$ есть расстояние от x до M. Оператор P_M, ставящий в соответствие элементу x его метрическую проекцию на множество M, называется *оператором метрического проектирования*. Множество M называется множеством *существования*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ содержит хотя бы один элемент, и множеством *единственности*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ состоит из не более чем одного элемента. Если множество M является одновременно и множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ метрическая проекция на M однозначна, то M называется *чебышевским* [13].

Свойства множества быть множеством существования, единственности или чебышевским множеством относятся к числу основных аппроксимативных свойств.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевость, единственность, существование и т.д.) с их тополого-геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, связность и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

Свое начало геометрическая теория приближений (как, впрочем, и теория приближений в целом) берет в классической работе П. Л.Чебышева [27], в которой впервые было введено понятие *наилучшего приближения* и, в частности, была установлена чебышевость множества P_n алгебраических многочленов степени не выше n и множества R_{mn} рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В своей работе П. Л. Чебышев фактически описал оператор метрического проектирования на множества P_n и R_{mn}, соответствующий результат широко известен под названием *"теорема об альтернансе"*.

Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в 60-е годы XX века благодаря, в первую очередь, работам В. Кли на Западе и работам наших соотечественников Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина, а затем работам В. И. Бердышева, Л. П. Власова, А. Л. Гаркави, Е. В. Ошмана, Э. Асплунда, Х. Беренса, Д. Борвейна, Д. Браесса, А. Брауна, А. Брондстеда, Д. Вулберта, Ч. Данхэма, Ф. Дойча, Л. Заийчека, И. Зингера, Й. Линденштраусса, Р. Фелпса, Э. Чини, М. Эдельстейна и др.

Большая часть исследований по геометрической теории приближений в нашей стране была проведена представителями научной школы С. Б. Стечкина, внесшими большой вклад в дальнейшее развитие теории: А. Р. Алимовым, П. В. Альбрехтом, В. И. Андреевым, В. С. Балаганским, А. А. Васильевой, В. И. Ивановым, М. И. Карловым, С. В. Конягиным, В. А. Кощеевым, Е. Д. Лившицем, Ю. В. Малыхиным, А. В. Мариновым, К. С. Рютиным, Г. Ф. Устиновым, И. Г. Царьковым и др., а также М. В. Балашовым, П. А. Бородиным, Г. Е. Ивановым, В. П. Фонфом и многими другими математиками.

Напомним определения гладкости и строгой выпуклости пространства [8]: пространство X называется *гладким*, если через всякую точку единичной сферы $S(X)$ этого пространства проходит единственная опорная гиперплоскость; пространство X называется *строго выпуклым*, если единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков.

Геометрические свойства чебышевских множеств одними из первых начали исследовать Л. Бунт [39] и Т. Мотцкин [53, 54], а в дальнейшем Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин [13, 14, 15, 16] и В. Кли [49, 50, 51]. Результатами их исследований являются, в частности, следующие две теоремы:

Теорема A. *([13, 39, 49, 53])Подмножество конечномерного гладкого строго выпуклого банахова пространства является чебышевским тогда и только тогда, когда оно замкнуто и выпукло.*

Теорема B. *([53, 54]) Двумерное банахово пространство является гладким тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество выпукло.*

В дальнейшем были получены многие результаты по описанию чебышевских множеств в различных пространствах, наиболее важные из них отражены в обзорах [1], [3], [4] [6], [8], [9], [18], [26], посвященных геометрической теории приближений. На сегодняшний день самой известной нерешенной задачей геометрической теории приближений является проблема Кли-Ефимова-Стечкина, также известная как *"проблема выпуклости чебышевских множеств"*: всякое ли чебышевское множество в гильбертовом пространстве выпукло?

Таким образом, чебышевские множества активно исследовались рядом крупных математиков, а в двумерных банаховых пространствах получили достаточно полное описание в геометрических терминах.

В сравнении с чебышевскими множествами, множества с многозначной и, более узко, конечнозначной метрической проекцией мало изучались. Исторически изучение таких множеств началось с размерностного анализа множества точек неединственности. Именно, будем обозначать через $T = T(M)$ множество точек $\{x \in X \ : \ |P_M(x)| \leqslant 1\}$. *Множеством точек неединственности* называется множество $X \setminus T$. Считается (см. [26]), что своей работой [22] С. Б. Стечкин заложил основы направления геометрической теории приближений по изучению плотностных и категорных свойств точек существования, единственности и неединственности для множеств с достаточно произвольной структурой. В частности, в этой работе был построен пример такого множества в евклидовой плоскости, что множество точек неединственности $X \setminus T$ плотно в некотором круге. Размерностные характеристики множеств неединственности в конечномерных пространствах были исследованы в работах Х. Паука [55], П. Эрдеша [44]. Бесконечномерные аналоги этих результатов были получены С. В. Конягиным [19], доказавшим, что множество точек единственности произвольного замкнутого множества в сепарабельном банаховом пространстве имеет II категорию, и Л. Зайичеком [57, 58], который, в частности, доказал [57], что в строго выпуклом сепарабельном пространстве множество неединственности покрывается счетным числом липшицевых гиперповерхностей. Л. Зайичек [17] и М. И. Карлов [48] построили примеры множеств в евклидовой плоскости, представляющих собой различные уточнения результатов Стечкина о мере точек неединственности.

Более детальный анализ множества неединственности начался сравнительно недавно. Для данного множества $M \subset X$ положим $T_n = T_n(M) = \{x \in X : |P_M(x)| = n\}$. Ф. де Бласи и др. авторами [32, 33, 34] для различных значений n исследовалась мера множества T_n при некоторых ограничениях на структуру множества M и условиях на само пространство X. П. Каннарса и Р. Пейроне [40] рассмотрели условия на структуру множества M и пространства X, при которых множество T_n является связным. Х. Беренс и К. Бартке [31] описали множество T_n для случая евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$. В их работе, в частности, доказано, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество $X \setminus T$ есть объединение счетного числа ограниченно компактных множеств, имеющих хаусдорфову размерность $n-1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем в $\mathbb{R}^2$ множество $X \setminus T$ представляется в виде счетного объединения спрямляемых кривых в случае, когда множество M компактно.

Следует отдельно отметить существование ряда работ (см., например, [35, 36, 41, 56]), в которых изучается вопрос о конечности множества элементов наилучшего или локально наилучшего приближения посредством рациональных функций, экспоненциальных сумм и проч. в различных функциональных пространствах. Работы такого типа наиболее интересны с точки зрения непосредственных приложений теорем о множествах с конечнозначной метрической проекцией.

Сформулируем еще один примечательный результат, связанный со множествами с конечнозначной метрической проекцией. Для этого нам понадобятся несколько определений. Последовательность $\{y_n\} \subset M$ называется *минимизирующей* для элемента $x \in X$, если $\|y_n - x\| \to \rho(x, M)$ при $n \to \infty$. Множество M называется *аппроксимативно компактным*, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из M. П. А. Бородин и И. А. Пятышев [7] установили, что в любом банаховом пространстве X из достаточно широкого класса, в частности, во всех пространствах $l_p, 1 \leqslant p < \infty$, существует такое не аппроксимативно компактное ограниченное множество M, что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$. Неизвестно, можно ли построить такое множество с дополнительным условием $|P_M(x)| \leqslant k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$. В случае $k = 1$ и $X = l_2$ построение такого множества означало бы отрицательное решение проблемы выпуклости.

Упомянем также о работах А. Брауна [37, 38], А. Н. Дранишникова [11, 12] и В. В. Федорчука [23, 24], посвященных изучению конечнозначных и многозначных ретракций. Взаимосвязь конечнозначных ретракций с геометрической теорией приближений и, в частности, со множествами с многозначной метрической проекцией, рассмотрена, например, в работах [2] и [4, раздел 7].

При исследовании множеств с конечнозначной метрической проекцией, как обобщений чебышевских множеств, естественно возникает следующая задача: можно ли доказать какие-либо аналоги теорем A и B, если в их формулировке заменить чебышевское множество на такое множество M, что для всякого $x \in X$ имеет место неравенство $1 \leqslant |P_M(x)| \leqslant n$, где $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число? Эта задача для $n = 2$ исследуется в главах I и II настоящей работы.

Другой класс множеств с, как правило, конечнозначной метрической проекцией, исследуемый в диссертации, — класс так называемых *локально чебышевских* множеств, то есть множеств M, удовлетворяющих следующему условию: для любого элемента $y \in M$ найдется такое положительное число $r = r(y)$, что множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ — чебышевское; здесь $\overline{U_r(y)} = \{z \in X : \|z-y\| \leqslant r\}$. Отметим, что во многих ситуациях множества с конечнозначной метрической проекцией являются локально чебышевскими множествами.

Интересный пример возникновения локально чебышевских множеств в прикладной задаче теории приближений рассмотрен в работе А. Р. Алимова и И. Г. Царькова [4, раздел 1] и связан с уравнением эйконала.

Понятие локально чебышевского множества было предложено М. В. Балашовым по аналогии с понятием локально выпуклого множества: множество $M \subset X$ называется локально выпуклым [21, гл. 1, §5], если для любого элемента $y \in M$ найдется такое число $r = r(y) > 0$, что каждое множество

$\overline{U_r(y)} \cap M$ выпукло. Взаимосвязь локально выпуклых и выпуклых множеств в банаховых пространствах в неявном виде исследовалась в работе [5], в которой, в частности, был установлен следующий результат:

Теорема C. *Всякое связное замкнутое локально выпуклое множество в банаховом пространстве является выпуклым.*

При этом заметим, что из выпуклости замкнутого множества его локальная выпуклость следует очевидным образом. Более того, если множество ограничено, в качестве указанной в определении замкнутой окрестности можно брать любую окрестность, содержащую наше множество.

В главе III настоящей работы, в попытке получить аналог теоремы C, исследуется следующая задача, поставленная М. В. Балашовым: когда из локальной чебышевости множества в банаховом пространстве следует его чебышевость "глобальная", и наоборот? При этом вводится и оказывается полезным понятие *ограниченно чебышевского* множества, то есть такого множества M, пересечение которого с произвольным замкнутым шаром является чебышевским множеством.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 61 наименования. Общий объем диссертации — 68 страниц. В каждой главе принята сквозная нумерация определений, теорем, лемм, следствий, замечаний, формул и рисунков.

Перейдем к обзору результатов по главам.

В I главе исследуется вопрос об описании пространств, в которых всякое замкнутое множество с не более чем двузначной метрической проекцией является 2-выпуклым, то есть всякая точка выпуклой оболочки этого множества лежит на отрезке с концами в этом множестве. Получен следующий аналог теоремы B.

Теорема 1.1. *Двумерное банахово пространство является гладким тогда и только тогда, когда всякое его замкнутое подмножество с не более чем двузначной метрической проекцией 2-выпукло.*

Во II главе исследуются множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Напомним, что хаусдорфовым расстоянием между ограниченными множествами M и N нормированного пространства X называется величина

$$h(M, N) = \max\{\varepsilon > 0 : N \subset M_\varepsilon \text{ и } M \subset N_\varepsilon\},$$

где A_ε обозначает ε-раздутие множества A, т. е. множество вида $\bigcup_{x\in A} \overline{U_\varepsilon(x)}$.

Теорема 2.1. *Пусть непустое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^3$ таково, что выполняются следующие условия:*

1) $1 \leqslant |P_M(x)| \leqslant 2$ для всякого элемента $x \in \mathbb{R}^3$;

2) множество $T_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |P_M(x)| = 2\}$ замкнуто;

3) для любого элемента $x \in T_2$ найдутся такие $K = K(x) > 0$ и $\delta_0 = \delta_0(x) > 0$, что для всякого $x' \in U_{\delta_0}(x) \cap T_2$ имеем $h(P_M(x), P_M(x')) \leqslant K|x' - x|$.

Тогда M является 2-выпуклым.

Наложение условий 2) и 3) в теореме 2.1 является вынужденным, так как получить доказательство теоремы в более общем случае пока не удается.

В III главе исследуются локально чебышевские и ограниченно чебышевские множества на плоскости. Доказан следующий аналог теоремы C.

Теорема 3.1. *В двумерном банаховом пространстве X всякое связное замкнутое локально чебышевское множество M является чебышевским.*

Теорема 3.1 не распространяется на произвольные банаховы пространства. Именно, в § 3.4 приведен пример замкнутого связного локально чебышевского, но не чебышевского множества в пространстве $C[0,1]$. Этот пример идейно восходит к известному примеру Ч. Данхэма [43] несвязного чебышевского множества в $C[0,1]$.

Получен следующий критерий строгой выпуклости двумерного банахова пространства в терминах ограниченной чебышевости.

Теорема 3.2. *Двумерное банахово пространство является строго выпуклым тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество является ограниченно чебышевским.*

В качестве следствия из теоремы 3.2 получен критерий строгой выпуклости двумерного банахова пространства в терминах локальной чебышевости.

Следствие 3.1. *Двумерное банахово пространство является строго выпуклым тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество является локально чебышевским.*

Следующий результат устанавливает эквивалентность понятий чебышевского, ограниченно чебышевского и локально чебышевского множества в случае строго выпуклого двумерного пространства.

Следствие 3.2. *В двумерном строго выпуклом банаховом пространстве X следующие условия на множество $M \subset X$ эквивалентны:*

а) M чебышевское;

б) M ограниченно чебышевское;

в) M связное, замкнутое и локально чебышевское.

Теорема 3.2 не обобщается на более чем двумерные пространства. Именно, в § 3.5 с помощью одного результата И. Г. Царькова для каждого натурального $n \geqslant 3$ приводится пример строго выпуклого n-мерного пространства X_n, в котором есть чебышевское, но не локально чебышевское (а значит, и не ограниченно чебышевское) множество. Исходя из этого примера, доказывается следующий критерий.

Теорема 3.3. *Пусть n-мерное строго выпуклое банахово пространство X_n ($n \geqslant 3$) таково, что всякое его ограниченное чебышевское подмножество выпукло. Тогда следующие условия на чебышевское множество $M \subset X_n$ эквивалентны:*

а) M невыпуклое;

б) M не локально чебышевское.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [59, 60, 61] автора (две из них — в журналах из перечня ВАК), приведенных в конце списка литературы.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре по геометрической теории приближений в МГУ под руководством профессора П. А. Бородина (неоднократно, 2010–2016), на семинаре "Теория приближений" в МГУ под руководством профессора И. Г. Царькова, доцента А. С. Кочурова, доцента А. А. Васильевой и научного сотрудника А. Р. Алимова (2013, 2016), на школе С. Б. Стечкина по теории функций в г. Миасс (2013, 2014), на международной конференции "Вероятность, анализ и геометрия" в МГУ (2014), на научном семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством профессора А. В. Арутюнова (2015), на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (2015), на семинаре "Тригонометрические и ортогональные ряды' в МГУ под руководством профессора М. К.Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко и профессора М. И. Дьяченко (2016).

Благодарности. В первую очередь автор приносит благодарность своим родителям и близким, без которых его диссертационная работа не была бы написана никогда. Автор признателен А. Р. Алимову и И. Г. Царькову за полученные замечания. Автор очень благодарен своему научному руководителю П. А. Бородину за постановку задач и сопутствие в работе.

Глава I. Множества с не более чем двузначной метрической проекцией на нормированной плоскости

В этой главе исследуются множества с не более чем двузначной метрической проекцией на нормированной плоскости. Основной целью является получение следующего критерия гладкости нормированной плоскости в терминах множеств с не более чем двузначной метрической проекцией: нормированная плоскость является гладкой тогда и только тогда, когда всякая точка выпуклой оболочки произвольного замкнутого множества с не более чем двузначной метрической проекцией лежит на отрезке с концами в этом множестве.

1.1. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Для замкнутого шара с центром в x и радиуса r используем традиционное обозначение $B(x, r)$. Сферой с центром в точке x радиуса r называем границу соответствующего шара и обозначаем $S(x, r) = \partial B(x, r)$. Положим $B(X) = B(0, 1)$, $S(X) = S(0, 1)$. Через $U_\varepsilon(x)$ обозначается открытая ε-окрестность точки x. Символами $\overline{A}$ и $\operatorname{int} A$ обозначается замыкание и множество внутренних точек множества A соответственно.

Положим $T_n = T_n(M) = \{x \in X : |P_M(x)| = n\}$. Очевидно, $T_i \cap T_j = \varnothing$ для произвольных $i \neq j$, причем в случае, когда $|P_M(x)| < \infty$ для любого $x \in X$, пространство X представляется в виде $X = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} T_i$.

Определение 1.1. Множество $M \subset X$ назовем *k-выпуклым*, если для всякого элемента x из выпуклой оболочки $\operatorname{Conv} M$ этого множества существует такой набор точек $x_1, \dots, x_k \in M$, что $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$.

При $k = 1$ это определение совпадает с определением выпуклости. По известной теореме Каратеодори (см., например, [21, гл. 1, §1.14]) любое множество в n-мерном аффинном пространстве является $(n+1)$-выпуклым. В частности, любое подмножество двумерного пространства X является 3-выпуклым. Следующее определение согласуется с определением, данным в работе [30].

Определение 1.2. Назовем *k-выпуклой оболочкой* множества $M \subset X$ и обозначим $\operatorname{Conv}_k M$ множество, определенное следующим образом:

$$\operatorname{Conv}_k M = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : x_i \in M, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{Conv}_1 M = M$ и, в случае $\dim X = n$, верна цепочка вложений

$$\operatorname{Conv}_1 M \subseteq \operatorname{Conv}_2 M \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Conv}_{n+1} M = \operatorname{Conv} M,$$

где последнее равенство имеет место ввиду упомянутой теоремы Каратеодори. Кроме того, заметим, что k-выпуклость множества M равносильна равенству $\operatorname{Conv}_k M = \operatorname{Conv} M$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные утверждения:

Лемма A. *Пусть X — банахово пространство, $x \in X$, $y \in P_M(x)$. Тогда для всякого z на интервале $(x, y) := \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 < \lambda < 1\}$ имеем $y \in P_M(z)$.*

Лемма B. *Пусть банахово пространство X конечномерно, его подмножество M замкнуто. Тогда $|P_M(x)| \geqslant 1$ для любого $x \in X$, причем оператор метрического проектирования P_M является многозначным полунепрерывным сверху отображением X в 2^M.*

Леммы A и B суть прямые следствия предложения 0.3 и следствия 2.3 из [8] соответственно.

Лемма 1.1. *Пусть* $x_i \in X$, $M \subset X$, $y_i \in P_M(x_i)$, $i = 1, 2$. *Если отрезки* $[x_1, y_1]$ *и* $[x_2, y_2]$ *пересекаются, то* $y_2 \in P_M(x_1)$, $y_1 \in P_M(x_2)$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $z \in [x_1, y_1] \cap [x_2, y_2]$. Поскольку $y_1 \in P_M(x_1)$, то $\|x_1 - y_1\| \leqslant \|x_1 - y_2\|$. Тогда по неравенству треугольника

$$\|x_1 - z\| + \|z - y_1\| = \|x_1 - y_1\| \leqslant \|x_1 - y_2\| \leqslant \|x_1 - z\| + \|z - y_2\|.$$

Заметим, что $\{y_1, y_2\} \subset P_M(z)$ по лемме A, а значит $\|z - y_2\| = \|z - y_1\|$, откуда, учитывая полученные выше оценки, следует, что $\|x_1 - y_2\| = \|x_1 - y_1\|$. Равенство $\|x_2 - y_2\| = \|x_2 - y_1\|$ устанавливается аналогично.

Лемма 1.1 доказана.

Всюду ниже X — двумерное банахово пространство, непустое подмножество $M \subset X$ таково, что для всякого $x \in X$ имеет место неравенство $|P_M(x)| \leqslant 2$. В дальнейшем, опуская слова "двумерное банахово пространство", будем говорить "нормированная плоскость" или просто "плоскость". Считаем также, если не оговорено особо, что пространство X гладкое, а множество M — замкнутое.

Напомним, что функционал $f \in X^*$ называется *опорным к элементу* $x \in X \setminus \{0\}$, если $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$ ([10, гл. 2, §1]), и *опорным к шару* $B(x, r)$ (или *к сфере* $S(x, r)$) в граничной точке $y \in S(x, r)$, если $\|f\| = 1$ и $f(y - x) = \|y - x\|$.

Введем на плоскости векторное поле $\overline{v}(x)$ по следующему правилу: в случае, когда $x \in T_1 \setminus M$, положим $\overline{v}(x) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, где $y = P_M(x)$; в случае, когда $x \in T_2$, $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$, $x \notin [y_1, y_2]$, рассмотрим функционалы $f_1, f_2 \in S(X^*)$, опорные к сфере $S(x, \rho(x, M))$ в точках y_1, y_2 соответственно (единственные, в виду гладкости пространства), т. е. $f_1(y_1 - x) = f_2(y_2 - x) = \rho(x, M)$: если $f_1 \neq f_2, f_1 \neq -f_2$, то положим вектор $\overline{v}(x)$ таким, что $f_1(\overline{v}(x)) = f_2(\overline{v}(x)) < 0, \|\overline{v}(x)\| = 1$, если $f_1 = f_2$, выберем единичный вектор $\overline{v}(x)$, направленный вдоль биссектрисы угла y_1xy_2 в сторону от y_1, y_2, если же $f_1 = -f_2$, то возьмем $\overline{v}(x) = \frac{x-y_1+x-y_2}{\|x-y_1+x-y_2\|}$ (знаменатель не равен нулю, так как $x \notin [y_1, y_2]$); во всех оставшихся случаях положим $\overline{v}(x) = 0$.

Обозначим через l прямую, проходящую через x в направлении вектора $\overline{v}(x)$, а через $l(\varphi)$ прямую, полученную поворотом прямой l на угол φ вокруг точки x. Прямые $l(\varphi)$ и $l(-\varphi)$ разбивают плоскость на 4 замкнутых сектора, один из которых содержит элемент $x + \overline{v}(x)$, обозначим этот сектор через $L(\varphi)$. Всюду ниже $v = \overline{v}(x)$.

Лемма 1.2. *Пусть $x \in T_2$, $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$, x не лежит на отрезке $[y_1, y_2]$, и пусть f_1, f_2 — опорные функционалы к сфере $S(x, \rho)$ в точках y_1, y_2 соответственно, где $\rho = \rho(x, M)$. Тогда*

(I) если $f_1 \neq f_2$, $f_1 \neq -f_2$, то для любого достаточно малого угла $\varphi > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $t \in (0, \delta)$ существует элемент $x' = x'(t) \in \overline{U_t(x)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ и $x' \neq x$;

(II) если $f_1 = f_2$, то для любого угла $\varphi > \widehat{y_1xy_2}/2$ такого, что достаточно мала разность $\varphi - \widehat{y_1xy_2}/2 > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $t \in (0, \delta)$ существует элемент $x' = x'(t) \in \overline{U_t(x)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ и $x' \neq x$;

(III) если $f_1 = -f_2$, то найдутся такие $\delta > 0$ и $\delta_1 \geqslant 0$, что для всякого $t \in (0, \delta)$ существует элемент $x' = x'(t) \in \big(\overline{U_t(x + \delta_1 v)} \cap T_2\big) \setminus \big(B(y_1, \rho) \cup B(y_2, \rho)\big)$, $x' \neq x + \delta_1 v$, причем для всякого $z \in [x, x + \delta_1 v]$ имеем $P_M(z) = \{y_1, y_2\}$.

При этом в каждом из трех случаев элемент x' можно выбрать так, что для элементов $y_1', y_2' \in P_M(x')$ либо

$$\big([x', y_1') \cup [x', y_2')\big) \cap \big([x, y_1) \cup [x, y_2)\big) = \varnothing, \tag{$*$}$$

либо

$$\big([x', y_1') \cup [x', y_2')\big) \cap \big([x, y_1) \cup [x, y_2)\big) = [x, y_i), \tag{$**$}$$

для некоторого $i = 1, 2$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $x = 0$, $\rho = \|y_1\| = \|y_2\| = 1$. Согласно лемме B запишем условие полунепрерывности метрической проекции в 0:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_0 = \delta_0(0, \varepsilon) > 0 : \|x'\| < \delta_0 \Longrightarrow P_M(x') \subset \big(U_\varepsilon(y_1) \cup U_\varepsilon(y_2)\big) \cap M. \tag{1.1}$$

Положим $Y_j(\varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(y_j)} \cap M,\ j = 1, 2$.

Очевидно, что для всякого достаточно малого ε множества $Y_1(\varepsilon)$ и $Y_2(\varepsilon)$ не пересекаются. В дальнейшем будем рассматривать только такие ε. Будем также считать ε настолько малым, что $Y_i(\varepsilon) \cap l = \varnothing, i = 1, 2$.

I. $f_1 \neq f_2$. В этом случае имеем $l = \ker(f_2 - f_1)$. Пусть $l^- = \{z : (f_2 - f_1)(z) < 0\}, l^+ = \{z : (f_2 - f_1)(z) > 0\}$. Заметим, что $(f_2 - f_1)(y_1) = f_2(y_1) - f_1(y_1) = f_2(y_1) - 1 < 0$, откуда $y_1 \in l^-$, аналогичным образом $y_2 \in l^+$.

Покажем, что для любого числа $\alpha > 0$ и всякого такого элемента $q \in l^-$, что $\|q\| = 1$ и $(f_2 - f_1)(q) < -2\alpha$, найдется настолько малое $\delta = \delta(\alpha)$, что для любого $t < \delta$ верно неравенство $\rho(tq, Y_1(\varepsilon)) < \rho(tq, Y_2(\varepsilon))$. Имеем

$$\rho(tq, Y_1(\varepsilon)) \leqslant \|tq - y_1\|, \quad \rho(tq, Y_2(\varepsilon)) = \inf_{y \in Y_2(\varepsilon)} \|tq - y\| = \|tq - \widetilde{y_2}\|,$$

где $\widetilde{y_2} \in Y_2(\varepsilon)$ (существование такого элемента является следствием замкнутости множества M). Обозначим через $\widetilde{f_2}$ опорный функционал к элементу $\widetilde{y_2}$. Очевидно, при $t \to 0$ имеем $\widetilde{y_2} \to y_2$ и $\widetilde{f_2} \to f_2$. Тем самым, для выбранного $\alpha > 0$ найдется такое $\delta < \delta_0$ (см. (1.1)), что $\|f_2 - \widetilde{f_2}\| < \alpha$ при $t < \delta$.

Напомним, что в гладком пространстве для функционала f_z, опорного в точке z, и произвольного элемента u справедлива оценка $\|z - u\| \leqslant f_z(z) - f_z(u) + o(\|u\|) = \|z\| - f_z(u) + o(\|u\|)$, $u \to 0$ (см. [10, гл. 2, §2]). Поэтому можно считать, что найдется настолько малое δ, что при $t \in (0, \delta)$ имеем

$$\rho(tq, Y_1(\varepsilon)) \leqslant \|tq - y_1\| \leqslant f_1(y_1) - f_1(tq) + \alpha t = 1 + (f_2 - f_1)(tq) - f_2(tq) + \alpha t <$$
$$< 1 - 2\alpha t + (\widetilde{f_2} - f_2)(tq) - \widetilde{f_2}(tq) + \alpha t < 1 - 2\alpha t + \alpha t - \widetilde{f_2}(tq) + \alpha t =$$
$$= 1 - \widetilde{f_2}(tq) \leqslant \|\widetilde{y_2}\| - \widetilde{f_2}(tq) = \widetilde{f_2}(\widetilde{y_2} - tq) \leqslant \|\widetilde{y_2} - tq\| = \rho(tq, Y_2(\varepsilon)).$$

Аналогично, для любого числа $\alpha > 0$ и всякого такого элемента $q' \in l^+$, что $\|q'\| = 1$ и $(f_2 - f_1)(q') > 2\alpha$, найдется настолько малое $\delta = \delta(\alpha)$, что для любого $t \in (0, \delta)$ верно неравенство $\rho(tq', Y_1(\varepsilon)) > \rho(tq', Y_2(\varepsilon))$. Заметим, что если для некоторого элемента q имеем $(f_2 - f_1)(q) < -2\alpha$, то для элемента $q' \in l^+, \|q'\| = 1$, симметричного элементу q относительно прямой l, выполнено $(f_2 - f_1)(q') > 2\alpha$.

Для всякого угла $\varphi > 0$ найдется такое число $\alpha = \alpha(\varphi) > 0$, что $L(\varphi) \not\subset \{q : (f_2 - f_1)(q) \geqslant -2\alpha\|q\|\}$ (и, как следствие, $L(\varphi) \not\subset \{q' : (f_2 - f_1)(q') \leqslant 2\alpha\|q'\|\}$). Для этого числа α найдутся такие симметричные относительно прямой l векторы $q \in l^- \cap L(\varphi), q' \in l^+ \cap L(\varphi)$, что $\|q\| = \|q'\| = 1$, $(f_2 - f_1)(q) < -2\alpha$, $(f_2 - f_1)(q') > 2\alpha$ и найдется такое число $\delta = \delta(\alpha)$, что для любого $t \in (0, \delta)$ имеем

$$\rho(tq, Y_1(\varepsilon)) < \rho(tq, Y_2(\varepsilon)), \quad \rho(tq', Y_1(\varepsilon)) > \rho(tq', Y_2(\varepsilon)).$$

Тем самым мы установили, что $P_M(tq) \subset Y_1(\varepsilon)$, $P_M(tq') \subset Y_2(\varepsilon)$ при $t \in (0, \delta)$. Тогда для любого $t \in (0, \delta)$ на интервале (tq, tq') существует такая точка $x' = x'(t)$, что $\rho(x', Y_1(\varepsilon)) = \rho(x', Y_2(\varepsilon))$, из чего в силу (1.1) следует, что $x' \in T_2$. Заметим, что $tq, tq' \in L(\varphi)$, а значит, исходя из построения, $x' \in \overline{U_t(0)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ и $x' \neq 0$.

При достаточно малом угле φ сектор $L(\varphi)$ лежит строго внутри угла $(-y_2)0(-y_1)$, поэтому для точки x' имеем $[x', y_1') \cap [0, y_2) = \varnothing$, $[x', y_2') \cap [0, y_1) = \varnothing$, где $\{y_1', y_2'\} = P_M(x')$ и y_1' находится в малой окрестности y_1, а y_2' — в малой окрестности y_2. Если для какого-либо $i = 1, 2$ выполнено $[x', y'_i) \cap [0, y_i) \neq \varnothing$, то по лемме 1.1 получаем $y_i \in P_M(x')$, $y'_i \in P_M(0)$, а значит в силу не более чем двузначности метрической проекции имеем $y_i = y'_i$, откуда x' лежит на прямой $0y_i$, что противоречит установленному выше местоположению сектора $L(\varphi)$. Таким образом, $[x', y'_i) \cap [0, y_i) = \varnothing$ для $i = 1, 2$ и следовательно условие $(*)$ выполнено, что и требовалось.

II. $f_1 = f_2$. В этом случае точки y_1, y_2 принадлежат некоторой грани-отрезку $[a, b] \subset S(X)$, содержащему эти точки и не продолжающемуся за точки a и b на $S(X)$, т. е. для всякого такого отрезка $[c, d] \subset S(X)$, что $(a, b) \cap [c, d] \neq \varnothing$, имеем $[c, d] \subseteq [a, b]$.

а) Пусть y_1, y_2 — внутренние точки отрезка $[a, b] \subset S(X)$. Исходя из условия не более чем двузначности метрической проекции и ее полунепрерывности, нетрудно видеть, что для всякой точки λv луча $\{\lambda v : \lambda \geqslant 0\}$ имеем $P_M(\lambda v) = \{y_1, y_2\}$ (множество $\big\{\lambda \geqslant 0 : P_M(\lambda v) = \{y_1, y_2\}\big\}$ открыто, замкнуто и не пусто в топологии полуоси $\{\lambda : \lambda \geqslant 0\}$). Понятно, что всякая точка этого луча, отстоящая от 0 меньше, чем на t, принадлежит пересечению $\overline{U_t(0)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ и условие $(*)$ выполнено.

б) Пусть точки y_1, y_2 суть концевые точки указанного отрезка $[a, b] \subset S(X)$. Рассмотрим вектор q, $\|q\| = 1$, лежащий в той же полуплоскости относительно прямой l, что и элемент y_1, и совпадающий по направлению с прямой $l(\varphi)$, $\varphi > \widehat{y_1 0 y_2}/2$ и такой, что $f_1(q) < 0$. Возьмем ε настолько малым, что $l(\varphi) \cap U_\varepsilon(y_2) = \varnothing$ и выберем δ_0 в соответствии с условием (1.1). При

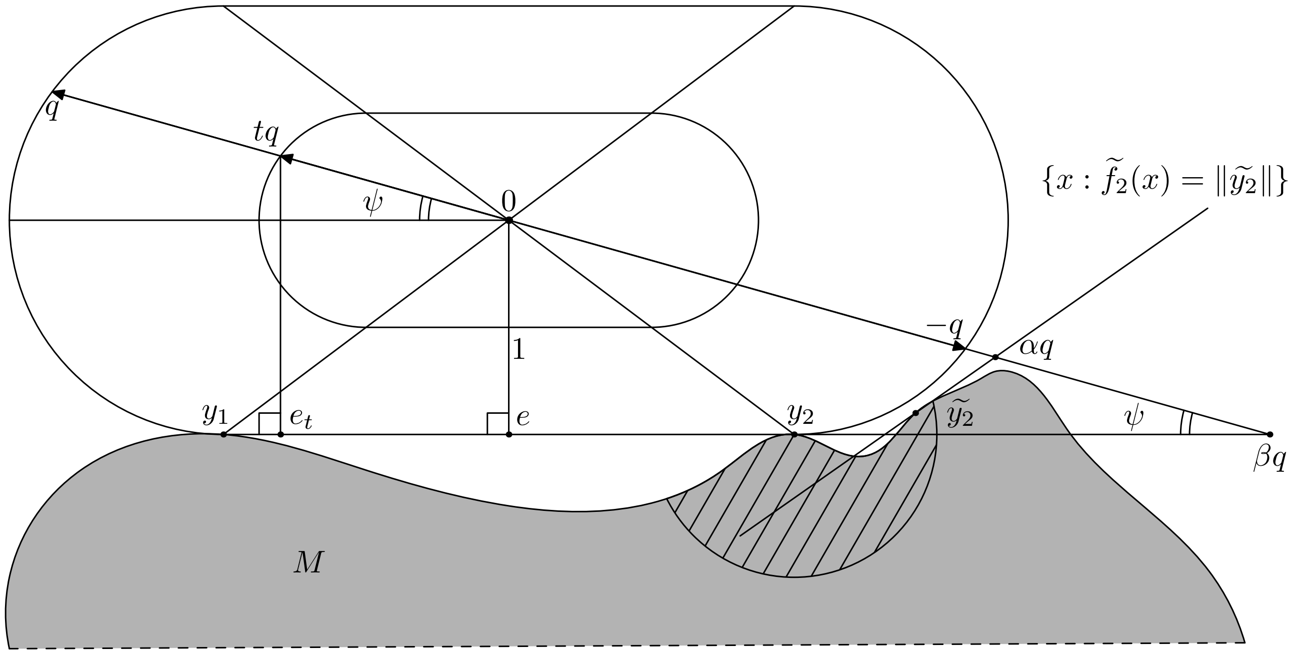

Рис. 1.1

$t < \delta_0$ справедлива (см. рис. 1.1) следующая цепочка неравенств

$$\rho(tq, Y_2(\varepsilon)) = \inf_{y \in Y_2(\varepsilon)} \|tq - y\| = \|tq - \widetilde{y_2}\| \geqslant \widetilde{f}_2(\widetilde{y_2} - tq) \geqslant$$

$$\geqslant 1 + t\widetilde{f}_2(-q) \geqslant 1 + t\frac{|q|}{|\alpha q|} > 1 + t\frac{|q|}{|\beta q|} = 1 + t|q|\sin\psi =$$

$$= |tq - e_t| = \|tq - e_t\| \geqslant \|tq - y_1\| \geqslant \rho(tq, Y_1(\varepsilon)).$$

Здесь $|u|$ обозначает евклидову длину вектора u, которая задается единичным отрезком $[0, e]$ на рис. 1.1, а $\widetilde{f}_2$ — опорный функционал к элементу $\widetilde{y_2} \in P_{Y_2(\varepsilon)}(tq)$.

Далее, аналогично случаю I получаем точку $x' = x'(t) \in \overline{U_t(0)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ и $x' \neq 0$. Для элементов $y_1', y_2' \in P_M(x')$ считаем, что y_i' находится в малой окрестности y_i, $i = 1, 2$.

Если $[x', y_1'] \cap [0, y_1] \neq \varnothing$, $[x', y_2'] \cap \big([0, y_1) \cup [0, y_2)\big) = \varnothing$, то $y_1 \in P_M(x'), y_1' \in P_M(0)$ по лемме 1.1, откуда $y_1' = y_1$ и либо $(*)$, либо $(**)$ выполнено. Если $[x', y_2'] \cap [0, y_2] \neq \varnothing$, $[x', y_1'] \cap \big([0, y_1) \cup [0, y_2)\big) = \varnothing$, то $y_2 \in P_M(x'), y_2' \in P_M(0)$ по лемме 1.1, откуда $y_2' = y_2$ и либо $(*)$, либо $(**)$ выполнено.

Если $[x', y_1'] \cap [0, y_1] \neq \varnothing$, $[x', y_2'] \cap [0, y_2] \neq \varnothing$, то $y_1 \in P_M(x'), y_1' \in P_M(0)$ и $y_2 \in P_M(x'), y_2' \in P_M(0)$ по лемме 1.1, откуда $y_1' = y_1$ и $y_2' = y_2$. Если $[x', y_2'] \cap [0, y_1] \neq \varnothing$, то по лемме 1.1 имеем $y_1 \in P_M(x')$, $y_2' \in P_M(0)$, откуда $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$. Если $[x', y_1'] \cap [0, y_2] \neq \varnothing$, то по лемме 1.1 имеем $y_2 \in P_M(x')$, $y_1' \in P_M(0)$, откуда $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$.

Таким образом, в последних трех случаях имеем $P_M(x') = \{y_1, y_2\}$. Покажем, что в наших условиях это возможно лишь при $x' \in L(\widehat{y_1 0 y_2}/2)$, откуда следует выполнение одного из условий $(*)$ или $(**)$ (сектор $L(\widehat{y_1 0 y_2}/2)$ совпадает в данном случае с углом $(-y_2)0(-y_1)$). Определим точки $a' = x' + \rho(x', M)y_1$, $b' = x' + \rho(x', M)y_2$. Очевидно, что пары $a' - x'$ и y_1, $b' - x'$ и y_2 суть пары коллинеарных векторов. Исходя из того, что $[y_1, y_2] \subset S(X)$ и $P_M(x') = \{y_1, y_2\}$, имеем $[y_1, y_2] \subset S(x', \rho(x', M))$, откуда $[y_1, y_2] \subset [a', b']$. Учитывая это и коллинеарность указанных пар, получаем $x' \in L(\widehat{y_1 0 y_2}/2)$.

в) Пусть одна из точек, скажем, y_1 — концевая для указанного отрезка $[a, b] \subset S(X)$, а y_2 — внутренняя. Рассуждение в этом случае совпадает с рассуждением в случае IIб с той лишь разницей, что изначально вектор q можно брать совпадающим по направлению не с прямой $l(\varphi)$, а с прямой $0y_2$. Тогда найденный элемент x' автоматически лежит в не содержащей элемент y_1 полуплоскости относительно прямой $0y_2$. Дальнейшее рассуждение аналогично рассуждению в случае IIб.

III. $f_1 = -f_2$. В этом случае точки y_1 и y_2 принадлежат некоторым противоположным граням-отрезкам $[a, b]$ и $[-a, -b]$ на сфере $S(X)$ соответственно. Отметим сразу, что $y_1 \neq -y_2$ в силу условия $x \notin [y_1, y_2]$.

а) Пусть хотя бы одна из точек y_1, y_2, скажем, y_2 является концевой точкой для соответствующего отрезка на сфере $S(X)$, т. е. $P_M(0) \cap \{\pm a, \pm b\} \neq \varnothing$. Для всякого $t \in (0, \delta_0)$ возьмем точку $w = w(t) \in \partial U_t(0) \cap \partial U_1(y_1)$, не лежащую в

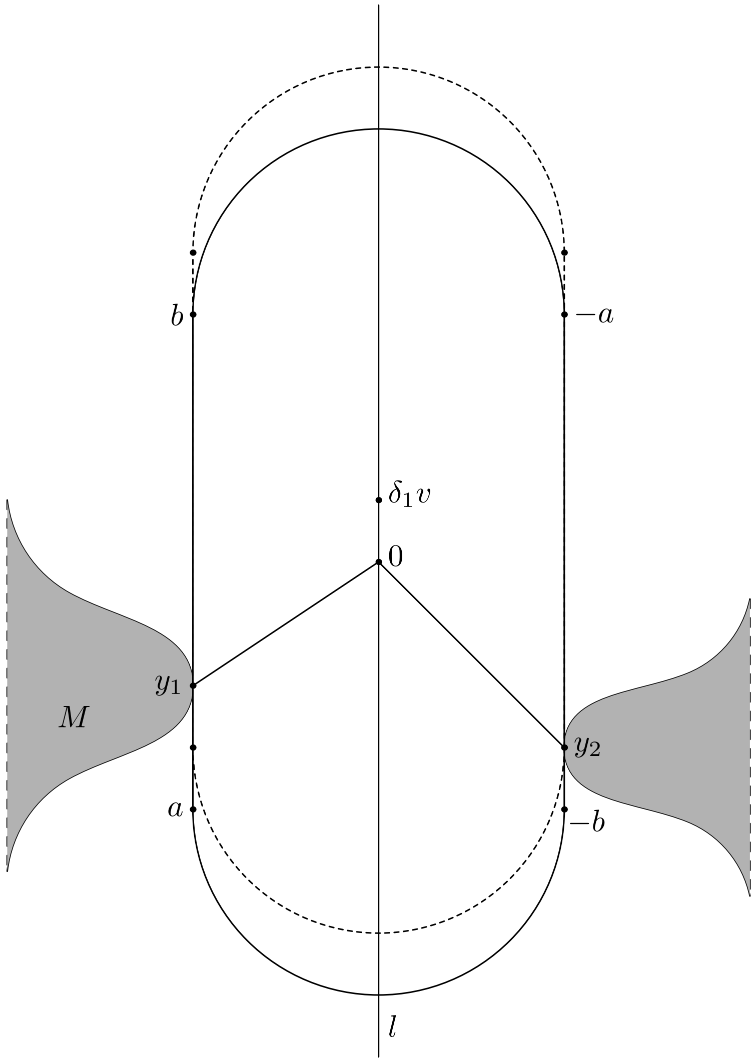

Рис. 1.2

$\operatorname{Conv}\{0, y_1, y_2\}$. Докажем, что $\rho(w, Y_1(\varepsilon)) < \rho(w, Y_2(\varepsilon))$. Имеем

$$\rho(w, Y_1(\varepsilon)) \leqslant \|w - y_1\| = 1, \quad \rho(w, Y_2(\varepsilon)) = \inf_{y \in Y_2(\varepsilon)} \|w - y\| = \|w - \widetilde{y_2}\|,$$

где $\widetilde{y_2} \in Y_2(\varepsilon)$. Обозначим через $\widetilde{f_2}$ опорный функционал к элементу $\widetilde{y_2}$. Тогда

$$\|w - \widetilde{y_2}\| \geqslant \widetilde{f_2}(\widetilde{y_2} - w) = \|\widetilde{y_2}\| - \widetilde{f_2}(w) \geqslant 1 - \widetilde{f_2}(w) > 1$$

(здесь $\widetilde{f_2}(w) < 0$, так как прямая $\widetilde{f_2} = 0$ строго разделяет w и y_2: в самом деле, в силу того, что $Y_2(\varepsilon) \cap l = \varnothing$, функционал $\widetilde{f_2}$ представим в виде $\widetilde{f_2} = \alpha f_2 + \beta f_s$, где $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $f_s \in S(X^*)$ есть опорный функционал в точке $s = l \cap S(X) \cap U_1(y_1)$, откуда $\widetilde{f_2}(w) = \alpha f_2(w) + \beta f_s(w) < 0$).

Таким образом, $\rho(w, Y_1(\varepsilon)) < \rho(w, Y_2(\varepsilon))$. Аналогично доказывается, что для точки $w' = w'(t) \in \partial U_t(0) \cap \partial U_1(y_2)$, не лежащей в $\mathrm{Conv}\{0, y_1, y_2\}$, справедливо неравенство $\rho(w', Y_2(\varepsilon)) < \rho(w', Y_1(\varepsilon))$.

Отсюда для всякого $t \in (0, \delta_0)$ на интервале $(w(t), w'(t))$ существует такая точка $x' = x'(t)$, что $\rho(x', Y_2(\varepsilon)) = \rho(x', Y_1(\varepsilon))$, из чего в силу (1.1) следует, что $x' \in T_2$. Ясно, что $x' \in \big(\overline{U_t(0)} \cap T_2\big) \setminus \big(B(y_1, 1) \cup B(y_2, 1)\big)$ и $x' \neq x$, тем самым условие леммы в этом случае выполнено для $\delta_1 = 0$.

Доказательство выполнения условия $(*)$ совпадает с доказательством аналогичного утверждения в случае I.

б) Пусть теперь точки y_1 и y_2 являются внутренними точками противоположных отрезков $[a, b]$ и $[-a, -b]$ на сфере $S(X)$ соответственно (см. рис. 1.2). Положим $\delta_1 = \min\big\{\|y_1 - a\|, \|y_1 - b\|, \|y_2 + a\|, \|y_2 + b\|\big\}$. Легко видеть, что для всякой точки $z \in [0, \delta_1 v]$ имеем $P_M(z) = \{y_1, y_2\}$. Кроме того, хотя бы одна из точек y_1, y_2 является крайней для соответствующего отрезка на сфере $S(\delta_1 v, 1)$, т. е. $P_M(\delta_1 v) \cap \{\delta_1 v \pm a, \delta_1 v \pm b\} \neq \varnothing$. Тогда, аналогично случаю IIIa, находится точка $x' = x'(t) \in \big(\overline{U_t(\delta_1 v)} \cap T_2\big) \setminus \big(B(y_1, 1) \cup B(y_2, 1)\big)$, соответствующая всем требованиям леммы.

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $x \in T_1 \setminus M$, $P_M(x) = y$. Тогда либо существует такое $\delta > 0$, что $P_M\big(x + t(x - y)\big) = y$ для всякого $t \in (0, \delta)$, либо для любого достаточно малого угла $\varphi > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $t \in (0, \delta)$ существует элемент $x' = x'(t) \in \overline{U_t(x)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ и $x' \neq x$, причем элементы $P_M(x')$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l.*

Доказательство. По лемме 1.1 имеем $P_M(z) = y$ для всякого $z \in [x, y]$, т.е. отрезок $[x, y]$ целиком содержится в T_1. Рассмотрим некоторую ε-окрестность $U_\varepsilon(y)$ точки y. Величину ε мы выберем в дальнейшем. Положим

$U_\varepsilon(y) \cap M = Y_\varepsilon$. В силу непрерывности метрической проекции

$$\exists\, \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0 : \|x - x'\| < \delta_0 \Longrightarrow P_M(x') \subset Y_\varepsilon. \tag{1.2}$$

Проведем прямую m через точку x перпендикулярно отрезку $[x, y]$. Пусть $m \cap \partial U_t(x) = \{x_1(t), x_2(t)\} = \{x_1, x_2\}$. Отметим, что в силу леммы 1.1

$$(x_i, P_M(x_i)) \cap (x, y) = \varnothing,\ i = 1, 2, \tag{1.3}$$

иначе $x \notin T_1$ (в данном случае метрическая проекция точек x_1 и x_2 может быть как однозначна, так и двузначна, поэтому $(x_i, P_M(x_i))$ обозначает либо интервал, либо объединение двух интервалов).

Далее, проведем прямую m' через точку $(x+y)/2$ перпендикулярно $[x, y]$. Пусть теперь $\widetilde{x}$ — точка из $U_{\delta_0}(x)$, $\widetilde{y} \in Y_\varepsilon$. Рассмотрим пересечения всех возможных отрезков $[\widetilde{x}, \widetilde{y}]$ с прямой m'. Ясно, что эти пересечения образуют некоторый отрезок на прямой m', содержащий точку $(x + y)/2$. Обозначим через b_1 тот из его концов, что лежит в одной полуплоскости с точкой x, относительно прямой xy, а через b_2 — другой. Наконец, обозначим через β_1 интервал $(b_1, \frac{x+y}{2})$, а через β_2 интервал $(\frac{x+y}{2}, b_2)$. Ясно, что оба этих интервала зависят от $\varepsilon : \beta_1 = \beta_1(\varepsilon), \beta_2 = \beta_2(\varepsilon)$. Выберем ε настолько малым, чтобы $\beta_1 \cap M = \varnothing, \beta_2 \cap M = \varnothing$.

Пусть $\widehat{x} = \widehat{x}(t) \in l \cap \partial U_t(x)$, $\widehat{x} \notin [x, y]$. Покажем, что найдется такое $\delta \in (0, \delta_0]$, что для всякого $t \in (0, \delta)$ либо $y \in P_M(\widehat{x})$, либо на дуге $x_1\widehat{x}x_2$ окружности $\partial U_t(x)$ существует такая точка $x' = x'(t) \neq \widehat{x}$, что $|P_M(x')| = 2$, причем элементы множества $P_M(x')$ лежат по разные стороны от прямой l.

Действительно, исходя из (1.3), получаем, что $[x_1, P_M(x_1)]$ пересекает только интервал β_1, а $[x_2, P_M(x_2)]$ пересекает только интервал β_2. Но тогда в силу полунепрерывности метрической проекции либо на дуге $x_1\widehat{x}x_2$ существует точка $x' = x'(t)$, метрическая проекция которой двузначна, причем один из отрезков, соединяющий эту точку с одним из ее ближайших элементов, пересекает β_1, а другой — β_2, а значит, ближайшие элементы лежат по разные стороны от прямой l, либо для некоторой точки x' этой дуги отрезок (или два отрезка) $[x', P_M(x')]$ содержит точку $(x+y)/2$, откуда в силу леммы 1.1 имеем $x' = \widehat{x}$ и $y \in P_M(x')$. Последнее означает, что $y \in P_M(w)$ для всякого $w \in (x', x)$, так что полуинтервал $[x, x') \subset U_t(x) \cap T_1$. Заметим, что $x' = x + t(x-y)$, т. е. предыдущее в точности дает $P_M\big(x + t(x-y)\big) = y$ для любого числа $t \in (0, \delta_0)$, что соответствует первой части утверждения леммы.

Если же $y \notin P_M(x'(t))$ для всякого $t \in (0, \delta_0)$, то рассмотрим указанную точку $x'(t) \in T_2$, такую, что $P_M(x'(t)) = \{y_1'(t), y_2'(t)\} = \{y_1', y_2'\}$. Имеем $[x', y_1'] \cap \beta_1 \neq \varnothing$, $[x', y_2'] \cap \beta_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим пересечение прямых $l_1 = l(\varphi)$ и $l_2 = l(-\varphi)$ с прямой m'. Для каждого угла φ выберем такое малое $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$, что интервалы $\beta_1(\varepsilon)$ и $\beta_2(\varepsilon)$ не пересекаются с l_1 и l_2, и в зависимости от этого ε в соответствии с условием (1.2) выберем $\delta = \delta(\varepsilon) \leqslant \delta_0$. В дальнейшем рассматриваем $t < \delta$.

Пусть $x_{i,\varphi} = x_{i,\varphi}(t)$ — точка пересечения прямой l_i с дугой $x_1(t)\widehat{x}(t)x_2(t)$, $i = 1, 2$. Будем считать, что точки x_1 и $x_{1,\varphi}$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой l, а точки x_2 и $x_{2,\varphi}$ — в другой. Заметим, что если $[x_{i,\varphi}, P_M(x_{i,\varphi})] \cap \beta_2 \neq \varnothing$, то $[x_{i,\varphi}, P_M(x_{i,\varphi})] \cap [x, y] \neq \varnothing$, откуда $x \notin T_1$ по лемме 1.1, что противоречит условию, а значит, для любого $t \in (0, \delta)$ имеем $[x_{i,\varphi}(t), P_M(x_{i,\varphi}(t))] \cap \beta_i \neq \varnothing$, $[x_{1,\varphi}(t), P_M(x_{1,\varphi}(t))] \cap \beta_2 = \varnothing$, $[x_{2,\varphi}(t), P_M(x_{2,\varphi}(t))] \cap \beta_1 = \varnothing$. Таким образом, при $t \in (0, \delta)$ выбранная точка $x'(t)$ лежит на дуге $x_{1,\varphi}(t)\widehat{x}(t)x_{2,\varphi}(t)$, а значит $x'(t) \in \overline{U_t(x)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$, причем элементы $P_M(x'(t))$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l.

Лемма 1.3 доказана.

1.2. Критерий гладкости нормированной плоскости в терминах не более чем двузначности метрической проекции

Теорема 1.1. *Двумерное банахово пространство X является гладким тогда и только тогда, когда всякое замкнутое множество $M \subset X$ с не более чем двузначной метрической проекцией является 2-выпуклым.*

Доказательство. Докажем необходимость. Покажем, что для любого негладкого пространства X найдется такое множество M, что $1 \leqslant |P_M(x)| \leqslant 2$ для всякого $x \in X$ и в то же время M не является 2-выпуклым. Пусть $\pm s \in S(X)$ — точки негладкости единичной сферы пространства X (см. рис. 1.3). Функционалы, опорные в точке s, занимают отрезок на единичной сфере сопряженного пространства $S(X^*)$, обозначим его $[f_1, f_2]$. Аналогично, точке $-s$ соответствует отрезок $[f_3, f_4] = [-f_2, -f_1]$. Обозначим $l_i = \{x : f_i(x) = 1\}, i = \overline{1,4}$. Пусть $l_1 \cap l_3 = a_1$, $l_2 \cap l_4 = a_2$ и пусть множества $A_1 = \{x : f_1(x) > 1, f_2(x) < -1\}$, $A_2 = \{x : f_2(x) > 1, f_1(x) < -1\}$. Выберем произвольную точку $a_0 \in A_1$, не лежащую с точками a_1, a_2 на одной прямой. Положим $M = \{a_0, a_1, a_2\}$. Определенное таким образом множество M является искомым. Действительно, очевидно, что M не является 2-выпуклым, как всякое множество, состоящее из трех неколлинеарных точек. В то же время, ни для какого x метрическая проекция $P_M(x)$ не может содержать всех трех точек a_0, a_1, a_2 одновременно. В самом деле, пусть $a_1, a_2 \in S(x, \rho(x, M))$. Тогда для любого функционала f, опорного к шару $B(x, \rho(x, M))$ в точке a_1 или в точке a_2, имеем $f \notin (f_1, f_2) \cup (f_3, f_4)$, откуда $B(x, \rho(x, M)) \subset X \setminus (A_1 \cup A_2)$, то есть $a_0 \notin S(x, \rho(x, M))$.

Докажем достаточность. Покажем, что для любого $x_0 \notin M$ верно одно из следующих утверждений: либо $x_0 \in \operatorname{Conv}_2 M$, либо $x_0 \notin \operatorname{Conv} M$. Тем самым

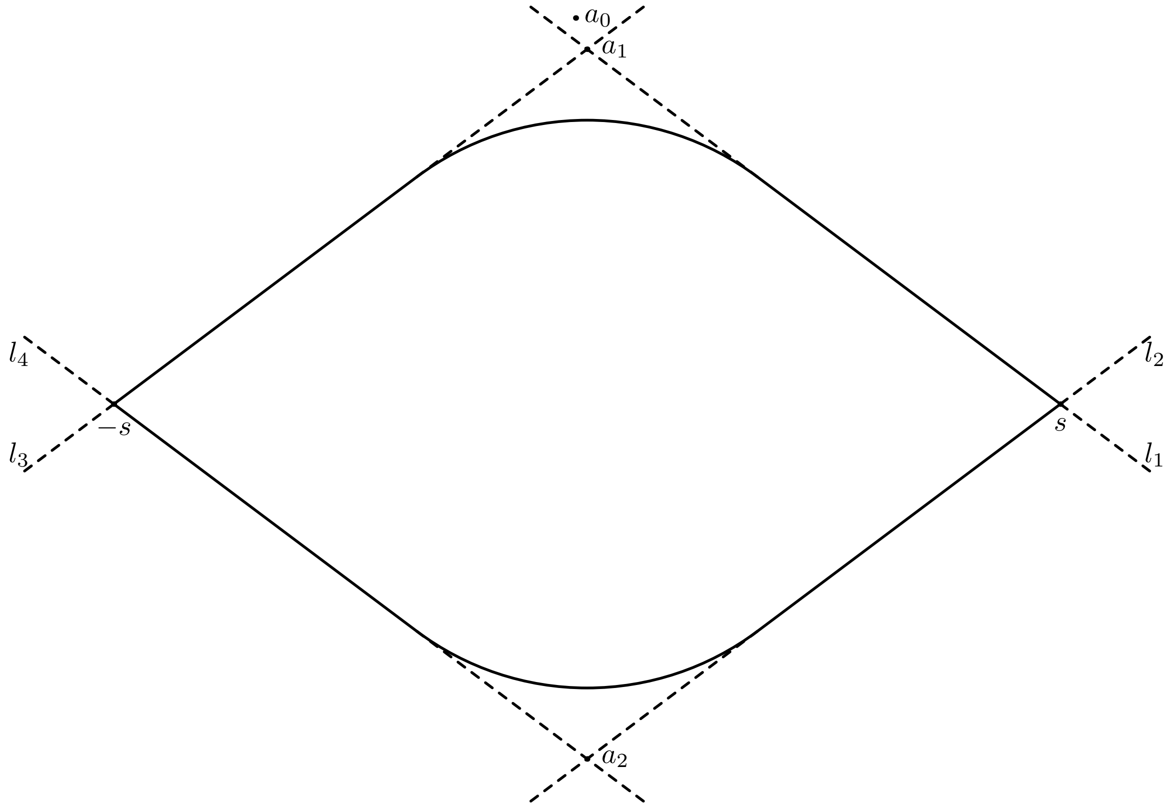

Рис. 1.3

мы в точности установим, что M есть 2-выпуклое множество. Положим

$$E(x_0) = \big\{u \in X : x_0 \in \mathrm{Conv}\{u, P_M(u)\}\big\},$$
$$R(x_0) = \sup\big\{\|u - x_0\| \ : \ u \in E(x_0)\big\}.$$

I. Предположим, что $R(x_0) < \infty$. В этом случае множество $E(x_0)$ компактно и существует такое $x \in E(x_0)$, что $\|x - x_0\| = R(x_0)$. Возможны несколько ситуаций:

1) $x \in T_1$. Пусть $P_M(x) = \{y\}$. Тогда $\mathrm{Conv}\,\{x, P_M(x)\}$ есть отрезок $[x, y]$, а x_0 — точка на этом отрезке, $x_0 \neq y$. Согласно лемме 1.3, рассмотрим точку $x' = x'(t) \in \overline{U_t(x)}$, либо лежащую на луче $\{x + \lambda(x - y) : \lambda > 0\}$ и удовлетворяющую условию $P_M(x') = \{y\}$, либо лежащую в пересечении $T_2 \cap L(\varphi)$, где угол φ подберем позже. Покажем, что включение $x_0 \in \mathrm{Conv}\,\{x', P_M(x')\}$ сохраняется, причем при достаточно малом t имеем $\|x' - x_0\| > \|x - x_0\|$.

В самом деле, в случае, когда x' лежит на указанном луче и удовлетворяет условию $P_M(x') = \{y\}$, это очевидно. Если же $x' \in T_2 \cap L(\varphi)$, то по лемме 1.3 элементы $P_M(x')$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок $[x, y]$, причем $[x', P_M(x')] \cap [x, y] = \varnothing$ по лемме 1.1, а значит, при достаточно малом t треугольник $\operatorname{Conv}\{x', P_M(x')\}$ покрывает почти весь отрезок $[x, y]$, и $x_0 \in \operatorname{Conv}\{x', P_M(x')\}$. Положим для простоты $x = 0$. Учитывая $v = -x_0/\|x_0\|$, а также произвольность малого t и угла φ (см. условие леммы 1.3), получаем

$$\|x' - x_0\| = \|\lambda v + o(\lambda) - x_0\| = \left\| -\lambda \frac{x_0}{\|x_0\|} + o(\lambda) - x_0 \right\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x_0\| \left(1 + \frac{\lambda}{\|x_0\|} \right) - |o(\lambda)| = \|x_0\| + \lambda - o(\lambda) > \|x_0\|,$$

при малых λ, что и означает $\|x' - x_0\| > \|x - x_0\|$.

Таким образом, в этом случае мы смогли увеличить значение величины $R(x_0)$, что противоречит ее определению.

2) $x \in T_2$. Пусть $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$. Если $x \in [y_1, y_2]$, то $x_0 \in \operatorname{Conv}_2 M$. В противном случае выпуклая оболочка $\operatorname{Conv}\{x, P_M(x)\}$ есть невырожденный треугольник с вершинами x, y_1, y_2. Если x_0 принадлежит его основанию $[y_1, y_2]$, то опять же получаем $x_0 \in \operatorname{Conv}_2 M$, поэтому в дальнейшем этот случай не рассматриваем.

Покажем, что при достаточно малом t и определенном φ существует такая, находимая с помощью леммы 1.2, точка $x' = x'(t)$, что включение $x_0 \in \operatorname{Conv}\{x', P_M(x')\}$ сохраняется с увеличением нормы: $\|x' - x_0\| > \|x - x_0\|$.

Начнем с сохранения включения. По лемме 1.2 точку x' можно выбрать так, что для $y'_1, y'_2 \in P_M(x')$ объединение полуинтервалов $[x', y'_1) \cup [x', y'_2)$ либо не пересекается с объединением $[x, y_1) \cup [x, y_2)$, либо дает в пересечении один из полуинтервалов $[x, y_i)$. При достаточно малом t точка y'_1 близка к y_1, а y'_2 — к y_2, а значит, треугольник $\operatorname{Conv}\{x', P_M(x')\}$ покрывает почти весь треугольник $\mathrm{Conv}\,\{x, P_M(x)\}$ (кроме малой окрестности отрезка $[y_1, y_2] \not\ni x_0$), и $x_0 \in \mathrm{Conv}\,\{x', P_M(x')\}$ (в отдельном комментарии нуждается разве что случай III леммы 1.2, в котором за счет условия $P_M(z) = \{y_1, y_2\}$ для всякого $z \in [x, x + \delta_1 v]$ аналогично имеем сохранение включения для $x' \in \big(\overline{U_t(x+\delta_1 v)} \cap T_2\big) \setminus \big(B(y_1, \rho) \cup B(y_2, \rho)\big)$ при малых t).

Перейдем к увеличению нормы. Будем считать $x = 0,\ \rho(0, M) = 1$. Пусть f_1, f_2 — опорные функционалы к элементам y_1, y_2 соответственно. Рассмотрим три случая:

а) $f_1 \neq -f_2, f_1 \neq f_2$. По определению вектора v имеем $(f_2 - f_1)(v) = 0, \|v\| = 1$. Заметим, что $\|x_0\| = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x_0)$ для некоторых $\alpha, \beta \geqslant 0$, где $\alpha f_1 + \beta f_2 \in S(X^*)$. Тогда, ввиду $f_1(v) = f_2(v) < 0$, имеет место цепочка неравенств

$$\|x' - x_0\| = \|\lambda v + o(\lambda) - x_0\| \geqslant (\alpha f_1 + \beta f_2)(x_0 - \lambda v - o(\lambda)) =$$
$$= \|x_0\| - \lambda(\alpha f_1(v) + \beta f_2(v)) - o(\lambda) > \|x_0\|,$$

при достаточно малых λ, что и требовалось показать.

б) $f_1 = -f_2$. Пусть $[a_1, b_1] \subset S(X)$ и $[a_2, b_2] \subset S(X)$ — максимальные лежащие на сфере отрезки, содержащие точки y_1 и y_2 соответственно, и пусть 0 лежит в одной полуплоскости относительно прямой $y_1 y_2$, а точки a_1, a_2 — в другой. Обозначим $a_i' = S(x_0, \|x_0\|) \cap [0, a_i)$, $s_i = S(x_0, \|x_0\|) \cap [0, y_i)$, $i = 1, 2$ (отметим, что точки a_i' и s_i могут и совпадать).

Если $x_0 = s_i$ для некоторого $i = 1, 2$ (см. рис. 1.4), то $B(x_0, \|x_0\|) \subset B(y_i, 1)$ и $x' \notin B(y_i, 1)$, откуда $x' \notin B(x_0, \|x_0\|)$, а значит $\|x_0 - x'\| > \|x_0\|$. Аналогично рассматривается случай, когда $x_0 \in (s_1, a_1'] \cup (s_2, a_2']$.

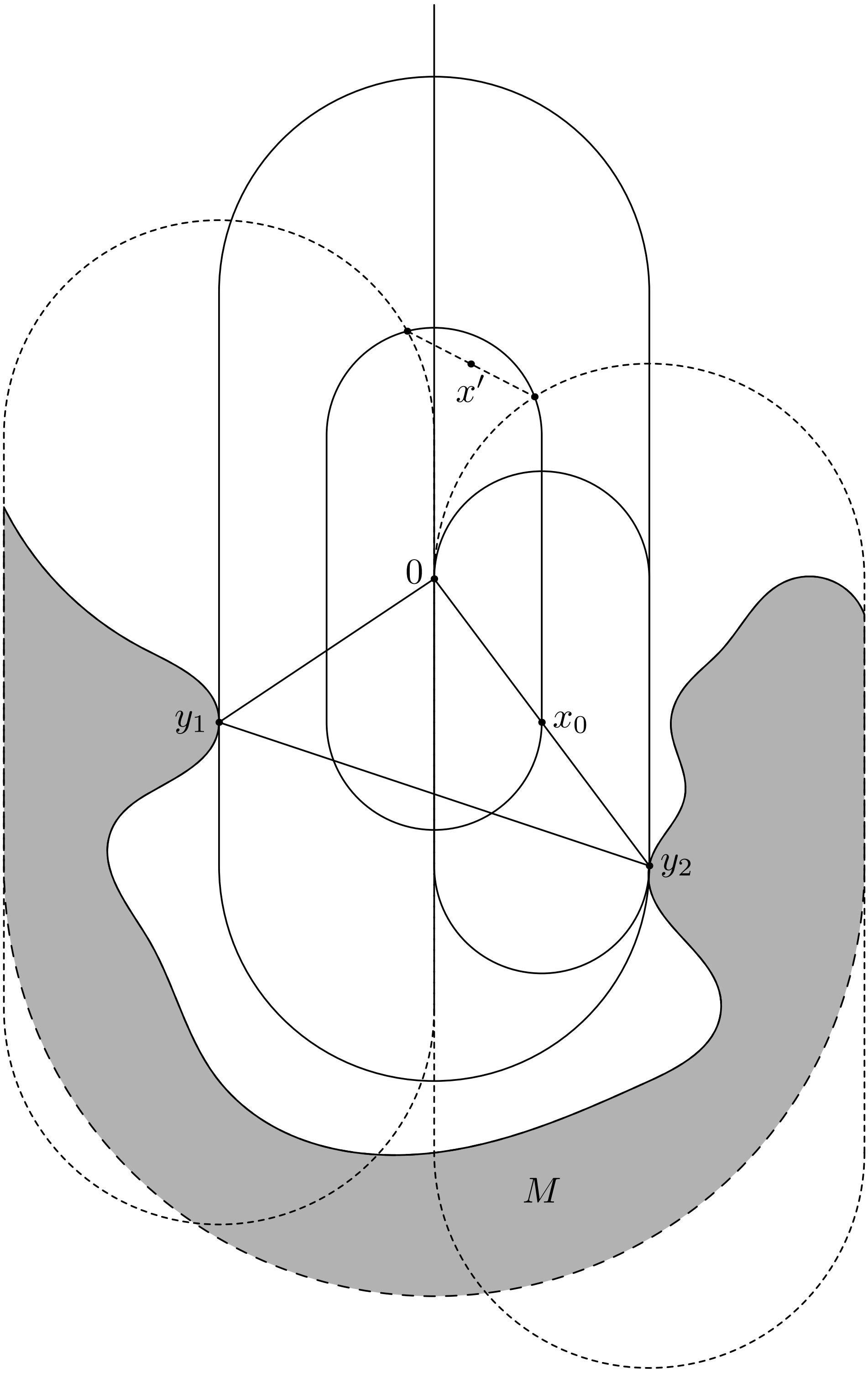

Рис. 1.4

Обозначим через f_{x_0} опорный функционал к элементу x_0. Если $x_0 \notin (s_1, a_1'] \cup (s_2, a_2']$, то $f_{x_0}(v) < 0$, и

$$\|x'-x_0\| = \|\lambda v+o(\lambda)-x_0\| \geqslant f_{x_0}(x_0-\lambda v-o(\lambda)) = \|x_0\|-\lambda f_{x_0}(v)+o(\lambda) > \|x_0\|$$

при достаточно малых λ, что и требовалось показать.

в) $f_1 = f_2$. Для найденного по лемме 1.2 элемента $x' \in \overline{U_t(0)} \cap T_2 \cap L(\varphi)$ имеем

$$\|x' - x_0\| \geqslant |f_1(x' - x_0)| = |f_1(x')| + |f_1(x_0)| = |f_1(x')| + \|x_0\| > \|x_0\|,$$

где первое равенство справедливо в силу того, что числа $f_1(x_0)$ и $f_1(x')$ имеют разные знаки при φ достаточно близких к $\widehat{y_1 0 y_2}/2$ (точка x_0 лежит в треугольнике $0y_1y_2$, т. е. ниже прямой $f_1 = 0$, а x' — выше этой прямой), а второе равенство выполнено в силу того, что x_0 лежит в треугольнике $0y_1y_2$.

Тем самым, мы вновь приходим к противоречию с определением величины $R(x_0)$.

II. Пусть теперь $R(x_0) = \infty$. Покажем, что в этом случае существует такая прямая l, что $l \cap \operatorname{int} M = \varnothing$ и l разбивает плоскость на две полуплоскости Π_1 и Π_2, для которых $\overline{\Pi}_1 \cap \operatorname{int} M = \varnothing, \overline{\Pi}_2 \cap M = M$, причем $x_0 \in l$. Если нам удастся показать это, то, очевидно, либо $x_0 \in \operatorname{Conv}_2 M$, либо $x_0 \notin \operatorname{Conv} M$.

Без ограничения общности считаем $x_0 = 0$. Рассмотрим такую последовательность точек x_n, что $0 \in \operatorname{Conv}\{x_n, P_M(x_n)\}$, $\|x_n\| \to R(0) = \infty$. Можно считать, что $x_n/\|x_n\| \to \sigma \in S(X)$. Пусть $\Pi_1 = \{x : f_\sigma(x) > 0\}$, где f_σ — опорный функционал к элементу σ. Заметим, что начиная с некоторого номера n последовательность $\{x_n\} \subset \Pi_1$. Обозначим через f_n опорный функционал в точке $x_n/\|x_n\|$. Очевидно, что $f_n \to f_\sigma$, т. е. $f_n(z) = f_\sigma(z) + o(1)$ при $n \to \infty$ для всякого $z \in X$.

Обозначим $\rho_n =: \rho(x_n, M)$. Покажем, что $\Pi_1 \subset \bigcup_n B(x_n, \rho_n)$, откуда будет следовать, что $\overline{\Pi}_1 \cap \operatorname{int} M = \varnothing$, а значит $l = \{u : f_\sigma(u) = 0\}$ — искомая прямая.

Заметим, что $\rho_n \geqslant \|x_n\| =: r_n$, в противном случае $0 \notin \operatorname{Conv}\{x_n, P_M(x_n)\}$. Поэтому $B(x_n, r_n) \subset B(x_n, \rho_n)$. Пусть $z \in \Pi_1$. Имеем

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{z}{\|x_n\|} \right\| = 1 - \frac{f_n(z)}{\|x_n\|} + o\left(\frac{1}{\|x_n\|}\right) = 1 - \frac{f_\sigma(z)}{\|x_n\|} + o\left(\frac{1}{\|x_n\|}\right) < 1$$

при достаточно больших n, поскольку $f_\sigma(z) > 0$. Таким образом, для взятой произвольно точки z из Π_1 получили, что найдется такой номер n, что $z \in B(x_n, r_n)$, а значит, в силу вышесказанного, $z \in B(x_n, \rho_n)$, откуда $\Pi_1 \subset \bigcup_n B(x_n, \rho_n)$.

Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1.1. Согласно теореме Фенхеля [46] (называемой также *усиленной теоремой Каратеодори*), 2-выпуклая оболочка всякого связного множества на плоскости совпадает с его выпуклой оболочкой, поэтому теорема 1.1 содержательна только в случае несвязного множества. Более того, Л. Бунт в своей диссертации [39] также показал, что множество на плоскости, состоящее из двух компонент связности, всегда является 2-выпуклым. Подробнее о связи количества компонент связности множества и его соответствующей выпуклости можно прочесть в работах [47] и [30].

Замечание 1.2. Элементарным следствием из доказанной теоремы 1.1 является следующий хорошо известный результат (см., напр., [52, prop. 41]): двумерное банахово пространство X является гладким тогда и только тогда, когда через любые три неколлинеарные точки в X можно провести не менее одной сферы.

Достаточность очевидным образом следует из теоремы 1.1. В самом деле, исходя из того, что всякое множество M, состоящее из трех неколлинеарных точек, не является 2-выпуклым, найдется такой элемент $x \in X$, что $|P_M(x)| = 3$, а значит сфера $S(x, \rho(x, M))$ проходит через три исходные точки.

Доказательство необходимости дословно повторяет соответствующее доказательство в теореме 1.1: в предположении негладкости пространства X, рассматривается соответствующий пример трехточечного множества M (см. рис. 1.3), для которого не существует сферы, проходящей одновременно через все три точки множества.

Глава II. Множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве

В этой главе исследуются множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве. Основная цель — получить следующее геометрическое описание таких множеств: всякая точка выпуклой оболочки произвольного замкнутого множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве лежит на отрезке с концами в этом множестве.

2.1. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Всюду ниже непустое замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}^3$ таково, что для всякого элемента $x \in \mathbb{R}^3$ имеет место неравенство $|P_M(x)| \leqslant 2$. В дальнейшем, опуская слова “трехмерное евклидово пространство”, будем просто говорить “пространство”. Норму в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать $|\cdot|$.

Аналогично случаю плоскости, определим $T_n = T_n(M) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |P_M(x)| = n\}$. Очевидно, что в наших условиях $\mathbb{R}^3 = T_1 \sqcup T_2$. Введем также векторное поле $\overline{v}(x)$ в пространстве по следующему правилу: в случае, когда $x \in T_1 \setminus M$, положим $\overline{v}(x) = \frac{x-y}{|x-y|}$, где $y = P_M(x)$; в случае, когда $x \in T_2$, $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$, $x \notin [y_1, y_2]$, возьмем $\overline{v}(x) = \frac{x-y_1+x-y_2}{|x-y_1+x-y_2|}$ (знаменатель не равен нулю, так как $x \notin [y_1, y_2]$); во всех оставшихся случаях положим $\overline{v}(x) = 0$. Всюду ниже, если элемент x фиксирован, будем писать v вместо $\overline{v}(x)$.

Пусть $x \in T_2$, $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$, $x \notin [y_1, y_2]$. Введем правильно ориентированную систему координат $Oabc$ в пространстве с началом в точке O, совпадающей с элементом x, направив ось a вдоль $y_1 - y_2$ и ось b вдоль вектора v

(см. рис. 2.1). Положим $x_\alpha^{\pm\varphi} = (\pm\sin\varphi\,; \cos\varphi\sin\alpha\,; \cos\varphi\cos\alpha)$. Заметим, что $|x_\alpha^{\pm\varphi}| = 1$.

Лемма 2.1. *Пусть $x \in T_2$, $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$, $x \notin [y_1, y_2]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ положим $Y_i(\varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(y_i)} \cap M$, $i = 1, 2$. Тогда для любого $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ существует такое малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi)$, что для всякого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha \in [0, \pi]$ и $t > 0$ имеем*

$$\rho\big(tx_\alpha^{\varphi}, Y_1(\varepsilon)\big) < \rho\big(tx_\alpha^{\varphi}, Y_2(\varepsilon)\big),$$
$$\rho\big(tx_\alpha^{-\varphi}, Y_2(\varepsilon)\big) < \rho\big(tx_\alpha^{-\varphi}, Y_1(\varepsilon)\big).$$

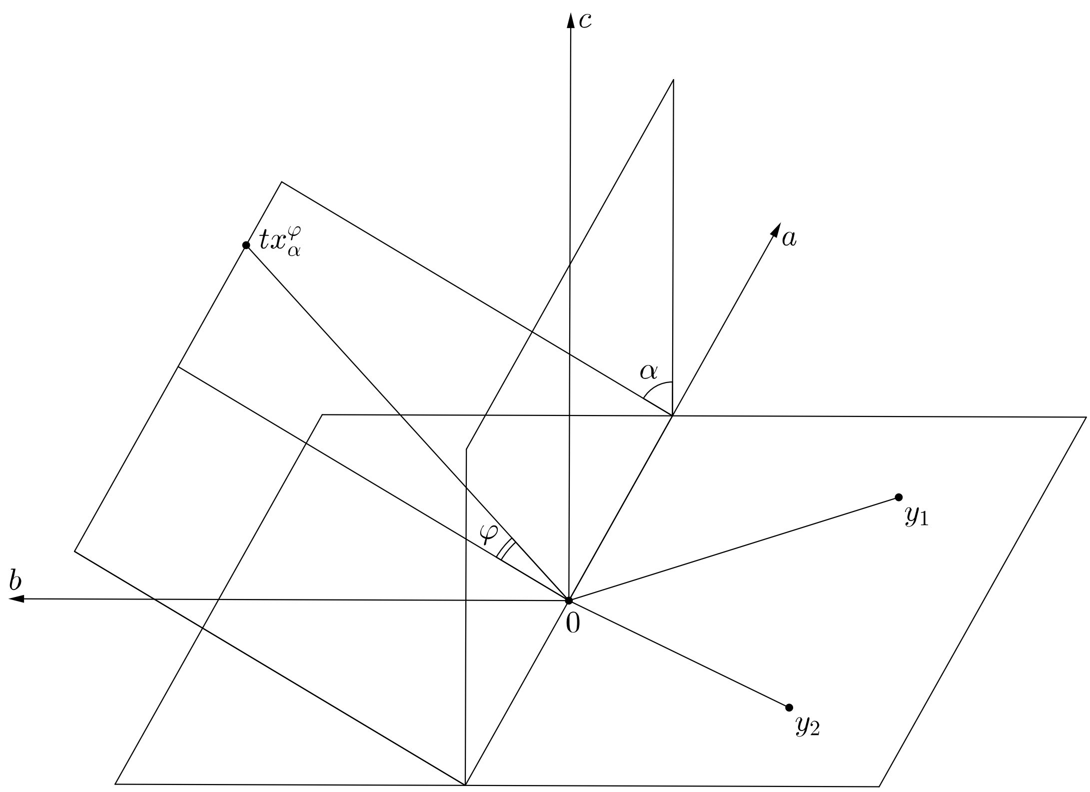

Рис. 2.1

Доказательство. Очевидно, что для всякого достаточно малого ε множества $Y_1(\varepsilon)$ и $Y_2(\varepsilon)$ не пересекаются. В дальнейшем будем рассматривать только такие ε.

Без ограничения общности считаем, что $x = 0$, $|y_1| = |y_2| = 1$.

Зафиксируем некоторый угол $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ и возьмем $\varepsilon < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi) = |y_1 - y_2| \sin\varphi$. Положим $x_\alpha = x_\alpha^\varphi$ и $Y_i = Y_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$. Пусть $y_{2,\alpha} \in P_{Y_2}(x_\alpha)$. Заметим, что $|y_{2,\alpha}| \geqslant 1$. Покажем, что скалярное произведение $(x_\alpha, y_{2,\alpha} - y_1) < 0$. Элементы x_α и $y_{2,\alpha}$ можно представить в виде $x_\alpha = \sin\varphi(y_1 - y_2)/|y_1 - y_2| + u$, $y_{2,\alpha} = y_2 + w$, где u и w таковы, что $u \perp y_1 - y_2$, $|u| = \cos\varphi$ и $|w| \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}(x_\alpha, y_{2,\alpha} - y_1) &= (x_\alpha, y_2 - y_1 + w) = (x_\alpha, y_2 - y_1) + (x_\alpha, w) = \\ &= (\sin\varphi\frac{(y_1 - y_2)}{|y_1 - y_2|} + u, y_2 - y_1) + (x_\alpha, w) = \\ &= -|y_1 - y_2|\sin\varphi + (x_\alpha, w) \leqslant -|y_1 - y_2|\sin\varphi + \varepsilon < 0,\end{aligned}$$

где последнее неравенство в цепочке обеспечивается выбранным ε.

Заметим также, что $\rho(tx_\alpha, Y_1) \leqslant |tx_\alpha - y_1|$. Исходя из этого и сказанного выше, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\rho^2(tx_\alpha, Y_1) &\leqslant |tx_\alpha - y_1|^2 = (tx_\alpha - y_1, tx_\alpha - y_1) = \\ &= 1 + t^2 - 2t(x_\alpha, y_1) = 1 + t^2 + 2t(x_\alpha, y_{2,\alpha} - y_1) - 2t(x_\alpha, y_{2,\alpha}) < \\ &< 1 + t^2 - 2t(x_\alpha, y_{2,\alpha}) \leqslant |y_{2,\alpha}|^2 + t^2 - 2t(x_\alpha, y_{2,\alpha}) = \\ &= (tx_\alpha - y_{2,\alpha}, tx_\alpha - y_{2,\alpha}) = |tx_\alpha - y_{2,\alpha}|^2 = \rho^2(tx_\alpha, Y_2),\end{aligned}$$

что, устанавливает первое неравенство из формулировки леммы. Второе неравенство для элемента $x_\alpha^{-\varphi}$ устанавливается аналогично.

Лемма 2.1 доказана.

Напомним понятие монотонного оператора. Пусть X — гильбертово пространство. Оператор $A : X \to X$ (не предполагающийся заранее линейным, непрерывным и даже однозначным) называется *монотонным*, если неравенство $(x'-x, y'-y) \geqslant 0$ выполнено для любых элементов $x, x' \in X$, $y \in A(x)$, $y' \in A(x')$. Хорошо известно (см., напр., [29]), что в гильбертовом пространстве X оператор метрического проектирования P_M является монотонным для всякого непустого замкнутого множества $M \subsetneq X$.

Следствие 2.1. *В условиях леммы 2.1 для всякого $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi)$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется такое $\delta = \delta(\varphi, \varepsilon) > 0$, что для любого $\alpha \in [0, \pi]$ и любого $t \in (0, \delta)$ пересечение $x'_\alpha(t) \in [tx_\alpha^{-\varphi}, tx_\alpha^{\varphi}] \cap T_2$ состоит из единственной точки $x'_\alpha(t)$.*

Доказательство. Пусть задан произвольный угол $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Положим $x_\alpha = x_\alpha^\varphi$, $x_\alpha^- = x_\alpha^{-\varphi}$. Согласно лемме 2.1 существует такое малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi)$, что для всякого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha \in [0, \pi]$ и $t > 0$ имеем

$$\rho\big(tx_\alpha, Y_1(\varepsilon)\big) < \rho\big(tx_\alpha, Y_2(\varepsilon)\big),$$
$$\rho\big(tx_\alpha^-, Y_2(\varepsilon)\big) < \rho\big(tx_\alpha^-, Y_1(\varepsilon)\big).$$

В силу непрерывности функции расстояния для всякого $\alpha \in [0, \pi]$ найдется такая точка $x'_\alpha(t) \in [tx_\alpha^-, tx_\alpha]$, что

$$\rho\big(x'_\alpha(t), Y_1(\varepsilon)\big) = \rho\big(x'_\alpha(t), Y_2(\varepsilon)\big). \tag{2.1}$$

Используя лемму B, запишем условие полунепрерывности метрической проекции в точке x:

$$\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists\, \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 : |x'-x| < \delta \Longrightarrow P_M(x') \subset Y_1(\varepsilon) \cup Y_2(\varepsilon).$$

Таким образом, исходя из равенства 2.1, имеем $x'_\alpha(t) \in T_2$ для всякого $t \in (0; \delta)$.

Теперь покажем, что для всякого $\alpha \in [0, \pi]$ и $t \in (0, \delta)$ указанная точка $x'_\alpha(t) \in [tx_\alpha^-, tx_\alpha] \cap T_2$ единственна. От противного, пусть для некоторого

$\alpha \in [0, \pi]$ и $t \in (0, \delta)$ найдутся две различные точки $x_1' = x_{\alpha,1}'(t)$ и $x_2' = x_{\alpha,2}'(t)$, такие, что $x_i' \in [tx_\alpha^-, tx_\alpha] \cap T_2$, $i = 1, 2$. Для $i = 1, 2$ положим $P_M(x_i') = \{y_1^i, y_2^i\}$, где $y_j^i \in Y_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2$.

Заметим, что, согласно определению элементов $x_\alpha^{\pm\varphi}$, вектор $tx_\alpha^\varphi - tx_\alpha^{-\varphi}$ коллинеарен вектору $y_1 - y_2$, откуда вектор $x_1' - x_2'$ коллинеарен вектору $y_1 - y_2$. При малых значениях ε вектор $y_2^1 - y_1^2$ близок к вектору $y_2 - y_1$, а значит, либо $(x_1' - x_2', y_2^1 - y_1^2) < 0$, либо $(x_2' - x_1', y_2^1 - y_1^2) < 0$, что противоречит монотонности оператора P_M.

Следствие 2.1 доказано.

Отметим еще одно очевидное

Следствие 2.2. *В условиях следствия 2.1 множество* $\{x_\alpha'(t) \ : \ \alpha \in [0, \pi]\}$ *есть непрерывная кривая.*

Доказательство. Пусть последовательность $\alpha_n \to \alpha_0$ при $n \to \infty$ и пусть $x_{\alpha_n}'(t) \to x' \neq x_{\alpha_0}'(t)$. Заметим, что $x' \in T_2$. В самом деле, учитывая равенство $\rho\big(x_{\alpha_n}'(t), Y_1(\varepsilon)\big) = \rho\big(x_{\alpha_n}'(t), Y_2(\varepsilon)\big)$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, имеем $\rho\big(x', Y_1(\varepsilon)) = \rho(x', Y_2(\varepsilon)\big)$. Кроме того, очевидно, $x' \in [tx_{\alpha_0}^{-\varphi}, tx_{\alpha_0}^{\varphi}]$, а значит, x' совпадает с $x_\alpha'(t)$ в силу следствия 2.1.

Следствие 2.2 доказано.

2.2. 2-выпуклость множеств с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве при дополнительных ограничениях

Напомним, что хаусдорфовым расстоянием между ограниченными множествами M и N нормированного пространства X называется величина $h(M, N) = \max\{\varepsilon > 0 : N \subset M_\varepsilon$ и $M \subset N_\varepsilon\}$, где A_ε обозначает ε-раздутие множества A, т. е. множество вида $\bigcup_{x \in A} \overline{U_\varepsilon(x)}$.

Теорема 2.1. *Пусть непустое замкнутое множество* $M \subset \mathbb{R}^3$ *таково, что выполняются следующие условия:*

1) $1 \leqslant |P_M(x)| \leqslant 2$ *для всякого элемента* $x \in \mathbb{R}^3$*;*

2) множество $T_2 = T_2(M)$ *замкнуто;*

3) для любого элемента $x \in T_2$ *найдутся такие* $K = K(x) > 0$ *и* $\delta_0 = \delta_0(x) > 0$, *что для всякого* $x' \in U_{\delta_0}(x) \cap T_2$ *имеем* $h(P_M(x), P_M(x')) \leqslant K|x' - x|$.

Тогда M *является* 2*-выпуклым.*

Доказательство. Покажем, что для любого $x_0 \notin M$ верно одно из следующих утверждений: либо $x_0 \in \operatorname{Conv}_2 M$, либо $x_0 \notin \operatorname{Conv} M$. Тем самым мы в точности установим, что M есть 2-выпуклое множество. Положим

$$E(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_0 \in \operatorname{Conv}\{x, P_M(x)\}\big\},$$
$$R(x_0) = \sup\big\{|x - x_0| \ : \ x \in E(x_0)\big\}.$$

I. Предположим, что $R(x_0) < \infty$. В этом случае множество $E(x_0)$ компактно и существует такое $x \in E(x_0)$, что $|x - x_0| = R(x_0)$. Возможны несколько ситуаций:

1) $x \in T_1$. Пусть $P_M(x) = \{y\}$. Тогда $\operatorname{Conv}\{x, P_M(x)\}$ есть отрезок $[x, y]$, а x_0 — точка на этом отрезке, $x_0 \neq y$. Следующее рассуждение идейно восходит к одному результату Л. П. Власова ([1, пункт 2]). Ключевую роль в этом рассуждении играет теорема Брауэра о неподвижной точке непрерывного отображения: *всякое непрерывное отображение выпуклого компакта из* $\mathbb{R}^n$ *в себя имеет неподвижную точку.* Исходя из замкнутости множества T_2, найдется такое $\delta = \delta(x)$, что $\overline{U_\delta(x)} \subset T_1$. Определим отображение $f : \overline{U_\delta(x)} \to \overline{U_\delta(x)}$ формулой

$$f(x') = x + \frac{\delta}{|x - P_M(x')|}\big(x - P_M(x')\big), \quad x' \in \overline{U_\delta(x)}.$$

Заметим, что метрическая проекция P_M непрерывна на $\overline{U_\delta(x)}$. В самом деле, согласно лемме B (см. §1.1), метрическая проекция P_M является полунепрерывным сверху отображением. Поскольку $\overline{U_\delta(x)} \subset T_1$, то, учитывая сказанное, P_M непрерывна на $\overline{U_\delta(x)}$, откуда отображение f, очевидно, также непрерывно на $\overline{U_\delta(x)}$. Согласно теореме Брауэра, найдется такая точка $x' \in \overline{U_\delta(x)}$, что $f(x') = x'$. Исходя из определения отображения f, элемент $x \in [x', y']$, где $y' = P_M(x')$. При этом, согласно лемме A (см. §1.1), для всякой точки $z \in [x', y']$ имеем $P_M(z) = y'$, откуда $P_M(x) = y'$. Но, учитывая $\overline{U_\delta(x)} \subset T_1$, получаем $y' = y$, а значит $P_M(x') = y$, причем $[x, y] \subset [x', y]$ и, в частности, $x_0 \in [x', y]$.

Таким образом, в случае, когда $x \in T_1$, мы нашли точку $x' \in E(x_0)$, для которой $/x' - x_0| > R(x_0)$, что противоречит определению $R(x_0)$.

2) $x \in T_2$. Пусть $P_M(x) = \{y_1, y_2\}$. Если $x \in [y_1, y_2]$, то $x_0 \in \mathrm{Conv}_2 M$. В противном случае выпуклая оболочка $\mathrm{Conv}\,\{x, P_M(x)\}$ есть невырожденный треугольник с вершинами x, y_1, y_2. Если x_0 принадлежит его основанию $[y_1, y_2]$, то опять же получаем $x_0 \in \mathrm{Conv}_2 M$, поэтому в дальнейшем этот случай не рассматриваем.

Согласно следствию 2.1 для всякого $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi)$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется такое $\delta = \delta(\varphi, \varepsilon) > 0$, что для любого $\alpha \in [0, \pi]$ и любого $t \in (0, \delta)$ существует единственный элемент $x'_\alpha(t) \in [tx_\alpha^{-\varphi}, tx_\alpha^{\varphi}] \cap T_2$.

Покажем, что при достаточно малых t и φ для некоторого $\alpha_0 \in [0; \pi]$ точка $x' = x'_{\alpha_0}(t) \in E(x_0)$ и $|x' - x_0| > |x - x_0|$.

Рассмотрим значение $\alpha = 0$. Обозначим через Π плоскость, содержащую элементы x, y_1, y_2. Зададим элемент $x'_0 = x'_0(t)$ в системе координат $Oabc$ следующим образом: $x'_0 = \lambda c + a$, $\lambda = t\cos\varphi > 0$, где вектор c совпадает по направлению с направлением оси c, $|c| = 1$, в то время как вектор a

совпадает по направлению с осью a, $a \perp c$. Положим $P_M(x'_0) = \{y_{01}, y_{02}\}$. Условимся считать, что ось c направлена “вверх” и что элемент y_{01} близок к y_1, а элемент y_{02} — к y_2. Зададим элемент y_{0i}, $i = 1, 2$ в системе координат $Oabc$: $y_{0i} = \mu_i c + d_i$, где $d_i \perp c$. Нижеследующие рассуждения одинаковы для обоих значений индекса i.

Без ограничения общности будем считать, что $x = 0$, $|y_1| = |y_2| = 1$. Запишем условие монотонности оператора метрического проектирования:

$$0 \leqslant (x'_0 - 0, y_{0i} - y_i) = (\lambda c + a, \mu_i c + d_i - y_i) = \lambda\mu_i + (a, d_i - y_i),$$

где последнее равенство обусловлено ортогональностью соответствующих векторов. Таким образом

$$-\lambda\mu_i \leqslant (a, d_i - y_i).$$

Заметим, что $|a| < t \sin\varphi = \lambda \operatorname{tg}\varphi$, откуда

$$-\lambda\mu_i \leqslant (a, d_i - y_i) \leqslant |a||d_i - y_i| < \lambda \operatorname{tg}\varphi |d_i - y_i|. \tag{2.2}$$

Теперь оценим величину $|d_i - y_i|$. Заметим, что $|d_i - y_i| \leqslant |y_{0i} - y_i|$. Согласно формулировке теоремы, найдутся такие $K = K(0) > 0$ и $\delta_0 = \delta_0(0) > 0$, что для всякого $x' \in U_{\delta_0}(0) \cap T_2$ имеем $h(P_M(0), P_M(x')) \leqslant K|x'|$. Таким образом, для всякого $t \in (0, \min\{\delta, \delta_0\})$ имеем

$$|d_i - y_i| \leqslant |y_{0i} - y_i| \leqslant K|x'_0| \leqslant \frac{K\lambda}{\cos\varphi}.$$

Подставляя эти оценки в (2.2), получаем

$$-\lambda\mu_i < \frac{K\lambda^2 \operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi},$$

откуда

$$-\mu_i < \frac{K\lambda \operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi} = Kt \operatorname{tg}\varphi. \tag{2.3}$$

Если оба коэффициента $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$, то треугольник $x'_0 y_{01} y_{02}$ расположен выше плоскости Π, а значит и точки x_0. Пусть хотя бы один из коэффициентов отрицателен, скажем, $\mu_1 < 0$. Положим $s = [x'_0, y_{0,1}] \cap \Pi$. Тогда, согласно неравенству (2.3), $-\mu_1 = |\mu_1| = o(\lambda)$ при $\varphi \to 0$, откуда следует, что при достаточно малых φ и t элемент s ближе к y_1, чем к 0, а значит треугольник $x'_0 y_{01} y_{02}$ находится "над" элементом x_0.

Аналогичным образом можно показать, что треугольник $x'_\pi y_{\pi 1} y_{\pi 2}$ находится "под" элементом x_0.

Заметим, что для всякого $\alpha \in [0, \pi]$ имеем

$$\big([x'_\alpha, y_{\alpha,1}] \cup [x'_\alpha, y_{\alpha,2}]\big) \cap \big([0, y_1) \cup [0, y_2)\big) = \varnothing.$$

В самом деле, в противном случае, согласно лемме 1.1 (см. §1.1), $y_{\alpha i} \in P_M(0)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, что противоречит включению $0 \in T_2$. Учитывая это и указанные положения треугольников для значений $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, а также следствие 2.2, можно заключить, что при изменении α от 0 до π в пересечении треугольников $x'_\alpha y_{\alpha 1} y_{\alpha 2}$ и $0 y_1 y_2$ мы получим все точки треугольника $0 y_1 y_2$, кроме точек из малой окрестности отрезка $[y_1, y_2]$, причем величина этой окрестности зависит от малости заданных параметров t и φ. Выбрав эти параметры соответствующим образом, мы получим, что для некоторого $\alpha \in [0, \pi]$ справедливо включение $x_0 \in x'_{\alpha_0} y_{\alpha_0 1} y_{\alpha_0 2}$. Тем самым, $x'_{\alpha_0} \in E(x_0)$. Для этого элемента x'_{α_0} имеем $|x'_{\alpha_0} - x_0| > R(x_0)$, очевидно, увеличивается, что противоречит определению $R(x_0)$.

II. Пусть теперь $R(x_0) = \infty$. Эта часть доказательства с некоторыми упрощениями повторяет соответствующее доказательство для нормированной плоскости. Покажем, что в этом случае существует такая плоскость Π_0, что $\Pi_0 \cap \operatorname{int} M = \varnothing$ и Π_0 разбивает пространство на два полупространства X_1 и X_2, для которых $\overline{X}_1 \cap \operatorname{int} M = \varnothing, \overline{X}_2 \cap M = M$, причем $x_0 \in \Pi_0$. Если нам удастся показать это, то, очевидно, либо $x_0 \in \operatorname{Conv}_2 M$, либо $x_0 \notin \operatorname{Conv} M$.

Без ограничения общности считаем $x_0 = 0$. Рассмотрим такую последовательность точек $x_n \in E(0)$, что $|x_n| \to R(0) = \infty$. Можно считать, что $x_n/\|x_n\| \to \sigma \in S(\mathbb{R}^3)$. Пусть $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\sigma, x) > 0\}$. Заметим, что начиная с некоторого номера n последовательность $\{x_n\} \subset X_1$.

Обозначим $\rho_n =: \rho(x_n, M)$. Покажем, что $X_1 \subset \bigcup_n B(x_n, \rho_n)$, откуда будет следовать, что $\overline{X}_1 \cap \operatorname{int} M = \varnothing$, а значит $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\sigma, x) = 0\}$ — искомая плоскость. Заметим, что $\rho_n \geqslant |x_n| =: r_n$, в противном случае $x_n \notin E(0)$. Поэтому $B(x_n, r_n) \subset B(x_n, \rho_n)$. Пусть $z \in X_1$. Имеем

$$\left|\frac{x_n}{|x_n|} - \frac{z}{|x_n|}\right|^2 = 1 - \frac{2(x_n, z)}{|x_n|^2} + \frac{|z|^2}{|x_n|^2} = 1 - \frac{2(\sigma, z)}{|x_n|} + o\left(\frac{1}{|x_n|^2}\right) < 1$$

при достаточно больших n, поскольку $(\sigma, z) > 0$. Таким образом, для взятой произвольно точки z из X_1 получили, что найдется такой номер n, что $z \in B(x_n, r_n)$, а значит, в силу вышесказанного, $z \in B(x_n, \rho_n)$, откуда $X_1 \subset \bigcup_n B(x_n, \rho_n)$.

Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Условие 2) теоремы 2.1 не тривиально в том смысле, что найдется множество $M \subset \mathbb{R}^3$, для которого множество $T_2 = T_2(M)$ не является замкнутым. Приведем соответствующий пример. Рассмотрим множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2, x = 0\}$. При $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ каждая из точек с координатами $(0, 0, t)$ принадлежит множеству T_1, причем метрическая проекция каждой из этих точек состоит из единственной точки $(0, 0, 0)$. В то же время при $t > 1/2$ точки с координатами $(0, 0, t)$ уже принадлежат множеству T_2. Таким образом, точка $(0, 0, 1/2)$ принадлежит T_1, но является предельной для T_2.

Замечание 2.2. Наложение условий 2) и 3) в теореме 2.1 является вынужденным, так как получить доказательство теоремы в более общем случае пока не удается. Вместе с тем, автор полагает, что теорема 2.1 останется справедливой и в случае, если оба условия 2) и 3) будут убраны. Более того, автор склонен считать, что условие 3) выполняется всегда для случая евклидова пространства и множеств с не более чем двузначной метрической проекцией, но доказать этот факт непосредственно представляется автору достаточно трудной задачей. В подтверждение сказанного отметим, что основные, имеющиеся на сегодняшний день, результаты, связанные с липшицевостью метрической проекции (см., напр., [45] и [42]), весьма далеки от ожидаемого.

Замечание 2.3. В отношении теоремы 2.1 справедливо, аналогичное замечанию 1.1, наблюдение: теорема содержательна только в случае множеств, состоящих не менее чем из трех компонент связности.

Глава III. Ограниченно чебышевские и локально чебышевские множества

В этой главе вводятся и рассматриваются понятия локально чебышевского множества и ограниченно чебышевского множества. Исследуется взаимосвязь между классом чебышевских множеств и классами локально чебышевских и ограниченно чебышевских множеств в двумерных банаховых пространствах. Доказывается, что в двумерном банаховом пространстве всякое связное замкнутое локально чебышевское множество является чебышевским, а всякое чебышевское множество является локально чебышевским тогда и только тогда, когда пространство строго выпукло. В конце главы приводятся нетривиальные примеры локально чебышевского, но не чебышевского множества и чебышевского, но не локально чебышевского множества.

3.1. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Определение 3.1. Назовем множество M *локально чебышевским*, если для любого элемента $y \in M$ найдется такое положительное число $r = r(y)$, что множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ — чебышевское.

Пусть $\dim X = 2$, множество M замкнуто и связно, и найдется такой элемент $x \in X$, что $1 < |P_M(x)| < \infty$. Выберем $y_1, y_2 \in P_M(x), y_1 \neq y_2$. Открытый шар $U_{\rho(x,M)}(x)$ содержится в одной компоненте связности $\Omega(x)$ дополнения $X \setminus M$. В силу связности множества M область $\Omega(x)$ является односвязной, а ломаная y_1xy_2 разбивает $\Omega(x)$ на две непересекающиеся области $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$, хотя бы одна из которых ограничена. Если область $\Omega(x)$ ограничена, положим $\omega(x, y_1, y_2) := \Omega_i(x)$, где $i \in \{1, 2\}$ выбирается таким, что $\operatorname{mes}_2 \Omega_i(x) \leqslant \operatorname{mes}_2 \Omega(x)/2$ (здесь mes_2 — двумерная мера Лебега).

В противном случае, возьмем за $\omega(x, y_1, y_2)$ ту из областей $\Omega_i(x), i \in \{1, 2\}$, которая ограничена. Определим $K(x, y_1, y_2) := \overline{\omega(x, y_1, y_2)}$. Легко видеть, что $K(x, y_1, y_2)$ является связным компактным множеством, содержащим элементы x, y_1, y_2 и однозначно определенным для этих элементов.

Итак, будем говорить, что для элементов x, y_1, y_2 определено множество $K(x, y_1, y_2)$, если выполнены все вышеперечисленные условия: $\dim X = 2$, множество M замкнуто и связно, и для элемента $x \in X$ имеем $1 < |P_M(x)| < \infty$ и $y_1, y_2 \in P_M(x), y_1 \neq y_2$.

Лемма 3.1. *Пусть для элементов x, y_1, y_2 определено множество $K := K(x, y_1, y_2)$ и пусть для всякого, отличного от y_1 и y_2, элемента $y \in P_M(x)$, отрезок $[x, y] \not\subset K$. Тогда для любого достаточно малого числа $\delta > 0$ найдется такой элемент $\hat{x} \neq x$, что $\hat{x} \in U_\delta(x) \cap K$ и $|P_M(\hat{x})| \geqslant 2$, причем можно выбрать такие элементы $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in P_M(\hat{x}), \hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$, что $K(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \subsetneq K$.*

Доказательство. Согласно лемме B (см. §1.1), запишем для точки x условие полунепрерывности метрической проекции:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 : \forall\, z \in U_\delta(x) : P_M(z) \subset U_\varepsilon(P_M(x)) \cap M, \tag{3.1}$$

где $U_\varepsilon(A) := \bigcup_{y \in A} U_\varepsilon(y)$.

Для элементов $\{y_k\}_{k=1}^n = P_M(x)$ конечной метрической проекции элемента x положим $Y_k(\varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(y_k)} \cap M$. Очевидно, что для всякого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ верно

$$Y_l(\varepsilon) \cap Y_m(\varepsilon) = \varnothing,\ \forall\, l, m : \{l, m\} \subset \{1, \ldots, n\}. \tag{3.2}$$

Исходя из того, что ни для какого, отличного от y_1 и y_2, элемента $y \in P_M(x)$ отрезок $[x, y] \not\subset K$, для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$[z_1, z_2] \not\subset K,\ \forall\, z_1, z_2 : z_1 \in U_\delta(x), z_2 \in Y_k(\varepsilon), \tag{3.3}$$

при $k \geqslant 3$ и достаточно малых $\delta < \delta(x, \varepsilon)$. Зафиксируем некоторые такие ε и δ, и пусть $Y_k = Y_k(\varepsilon)$. Будем также считать, что $\overline{U_\delta(x)} \cap M = \varnothing$. В новых обозначениях условие (3.1) перепишется следующим образом:

$$\forall\ z \in \overline{U_\delta(x)} : P_M(z) \subset \bigcup_{k=1}^{n} Y_k. \tag{3.1$'$}$$

Рассмотрим точки $\hat{x}_i = [x, y_i] \cap \partial U_\delta(x)$, $i = 1, 2$. Используя лемму A (см. §1.1), получаем, что $y_i \in P_M(\hat{x}_i), i = 1, 2$.

Заметим, что на дуге $\partial U_\delta(x) \cap K$ найдется точка, равноудаленная от множеств Y_1 и Y_2. В самом деле, либо для некоторого $i = 1, 2$ имеем $\rho(\hat{x}_i, M) = \rho(\hat{x}_i, Y_1) = \rho(\hat{x}_i, Y_2)$, либо $\rho(\hat{x}_1, M) = \rho(\hat{x}_1, Y_1) < \rho(\hat{x}_1, Y_2)$ и $\rho(\hat{x}_2, M) = \rho(\hat{x}_2, Y_2) < \rho(\hat{x}_2, Y_1)$, но тогда, в силу непрерывности функции расстояния, на дуге $\partial U_\delta(x) \cap K$ найдется такая точка $\hat{x}$, что $\rho(\hat{x}, Y_1) = \rho(\hat{x}, Y_2)$. Покажем, что точка $\hat{x}$ и есть искомая.

Действительно, если для всякого элемента $\hat{y} \in P_M(\hat{x})$ имеем $[\hat{x}, \hat{y}] \subset K$, то, учитывая (3.1$'$) и (3.3), получаем $P_M(\hat{x}) \subset Y_1 \cup Y_2$, откуда $\rho(\hat{x}, M) = \rho(\hat{x}, Y_1) = \rho(\hat{x}, Y_2)$. Ввиду (3.2), $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, а значит найдутся $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in P_M(\hat{x})$, такие что $[\hat{x}, \hat{y}_i] \subset K, i = 1, 2$, и $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$, и, тем самым, точка $\hat{x}$ есть искомая. Если же существует такой элемент $\hat{y} \in P_M(\hat{x})$, что $[\hat{x}, \hat{y}] \not\subset K$, то $[\hat{x}, \hat{y}] \cap [x, y_i] \neq \varnothing$ для некоторого $i = 1, 2$. Пусть, для определенности, $[\hat{x}, \hat{y}] \cap [x, y_1] \neq \varnothing$. По лемме 1.1 (см. §1.1) получаем, что $y_1 \in P_M(\hat{x})$, а значит $\|\hat{x} - y_1\| = \rho(\hat{x}, M) = \rho(\hat{x}, Y_1)$. Положим $\hat{y}_1 = y_1$. Учитывая равенство $\rho(\hat{x}, Y_1) = \rho(\hat{x}, Y_2)$, найдется элемент $\hat{y}' \in P_M(\hat{x}) \cap Y_2$. Если $[\hat{x}, \hat{y}'] \subset K$, то полагаем $\hat{y}_2 = \hat{y}'$. Если $[\hat{x}, \hat{y}'] \not\subset K$, то, учитывая $\hat{y}' \in Y_2$, получаем $[\hat{x}, \hat{y}'] \cap [x, y_2] \neq \varnothing$, и, рассуждая аналогично, имеем $\hat{y}_2 = y_2 \in P_M(\hat{x})$. Таким образом, найден элемент $\hat{x}$ и такие, соответствующие ему, элементы $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in P_M(\hat{x})$, что отрезки $[\hat{x}, \hat{y}_1]$ и $[\hat{x}, \hat{y}_2]$ лежат в K, а значит $K(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \subset K$, причем $K(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \neq K$, поскольку $\hat{x} \neq x$.

Лемма 3.1 доказана.

3.2. Чебышевость локально чебышевских множеств

Теорема 3.1. *В двумерном банаховом пространстве X всякое связное замкнутое локально чебышевское множество M является чебышевским.*

Замечание 3.1. Требования замкнутости и связности множества M здесь существенны: открытый единичный шар и двухточечное множество на евклидовой плоскости суть локально чебышевские, но не чебышевские множества.

Доказательство. 1. Используя локальную чебышевость множества M, для каждой точки $y \in M$ найдем такую окрестность $U_{r(y)}(y)$, что каждое множество $\overline{U_{r(y)}(y)} \cap M$ — чебышевское. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Множество $M_x = B(x, \rho(x, M) + 1) \cap M$ компактно, причем $P_M(x) \subset M_x$. Тогда $\{ U_{r(y)}(y) \, : \, y \in M_x\}$ есть открытое покрытие множества M_x. Выделим конечное подпокрытие $\{ U_{r(y_i)}(y_i)\}_{i=1}^n$. Таким образом, M_x лежит в объединении конечного числа чебышевских множеств ($M_x \subset \bigcup_{i=1}^n \{ \overline{U_{r(y_i)}(y_i)} \cap M\}$), откуда следует, что метрическая проекция точки x на все множество M конечна.

2. Предположим, от противного, что множество M не является чебышевским. Тогда найдется такой элемент $\tilde{x} \in X$, что $|P_M(\tilde{x})| > 1$. Выберем некоторые $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in P_M(\tilde{x})$, для которых положим $\widetilde{K} = K(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ и определим величину

$$S = \inf_E \big\{ \mathrm{mes}_2 \, K(x, y_1, y_2) \big\}, \text{ где}$$
$$E = \big\{ (x, y_1, y_2) : y_1, y_2 \in P_M(x), y_1 \neq y_2, K(x, y_1, y_2) \subset \widetilde{K} \big\}.$$

Множество E непусто ($(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in E$) и ограничено ($E \subset \widetilde{K} \times \widetilde{K} \times \widetilde{K}$) в пространстве $X \times X \times X$. Рассмотрим последовательность элементов

$(x_n, y_{n1}, y_{n2}) \in E$ таких, что $\operatorname{mes}_2 K(x_n, y_{n1}, y_{n2}) \to S$. Можем считать, что $x_n \to x, y_{n1} \to y_1, y_{n2} \to y_2$, где $x, y_1, y_2 \in \widetilde{K}$. Легко видеть, что $y_1, y_2 \in P_M(x)$. Действительно, для всякого номера n имеем $y_{n1}, y_{n2} \in P_M(x_n)$, т.е. $\|x_n - y_{ni}\| = \rho(x_n, M), i = 1, 2$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|x - y_i\| = \rho(x, M), i = 1, 2$.

Если $y_1 = y_2 =: y$, то для любого положительного числа r найдется такой номер $k = k(r)$, что $y_{k1}, y_{k2} \in U_r(y) \cap P_M(x_k)$, причем $y_{k1} \neq y_{k2}$, ввиду чего множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ не является чебышевским ни для какого r, что противоречит определению локальной чебышевости множества M.

Таким образом, $y_1 \neq y_2$, и множество $K := K(x, y_1, y_2)$ может быть корректно определено. Из условия $K(x_n, y_{n1}, y_{n2}) \subset \widetilde{K}$ следует включение $K \subset \widetilde{K}$, а значит инфимум достигается на наборе $(x, y_1, y_2) \in E$, причем $S = \operatorname{mes}_2 K > 0$. В самом деле, $\operatorname{mes}_2 K \geqslant \operatorname{mes}_2\big(K \cap B(x, \rho(x, M))\big) > 0$.

3. Заметим, что ни для какого, отличного от y_1 и y_2, элемента $y \in P_M(x)$ отрезок $[x, y] \not\subset K$, иначе $\operatorname{mes}_2 K(x, y, y_1) < \operatorname{mes}_2 K$, что противоречит равенству $S = \operatorname{mes}_2 K$. Тогда, по лемме 3.1, найдутся такие элементы $\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2$, что $(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \in E$ и множество $\widehat{K} := K(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \subsetneq K$. Но отсюда $\operatorname{mes}_2 \widehat{K} < \operatorname{mes}_2 K$, вследствие чего опять приходим к противоречию.

Полученное противоречие показывает, что исходное предположение о том, что найдется элемент $\tilde{x}$ с $|P_M(\tilde{x})| > 1$, не является верным. Таким образом, множеством M — чебышевское.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.2. Отметим, что справедливость теоремы 3.1 для случая строго выпуклого и гладкого конечномерного пространства X очевидна и вытекает из теорем A и C (см. Введение).

В самом деле, из локальной чебышевости и связности по теореме A следует замкнутость, связность и локальная выпуклость, откуда, в силу теоремы

С, следует замкнутость и выпуклость, а значит, по теореме А, — чебышевость.

Более того, нетрудно показать, что теорема останется справедливой даже без наложения условия строгой выпуклости на пространство X, т. е. для случая произвольного гладкого конечномерного пространства X.

3.3. Критерий строгой выпуклости нормированной плоскости в терминах ограниченной чебышевости

Определение 3.2. Назовем множество M *ограниченно чебышевским*, если для любого элемента $x \in X$ и числа $r > 0$ множество $B(x,r) \cap M$ является чебышевским.

Предложенное понятие аналогично известному понятию ограниченно компактного множества, определение которого дословно повторяет вышеприведенное, с заменой слов "чебышевским" на "компактным".

Замечание 3.3. Во избежание противоречий, связанных с данным определением, считаем, что пустое множество является чебышевским.

Замечание 3.4. Очевидно, что всякое ограниченно чебышевское множество является как локально чебышевским, так и чебышевским. В то же время, любое не строго выпуклое пространство X, взятое в качестве своего подмножества, дает пример чебышевского, но не локально (а значит, и не ограниченно) чебышевского множества: пересечение X с единичным шаром B_X есть сам шар, не являющийся чебышевским множеством. В связи с этим автору представляется интересным следующая задача: охарактеризовать банаховы пространства, в которых всякое чебышевское множество является ограниченно чебышевским.

Теорема 3.2. *Двумерное банахово пространство X является строго выпуклым тогда и только тогда, когда всякое чебышевское множество $M \subset X$ является ограниченно чебышевским.*

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из замечания 3.4.

Докажем достаточность. Пусть, от противного, найдется такая точка $x_0 \in X$ и число $r_0 > 0$, что пересечение $B_0 \cap M =: M_0$ замкнутого шара $B_0 := B(x_0, r_0)$ со множеством M не является чебышевским множеством. По лемме B (см. §1.1) получаем $|P_{M_0}(x)| \geqslant 1$ для всякого $x \in X$. Рассмотрим произвольную точку x такую, что $|P_{M_0}(x)| > 1$. Обозначим $B := B(x, \rho(x, M_0))$.

1. Предположим, что найдется такой элемент $y \in P_{M_0}(x)$, что $y \in B_0$. Тогда $U_\varepsilon(y) \subset B_0$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Положим $y' = [x, y] \cap \partial U_\varepsilon(y)$ и рассмотрим шар $B_z := B(z, \varepsilon/2)$, где $z := \frac{y+y'}{2}$. По лемме A (см. §1.1) имеем $P_{M_0}(z) = \{y\}$. Покажем, что $P_M(z) = \{y\}$. Поскольку $\rho(z, M) \leqslant \rho(z, M_0)$, то $P_M(z) \subset B_z$. Заметим, что $B_z \subset B_0$, откуда $M \cap B_z = M \cap B_0 \cap B_z = M_0 \cap B_z$, а значит $P_M(z) = P_{M_0}(z) = \{y\}$.

Напомним, что чебышевское множество M называется *чебышевским солнцем* [8], если для всякой точки a, не лежащей в M, любая точка из луча, начинающегося в $b = P_M(a)$ и проходящего через a, имеет точку b своей ближайшей в M. Известно, что в конечномерном банаховом пространстве всякое чебышевское множество является чебышевским солнцем [8, теор. 4.4]. Исходя из этого и учитывая $P_M(z) = \{y\}$, получаем $P_M(x) = \{y\} = P_{M_0}(x)$, что противоречит неравенству $|P_{M_0}(x)| > 1$.

Таким образом, для всякого элемента $y \in P_{M_0}(x)$ имеем $y \in \partial B_0$.

2. Предположим, что $|P_{M_0}(x)| \geqslant 3$. Тогда, учитывая сказанное выше, найдутся различные точки $y_i \in P_{M_0}(x) \cap \partial B \cap \partial B_0, i = 1, 2, 3$. Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение (см., напр., [52, prop. 14] или [28]):

через любые три неколлинеарные точки в строго выпуклом двумерном банаховом пространстве проходит не более чем одна сфера. Отметим, что отсюда, в частности, следует, что две несовпадающие сферы пересекаются не более чем в двух точках. Ввиду строгой выпуклости пространства X, точки y_1, y_2, y_3 неколлинеарны, а значит, согласно сформулированному утверждению, шар B совпадает с шаром B_0. Последнее влечет $|P_M(x_0)| > 1$, что противоречит чебышевости множества M.

Итак, $|P_{M_0}(x)| = 2$.

3. Множество называется V-*связным*, если пересечение с любым замкнутым шаром связно. Это определение было предложено Л. П. Власовым, которым, в частности, доказано [8, теорема 4.2], что всякое чебышевское множество в строго выпуклом конечномерном пространстве является V-связным, откуда, в нашем случае, множество M_0 — связно.

Пусть $\{y_1, y_2\} = P_{M_0}(x), y_1 \neq y_2$. Учитывая связность и замкнутость множества M_0, для элементов x, y_1, y_2 определим множество $K := K(x, y_1, y_2)$. По лемме 2, для любого достаточно малого δ найдется точка $\hat{x} \in K \cap U_\delta(x)$ и элементы $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in P_{M_0}(\hat{x})$, такие что $K(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \subset K$. Нужное нам число δ выберем в дальнейшем.

Отметим, что условия $|P_{M_0}(x)| = 2$ и $y \in \partial B_0$ были получены для произвольной точки $y \in P_{M_0}(x)$ и произвольной точки x, такой что $|P_{M_0}(x)| > 1$, в силу чего $|P_{M_0}(\hat{x})| = 2$ и $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \partial B_0$. Покажем, что $\{y_1, y_2\} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2\}$.

Как было упомянуто выше, две различные сферы в строго выпуклом двумерном банаховом пространстве пересекаются не более чем в двух точках. Отсюда следует, что сфера ∂B_0 при пересечении со сферой ∂B разбивается на две части: открытую дугу γ_1, лежащую внутри шара B, и замкнутую дугу γ_2 с концами y_1, y_2 вне шара B. Заметим, что $\gamma_1 \cap M_0 = \varnothing$, иначе нарушается условие $P_{M_0}(x) \subset \partial B$. Таким образом, $P_{M_0}(\hat{x}) \subset \gamma_2$.

Пусть $B(\hat{x}, \rho(\hat{x}, M_0)) =: \widehat{B}$. Определим аналогичным образом части $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$, на которые разбивается сфера ∂B_0 при пересечении со сферой $\partial \widehat{B}$: $\hat{\gamma}_1 \subset \widehat{B}, \hat{\gamma}_2 \not\subset \widehat{B}$. Так же, как и в случае с γ_1, получаем $\hat{\gamma}_1 \cap M_0 = \varnothing$. Зафиксируем $z \in \gamma_1$. Заметим, что $\|x - z\| < \rho(x, M_0)$. Тогда, при достаточно малых δ, имеем $\|\hat{x} - z\| < \rho(\hat{x}, M_0)$, откуда следует, что $z \in \hat{\gamma}_1$ и $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \gamma_2$. Но отсюда $\gamma_1 \subset \hat{\gamma}_1$. Если $\gamma_1 \neq \hat{\gamma}_1$, то y_1 или y_2 принадлежит $\hat{\gamma}_1$, что противоречит равенству $\hat{\gamma}_1 \cap M_0 = \varnothing$.

Тем самым, $\{y_1, y_2\} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2\}$.

4. Выберем такой элемент $\tilde{x}$, что $P_{M_0}(\hat{x}) = \{y_1, y_2\} \subset \partial B_0$, и положим $\widetilde{K} := K(\tilde{x}, y_1, y_2)$. Рассмотрим величину

$$S = \inf_E \bigl\{ \operatorname{mes}_2 K(x, y_1, y_2) \bigr\}, \text{ где } E = \bigl\{ x \in \widetilde{K} : P_{M_0}(x) = \{y_1, y_2\} \bigr\}.$$

Множество E непусто ($\tilde{x} \in E$) и ограниченно ($E \subset \widetilde{K}$) в X. Найдем последовательность элементов $x_n \in E$, таких что $\operatorname{mes}_2 K(x_n, y_1, y_2) \to S$. Можем считать, что $x_n \to x \in \widetilde{K}$.

Легко видеть, что $y_1, y_2 \in P_{M_0}(x)$. Действительно, для всякого номера n имеем $y_1, y_2 \in P_{M_0}(x_n)$, т.е. $\|x_n - y_i\| = \rho(x_n, M_0), i = 1, 2$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|x - y_i\| = \rho(x, M_0), i = 1, 2$. Таким образом, множество $K := K(x, y_1, y_2)$ может быть корректно определено, а инфимум достигается на элементе $x \in E$, причем $S = \operatorname{mes}_2 K > 0$. В самом деле, $\operatorname{mes}_2 K \geqslant \operatorname{mes}_2 K \cap B(x, \rho(x, M_0)) > 0$.

В силу не более чем двузначности метрической проекции на множество M_0, все условия леммы 3.1 соблюдаются. Воспользовавшись леммой, для достаточно малого δ найдем такой элемент $\hat{x} \in U_\delta(x) \cap K$, что множество $\widehat{K} := K(\hat{x}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \subsetneq K$. По доказанному выше $\{y_1, y_2\} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2\}$, а значит $\hat{x} \in E$, причем $\operatorname{mes}_2 \widehat{K} < \operatorname{mes}_2 K$, что противоречит равенству $S = \operatorname{mes}_2 K$.

Полученное противоречие показывает, что исходное предположение о том, что найдется элемент $\tilde{x}$ с $|P_{M_0}(\tilde{x})| > 1$, не является верным. Таким образом, множеством M_0 — чебышевское.

Теорема 3.2 доказана.

Элементарным, но важным следствием из доказанной теоремы 3.2 является следующий результат

Следствие 3.1. *Двумерное банахово пространство является строго выпуклым тогда и только тогда, когда всякое его чебышевское подмножество является локально чебышевским.*

Следующий результат устанавливает эквивалентность понятий чебышевского, ограниченно чебышевского и локально чебышевского множества в случае строго выпуклого двумерного пространства.

Следствие 3.2. *В двумерном строго выпуклом банаховом пространстве X следующие условия на множество $M \subset X$ эквивалентны:*

а) M чебышевское;

б) M ограниченно чебышевское;

в) M связное, замкнутое и локально чебышевское.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) является следствием теоремы 3.2. Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидным образом следует из упомянутой выше теоремы Л. П. Власова ([8, теорема 4.2]) о V-связности чебышевского множества в строго выпуклом конечномерном пространстве. Импликация в) $\Rightarrow$ а) является следствием теоремы 3.1.

Следствие 3.2 доказано.

Замечание 3.5. Используя теорему А (см. Введение), легко показать, что в случае строго выпуклого и гладкого конечномерного пространства X из чебышевости множества всегда следует его ограниченная чебышевость и, тем более, локальная чебышевость.

В самом деле, если множество чебышевское, то оно, по теореме А, замкнутое и выпуклое, откуда пересечение с любым шаром есть замкнутое и выпуклое множество, а значит, по теореме А — чебышевское.

Более того, нетрудно показать, что даже без наложения условия строгой выпуклости на пространство X, т. е. для случая произвольного гладкого конечномерного пространства X, из чебышевости множества всегда следует его ограниченная чебышевость.

3.4. Пример локально чебышевского, но не чебышевского множества

В этом параграфе мы приведем пример связного замкнутого множества в бесконечномерном банаховом пространстве, являющегося локально чебышевским, но не чебышевским. Для этого рассмотрим множество $M = \{f_a(x) = (1+a)e^{-x/a} \ : \ a > 0\}$ в пространстве $C[0,1]$. Покажем, что M является связным, замкнутым, локально чебышевским, но не чебышевским множеством.

Перечислим некоторые свойства функций из множества M, которые понадобятся нам в дальнейшем:

(1) если $a_k > 0$ и $a_k \to a > 0$ при $k \to \infty$, то $\|f_{a_k} - f_a\| \to 0$ при $k \to \infty$;

(2) при $0 < a < b$ имеем $0 < f_a(x) < f_b(x)$ для всякого $x \in [0,1]$;

(3) для всякого $a > 0$ имеем $f_a(0) > 1$;

(4) при $a \to 0+$ имеем $f_a(0) \to 1$ и $f_a(x) \to 0$ при $x \in (0,1]$.

Сперва покажем, что множество M является локальным множеством существования: для всякого элемента $f_\alpha \in M$ найдется такое положительное число ε, что множество $M' = M \cap B(f_\alpha, \varepsilon) = \{f_a(x) = (1+a)e^{-x/a} \ : \ \beta \leqslant a \leqslant \gamma\}$

является множеством существования. Возьмем $\varepsilon < \alpha$ и пусть $f_{a_k} \subset M'$ — минимизирующая последовательность для функции $f \in C[0,1]$, т. е. $\|f - f_{a_k}\| \to \rho(f, M')$, $k \to \infty$.

Можем считать, что последовательность a_k сходится к некоторому $a_0 \in [\beta, \gamma]$ при $k \to \infty$. Тогда по свойству (1) имеем $\|f_{a_k} - f_{a_0}\| \to 0$, откуда $\|f - f_{a_0}\| = \rho(f, M')$ и $f_{a_0} \in P_{M'}(f)$.

Теперь покажем, что множество M является локальным множеством единственности: для всякого элемента $f_\alpha \in M$ для указанного выше $\varepsilon < \alpha$ множество $M' = M \cap B(f_\alpha, \varepsilon) = \{f_a(x) = (1+a)e^{-x/a} \ : \ \beta \leqslant a \leqslant \gamma\}$ является множеством единственности. Предположим, что это не так и для некоторой функции $f \in C[0,1]$ имеем $P_{M'}(f) \ni \{f_a, f_c\}$, где $a, c \in [\beta, \gamma]$ и $a < c$. Тогда для любого $b \in (a, c)$, по свойству (2) имеем

$$f(x) - f_c(x) < f(x) - f_b(x) < f(x) - f_a(x), \quad \forall\, x \in [0,1],$$

откуда

$$\|f - f_b\| < \max\{\|f - f_a\|, \|f - f_c\|\} = \rho(f, M'),$$

что противоречит определению метрической проекции.

Таким образом, множество M локально чебышевское.

В то же время M не является чебышевским множеством, поскольку $P_M(0) = \varnothing$: из равенства $\|f_a\| = f_a(0)$ и свойств (3) и (4) получаем $\rho(0, M) = 1 < \|f_a\|$ для всякого $a > 0$.

Замечание 3.6. Рассматриваемое множество M заимствовано из работы Ч. Данхэма [43], в которой впервые был построен пример несвязного чебышевского множества — именно, множества $M \cup \{0\}$ в $C[0,1]$. Отметим, что в работе Данхэма приведено целое семейство множеств функций в $C[0,1]$, каждое из которых можно также рассматривать как пример локально чебышевского, но не чебышевского множества в $C[0,1]$.

3.5. Пример чебышевского, но не локально чебышевского множества

В этом параграфе мы покажем, что для всякого натурального $n \geqslant 3$ существует n-мерное строго выпуклое пространство X_n, в котором найдется чебышевское множество, не являющееся локально чебышевским. Нам понадобится

Теорема D. *(И. Г. Царьков [25]) Для всякого натурального $n \geqslant 3$ существует n-мерное строго выпуклое пространство X_n, в котором всякое ограниченное чебышевское множество выпукло, в то время как найдется невыпуклое чебышевское множество.*

Воспользуемся теоремой D: для заданного n рассмотрим указанное в ней пространство X_n и содержащееся в этом пространстве невыпуклое чебышевское множество $M = M(n)$. Докажем, что M не является локально чебышевским.

Предположим противное. Тогда по определению локально чебышевского множества для любого элемента $x \in M$ найдется такое $r = r(x) > 0$, что множество $M_x = \overline{U_r(x)} \cap M$ является чебышевским. Согласно теореме D всякое ограниченное чебышевское множество в пространстве X_n является выпуклым, откуда M_x — выпукло. Ввиду произвольности выбора элемента $x \in M$, а также ввиду замкнутости множества M, которая следует из его чебышевости, множество M является локально выпуклым и замкнутым. Хорошо известно, что в конечномерном банаховом пространстве всякое чебышевское множество является связным (см., напр., [3, теорема 4.1] или [20]), откуда M — связно. Тогда по теореме C (см. Введение) множество M — выпукло, что противоречит определению множества M.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать следующий критерий.

Теорема 3.3. *Пусть n-мерное строго выпуклое банахово пространство X_n $(n \geqslant 3)$ таково, что всякое его ограниченное чебышевское подмножество выпукло. Тогда следующие условия на чебышевское множество $M \subset X_n$ эквивалентны:*

а) M невыпуклое;

б) M не локально чебышевское.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) показана выше, докажем импликацию б) $\Rightarrow$ а). Предположим, что множество M является выпуклым. Тогда, очевидно, оно локально выпукло, т. е. для всякого элемента $y \in M$ найдется такое $r = r(y) > 0$, что множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ выпукло. Заметим также, что множество $\overline{U_r(y)} \cap M$ замкнуто в силу замкнутости множества M, следующей из чебышевости. Остается заметить, что в строго выпуклом пространстве всякое замкнутое выпуклое множество является чебышевским, откуда следует локальная чебышевость множества M, противоречащая условию. Полученное противоречие показывает, что множество M не является выпуклым.

Теорема 3.3 доказана.

Заключение

Данная работа затрагивает ряд не изучавшихся ранее вопросов о множествах с конечнозначными метрическими проекциями. Ввиду новизны вопросов, эта тематика богата направлениями для дальнейшего исследования. Отметим самые основные из этих направлений.

Автор полагает, что теорема 2.1 допускает следующее обобщение.

Гипотеза 1. *В трехмерном гладком и строго выпуклом банаховом пространстве X всякое замкнутое множество $M \subset X$ с не более чем двузначной метрической проекцией является 2-выпуклым.*

Заметим, что предложенная формулировка отличается от формулировки теоремы 2.1 снятием дополнительных ограничений на множество M и метрическую проекцию P_M. Более того, автор склонен считать, что условие 3) теоремы 2.1 может быть не только снято, но справедливо всегда для любых множеств с двузначной проекцией в трехмерном евклидовом пространстве. Точнее, возникает

Гипотеза 2. *Пусть непустое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^3$ таково, что $|P_M(x)| \leqslant 2$ для всякого элемента $x \in \mathbb{R}^3$. Тогда для любого элемента $x \in T_2$ найдутся такие $K = K(x) > 0$ и $\delta_0 = \delta_0(x) > 0$, что для всякого $x' \in U_{\delta_0}(x) \cap T_2$ имеем $h(P_M(x), P_M(x')) \leqslant K|x' - x|$.*

Отметим также, что если в формулировке гипотезы 2 заменить $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$, то справедливость соответствующего утверждения также не исследовалась и не установлена.

Дальнейшее исследование геометрических свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией связано с увеличением допускаемого числа ближайших элементов. Предполагается, что справедлива следующая

Гипотеза 3. *В трехмерном гладком и строго выпуклом банаховом пространстве X всякое замкнутое множество $M \subset X$ с не более чем трехзначной метрической проекцией является 3-выпуклым.*

Теорема 3.1 также должна обобщаться на случай пространств размерности большей двух. Автор предполагает справедливость следующей

Гипотеза 4. *В произвольном конечномерном банаховом пространстве X всякое связное замкнутое локально чебышевское множество M является чебышевским.*

Список литературы

[1] *Алимов А. Р.* Всякое ли чебышевское множество выпукло? // Матем. просв., сер. 3, **2**, МЦНМО, М., 1998, 155–172.

[2] *Алимов А. Р.* Выпуклость ограниченных чебышевских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **14**:4(2) (2014), 489–497.

[3] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундамент. и прикл. матем., **19**:4 (2014), 21–91.

[4] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН, **71**:1(427) (2016), 3–84.

[5] *Арутюнов А. В.* Выпуклые свойства преобразования Лежандра // Матем. заметки, **28**:2 (1980), 255–264.

[6] *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // УМН, **51**:6(312) (1996), 125–188.

[7] *Бородин П. А., Пятышев И. А.* Пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией // Матем. заметки, **86**:2 (2009), 170–174.

[8] *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН, **28**:6(174) (1973), 3–66.

[9] *Гаркави А. Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, 75–132.

[10] *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств // Вища школа, Киев, 1980.

[11] Дранишников А. Н. Многозначные абсолютные ретракты и абсолютные экстензоры в размерности 0 и 1 // УМН, **39**:5(239) (1984), 241–242.

[12] Дранишников А. Н. Абсолютные F-значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. матем. журн. **27**:3 (1986), 74–86.

[13] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // ДАН СССР, **118**:1 (1958), 17–19.

[14] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Чебышевские множества в банаховых пространствах // ДАН СССР, **21**:4 (1958), 582–585.

[15] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // ДАН СССР, **127**:2 (1959), 254–257.

[16] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // ДАН СССР, **140**:3 (1961), 522–524.

[17] *Заийчек Л.* Метрическая проекция и метрическая функция в пространствах Банаха // Теория приближения функций. Труды международной конференции по теории приближения функций, Наука, М., 1987, 179–182.

[18] *Карлов М. И., Царьков И. Г.* Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц // Фундамент. и прикл. матем., **3**:4 (1997), 967–978.

[19] *Конягин С. В.* Аппроксимативные свойства произвольных множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // ДАН СССР, **239**:2 (1978), 261–264.

[20] Кощеев В. А. Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки, **17**:2 (1975), 193–204.

[21] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа // Физматлит, М., 2007.

[22] *Стечкин С. Б.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Revue de Math. pures et appl., **8**:1 (1963), 5–18.

[23] *Федорчук В. В.* Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // УМН, **41**:6(252) (1986), 121–159.

[24] *Федорчук В. В.* Многозначные ретракции и характеризации n-мягких отображений // Тр. ММО, **51**, Издательство Московского университета, М., 1988, 169–207.

[25] *Царьков И. Г.* Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки, **36**: 1 (1984), 73–87.

[26] *Царьков И. Г.* Геометрическая теория приближения в работах С. Б. Стечкина // Известия Тульского гос. ун-та, Матем., **11**:1 (2005), 236–260.

[27] *Чебышев П. Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // 1859, в кн.: Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., Т.2, М.-Л., АН СССР, 1947, 151–235.

[28] *Asplund E., Grünbaum B.* On the geometry of Minkowski planes // Enseignement Math., **6** (1960), 299–306.

[29] *Asplund E.* Čebyšev sets in Hilbert Space // Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), 235–240.

[30] *Barany I., Karasev R.* Notes about the Caratheodory Number // Discrete and Computaional Geometry, **48**:3 (2012), 783–792.

[31] *Bartke K., Berens H.* Eine beschreibung der nichteindeutigkeitsmenge für die beste approximation in der Euklidischen ebene // Journal of Approximation Theory, **47**:1 (1986), 54–74.

[32] *De Blasi F.* Some geometric properties of typical compact convex sets in Hilbert spaces // Studia Math., **135**:2 (1999), 143–162.

[33] *De Blasi F., Zamfirescu T.* Cardinality of the metric projection on typical compact sets in Hilbert spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **126**:1 (1999), 37–44.

[34] *De Blasi F., Zhivkov N.* Properties of typical bounded closed convex sets in Hilbert space // Abstr. Appl. Anal., **4** (2005), 423–436.

[35] *Braess D.* Chebyshev Approximation by γ-polynomials, II // Journal of Approximation Theory, **11** (1974), 16–37.

[36] *Braess D.* On Rational L_2-Approximation // Journal of Approximation Theory, **18** (1976), 136–151.

[37] *Brown A.* Chebyshev Sets and Facial Systems of Convex Sets in Finite-Dimensional Spaces // Proc. London Math. Soc. (3), **41**:2 (1980), 297–339.

[38] *Brown A.* Chebyshev sets and the shapes of convex bodies // Methods of Functional Analysis in Approximation Theory, Proc. Int. Conf., Bombay, 1985, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **76**, Birkhaüser, Basel, 1986, 98–121.

[39] *Bunt L.* Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen // Thesis. Univ. Groningen, Amsterdam, 1934.

[40] *Cannarsa P., Peirone R.* Unbounded components of the singular set of the distance function in $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), 4567–4581.

[41] *Diener I.* On Nonuniqueness in Nonlinear L_2-Approximation // Journal of Approximation Theory, **51** (1987), 54–67.

[42] *Deutsch F., Li W., Park S.-H.* Characterizations of continuous and Lipschitz continuous metric selections in normed linear spaces // Journal of Approximation Theory, 58 (1989), 297–314.

[43] *Dunham C.* Chebyshev Sets in C[0,1] which are not suns // Canad. Math. Bull., **18**:1 (1975), 35–37.

[44] *Erdös P.* Some remarks on the measurability of certain sets // Bull. of the Amer. Math. Soc., **51**:10 (1945), 728–731.

[45] *Federer H.* Curvature measure // Trans. Am. Math. Soc., **93** (1959), 418–490.

[46] *Fenchel W.* Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven // Math. Ann., **101** (1929), 238–252.

[47] *Hanner O., Rådström H.* A generalization of a theorem of Fenchel // Proc. Amer. Math. Soc., **2** (1951), 589–593.

[48] *Karlov M. I.* Approximative property of compact C^2-manifolds in Hilbert space // East J. on Appr., **2**:2 (1996), 197–203.

[49] *Klee V.* A characterization of convex sets // Amer. Math. Mon., **56** (1949), 247–249.

[50] *Klee V.* Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953), 10–43.

[51] *Klee V.* Convexity of Chebyshev Sets // Maths. Annalen, **142**:3 (1961), 292–304.

[52] *Martini H., Swanepoel K. J. and Weiss G.* The geometry of Minkowski spaces-a survey Part I // Expositiones Math., **19** (2001), 97–142.

[53] *Motzkin Th.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 562–567.

[54] *Motzkin Th.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 773–779.

[55] Pauc C. Sur la relation entre un point et une de ses projections sur un ensemble // Rev. Sci., **77**:8 (1939), 657–658.

[56] *Verfürth R.* On the number of local best approximations by exponential sums // Journal of Approximation Theory, **34** (1982), 306–323.

[57] Zajiček L. On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces // Comment. Math. Univ. Carolinae, **19**:3 (1978), 513–523.

[58] Zajiček L. Differentiability of the distance function and points of multivaluedness of the metric projection in Banach spaces // Czech. Math. J., **33**:2(108) (1983), 292–307.

[59] *Флеров А. А.* О множествах с не более чем двузначной метрической проекцией на плоскости // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1, Матем. Механ., 2013, №6, 14–19.

[60] *Флеров А. А.* Локально чебышевские множества на плоскости // Матем. заметки, **97**:1 (2015), 142–149.

[61] *Флеров А. А.* О множествах с многозначной метрической проекцией на плоскости // Совр. методы теории функций и смежные проблемы, матер. Международной конф.: Воронежская зимняя матем. школа, ВГУ Воронеж, 2015, 146–147.