Отзыв официального оппонента
на диссертацию Флерова Александра Алексеевича
«ИЗБРАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ С КОНЕЧНОЗНАЧНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация А. А. Флерова связана с изучением свойств оператора метрического проектирования: исследуются ситуации, когда указанный оператор имеет не более чем 2 значения. Также рассматриваются локально чебышеские множества и исследуется их связь с чебышевскими множествами. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и содержит 68 страниц текста. Тематика работы находится в сфере интересов специалистов по геометрической теории приближений. Весьма близкие вопросы рассматриваются специалистами по негладкому анализу и экстремальным задачам, например, при исследовании свойств инфимальной конволюции двух функций. Фактически, один из решаемых в работе вопросов можно сформулировать и так: когда инфимум в операции инфимальной конволюции двух функции (а именно, функции расстояния от точки до множества и индикаторной функции множества) реализуется не более чем в двух точках? Поэтому можно с уверенностью говорить об интересе к тематике работы не только специалистов-теоретиков по геометрической теории приближений, но и специалистов по негладкому анализу и экстремальным задачам, а также об определенной ее практической значимости.

Начиная с работы С.Б. Стечкина 1963 года, для замкнутого подмножества из банахова пространства активно исследовались свойства множества точек пространства, для которых метрическая проекция на данное подмножество однозначна. В этом направлении существует большое количество работ: Стечкина, Эделстейна, Экланда, Темама, Конягина и мн. др. В значительно меньшей степени исследовалось множество точек пространства, для которых метрическая проекция на замкнутое множество состоит из n точек при n=2,3…. Фактически, все основные работы в этом направлении перечислены во введении к диссертации, которое написано достаточно полно и обстоятельно.

Первые две главы работы как раз посвящены описанию множеств с не более чем двухзначной метрической проекцией. В первой главе вопрос изучается на плоскости (двумерное банахово пространство), во второй главе – в трехмерном евклидовом пространстве. Остановимся кратко на этих результатах.

Первая часть главы 1 посвящена доказательству вспомогательных утверждений о свойствах метрической проекции с двумя значениями. Особенно хочется выделить лемму 1.2, где доказано, что для всякой окрестности произвольной точки с двузначной метрической проекции можно выбрать (другую) точку в этой окрестности, для которой метрическая проекция также двузначна. Этот выбор осуществляется специальным образом, что важно для дальнейшего.

Вся вторая часть главы 1 практически полностью посвящена доказательству теоремы 1.1 о характеризации гладкого двумерного банахова пространства через свойства замкнутых множеств с не более чем двухзначной проекцией (последнее множество должно быть 2-выпуклым). Основную трудность в доказательстве составляет достаточность, само доказательство состоит из рассмотрения большого числа разных случаев и тонких рассуждений. При этом существенны конструкции $E(x_0)$ и $R(x_0)$ на стр. 28.

Во второй главе центральной является теорема 2.1 о геометрическом описании множеств с не более чем двузначной проекцией в трехмерном евклидовом пространстве. Доказано, что замкнутое множество с не более чем двузначной метрической проекцией при определенных условиях является 2-выпуклым.

Третья глава работы посвящена локально чебышевским и ограниченно чебышевским множествам. Хорошо известен достаточно общий факт: если замкнутое связное множество в банаховом пространстве локально выпукло (т.е. каждая точка множества имеет окрестность такую, что ее пересечение со множеством выпукло), то само множество также выпукло. Это свойство имеет большое значение и многочисленно применяется в выпуклом анализе и его приложениях, когда выпуклость (множества или функции) часто бывает удобнее доказать в локальных терминах.

В работе по аналогии рассматривается локально чебышевское множество, когда каждая точка множества обладает такой окрестностью, что пересечение этой окрестности со множеством является чебышевским множеством. Рассматриваются вопросы о связи чебышевости множества и его локальной чебышевости, ограниченной чебышевости (когда пересечение множества с любым шаром – чебышевское множество) и т.д. В отличии от понятия локальной выпуклости, которое для замкнутого связного множества эквивалентно выпуклости, с локально чебышевскими множествами ситуация обстоит гораздо сложнее. Здесь автору удалось получить большое количество интересных результатов. Теоремы 3.1, 3.2 и следствие 3.1 устанавливают связь между чебышевскими и локально чебышевскими множествами на плоскости. Как показывают замечательные примеры 3.4 и 3.5, в размерности более 2 ситуация со связью понятий чебышевости и локальной чебышевости гораздо сложнее. Частично ситуацию в конечномерном банаховом пространстве проясняют замечание 3.5 и теорема 3.3. Хочется отметить, что результаты из 1 и 2 глав работы применяются для доказательства результатов о локально чебышевских множествах. Таким образом, все главы работы оказываются пронизанными единым идейным содержанием.

Завершает работу заключение, где, в частности, сформулирован ряд гипотез. Особенно важна (в свете теоремы 2.1) гипотеза 2, а также гипотеза 4.

В целом рецензируемая диссертация – интересная работа, которую приятно читать. Научная новизна работы несомненна. В работе удачно сочетаются как новые конструкции, так и интересные для специалистов технические идеи. По мнению рецензента, результаты диссертации являются значимыми для геометрической теории приближений, выпуклого и негладкого анализа.

Сделаем несколько замечаний по работе.

1) Автор дважды напоминает определение расстояния между множествами по Хаусдорфу (стр. 10 и 39 работы), при этом в определении оба раза опечатка: вместо max должно стоять inf. В то же время автор почему-то не напоминает определение полунепрерывности сверху для многозначного отображения, которое активно используется (впервые возникает в лемме В стр. 15).
2) В теоремах 1.1 и 2.1 2-выпуклость множества является следствием не более чем двузначности метрической проекции множества. Однако обратный вопрос: при каких дополнительных условиях из 2-выпуклости множества следует, что метрическая проекция не более чем двузначна, не рассматривается. Особенно этот вопрос актуален в связи с теоремой 2.1. В ней условие 2-выпуклости необходимо для не более чем двузначности оператора метрического проектирования на множество. Но остается не ясным,

насколько оно существенно для характеризации множества с не более чем двузначной метрической проекцией в ситуации теоремы 2.1.

3) В целом, работа хорошо иллюстрирована, что значительно облегчает ее чтение. Однако на странице 43 в абзаце перед п. II не хватает рисунка, с которым объяснение было бы гораздо более наглядным.
4) Было бы желательно привести несколько примеров, подтверждающих гипотезу 2.

Указанные замечания имеют редакционный характер и не снижают ценности результатов, полученных в диссертации.

Результаты, полученные в диссертации, достаточно полно опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, доложены и обсуждены на научных семинарах и конференциях. Результаты могут найти применение при проведении новых научных исследований в теории приближений, выпуклом, негладком и многозначном анализе, теории экстремальных задач. Полученные результаты могут быть использованы специалистами в названных областях из МГУ, СПб ГУ, МФТИ, МИ РАН, ИММ УрО РАН, РУДН и др., а также могут быть включены в лекционные курсы по указанным выше разделам математики для студентов и аспирантов.

Автореферат диссертации адекватно отражает ее содержание.

Представленная диссертация является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение актуальных задач, имеющих существенное значение для теории функций и функционального анализа (геометрическая теория приближений). Диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям (в частности, п. 7 «Положения о порядке присуждения ученых степеней»). Автор работы, А. А. Флеров, заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

10 мая 2016 г.

Д.ф.-м.н. М. В. Балашов

Почтовый адрес: 141707, МО, г. Долгопрудный, Институтский пер. 9, МФТИ, кафедра высшей математики

Тел. 8 495 4088172

Адрес электронной почты balashov73@mail.ru

Организация – место работы: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Должность: профессор

Подпись М. В. Балашова и сведения заверяю
Ученый секретарь МФТИ Ю. И. Скалько