ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации А.А. Флерова "Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена двум задачам теории приближений в нормированных пространствах (геометрической теории приближений):

(1) описать конечномерные нормированные пространства, в которых всякое замкнутое множество M с не более чем двузначной метрической проекцией 2-выпукло (то есть всякая точка из выпуклой оболочки M лежит на отрезке с концами в M);

(2) описать банаховы пространства, в которых всякое связное замкнутое локально чебышевское множество является чебышевским, а также пространства, в которых, наоборот, всякое чебышевское множество M является локально чебышевским (то есть для всякой точки из M пересечение некоторой ее замкнутой окрестности с M есть чебышевское множество).

Обе эти задачи являются новыми по своей постановке, но естественными как по объектам исследования, так и по связям с классическими задачами.

Проблема описания банаховых пространств, в которых всякое чебышевское множество (то есть множество с однозначной метрической проекцией) выпукло, является центральной в геометрической теории приближений: начиная с основополагающих работ Бунта, Моцкина, а затем Кли, Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина, этой проблемой занимались такие крупные математики, как В.И. Бердышев, Л.П. Власов, Асплунд, Брондстед, Джонсон, С.В. Конягин, И.Г. Царьков и многие другие. Задача (1) является естественным аналогом этой проблемы для множеств с не более чем двузначной метрической проекцией.

Задача (2), первоначально в менее общей форме высказанная М.В. Балашовым, возникла из известной и решенной задачи о выпуклости локально выпуклых множеств по ассоциации, происходящей из известной связи между чебышевскими и выпуклыми множествами. Вводимое при этом в рассмотрение свойство локальной чебышевости стоит в одном ряду с такими типичными для исследований по геометрической теории приближений свойствами, как локальная компактность (Кли), B-связность (Л.П. Власов), B-солнечность (А.Р. Алимов и И.Г. Царьков) и др.

Обе задачи (1) и (2) укладываются в рамки исследования свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией, имеющего практическое значение в связи с тем, что многие популярные нелинейные аппроксимирующие множества (рациональные функции, экспоненциальные суммы, сплайны и т.п.) часто обладают свойством конечности множества элементов наилучшего приближения.

Во введении приведен обзор результатов, связанных с исследованием свойств множеств с конечнозначной метрической проекцией в банаховых пространствах.

В первой главе работы задача (1) полностью решается для двумерных нормированных пространств. Оказалось, что в двумерном пространстве X_2 всякое замкнутое множество с не более чем двузначной метрической проекцией 2-выпукло тогда и только тогда, когда пространство X_2 гладкое. Этот результат является аналогом известной теоремы Моцкина (в X_2 всякое чебышевское множество выпукло тогда и только тогда, когда X_2 гладкое), однако доказательство основано совсем на других идеях и гораздо более трудоемкое.

Вторая глава также относится к задаче (1). Основной ее результат состоит в доказательстве 2-выпуклости замкнутого множества M с не более чем двузначной метрической проекцией в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ при дополнительных ограничениях (замкнутость множества точек T_2 с двузначной проекцией и локальная липшицевость проекции P_M в точках T_2). Эти ограничения являются вынужденными, обойтись без них диссертанту пока не удается. Дело в том, что разработанная в первой главе двумерная техника в трехмерном пространстве не работает.

В третьей главе задача (2) полностью решается для двумерного случая. Доказывается, что в любом двумерном нормированном пространстве X_2 всякое связное замкнутое локально чебышевское множество является чебышевским, и что обратное верно только в строго выпуклом X_2. Показано, что первое из этих утверждений не распространяется на произвольные банаховы пространства (приводится пример связного замкнутого локально чебышевского, но не чебышевского множества в $C[0,1]$), а второе утверждение не распространяется даже на конечномерные пространства размерности больше 2 (приводится пример чебышевского, но не локально чебышевского множества в специальном пространстве X_n с $n \geqslant 3$, придуманном И.Г. Царьковым).

При доказательстве основных своих теорем А.А. Флерову пришлось преодолеть существенные технические трудности. В то же время идеи этих доказательств естественны и наглядны. Результаты диссертации значительно продвигают решение задач (1) и (2) и побуждают к дальнейшим исследованиям в этих направлениях. Особенно интригующей представляется задача о 2-выпуклости множеств с не более чем двузначной метрической проекцией в конечномерном евклидовом пространстве, а также ее возможные аналоги для множеств с не более чем k-значной метрической проекцией, $k \geqslant 3$.

Тема диссертации актуальна, полученные результаты новы, интересны и могут быть использованы в научных исследованиях, ведущихся в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте математики и механики УРО РАН (Екатеринбург), Московском физико-техническом институте, РУДН, Воронежском и Тульском государственных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации; основные результаты диссертации опубликованы и апробированы на различных семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация "Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией" удовлетворяет требованиям п. 8 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", а ее автор А.А. Флеров заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Бородин Петр Анатольевич,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова

pborodin@inbox.ru
(495)939-36-80

Д.ф.-м.н., проф. П.А. Бородин
01.01.01
08.12.15

Подпись П.А. Бородина заверяю