

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной работе  
ФГБОУ ВО «Тульский  
государственный университет»

д.т.н., профессор В.Д. Кухарь  
05 2016 г.



### Отзыв ведущей организации

на диссертацию Флерова Александра Алексеевича

«Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена важной и трудной задаче геометрической теории приближений — изучению геометрических свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией в конечномерных пространствах.

Геометрическая теория приближений, посвященная исследованию взаимосвязей между аппроксимативными и геометрическими свойствами множеств в банаховых пространствах при различных условиях на пространства, как отдельное направление в теории приближений сформировалась в работах П.Л. Чебышева, В. Кли, Н.В. Ефимова, С.Б. Стечкина, Э. Асплунда, Х. Беренса, Д. Борвейна, Д. Браесса, А. Брауна, А. Брондстедта, Д. Вулберта, Ч. Данхэма, И. Зингера, Й. Линденштраусса, Р. Фелпса, Э. Чэни, Л.П. Власова, А.Л. Гаркави, Е.В. Ошмана, В.И. Бердышева, В.А. Балаганского, С.В. Княгина, И.Г. Царькова и многих других математиков.

Значительные усилия были направлены на описание чебышевских множеств в банаховых пространствах. Они увенчались полным успехом в конечномерном случае. В работах Л. Бунта, Т. Мотцкина, Н.В. Ефимова, С.Б. Стечкина и В. Кли была получена характеристика чебышевских множеств в гладких, строго выпуклых конечномерных пространствах как замкнутых и выпуклых множеств и характеристика гладких двумерных пространств как пространств, в которых всякое чебышевское множество выпукло. Проблема выпуклости чебышевских множеств в бесконечномерном случае даже для гильбертовых пространств остается открытой.

Множества с многозначной метрической проекцией изучались сравнительно мало. Хотя естественной является задача об аналогах сформулированных утверждений для множеств с конечнозначной метрической проекцией. В диссертации эти задачи исследуются для множеств с не более чем двузначной метрической проекцией.

М.В. Балашовым было предложено интересное понятие локально чебышевского множества. Это понятие возникло под влиянием понятия локально выпуклого множества. А.В. Арутюнов показал, что всякое связное замкнутое локально выпуклое множество в банаховом пространстве является выпуклым. М.В. Балашов поставил задачу: когда локально чебышевское множество в банаховом пространстве является «глобально» чебышевским и наоборот? В диссертации изучается и эта задача. При этом автор вводит полезное понятие ограниченно чебышевского множества по аналогии с ограниченно компактным множеством.

Рассматриваемые в диссертации задачи делают ее несомненно актуальной.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 68 страниц, список литературы содержит 61 наименование.

Остановимся на содержании работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, приведен подробный и качественный обзор основных результатов геометрической теории приближений, близких по духу к рассматриваемым задачам, дано краткое описание содержания диссертации.

В первой главе, содержащей 2 параграфа, рассматриваются нормированные плоскости и множества с не более чем двузначной метрической проекцией.

В первом параграфе излагаются основные обозначения и определения, доказываются три вспомогательные леммы.

Во втором параграфе доказана одна из основных теорем диссертации — критерий гладкости нормированной плоскости: двумерное нормированное пространство является гладким тогда и только тогда, когда всякое его замкнутое подмножество с не более чем двузначной метрической проекцией является 2-выпуклым. Доказательства как этого утверждения, так и вспомогательных утверждений потребовали тонких геометрических рассуждений. Рисунки, сопровождающие доказательства, значительно облегчают их понимание.

Следствием доказанной теоремы является хорошо известное утверждение: двумерное нормированное пространство является гладким тогда и только тогда, когда через любые три неколлинеарные точки можно провести не менее одной сферы.



Во второй главе, также содержащей 2 параграфа, рассматривается случай трехмерного евклидова пространства и множеств с не более чем двузначной метрической проекцией.

В первом параграфе излагаются основные обозначения и определения, доказываются вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе доказана 2-выпуклость замкнутого множества с не более чем двузначной метрической проекцией при двух дополнительных условиях на множество. Доказательство использует теорему Брауэра о неподвижной точке непрерывного отображения выпуклого компакта в себя. Отмечается, что дополнительные условия связаны с особенностями доказательства и показывается, что одно из условий нетривиально и может не выполняться в общем случае, а второе условие, скорее всего, выполняется всегда.

В третьей главе, содержащей 5 параграфов, изучаются понятия локально чебышевского множества и ограничено чебышевского множества.

В первом параграфе излагаются основные обозначения и определения, доказываются вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе в двумерном случае доказывается аналог теоремы А.В. Арутюнова о локально выпуклых множествах для локально чебышевских множеств: в двумерном нормированном пространстве всякое связное замкнутое локально чебышевское множество является чебышевским.

В третьем параграфе определяется понятие ограничено чебышевского множества, ставится задача о характеристизации банаховых пространств, в которых всякое чебышевское множество является ограничено чебышевским, и доказывается, что в двумерном случае такими пространствами являются только строго выпуклые пространства. Это красивый результат. Из этой теоремы выводится, что в двумерном строго выпуклом пространстве понятия чебышевского множества, локально чебышевского множества и ограничено чебышевского множества — эквивалентные. В общем случае это не так. Чебышевское множество может быть не ограничено чебышевским, локально чебышевское множество может быть не чебышевским, чебышевское множество может быть не локально чебышевским. В третьем, четвертом и пятом параграфах приводятся соответствующие примеры.

В заключении диссертант указывает направления дальнейших исследований. Предлагаемые 4 гипотезы будут полезны на этом пути.

Таким образом, несмотря на небольшой объем в диссертации проделана большая и содержательная работа. Все результаты получены диссертантом самостоятельно и являются новыми. Диссертант нашел ряд новых подходов для решения актуальных и трудных задач геометрической теории приближений. Наиболее значимыми результатами являются следующие:

1. Критерий гладкости двумерных нормированных пространств в терминах множеств с не более чем двузначной метрической проекцией и 2-выпуклых

множеств.

2. Критерий строгой выпуклости двумерных нормированных пространств в терминах чебышевских множеств и ограничено чебышевских множеств. Эквивалентность понятий чебышевского множества, локально чебышевского множества и ограничено чебышевского множества в двумерном строго выпуклом пространстве.

3. Аналог теоремы А.В. Арутюнова о локально выпуклых множествах для локально чебышевских множеств в двумерных нормированных пространствах.

4. 2-выпуклость замкнутого множества с не более чем двузначной метрической проекцией в трехмерном евклидовом пространстве при некоторых дополнительных условиях на множество.

Обоснованность и достоверность основных научных положений диссертации подтверждается корректным применением методов геометрической теории приближений, функционального и выпуклого анализа, геометрии банаховых пространств, их полными и строгими доказательствами.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в научно-исследовательской работе и в спецкурсах по современной геометрической теории приближений в Московском, Санкт-Петербургском, Уральском, Новосибирском, Саратовском и Тульском университетах, Российском университете дружбы народов, Московском физико-техническом институте, Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН и его Санкт-Петербургском отделении, Институте математики и механики УрО РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Основные результаты диссертации опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, доложены на профильных конференциях и семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Автореферат имеет и самостоятельную ценность, так как в нем приведены ссылки (43) на основные работы геометрической теории приближений.

Диссертация выполнена на высоком научном уровне. Относительно небольшой объем позволил ее тщательно отредактировать и избежать замечаний. Единственно неудачным является использование модуля как для обозначения мощности множества, так и евклидовой длины вектора.

Диссертация Флерова Александра Алексеевича «Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией» является законченной квалификационной научно-исследовательской работой, в которой решены задачи, вносящие существенный вклад в развитие геометрической теории приближений. Диссертационная работа полностью соответствует требованиям пп. 9 и 10 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым ВАК Минобрнауки РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор, Флеров Александр Алексеевич, заслуживает присвоения ему



ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук ТулГУ, протокол № 10 от 5 мая 2016 г.

Заведующий кафедрой  
прикладной математики и информатики  
Института прикладной математики  
и компьютерных наук ТулГУ,  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 — вещественный,  
комплексный и функциональный анализ,  
профессор

*В.И. Иванов* В.И. Иванов

Адрес: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92,  
ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»,  
Институт прикладной математики и компьютерных наук,  
кафедра прикладной математики и информатики,  
тел. +7(4872)25-46-20, e-mail: ivaleryi@mail.ru

Профессор кафедры  
прикладной математики и информатики  
Института прикладной математики  
и компьютерных наук ТулГУ,  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 — вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

*Д.В. Горбачев* Д.В. Горбачев

Адрес: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92,  
ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»,  
Институт прикладной математики и компьютерных наук,  
кафедра прикладной математики и информатики,  
тел. +7(4872)25-46-20, e-mail: dvgmail@mail.ru

05.05.2016

Подписи В.И. Иванова и Д.В. Горбачева заверяю

Начальник административно-  
кадрового управления ТулГУ

*М.В. Метелищенкова*  
05.05.16г.



М.В. Метелищенкова