

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Авдеев Вадим Александрович

**Исследование вероятностных моделей
рейтинговых систем**

01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
А. М. Зубков

Москва — 2016

Оглавление

Введение	4
Общая характеристика работы	4
Краткое содержание работы	7
1 Исторический обзор	16
1.1 История рейтинговых систем	16
1.2 Модель парных сравнений	26
2 Система Эло	31
2.1 Процесс изменения рейтинга	31
2.2 Итерационная система	34
2.3 Константы Липшица	36
2.4 Случай $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$	40
2.5 Общий случай, вспомогательные леммы	48
2.6 Доказательство теоремы 2.3	56
2.7 Стационарное распределение	65
2.8 Медиана распределения	69
3 Система TrueSkill	71
3.1 Описание модели	71
3.2 Свойства нормального распределения	73
3.3 Усеченное нормальное распределение	75
3.4 Фактор-графы	77
3.5 Случай победы при двух игроках	84
3.6 Случай ничьей при двух игроках	91
3.7 Общий случай	92

3.8	Свойства модели	98
3.9	Оценка аппроксимации для двух игроков	104
3.10	Параметры модели	112
3.11	Улучшения модели	116
3.12	Доказательства лемм	124
	Заключение	134
	Список литературы	136

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Данная диссертация посвящена нескольким вопросам, связанным с рейтинговыми системами в контексте игр. Будем называть далее рейтинговой системой метод оценивания истинной силы игрока на основе результатов сыгранных им партий.

В настоящее время рейтинговые системы широко применяются в самых разнообразных видах спорта. Помимо такого непосредственного использования, как построение таблиц лидеров и отслеживание игроками своего прогресса, значения рейтингов используются, например, для определения общего уровня соревнований и квалификации игроков на турниры. Также при организации турниров по олимпийской системе рейтинги игроков используются для того, чтобы не допустить встреч и выбывания наиболее вероятных кандидатов в победители на ранних этапах турнира.¹ Наконец, важной задачей в многопользовательских онлайн-играх является подбор соперников близкого уровня для соблюдения сбалансированности матча.

Помимо спортивных дисциплин, рейтинговые системы применяются и в других областях. Например, многие поисковые системы для улучшения качества выдачи используют так называемых ассессоров — людей, кото-

¹Например, в теннисе: The 2016 ATP Official Rulebook http://www.atpworldtour.com/~media/files/rulebook/2016/2016-atp-rulebook_8jan16.pdf

рые просматривают веб-страницы и определяют их релевантность поисковым запросам [2]. В таком случае для построения итоговой поисковой выдачи применяются аналогичные модели, в которых оценки каждого из ассессоров соответствуют игре с победившими и проигравшими в ней сайтами. Кроме того, похожие методы применяются поисковыми системами и для прогнозирования частот переходов по ссылкам (CTR) рекламных объявлений [24], показываемых вместе с поисковой выдачей.

Первые попытки создания рейтинговых систем в спорте относятся к 1920-м годам, представляя собой линейные комбинации заработанных командами очков. В 1961 году Шахматная федерация США приняла на вооружение систему Эло [17], ставшую первой статистически обоснованной рейтинговой системой и остающуюся одной из самых популярных систем в настоящее время. Подход модели Эло заключается в изменении рейтинга игрока путем сравнения реального и прогнозируемого результатов его партии с соперником. В 2000-х годах с развитием области онлайн-игр интерес к рейтинговым системам значительно вырос, при этом в силу особенностей многопользовательских игр потребовалось создание более общих рейтинговых систем. В 2006 году в Microsoft Research была разработана байесовская рейтинговая система TrueSkill [30], вычисляющая рейтинги игроков и степени их надежности в общем случае нескольких команд разных размеров. Система TrueSkill и ее вариации остаются наиболее продвинутыми моделями в настоящее время. Более подробный исторический обзор развития области рейтинговых систем приведен в первой главе диссертации.

Цель работы

Цель работы состоит в исследовании рейтинговых систем Эло и TrueSkill; в случае модели Эло анализируется процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Исследован процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником в модели Эло. Доказана локальная сжимаемость возникающей итерационной функциональной системы.
- Доказано, что в модели Эло при любых значениях параметров имеет место сходимое процесса изменения рейтинга игрока к единственному стационарному распределению. В частном случае наличия некоторых ограничений на параметры модели приводится также дополнительное доказательство, подходящее для более широкого класса процессов.
- Найдена медиана стационарного распределения рейтинга игрока в случае одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника в модели Эло.
- Исследованы свойства рейтинговой системы TrueSkill. Найдена точная формула для апостериорного распределения уровня мастерства в случае двух игроков и получены оценки точности ее аппроксимации.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, математического анализа, а также алгоритмы, использующие графические вероятностные модели. Многократно используются различные свойства нормального распределения и связанные с ним оценки.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты второй главы могут быть использованы в теории случайных процессов и теории итерационных функциональных систем. Результаты третьей главы могут быть полезны для построения более точных с предсказательной точки зрения рейтинговых систем.

Апробация результатов

Результаты работы докладывались в 2014 году на семинаре отдела дискретной математики Математического института имени В. А. Стеклова под руководством д.ф.-м.н. А. М. Зубкова, д.ф.-м.н. В. П. Чистякова, д.ф.-м.н. В. А. Ватутина, и в 2013–2015 годах на семинаре «Дискретные задачи теории вероятностей» кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н. А. М. Зубкова.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах [3–5]. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 58 наименований. Объем диссертации составляет 141 страницу.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цели работы и основные результаты.

В **первой главе** приводится исторический обзор исследований по теме работы. В разделе **1.1** описывается развитие рейтинговых систем в области шахмат, использующих онлайн-обучение, то есть комбинирующих всю доступную информацию о прошлых играх в один или несколько параметров. В разделе **1.2** рассматриваются модели для игр с двумя соперниками при условии офлайн-обучения, то есть использующие всю имеющуюся историю о выступлениях игрока при прогнозировании.

Вторая глава посвящена системе Эло. В ней рассматривается вопрос о существовании предельного распределения рейтинга игрока в экстремальном случае наличия только двух игроков.

В разделе 2.1 описывается модель Эло и строится процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником. Предположим, что сила каждого игрока имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(s, \sigma^2)$, где s — уровень его мастерства, а σ — некоторая константа, одинаковая для всех игроков. Пусть игроки A и B в некоторый момент времени имеют рейтинги R_0^A, R_0^B и уровни мастерства s^A, s^B , после чего начинают бесконечную серию игр только друг с другом. Предположим также для простоты, что в играх между ними не бывает ничьих.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sigma}, \quad \beta = -\frac{R_0^A + R_0^B}{\sqrt{2}\sigma}, \quad q = \Phi\left(\frac{s^A - s^B}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения. Рассматривается следующая общая модель изменения рейтинга.

Утверждение 2.1. *Рейтинг игрока A после n -й партии имеет следующий вид:*

$$R_n = R_{n-1} - k\Phi(\alpha R_{n-1} + \beta) + kW_n,$$

где все W_n независимы и одинаково распределены, $W_n \sim \mathcal{B}(1, q)$ и $q, k, \alpha, \beta, R_0 = R_0^A$ — константы, причем $0 < q < 1$ и $k, \alpha > 0$.

В разделе 2.2 вводится итерационная функциональная система \mathcal{R} . Для этого определяются следующие функции от $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x - k\Phi(\alpha x + \beta), \\ f_1(x) &= x - k\Phi(\alpha x + \beta) + k, \end{aligned}$$

после чего вводится случайная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, принимающая значения $\{f_0(x), f_1(x)\}$ с вероятностями $\{1 - q, q\}$ соответственно.

С ее помощью процесс $\{R_n(x)\}$ записывается следующим образом:

$$R_n(x) = f_{W_n}(R_{n-1}(x)) = (f_{W_n} \circ \dots \circ f_{W_1})(x),$$

где все f_{W_n} независимы и распределены как f . Кроме того, определяется следующий вспомогательный процесс итераций аргумента:

$$\tilde{R}_n(x) = (f_{W_1} \circ \dots \circ f_{W_n})(x), \quad \tilde{R}_0(x) = x,$$

который используется для доказательства существования стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$ с помощью теоремы, связывающей распределения процессов с прямым и обратным порядком композиции непрерывных случайных функций [34]. В конце этого раздела устанавливается аналогичное утверждение для рассматриваемого случая.

Теорема 2.1. *Пусть предел $\tilde{R}_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное, конечен и не зависит от x . Тогда распределение случайной величины \tilde{R}_∞ является единственным стационарным распределением процесса $\{R_n(x)\}$.*

В разделе 2.3, в частности, вводятся следующие определения.

Определение 2.1. *Локальной константой Липшица функции h в точке x называется*

$$L_x(h) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|h(y) - h(x)|}{|y - x|}.$$

Определение 2.5. *Итерационная функциональная система \mathcal{R} называется локально сжимающей, если существует такая функция нормировки $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, что*

$$\mathbb{E} \left\{ L_x(\tilde{R}_n) \right\} \leq \psi(x) r^n$$

для некоторого числа $r \in (0, 1)$ и всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Понятие локальной сжимаемости позднее используется для доказательства существования стационарного распределения в общем случае $\alpha, k > 0$ с помощью подходящей функции нормировки.

В разделе 2.4 рассматривается частный случай $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$, при котором доказать существование стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$ можно следующим образом. Как легко проверить, обе функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ в случае $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ строго возрастают, поэтому у них существуют

обратные функции, и можно рассмотреть марковский процесс

$$\tilde{R}_n^{-1}(x) = (f_{W_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{W_1}^{-1})(x).$$

Доказав, что для любого x предел $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ равняется $\pm\infty$ почти наверное, можно показать, что из этого следует выполнение условий теоремы 2.1, откуда и будет следовать существование единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$.

Преимуществом данного доказательства является тот факт, что свойства функции нормального распределения используются только для доказательства условия $0 \leq f'_i(x) < 1$, $i = 0, 1$, а для остальных утверждений важны только непрерывность и строгое возрастание $\Phi(x)$ от 0 до 1.

Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$.*

Начиная со следующего раздела, рассматривается общий случай $\alpha, k > 0$. В разделе 2.5 доказываются вспомогательные леммы, используемые в дальнейших рассуждениях.

Раздел 2.6 посвящен доказательству следующей теоремы, основанному на разбиении всей области значений x на отдельные полуинтервалы и рассмотрении 7 различных случаев.

Теорема 2.3. *Для итерационной системы \mathcal{R} условие*

$$\sup_x \mathbb{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1$$

выполнено с функцией нормировки $\psi(x) = \exp\{c\lambda(x)\}$, где

$$\lambda(x) = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right|, \quad c = \frac{\alpha^2 k}{3 \left(1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right)},$$

и числом

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1 - q) e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\}.$$

В разделе 2.7 приводится простое доказательство утверждения из статьи [51], связывающего выполнение условия из теоремы 2.3 с локальной сжимаемостью итерационной системы.

Теорема 2.4. Если для непрерывной функции $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ выполнено условие

$$\sup_x \mathbb{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1,$$

то итерационная функциональная система \mathcal{R} является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$.

С ее помощью доказывается основная теорема этой главы.

Теорема 2.5. Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha, k > 0$.

Кроме того, из доказательства этой теоремы следует оценка скорости сходимости процесса $\{\tilde{R}_n(x)\}$.

Теорема 2.6. Для процесса $\{\tilde{R}_n(x)\}$ верно следующее неравенство:

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_\infty(y) \right| \right\} \leq r^n \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \frac{1}{3} \alpha^2 k^2 \right\} \times \\ \times \left(\frac{k}{1-r} \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k^2 \right\} + |x - y| \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k |x - y| \right\} \right),$$

где $x, y \in \mathbb{R}$ и

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1-q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\} < 1.$$

Наконец, в разделе 2.8 рассматривается случай одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника, и находится медиана стационарного распределения рейтинга игрока при этом условии.

Теорема 2.7. При $s_A = s_B$ стационарное распределение симметрично и его медиана $m = \frac{R_0^A + R_0^B}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Третья глава посвящена исследованию системы TrueSkill. В разделе 3.1 приводится описание рассматриваемой модели. В разделе 3.2 описаны используемые в дальнейшем свойства нормального распределения.

Раздел 3.3 содержит ряд вспомогательных утверждений об аналитических свойствах усеченного нормального распределения $\mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$, которое используется для приближения некоторых распределений, возникающих в процессе работы алгоритма пересчета рейтингов. В частности,

для записи математического ожидания и дисперсии случайной величины $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$ вводятся следующие функции:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, l, r) &= -\frac{\varphi(r-x) - \varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)}, \\ \tilde{w}(x, l, r) &= (\tilde{v}(x, l, r))^2 + \frac{(r-x)\varphi(r-x) - (l-x)\varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)},\end{aligned}$$

а также их односторонние аналоги:

$$\begin{aligned}v(x, l) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{v}(x, l, r), \\ w(x, l) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{w}(x, l, r),\end{aligned}$$

для которых можно вывести явные формулы.

Лемма 3.10. *При всех $x, l \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}v(x, l) &= \frac{\varphi(x-l)}{\Phi(x-l)}, \\ w(x, l) &= v(x, l)(v(x, l) + (x-l)).\end{aligned}$$

В разделе 3.4 рассказывается о применяемой в системе TrueSkill графической вероятностной модели фактор-графов [32] и алгоритме Expectation Propagation [41], используемом для вычисления маргинальных функций на фактор-графах.

Раздел 3.5 посвящен демонстрации работы алгоритма TrueSkill в случае двух игроков и победы одного из них, в результате чего выводятся следующие формулы для пересчета.

Теорема 3.1. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае победы игрока W их параметры пересчитываются следующим образом:*

$$\begin{aligned}\mu'_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}V, & \mu'_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}V, \\ \sigma'_W &= \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}W}, & \sigma'_L &= \sigma_L \sqrt{1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}W},\end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad V = v\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \quad W = w\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

В разделе 3.6 аналогично рассматривается случай ничьей двух игроков, и выводятся следующие формулы.

Теорема 3.2. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае ничьей их параметры пересчитываются следующим образом:*

$$\begin{aligned}\mu'_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c} \tilde{V}, & \mu'_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c} \tilde{V}, \\ \sigma'_W &= \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2} \tilde{W}}, & \sigma'_L &= \sigma_L \sqrt{1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2} \tilde{W}},\end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad \tilde{V} = \tilde{v}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \quad \tilde{W} = \tilde{w}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

В разделе 3.7 рассматривается пример, позволяющий понять схему работы алгоритма TrueSkill в общем случае: первая команда из одного игрока победила, а вторая команда из двух игроков и третья из одного игрока поделили второе и третье место.

Раздел 3.8 посвящен исследованию некоторых свойств системы TrueSkill, а именно, в нем доказываются следующие утверждения, показывающие, что эта сложная система обладает естественными свойствами.

Теорема 3.3. *В модели TrueSkill для двух игроков в случае победы одного из них рейтинг победителя возрастает, а рейтинг проигравшего убывает, то есть*

$$\tilde{\mu}_W > \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L < \mu_L$$

при победе игрока W над игроком L .

Теорема 3.4. *Пусть до игры рейтинг игрока W был выше, чем рейтинг игрока L , то есть $\mu_W > \mu_L$. Тогда в модели TrueSkill для двух игроков в случае их ничьей рейтинг игрока L возрастает, а рейтинг игрока W убывает, то есть*

$$\tilde{\mu}_W < \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L > \mu_L.$$

Теорема 3.5. *Пусть до игры рейтинги игроков W и L были равны, то есть $\mu_W = \mu_L$. Тогда в модели TrueSkill для двух игроков в случае ничьей*

их рейтинги не изменяются:

$$\tilde{\mu}_W = \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L = \mu_L.$$

Теорема 3.6. В модели TrueSkill рейтинги игроков каждой команды в результате пересчета изменяются в одну и ту же сторону.

Теорема 3.7. В модели TrueSkill дисперсии игроков каждой команды в результате пересчета уменьшаются.

В разделе 3.9 находятся точные апостериорные распределения уровней мастерства игроков при отсутствии аппроксимации, после чего происходит сравнение с приближенными распределениями в модели TrueSkill.

Теорема 3.8. В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае победы игрока W и отсутствия аппроксимации точные апостериорные плотности распределения их уровней мастерства выглядят следующим образом:

$$P(s_W) = \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) \Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right),$$

$$P(s_L) = \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) \Phi\left(\frac{-s_L + \mu_W - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right),$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}.$$

Из работы алгоритма следует, что первые два момента точного и приближенного распределений совпадают, поэтому в качестве простого сравнения находится оценка отношения их третьих моментов, причем для упрощения некоторые параметры принимаются равными нулю. Обозначим через M_3 и \tilde{M}_3 третьи моменты распределений уровня мастерства победителя при отсутствии и наличии аппроксимации соответственно.

Теорема 3.9. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_L = \varepsilon = 0$, $\sigma_W = \sigma$, тогда

$$\frac{\tilde{M}_3}{M_3} = \frac{(3\pi - 4)\sigma^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma^2 + 3\beta^2)},$$

причем

$$1 > \frac{\widetilde{M}_3}{M_3} \geq \frac{3\pi - 4}{2\pi} \approx 0.86.$$

Аналогичная оценка верна и для проигравшего игрока.

Теорема 3.10. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_W = \varepsilon = 0$, $\sigma_L = \sigma_*$, тогда

$$\frac{\widetilde{M}_3^*}{M_3^*} = \frac{(3\pi - 4)\sigma_*^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma_*^2 + 3\beta^2)},$$

причем

$$1 > \frac{\widetilde{M}_3^*}{M_3^*} \geq \frac{3\pi - 4}{2\pi} \approx 0.86,$$

где через M_3^* и \widetilde{M}_3^* обозначены третьи моменты распределений его уровня мастерства при отсутствии и наличии аппроксимации соответственно.

В разделе 3.10 обсуждаются параметры, от которых зависит модель TrueSkill, а также задача правильного подбора оппонентов, главным критерием которого является прогнозируемая вероятность ничьей.

В разделе 3.11 рассматриваются возможные улучшения системы TrueSkill в таких аспектах, как: моделирование ничьих между некоторыми из команд, зависимость силы команды от сил составляющих ее игроков, учет дополнительной информации о заработанных командами очков, и стратегия подбора оппонентов.

Наконец, в разделе 3.12 приводятся доказательства лемм из разделов 3.2 и 3.3.

В заключении к диссертации представлены основные результаты работы и возможные дальнейшие темы исследований.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя — доктора физико-математических наук Андрея Михайловича Зубкова за постановку задач, обсуждение результатов и ценные замечания.

Глава 1

Исторический обзор

1.1. История рейтинговых систем

Хотя стремление сравнивать силу игроков имеет столь же давнюю историю, как и сами игры, долгое время оно ограничивалось результатами личных встреч игроков и их выступлений в турнирах.

Историю современных рейтинговых систем в области шахмат принято отсчитывать с 1933 года, когда впервые организация национального уровня, Американская Лига Шахмат по Переписке, начала использовать простейшую численную рейтинговую систему [27].

В 1948 году была опубликована и вскоре принята на вооружение Шахматной федерацией ФРГ рейтинговая система Инго, названная так ее автором Антоном Хесслингером в честь своего родного города Ингольштадта [21]. Система Инго оказала большое влияние на многие рейтинговые системы по всему миру, а в самой Германии использовалась вплоть до 1992 года.

Не вдаваясь здесь и далее в технические детали (такие, как предварительные рейтинги игроков, ограничения на максимальную разницу рейтингов соперников в различных системах, и другие), основная формула системы Инго для пересчета рейтинга после турнира имеет следующий вид [10]:

$$R_{\text{new}} = \frac{3}{4}(R_{\text{old}} + R_{\text{avg}}) - 25 \left(\frac{W + 1/2}{N + 1} - \frac{1}{2} \right),$$

где R_{old} и R_{new} — соответственно старый и новый рейтинги шахматиста,

R_{avg} — среднее арифметическое всех рейтингов игроков, принимавших участие в данном турнире, N и W — число сыгранных этим шахматистом партий и заработанных им очков соответственно (а именно 0 за поражение, 1 за победу и $1/2$ за ничью в каждой партии). При этом стоит отметить, что в системе Инго, в отличие от остальных, более сильные игроки имеют более низкий рейтинг.

Похожие принципы, а именно число заработанных очков и значения рейтингов соперников, были заложены и в систему Кеннета Харкнесса [27], но в ней направление порядка ранжирования было традиционным, и более сильные игроки имели более высокий рейтинг.

В 1950 году Шахматная федерация США приняла на вооружение систему Харкнесса и использовала ее в течение последующих десяти лет.

Британская шахматная федерация в 1954 году также ввела похожую систему, разработанную Ричардом Кларком, которая вследствие национальных отличий оперировала не турнирами, а отдельными партиями [10]. В ней формула расчета рейтинга имеет вид

$$R'_A = R_A + 100 \left(W - \frac{1}{2} \right) + (R_B - R_A) = R_B + 100 \left(W - \frac{1}{2} \right),$$

где R_A и R'_A — рейтинги шахматиста A до и после пересчета, R_B — рейтинг его соперника, и W — число заработанных игроком A очков в партии.

Хотя в Шахматной федерации СССР долгое время использовалась система квалификации, основанная не на рейтингах, а на нескольких категориях, впервые идея индивидуальных коэффициентов была предложена Сергеем Зефировым еще в 1939 году, а в 1946 году Андрей Хачатуров предложил свою формулу из соображений, что рейтинги шахматистов не должны меняться, если до соревнования они относились как $n : m$, и после $n + m$ партий счет также составил $n : m$ [26]. В общем случае она выглядит следующим образом:

$$R' = \frac{1}{2} \left(R + \frac{W}{\frac{1}{R+R_1} + \dots + \frac{1}{R+R_N}} \right),$$

где R и R' — рейтинги шахматиста до и после пересчета, N и W — число сыгранных им партий и заработанных очков соответственно, и R_1, \dots, R_N

— рейтинги его соперников.

Хотя система Инго и ей подобные были популярны в 1950-х годах, так как получавшиеся с их помощью рейтинги соответствовали субъективным ощущениям сообщества о силе игроков, тем не менее, они имели ряд серьезных недостатков. Например, система Харкнесса оказалась выгодной слабейшим игрокам, которые могли при большой разнице между собственным рейтингом и средним рейтингом турнира проиграть все партии и все равно получить очки [21].

Эта и другие причины привели к тому, что в 1959 году Шахматная федерация США назначила Арпада Эло главой специального внутреннего комитета по исследованию и усовершенствованию рейтинговых систем, и в 1961 году приняла на вооружение разработанную им систему [17]. Предложенные им идеи были уже статистически обоснованными, поэтому в 1970 году Международная шахматная федерация также перешла на систему Эло и продолжает использовать ее в качестве основы и в настоящее время.

В системе Эло рейтинг игрока изменяется путем сравнения реального и прогнозируемого результатов матча. При построении прогноза предполагается, что в каждом матче побеждает более сильный игрок, но сила игрока в разных партиях может меняться под воздействием различных факторов, поэтому ее значения в разных партиях можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, среднее значение которых равняется истинному уровню мастерства игрока. При этом под рейтингом подразумевается некоторая эмпирическая оценка этого уровня мастерства.

При построении своей модели Эло пользовался следующими предположениями: во-первых, сила игрока имеет нормальное распределение, и во-вторых, дисперсия этого распределения у всех игроков совпадает. Обозначая силу игрока через p (от слова «performance») и уровень мастерства через s (от слова «skill»), получаем условие $p \sim \mathcal{N}(s, \beta^2)$, где β — некоторая константа.

Изменение рейтинга за одну партию в его системе описывается фор-

мулой

$$R_{\text{new}} = R_{\text{old}} + k(W - W_E),$$

где R_{old} и R_{new} — старый и новый рейтинги шахматиста, k — константа, определяющая динамику изменения рейтинга, а именно какую часть в него вносит результат последней игры, W — реально набранное игроком число очков в партии, и W_E — ожидаемое число набранных очков, которое равняется оценке вероятности победить соперника и рассчитывается по формуле

$$W_E = \Phi\left(\frac{R_{\text{old}} - R_{\text{adv}}}{\sqrt{2}\beta}\right), \quad (1.1)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения, и R_{adv} — рейтинг соперника до пересчета.

Заметим, что после прибавления любой константы ко всем рейтингам или умножения на любую положительную константу всех рейтингов вместе с дисперсией ожидаемое число набранных очков W_E не изменится, поэтому распределение силы игрока определено с точностью до параметров сдвига-масштаба.² Изначально в системе Эло эти параметры были выбраны для совместимости с использовавшимися в то время рейтингами Харкнесса, в системе которого определялись несколько категорий шахматистов, причем каждая категория распространялась на 200 очков. Соответственно, в системе Эло используется значение $\beta = 200$, причем разница в 200 очков означает, что один из игроков будет выигрывать примерно в трех четвертях партий у другого: а именно, из формулы (1.1) при $R_{\text{old}} - R_{\text{adv}} = \beta$ получаем $W_E = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 76,02\%$.

Помимо нормального, в выражении (1.1) могут использоваться и другие распределения. В настоящее время Шахматная федерация США в основе своих расчетов использует логистическое распределение с параметром масштаба $\frac{400}{\log 10}$, поэтому ожидаемое количество очков принимает вид³

$$\widetilde{W}_E = \frac{1}{1 + 10^{-(R_{\text{old}} - R_{\text{adv}})/400}} = \frac{10^{R_{\text{old}}/400}}{10^{R_{\text{old}}/400} + 10^{R_{\text{adv}}/400}}.$$

²Другими словами, рейтинги измеряются по интервальной шкале.

³The USCF Rating System <http://www.glicko.net/ratings/rating.system.pdf>

Отсюда при разнице в $R_{\text{old}} - R_{\text{adv}} = 200$ очков вероятность победить составляет $\widetilde{W}_E \approx 75,97\%$, то есть за счет более тяжелых хвостов распределения в данной модели заложена более высокая вероятность победы игрока с меньшим рейтингом. При этом Международная шахматная федерация по-прежнему использует табличные значения⁴ с точностью до двух знаков после запятой, основанные на нормальном распределении (см. рисунок 1.1).

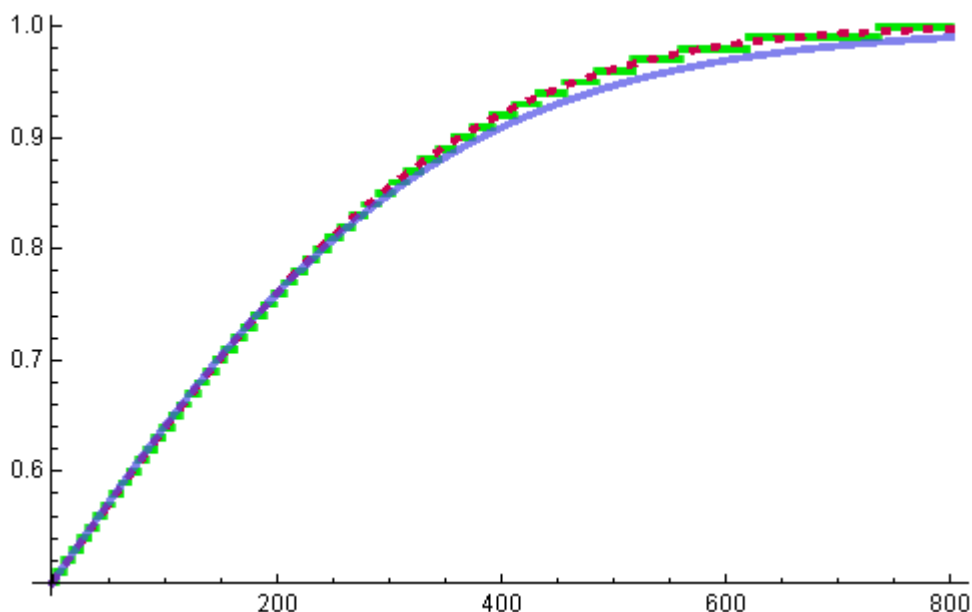


Рис. 1.1. Функции W_E при $\beta = 200$ (пунктиром), \widetilde{W}_E (сплошной линией) и табличные значения, используемые Международной шахматной федерацией (горизонтальные отрезки) в зависимости от разницы $R_{\text{old}} - R_{\text{adv}}$.

В силу своей простоты при достаточной точности результатов система Эло со временем получила широкое распространение и за пределами области шахмат. Например, в настоящее время она лежит в основе рейтинговой системы Европейской федерации го,⁵ а Международная федерация футбола использует ее для построения своего рейтинга женских

⁴FIDE Rating Regulations effective from 1 July 2014 <https://www.fide.com/fide/handbook.html?id=172&view=article>

⁵EGF Official ratings system http://www.europeangodatabase.eu/EGD/EGF_rating_system.php

национальных сборных.⁶

Тем не менее, система Эло имеет ряд своих недостатков. Одним из них является неявное предположение о том, что рейтинги обоих соперников оценивают их уровни мастерства с одинаковой точностью. В действительности это не так, что легко понять на примере пары игроков, один из которых играет постоянно, а второй изредка: тогда после их партии друг против друга разумно считать, что рейтинг первого игрока должен измениться слабее, чем рейтинг второго, так как в оценке уровня мастерства первого из них мы уже были уверены, а в оценке второго нет.

В 1995 году Марк Гликман, председатель комитета по рейтингам Шахматной федерации США, предложил собственную систему Глико,⁷ первую байесовскую рейтинговую систему, в которой для каждого игрока, помимо рейтинга R , хранится также величина σ , соответствующая степени надежности рейтинга и постепенно увеличивающаяся при неактивности игрока. При этом уверенность в рейтинге моделируется при помощи предположения о том, что уровень мастерства игрока имеет нормальное распределение, то есть $s \sim \mathcal{N}(R, \sigma^2)$.

Результат партии в системе Глико для совместимости с официальными рейтингами Шахматной федерации США прогнозируется с помощью логистического распределения с параметром масштаба, равным $\frac{400}{\log 10}$, и имеет вид

$$\mathbb{P}\{W = w\} = \frac{(10^{-(s_1-s_2)/400})^w}{1 + 10^{(s_1-s_2)/400}},$$

где s_1, s_2 — неизвестные уровни мастерства соперников, и w — число заработанных первым игроком очков. Как следствие, функция правдоподобия в этой модели имеет вид

$$\mathcal{L}(s | \mathbf{w}) = \prod_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{N_i} \frac{(10^{-(s-s_i)/400})^{w_{i,j}}}{1 + 10^{(s-s_i)/400}} \varphi(s_i | R_i, \sigma_i^2) ds_i,$$

⁶FIFA/Coca-Cola Women's World Ranking http://resources.fifa.com/mm/document/fifafacts/r%26a-wwr/52/00/99/fs-590_06e_wwr-new.pdf; при этом для построения рейтинга мужских национальных сборных используется более простой подход, основанный на подсчете числа очков за каждый сыгранный матч: How are points calculated in the FIFA/Coca-Cola World Ranking? http://resources.fifa.com/mm/document/fifafacts/r%26a-wr/52/00/97/fs-590_10e_wrpoints_english.pdf

⁷The Glicko system <http://www.glicko.net/glicko/glicko.pdf>

где m — количество соперников игрока в течение рейтингового периода, N_i — число сыгранных партий с i -м из них, $w_{i,j}$ — количество заработанных очков в j -й из этих партий, $\mathbf{w} = \{w_{i,j} | i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N_i\}$ — множество всех результатов партий, и $\varphi(\cdot)$ — плотность стандартного нормального распределения.

В силу сложности функции правдоподобия, для нее последовательно строят несколько приближений логистическим и нормальным распределением [22], получая следующие итоговые формулы для пересчета:

$$R' = R + \frac{q}{\sigma^{-2} + \delta^{-2}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N_i} g(\sigma_i) (w_{i,j} - \widehat{W}_E^i),$$

$$\sigma' = (\sigma^{-2} + \delta^{-2})^{-1/2},$$

где

$$q = \frac{\log 10}{400}, \quad g(\sigma_i) = \left(1 + \frac{3q^2}{\pi^2} \sigma_i^2\right)^{-1/2}$$

$$\widehat{W}_E^i = \frac{1}{1 + 10^{-g(\sigma_i)(R-R_i)/400}}, \quad \delta = \left(q^2 \sum_{i=1}^m N_i (g(\sigma_i))^2 \widehat{W}_E^i (1 - \widehat{W}_E^i)\right)^{-1/2}.$$

В настоящее время система Глико используется на таких шахматных интернет-серверах, как Chess.com⁸ и Free Internet Chess Server.⁹

В 2000 году Марк Гликман предложил усовершенствованную версию своей рейтинговой системы, в которой для каждого игрока дополнительно вводится параметр изменчивости, соответствующий ожидаемым колебаниям его рейтинга и способный отразить быстрое изменение его уровня мастерства [23]. Пересчет этого параметра происходит итеративным методом.¹⁰ Система Глико-2 лежит, в частности, в основе рейтингов Австралийской шахматной федерации¹¹ и интернет-сервера Lichess.¹²

⁸Chess Ratings — How They Work <http://www.chess.com/article/view/chess-ratings---how-they-work>

⁹How does FICS estimate a player's rating? <http://www.freechess.org/Help/ficsfaq.html#Q005.001>

¹⁰The Glicko-2 System for Rating Players in Head-to-Head Competition <http://www.glicko.net/ratings/glicko2desc.pdf>; Example of the Glicko-2 system <http://www.glicko.net/glicko/glicko2.pdf>

¹¹Ratings By Law http://www.auschess.org.au/constitution/Ratings_By-Law.txt

¹²How does the rating system work on here? <http://lichess.org/qa/6/how-does-the-rating-system-work-on-here>

В 2000-х годах с развитием области онлайн-игр интерес к рейтинговым системам значительно вырос, при этом в силу особенностей многопользовательских игр потребовалось создание более общих рейтинговых систем. В 2006 году Ральф Хербрих с соавторами разработали в Microsoft Research байесовскую рейтинговую систему TrueSkill, формулирующуюся с помощью графической вероятностной модели, и использовали ее в онлайн-сервисе для многопользовательских игр Xbox Live [30].

Аналогично системе Глико, в TrueSkill для каждого игрока хранятся две величины: сам рейтинг и степень его надежности. Тем не менее, между ними существует много различий. Во-первых, в системе TrueSkill явно заложена возможность ничьей между соперниками: если в моделях Эло и Глико считается, что один игрок побеждает другого при $p_1 - p_2 > 0$, где p_1 и p_2 — силы соперников, то в модели TrueSkill это условие принимает вид $p_1 - p_2 > \varepsilon$, где ε — заданная константа; соответственно, условие ничьей записывается как $|p_1 - p_2| \leq \varepsilon$. Во-вторых, все предыдущие рассмотренные здесь системы создавались для шахмат, поэтому предполагалось, что в каждом матче встречаются только два игрока; в то время как система TrueSkill позволяет рассчитывать рейтинги игроков, объединенных сразу в несколько команд разных размеров. В-третьих, в системе Глико для распределения разницы сил игроков используется логистическое распределение, а в системе TrueSkill, как и в Эло, нормальное, в результате чего становятся не нужны лишние аппроксимации между ними. Наконец, в системе Глико степень надежности рейтинга игрока увеличивается в зависимости от количества рейтинговых периодов, в которых он не участвовал, а в системе TrueSkill она увеличивается на некоторое число между любыми двумя последовательными матчами игрока.

В качестве примера рассмотрим случай двух игроков и победы одного из них, тогда формулы для пересчета параметров победителя в системе TrueSkill выглядят следующим образом:

$$R'_W = R_W + \frac{\sigma_W^2 \varphi(\Delta)}{c \Phi(\Delta)},$$

$$\sigma'_W = \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2 \varphi(\Delta)}{c^2 \Phi(\Delta)} \left(\frac{\varphi(\Delta)}{\Phi(\Delta)} + \Delta \right)},$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad \Delta = \frac{R_W - R_L - \varepsilon}{c},$$

R_W , R_L , σ_W , σ_L — рейтинги и их степени надежности для победителя и проигравшего соответственно, и β^2 — одинаковая для всех игроков дисперсия распределения их силы. При этом в общем случае, а именно при участии в игре более двух команд, процедура пересчета параметров игроков происходит итеративным методом.

Не смотря на то, что система TrueSkill защищена патентом,¹³ а ее название является зарегистрированным торговым знаком,¹⁴ заложенные в ней идеи стали стандартом в области рейтинговых систем. С момента ее появления предложены разные способы улучшения алгоритма: например, в работах [44—46] рассматривается более точный подход к ситуациям, когда сразу несколько команд поделили одно и то же место, а в статье [25] обсуждаются способы учета, помимо результатов игры, такой дополнительной информации, как количество заработанных в ней очков.

Возвращаясь к рейтинговым системам для шахмат, в 2010 году на платформе соревнований по анализу данных Kaggle прошел первый конкурс по прогнозированию результатов шахматных партий с целью построения более точной рейтинговой системы.¹⁵ Важным отличием от рассматривавшихся выше систем является количество используемой информации: если при так называемом онлайн-обучении вся доступная информация о прошлых играх комбинируется в один или несколько параметров (таких, как рейтинг и степень его надежности), то при прогнозировании результатов в данном конкурсе можно было опираться на всю имеющуюся историю выступлений игрока, то есть использовать офлайн-обучение. Кроме того, в 2000-х годах Международная шахматная федерация стала собирать более подробную информацию о результатах турниров, поэтому для всех партий в конкурсе была также известна информация о том, кто из соперников играл белыми или черными фигурами. В силу того, что в шахматах первым всегда ходит игрок с белыми, он имеет небольшое пре-

¹³Determining relative skills of players <http://pdfpiw.uspto.gov/.piw?PageNum=0&docid=08538910>

¹⁴TRUESKILL <http://tsdr.uspto.gov/documentviewer?caseId=sn78681063>

¹⁵Chess ratings — Elo versus the Rest of the World <https://www.kaggle.com/c/chess>

имущество над соперником, поэтому данную информацию также можно было использовать при прогнозировании.

В итоге второе место на соревновании занял Джереми Ховард¹⁶ с алгоритмом, основанным на системе TrueSkill Through Time — расширении системы TrueSkill, использующем офлайн-обучение на всей истории партий [11]. Выиграл же соревнование Яннис Сисманис¹⁷ со своей системой Elo++. Будучи довольно простой моделью, она эффективно боролась с переобучением, предполагая, что рейтинги соперников, участвующих в одном и том же турнире, не должны сильно отличаться друг от друга.

В 2011 году на платформе Kaggle прошел второй, более масштабный конкурс по прогнозированию результатов шахматных партий,¹⁸ в котором помимо основного соревнования проводилось также и дополнительное на построение лучшей практической рейтинговой системы, то есть удовлетворяющей, в частности, таким специальным критериям, как использование онлайн-обучения и отсутствие итеративных методов в расчетах.¹⁹

Победителем основного конкурса стал Тим Салиманс,²⁰ в основе решения которого лежала система TrueSkill Through Time с упомянутым выше предположением о связи между рейтингами соперников, участвующих в одном турнире. Дополнительным источником информации для его прогнозов послужила структура проведения шахматных турниров: в большинстве из них используется швейцарская система, в которой на каждом этапе встречаются игроки, до этого набравшие в турнире примерно одинаковое количество очков.

В качестве лучшей практической рейтинговой системы Международная шахматная федерация выбрала систему Алека Стефенсона,²¹ основанную на системе Глико. В отличие от нее, система Стефенсона учи-

¹⁶How I did it: Jeremy Howard on finishing second <http://blog.kaggle.com/2010/11/19/how-i-did-it-jeremy-howard-on-finishing-second/>

¹⁷How I won the “Chess Ratings — Elo vs the Rest of the World” Competition <http://arxiv.org/abs/1012.4571>

¹⁸Deloitte/FIDE Chess Rating Challenge <https://www.kaggle.com/c/ChessRatings2>

¹⁹FIDE Prize Category <https://www.kaggle.com/c/ChessRatings2/details/Rules>

²⁰Deloitte/FIDE Chess Rating Challenge Details <http://timsalimans.com/how-i-won-the-deloittefide-chess-rating-challenge/>

²¹Comparing Predictive Performance Of Chess Ratings With The PlayerRatings Package <https://github.com/cran/PlayerRatings/raw/master/inst/doc/ChessRatings.pdf>

тывает цвет фигур игрока в партии и средний рейтинг его соперников в течение рейтингового периода, а также добавляет зависимость степени надежности рейтинга от числа сыгранных партий в периоде. Тем не менее, в силу сложности расчетов модели Международная шахматная федерация по-прежнему продолжает использовать систему Эло.

1.2. Модель парных сравнений

Рассмотрим более подробно историю задачи вычисления рейтингов при офлайн-обучении. С математической точки зрения эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Дано множество объектов $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ (игроков) и набор его, возможно совпадающих, линейно упорядоченных подмножеств $X_k \subseteq X$ (результатов игр). Предположим, что для каждого объекта x_i существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\pi_{i,j}$ со средним значением $E\pi_{i,j} = s_i$ (уровень мастерства i -го игрока), причем линейный порядок на множествах X_k порождается значениями соответствующих случайных величин. Требуется найти наилучшие приближения для $\{s_1, \dots, s_m\}$. При этом важный частный случай, когда все множества X_k состоят ровно из двух элементов, называется моделью парных сравнений.

Первым с этой моделью выступил Луис Тёрстоун в 1927 году [53; 54],²² применив ее в области психометрии для формализации сравнительных суждений людей о некоторых объектах. Модель Тёрстоуна выглядит следующим образом.

Предположим, что субъективное качество варианта A описывается случайной величиной с нормальным распределением $A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$, а субъективное качество варианта B соответственно случайной величиной $B \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$. Тогда из двух вариантов A и B выбирается вариант A , если реализация $A - B$ больше нуля. По свойству нормального распреде-

²²См. также [38; 39].

ления

$$A - B \sim \mathcal{N}(\mu_A - \mu_B, \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B) = \mathcal{N}(\mu_{AB}, \sigma_{AB}^2),$$

где ρ_{AB} — корреляция между A и B , откуда

$$\mathbb{P}\{A > B\} = 1 - \mathbb{P}\{A - B \leq 0\} = 1 - \Phi\left(\frac{0 - \mu_{AB}}{\sigma_{AB}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_{AB}}{\sigma_{AB}}\right).$$

Следовательно, $\mu_{AB} = \Phi^{-1}(\mathbb{P}\{A > B\})\sigma_{AB}$.

Обозначая количество раз, когда вариант i оказался предпочтительнее варианта j через $C_{i,j}$, и оценивая вероятность $\mathbb{P}\{A > B\}$ через $C_{A,B}/(C_{A,B} + C_{B,A})$, получаем сформулированный Тёрстоуном закон сравнительных суждений:

$$\mu_A - \mu_B = \Phi^{-1}\left(\frac{C_{A,B}}{C_{A,B} + C_{B,A}}\right)\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}.$$

Помимо общего случая, Тёрстоун также рассмотрел несколько последовательных упрощений, наиболее используемым из которых стал так называемый случай V, налагающий два дополнительных условия — некоррелированность и равенство дисперсий:

$$\rho_{AB} = 0, \quad \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\{A > B\} = \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

то есть получающаяся модель соответствует модели Эло.

В 1928 году вышла работа Эрнста Цермело, посвященная вычислению результатов шахматных турниров. Изначально турниры по шахматам проходили по круговой системе, когда между всеми возможными парами участников проходит одно и то же количество игр, а результаты турнира для каждого из игроков считаются как сумма результатов каждой из партий. Так как количество требуемых игр в этом случае имеет квадратичную зависимость от числа участников, то такие турниры возможны только при небольшом числе игроков. Как следствие, со временем стали популярны швейцарская и другие системы, при которых уже не все

игроки встречаются друг с другом. Цермело предложил метод вычисления их результатов, который в случае применения к круговому турниру дает тот же порядок, что и подсчет суммы очков во всех партиях. Модель Цермело формулируется следующим образом.

Пусть в турнире принимает участие n игроков. Предположим для простоты, что в играх не бывает ничьих, и обозначим через $g_{i,j}$ количество партий, в которых i -й игрок выиграл у j -го. Основная идея метода состоит в предположении, что каждому игроку i соответствует некоторый неотрицательный уровень мастерства u_i , причем вероятность победы i -го игрока над j -м равняется

$$P\{i \text{ победил } j\} = \frac{u_i}{u_i + u_j}. \quad (1.2)$$

Для нахождения неизвестных уровней мастерства к функции, с точностью до константы описывающей вероятность получения данного результата турнира, применяется метод максимального правдоподобия, в результате чего возникает следующая задача оптимизации: при дополнительном условии $\sum u_i \leq 1$ найти

$$\max_{u_1, \dots, u_n} \frac{u_1^{g_1} \dots u_n^{g_n}}{\prod_{\substack{i,j, \\ i \neq j}} (u_i + u_j)^{g_{i,j} + g_{j,i}}},$$

где $g_i = \sum_{j \neq i} g_{i,j}$ — общее количество партий, выигранных i -м игроком.

Исследуя задачу, Цермело определяет так называемые простые подтурниры и рассматривает только турниры, состоящие из их цепочек. Говоря современным языком, в таком турнире для соответствующего ему ориентированного графа должно выполняться условие существования гамильтонова пути в его конденсации.²³ Кроме того, для частного случая простых турниров в работе Цермело также выводится итеративный численный алгоритм решения возникающей задачи оптимизации.

В настоящее время вместо условия (1.2) чаще используется парамет-

²³Напомним, что конденсацией ориентированного графа называется новый граф, получаемый стягиванием каждой сильной компоненты связности этого графа в одну вершину.

ризация вида $u_i = \exp(v_i/z)$, где z – параметр масштаба:

$$P\{i \text{ победил } j\} = \frac{\exp(v_i/z)}{\exp(v_i/z) + \exp(v_j/z)} = \frac{1}{1 + \exp(-(v_i - v_j)/z)}.$$

Отсюда при $z = \frac{400}{\log 10}$ получаем:

$$P\{i \text{ победил } j\} = \frac{1}{1 + 10^{-(v_i - v_j)/400}},$$

то есть данная модель соответствует рассмотренной ранее модели, используемой Шахматной федерацией США.

К сожалению, работа Цермело осталась незамеченной современниками, а данная область исследований почти не развивалась до 1950-х годов [12]. В 1952 году Ральф Брэдли и Милтон Терри заново переоткрыли эту модель и соответствующий численный алгоритм, применив их в области планирования экспериментов, включающих парные сравнения.

В силу сходства моделей Тёрстоуна и Брэдли-Терри, в 1959 году в работе [36] был задан вопрос о том, какое распределение должны иметь случайные величины A и B , чтобы их разность $A - B$ была логистически распределенной.

В 1960 году в работе [7]²⁴ было доказано, что в таком случае случайные величины A и B должны иметь распределение Гумбеля. А именно, если A и B – независимые случайные величины с распределением

$$\begin{aligned} P\{A \leq x\} &= \exp\left(-e^{-(x-\mu_A)/z}\right), \\ P\{B \leq x\} &= \exp\left(-e^{-(x-\mu_B)/z}\right), \end{aligned}$$

то для их разности верно:

$$P\{A - B \leq x\} = \frac{1}{1 + \exp(-(x - (\mu_A - \mu_B))/z)},$$

откуда

$$P\{A > B\} = \frac{1}{1 + \exp(-(\mu_A - \mu_B)/z)}.$$

Стоит отметить, что помимо нормального и логистического, в общем случае могут использоваться и другие симметричные распределения [12].

²⁴Более простые доказательства см. в работах [37; 55].

Наконец, байесовский подход к модели Брэдли-Терри был впервые предложен Роджером Дэвидсоном и Дэниелем Соломоном в 1973 году в работе [13], а также Томом Леонардом в 1977 году в статье [33]. В первой из них для исследования использовалось широкое семейство сопряженных априорных распределений, а во второй для неизвестных величин использовалось предположение об их многомерном нормальном распределении.

Глава 2

Система Эло

2.1. Процесс изменения рейтинга

Многие вопросы, касающиеся модели Эло, не смотря на ее простоту, до сих пор остаются предметом исследований. Один из них заключается в нахождении функции, наиболее адекватно описывающей совокупное распределение рейтингов всех игроков. Так, в работе [20] этот вопрос исследуется путем построения эволюционной стохастической модели и ее непрерывного приближения. В данной главе рассматривается вопрос о предельном распределении рейтинга в другом экстремальном случае, а именно при наличии всего лишь двух игроков. В таком случае модель представляет собой марковский процесс с дискретным временем и непрерывным пространством состояний.

Примеры похожих процессов возникают во многих других задачах, см., например, [50]. Исследование процессов такого рода тесно связано с теорией итерационных функциональных систем. Наиболее полные обзоры этой теории можно найти в работах [16] и [52]. Монотонным процессам посвящена также статья [31].

Напомним основные положения модели Эло, описанные в главе 1. Пусть сила игрока имеет нормальное распределение $p \sim \mathcal{N}(s, \sigma^2)$, где s — уровень его мастерства, а σ — некоторая константа, одинаковая для всех игроков.

Изменение рейтинга за одну партию описывается формулой

$$R_{\text{new}} = R_{\text{old}} + k(W - W_E),$$

где k — константа, определяющая динамику изменения рейтинга, W — реально набранное игроком число очков, и W_E — ожидаемое число набранных очков, которое равняется оценке вероятности победить соперника. При этом далее для простоты мы дополнительно предполагаем, что в играх не бывает ничьих, поэтому W может принимать только значения 0 или 1.

Обозначая игроков буквами A и B , будем добавлять соответствующий верхний индекс к переменным, относящимся к одному из них.

Тогда в каждой партии сила одного игрока p^A имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(s^A, \sigma^2)$, сила другого, соответственно, $p^B \sim \mathcal{N}(s^B, \sigma^2)$, и силы игроков в разных партиях независимы.

Игрок A будет выигрывать в партии, если случайная величина $p^A - p^B > 0$. Так как $p^A - p^B \sim \mathcal{N}(s^A - s^B, 2\sigma^2)$, то доля таких матчей, то есть вероятность его победы, составит

$$\mathbf{P}\{p^A - p^B > 0\} = \Phi\left(\frac{s^A - s^B}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Так как уровни мастерства игроков являются скрытыми переменными и в реальности неизвестны, вместо них в расчетах используются сами рейтинги: по определению, $s = \mathbf{E}p$, а R_{old} является оценкой математического ожидания p по результатам предыдущих игр, поэтому в качестве оценки вероятности победы можно использовать величину

$$W_E^A = \Phi\left(\frac{R_{\text{old}}^A - R_{\text{old}}^B}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Предположим теперь, что игроки A и B в некоторый момент времени имеют рейтинги R_0^A и R_0^B , после чего начинают бесконечную серию игр только друг с другом. В таком случае рейтинг игрока A меняется по следующему закону:

$$R_{\text{new}}^A = R_{\text{old}}^A + k(W^A - W_E^A),$$

где

$$W_E^A = \Phi\left(\frac{R_{\text{old}}^A - R_{\text{old}}^B}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

$$W^A = \mathbf{1}_{p^A > p^B},$$

то есть W^A имеет распределение Бернулли $\mathcal{B}(1, q)$ с вероятностью успеха, равной $q = \Phi\left(\frac{s^A - s^B}{\sqrt{2}\sigma}\right)$.

Заметим, что $W^A + W^B = 1$ и $W_E^A + W_E^B = 1$, откуда

$$R_{\text{new}}^A + R_{\text{new}}^B = R_{\text{old}}^A + R_{\text{old}}^B,$$

то есть сумма рейтингов игроков после каждой партии остается неизменной. Так как в начальный момент сумма рейтингов игроков равнялась $R_0^A + R_0^B$, то в каждый момент времени рейтинг игрока B будет равен

$$R^B = R_0^A + R_0^B - R^A, \quad (2.1)$$

откуда

$$\frac{R_{\text{old}}^A - R_{\text{old}}^B}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{2R_{\text{old}}^A - (R_0^A + R_0^B)}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sigma},$$

$$\beta = -\frac{R_0^A + R_0^B}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Используя их, получаем следующую общую модель изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником:

Утверждение 2.1. *Рейтинг игрока A после n -й партии имеет следующий вид:*

$$R_n = R_{n-1} - k\Phi(\alpha R_{n-1} + \beta) + kW_n,$$

где все W_n независимы и одинаково распределены, $W_n \sim \mathcal{B}(1, q)$ и $q, k, \alpha, \beta, R_0 = R_0^A$ — константы, причем $0 < q < 1$ и $k, \alpha > 0$.

Основной целью данной главы является доказательство того, что процесс изменения рейтинга игрока имеет единственное стационарное распределение.

2.2. Итерационная система

Определим итерационную функциональную систему \mathcal{R} . Для этого введем следующие функции от $x \in \mathbb{R}$, соответствующие различным исходам случайной величины W :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x - k\Phi(\alpha x + \beta), \\ f_1(x) &= x - k\Phi(\alpha x + \beta) + k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем под $f_i(x)$ понимать одну из функций $f_0(x)$ или $f_1(x)$ там, где это не имеет значения.

Пусть теперь $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — случайная функция, принимающая значения $\{f_0(x), f_1(x)\}$ с вероятностями $\{1 - q, q\}$ соответственно.

Учитывая утверждение 2.1 и выражения (2.2), процесс $\{R_n(x)\}$ можно определить следующим образом:

$$R_n(x) = f_{W_n}(R_{n-1}(x)) = (f_{W_n} \circ \dots \circ f_{W_1})(x),$$

где все f_{W_n} независимы и распределены как f .

Рассмотрим теперь вспомогательный процесс итераций аргумента, или, другими словами, процесс с обратным порядком композиции функций:

$$\tilde{R}_n(x) = (f_{W_1} \circ \dots \circ f_{W_n})(x), \tag{2.3}$$

при этом считаем, что $\tilde{R}_0(x) = x$. Хотя для каждого n распределения $R_n(x)$ и $\tilde{R}_n(x)$ совпадают, процесс $\{\tilde{R}_n(x)\}$, в отличие от $\{R_n(x)\}$, не является марковским и ведет себя абсолютно по-другому, что проиллюстрировано на рисунке 2.1. В дальнейшем мы докажем, что процесс $\{\tilde{R}_n(x)\}$ имеет поточечный предел, зависящий от конкретной реализации случайного процесса $\{W_n\}$.

В статье [34] доказывается теорема, связывающая распределения процессов с прямым и обратным порядком композиции непрерывных случайных функций. Установим аналогичное утверждение для нашего случая.

Теорема 2.1. Пусть предел $\tilde{R}_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное, конечен и не зависит от x . Тогда распределение случайной величины \tilde{R}_∞ является единственным стационарным распределением процесса $\{R_n(x)\}$.

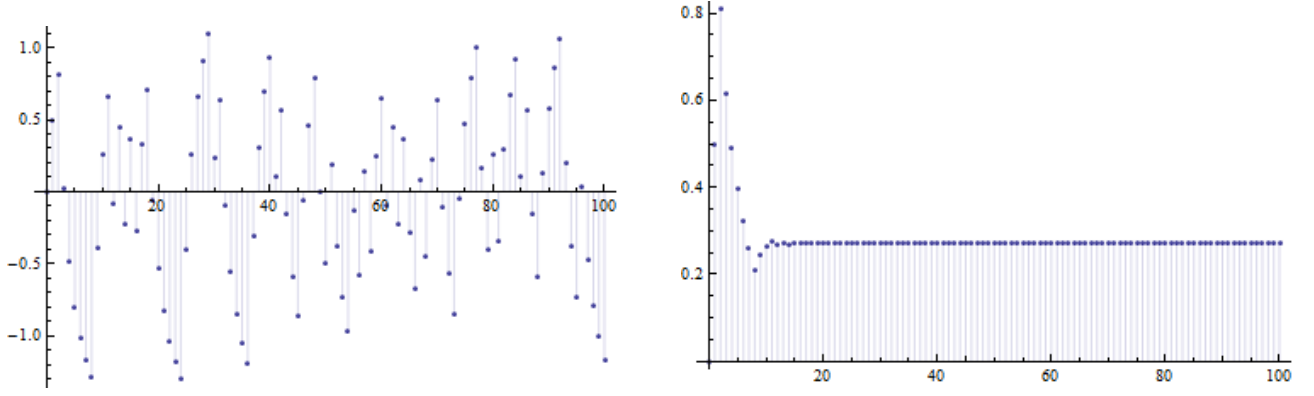


Рис. 2.1. Процессы $\{R_n\}$ и $\{\tilde{R}_n\}$ при $q = \frac{1}{2}$, $k = \alpha = 1$, $R_0 = \beta = 0$, $n \leq 100$.

Доказательство. Обозначим функции распределения случайных величин $R_n(x)$ и $\tilde{R}_n(x)$ через $F_{n,x}(y) = \mathbb{P}\{R_n(x) \leq y\}$ и $\tilde{F}_{n,x}(y) = \mathbb{P}\{\tilde{R}_n(x) \leq y\}$, $y \in \mathbb{R}$.

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x) = \tilde{R}_\infty(x)$ почти наверное, то имеет место сходимость по распределению, то есть для всех непрерывных и ограниченных функций $h(y)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(y) F_{n,x}(dy) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \tilde{F}_\infty(dy).$$

С другой стороны, по определению $R_n(x) = f_{W_n}(R_{n-1}(x))$, то есть с вероятностью $1-q$ это будет $f_0(R_{n-1}(x))$ и с вероятностью q соответственно $f_1(R_{n-1}(x))$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} h(y) F_{n,x}(dy) = \int_{\mathbb{R}} ((1-q)h(f_0(y)) + qh(f_1(y))) F_{n-1,x}(dy).$$

Заметим, что функции $f_i(y)$ непрерывны, а $h(x)$ непрерывна и ограничена, поэтому подынтегральная функция также является непрерывной и ограниченной.

При $n \rightarrow +\infty$ пределы $F_{n,x}(y)$ и $F_{n-1,x}(y)$ равняются $\tilde{F}_\infty(y)$, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} h(y) \tilde{F}_\infty(dy) = \int_{\mathbb{R}} ((1-q)h(f_0(y)) + qh(f_1(y))) \tilde{F}_\infty(dy). \quad (2.4)$$

Выберем теперь произвольное число t и возьмем в качестве $h(y)$ последовательность непрерывных и ограниченных функций, имеющую в качестве предела функцию $\mathbf{1}_{(-\infty, t]}(y)$.

Тогда в пределе в выражении (2.4) слева будет находиться функция распределения $\tilde{F}_\infty(t)$, а справа она же после одного перехода процесса $\{R_n(x)\}$. Следовательно, $\tilde{F}_\infty(y)$ является стационарным распределением процесса $R_n(x)$.

Так как утверждение теоремы верно для любого фиксированного начального состояния x , оно останется верным и в случае, когда начальное состояние — это случайная величина X .

Для доказательства единственности предположим теперь, что X имеет некоторое стационарное распределение. Тогда и $R_n(X)$ будет иметь это стационарное распределение. Устремляя n к бесконечности, получаем, что $\tilde{R}_\infty \stackrel{d}{=} X$.

Заметим также, что из этого следует независимость стационарного распределения $R_n(X)$ от распределения X . ■

2.3. Константы Липшица

Дальнейшая наша цель состоит в доказательстве того, что для итерационной функциональной системы \mathcal{R} выполняются условия теоремы 2.1, из чего и будет следовать существование у процесса $\{R_n(x)\}$ единственного стационарного распределения.

Из формул (2.2) следует, что при больших положительных x функции $f_0(x) \approx x - k$ и $f_1(x) \approx x$, так что при любом q процесс будет смещаться влево по направлению к нулю. В свою очередь для больших по абсолютной величине отрицательных x функции $f_0(x) \approx x$ и $f_1(x) \approx x + k$, так что процесс будет смещаться уже вправо.

Введем следующие понятия:

Определение 2.1. *Локальной константой Липшица функции h в точке x называется*

$$L_x(h) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|h(y) - h(x)|}{|y - x|}.$$

Определение 2.2. Глобальной константой Липшица функции h называется

$$L(h) = \sup_{x \neq y} \frac{|h(y) - h(x)|}{|y - x|}.$$

Утверждение 2.2. Для непрерывно дифференцируемых функций $h(x)$, $h_1(x)$ и $h_2(x)$ верны следующие равенства:

$$L_x(h) = |h'(x)|, \quad L(h) = \sup_x |h'(x)|,$$

$$L_x(h_1 \circ h_2) = L_{h_2(x)}(h_1)L_x(h_2).$$

В частности,

$$L_x(f) = L_x(f_i) = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \right|.$$

Определение 2.3. Итерационная функциональная система \mathcal{R} называется сильно сжимающей, если

$$\mathbf{E}\{\log L(f)\} < 0.$$

Определение 2.4. Итерационная функциональная система \mathcal{R} называется в среднем сжимающей, если существует такое $r > 0$, что

$$\sup_{x \neq y} \mathbf{E}\left\{ \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|^r \right\} < 1.$$

.

Рассмотрим сначала частный случай $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$.

Лемма 2.1. При $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ справедливы неравенства: $0 \leq f'_i(x) < 1$, причем $L(f_i) = 1$, $i = 0, 1$.

Доказательство. Воспользуемся утверждением 2.2, а именно тем, что

$$L_x(f_i) = |f'_i(x)| = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \right|. \quad (2.5)$$

Учитывая, что $\alpha, k > 0$, из условия следует, что $0 < \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} \leq 1$. Так как аргумент экспоненты $-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2$ не больше нуля, то $0 < e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \leq 1$.

Следовательно, $0 \leq f'_i(x) < 1$ и знак абсолютной величины в (2.5) можно убрать.

Наконец, при $x \rightarrow \pm\infty$ значение экспоненты в этой формуле стремится к нулю, поэтому $L(f_i) = \sup_x L_x(f_i) = 1$. ■

Так как глобальные константы Липшица функций f_0 и f_1 в этом случае равны единице, то итерационная функциональная система \mathcal{R} не является сильно сжимающей, и к ней нельзя применить соответствующие стандартные теоремы [16]. Также можно показать, что система \mathcal{R} не является и в среднем сжимающей. Тем не менее, доказать выполнение необходимых условий можно методами статьи [51].

Общая схема доказательства, изложенного в разделе 2.4, состоит в следующем. Как легко проверить, обе функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ в случае $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ строго возрастают, поэтому у них существуют обратные функции, и можно рассмотреть марковский процесс

$$\tilde{R}_n^{-1}(x) = (f_{W_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{W_1}^{-1})(x).$$

Доказав, что для любого x предел $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ равняется $\pm\infty$ почти наверное, можно показать, что из этого следует выполнение условий теоремы 2.1, откуда и будет следовать существование единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$.

Преимуществом данного доказательства является тот факт, что свойства функции нормального распределения используются только в лемме 2.1, а для остальных утверждений важны только непрерывность $\Phi(x)$ и условие $0 < \Phi(x) < 1$.

В общем случае $\alpha, k > 0$, как видно по рисунку 2.2, функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ уже не являются монотонными.

Как можно заметить, функция $L_x(f)$ может принимать сколь угодно большие значения в окрестности точки $-\frac{\beta}{\alpha}$ при достаточно больших значениях произведения αk , поэтому итерационная функциональная система \mathcal{R} снова не является ни сильно, ни в среднем сжимающей, и к ней не применимы соответствующие теоремы.

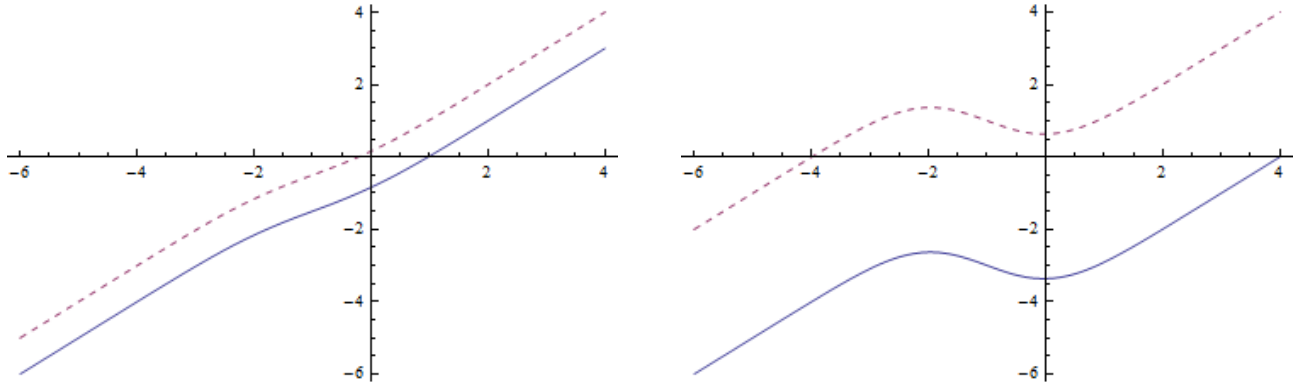


Рис. 2.2. Функции $f_0(x)$ (сплошной линией) и $f_1(x)$ (пунктиром) в двух случаях: при $\alpha = 1, \beta = 1, k = 1$ и при $\alpha = 1, \beta = 1, k = 4$.

Тем не менее, доказать выполнение условий теоремы 2.1 в общем случае все равно возможно, используя понятие локальной сжимаемости, введенное в работе [51], и выбрав подходящую функцию нормировки.

Дадим следующее определение:

Определение 2.5. *Итерационная функциональная система \mathcal{R} называется локально сжимающей, если существует такая функция нормировки $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, что*

$$\mathbb{E} \left\{ L_x \left(\tilde{R}_n \right) \right\} \leq \psi(x) r^n$$

для некоторого числа $r \in (0, 1)$ и всех $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$.

Так как нахождение $L_x \left(\tilde{R}_n \right)$ в явном виде затруднительно, в [51] доказано, что для локальной сжимаемости с непрерывной функцией нормировки $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ достаточно выполнения условия

$$\sup_x \mathbb{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1. \quad (2.6)$$

Доказательство утверждения о достаточности данного условия проведено в разделе 2.7.

Подходящая функция нормировки в нашем случае определена в условии следующей теоремы, справедливость которой установлена в разделе 2.6.

Теорема 2.3. Для итерационной системы \mathcal{R} условие

$$\sup_x \mathbb{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1$$

выполнено с функцией нормировки $\psi(x) = \exp\{c\lambda(x)\}$, где

$$\lambda(x) = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right|, \quad c = \frac{\alpha^2 k}{3 \left(1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right)},$$

и числом

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1 - q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\}.$$

Отметим, что, как утверждается в статье [8], для выбора функции нормировки нет общих методов, более того, в некоторых случаях приходится использовать разные функции нормировки для одних и тех же функций f_0, f_1 при изменении распределения вероятностей $\{1 - q, q\}$.

Следствием сложности выбора функции нормировки является невозможность распространить доказательство условия (2.6) на функцию $f(x)$ более общего вида.

Наконец, сформулируем основную теорему данной главы.

Теорема 2.5. Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha, k > 0$.

2.4. Случай $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$

Как следует из леммы 2.1, в случае $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ выполняется неравенство $f'_i(x) \geq 0$, причем $f'_i(x) = 0$ только при $\alpha k = \sqrt{2\pi}$ и $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, то есть не более, чем в одной точке. Таким образом, функции f_i строго возрастают, и у них существуют обратные функции f_i^{-1} .

Возьмем теперь обратную функцию от определенной в (2.3) случайной функции $\tilde{R}_n(x)$ и рассмотрим соответствующий марковский процесс:

$$\tilde{R}_n^{-1}(x) = (f_{W_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{W_1}^{-1})(x),$$

считая, что $\tilde{R}_0^{-1}(x) = x$. Докажем сначала, что для любого x предел $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ равняется $\pm\infty$ почти наверное, а затем — что из этого факта следует необходимая нам независимость $\tilde{R}_\infty(x)$ от x .

Введем следующее обозначение:

$$g_i(x) = f_i^{-1}(x) - x,$$

где функциям g_0 и g_1 сопоставлены, как и функциям f_0 и f_1 , вероятности $\{1 - q, q\}$. Таким образом, можно определить случайную функцию $g(x)$, принимающую с вероятностью $1 - q$ значение $g_0(x)$ и с вероятностью q значение $g_1(x)$.

Лемма 2.2. *Существует такое $T^* \in (0, +\infty)$, что*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(T^*) &= (1 - q)g_0(T^*) + qg_1(T^*) > 0, \\ \mathbf{E}g(-T^*) &= (1 - q)g_0(-T^*) + qg_1(-T^*) < 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{1 - q, q\}$. Выберем число T_1 так, что $\Phi(\alpha T_1 + \beta) > 1 - \varepsilon$. Тогда $-\Phi(\alpha T_1 + \beta) + 1 < \varepsilon$ и

$$f_1(T_1) = T_1 - k\Phi(\alpha T_1 + \beta) + k < T_1 + k\varepsilon,$$

откуда $T_1 < f_1^{-1}(T_1 + k\varepsilon)$ и $g_1(T_1 + k\varepsilon) = f_1^{-1}(T_1 + k\varepsilon) - (T_1 + k\varepsilon) > -k\varepsilon$. Заметим, что функция $\Phi(x)$ строго возрастающая, поэтому

$$\Phi(\alpha(T_1 + k) + \beta) > \Phi(\alpha T_1 + \beta) > 1 - \varepsilon,$$

а значит, верна аналогичная оценка:

$$f_0(T_1 + k) = T_1 + k - k\Phi(\alpha(T_1 + k) + \beta) < T_1 + k\varepsilon,$$

откуда $T_1 + k < f_0^{-1}(T_1 + k\varepsilon)$ и $g_0(T_1 + k\varepsilon) = f_0^{-1}(T_1 + k\varepsilon) - (T_1 + k\varepsilon) > k - k\varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(T_1 + k\varepsilon) &= (1 - q)g_0(T_1 + k\varepsilon) + qg_1(T_1 + k\varepsilon) > \\ &> (1 - q)(k - k\varepsilon) - qk\varepsilon = k(1 - q - \varepsilon). \end{aligned}$$

Так как ε был выбран таким, что $\varepsilon < 1 - q$, то $\mathbf{E}g(T_1 + k\varepsilon) > 0$.

Аналогично выбирая T_0 так, что $\Phi(\alpha T_0 + \beta) < \varepsilon$, получаем, что

$$f_0(T_0) = T_0 - k\Phi(\alpha T_0 + \beta) > T_0 - k\varepsilon,$$

откуда $T_0 > f_0^{-1}(T_0 - k\varepsilon)$ и $g_0(T_0 - k\varepsilon) = f_0^{-1}(T_0 - k\varepsilon) - (T_0 - k\varepsilon) < k\varepsilon$. Из строгого возрастания функции $\Phi(x)$ следует, что

$$\Phi(\alpha(T_0 - k) + \beta) < \Phi(\alpha T_0 + \beta) < \varepsilon,$$

поэтому

$$f_1(T_0 - k) = T_0 - k - k\Phi(\alpha(T_0 - k) + \beta) + k > T_0 - k\varepsilon,$$

а значит, $T_0 - k > f_1^{-1}(T_0 - k\varepsilon)$ и $g_1(T_0 - k\varepsilon) = f_1^{-1}(T_0 - k\varepsilon) - (T_0 - k\varepsilon) < k\varepsilon - k$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(T_0 - k\varepsilon) &= (1 - q)g_0(T_0 - k\varepsilon) + qg_1(T_0 - k\varepsilon) < \\ &< (1 - q)k\varepsilon + q(k\varepsilon - k) = k(\varepsilon - q). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\varepsilon < q$, получаем, что $\mathbf{E}g(T_0 - k\varepsilon) < 0$.

Полагая $T^* = \max\{|T_0 - k\varepsilon|, |T_1 + k\varepsilon|\}$, получаем окончательно, что $\mathbf{E}g(T^*) > 0$ и $\mathbf{E}g(-T^*) < 0$. ■

Заметим теперь, что по определению

$$g_{W_n}(\tilde{R}_{n-1}^{-1}(x)) = f_{W_n}^{-1}(\tilde{R}_{n-1}^{-1}(x)) - \tilde{R}_{n-1}^{-1}(x) = \tilde{R}_n^{-1}(x) - \tilde{R}_{n-1}^{-1}(x),$$

то есть $g_{W_n}(\tilde{R}_{n-1}^{-1}(x))$ — это смещение процесса $\{\tilde{R}^{-1}(x)\}$ на n -м шаге. Более того, из неравенства

$$f_0(x) = x - k\Phi(\alpha x + \beta) < x$$

следует, что $g_0(x) = f_0^{-1}(x) - x > 0$, и аналогично из неравенства

$$f_1(x) = x + k(1 - \Phi(\alpha x + \beta)) > x$$

следует, что $g_1(x) = f_1^{-1}(x) - x < 0$. Другими словами, смещение процесса $\{\tilde{R}_n^{-1}\}$ из точки x направо равняется $g_0(x)$, а налево — $g_1(x)$.

Кроме того, по лемме 2.1 функции f_i таковы, что $0 \leq f_i'(x) < 1$, откуда

$$(f_i^{-1})'(x) = \frac{1}{f_i'(f_i^{-1}(x))} > 1.$$

Следовательно, $g_i'(x) = (f_i^{-1}(x))' - 1 > 0$, то есть функции g_i возрастают.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2.3. Для любых действительного x и положительного T процесс $\{\tilde{R}_n^{-1}(x)\}$ выходит за пределы отрезка $[-T, T]$ почти наверное.

Доказательство. Положим

$$\varepsilon^+(x) = \sup\{\varepsilon \mid \mathbf{P}\{g(x) \geq \varepsilon\} \geq \varepsilon\}.$$

Таким образом, из любой точки x происходит смещение процесса вправо не менее, чем на $\varepsilon^+(x)$, с вероятностью не менее, чем $\varepsilon^+(x)$. Так как вероятность смещения процесса вправо всегда равняется $1 - q$, то данная величина равняется минимуму из соответствующих расстояния и вероятности: $\varepsilon^+(x) = \min\{g_0(x), 1 - q\}$. Аналогично положим

$$\varepsilon^-(x) = \sup\{\varepsilon \mid \mathbf{P}\{g(x) \leq -\varepsilon\} \geq \varepsilon\},$$

тогда из любой точки x происходит смещение влево не менее, чем на $\varepsilon^-(x)$, с вероятностью не менее, чем $\varepsilon^-(x)$. Так как вероятность смещения процесса влево всегда равняется q , то $\varepsilon^-(x) = \min\{-g_1(x), q\}$.

Так как вероятности $q, 1 - q > 0$ и $g_0(x) > 0, g_1(x) < 0$, то обе функции $\varepsilon^+(x)$ и $\varepsilon^-(x)$ положительны. Поэтому из компактности отрезка $[-T, T]$ и непрерывности функций $\varepsilon^+(x), \varepsilon^-(x)$ следует, что $\varepsilon^+ = \inf_{x \in [-T, T]} \varepsilon^+(x)$ и $\varepsilon^- = \inf_{x \in [-T, T]} \varepsilon^-(x)$ также больше нуля.

Заметим, что по условию достаточно рассмотреть процесс $\{\tilde{R}_n^{-1}(x_0)\}$ при $|x_0| \leq T$. Для того, чтобы прийти из точки x_0 до правого конца отрезка $[-T, T]$, заведомо хватит $N^+ = \lceil \frac{2T}{\varepsilon^+} \rceil + 1$ шагов величины ε^+ вправо. Так как вероятность каждого такого шага не меньше ε^+ , то вероятность, исходя из x_0 , выйти за правую границу отрезка за N^+ шагов не меньше $(\varepsilon^+)^{N^+}$.

Аналогично прийти из точки x_0 до левого конца отрезка $[-T, T]$ можно за $N^- = \lceil \frac{2T}{\varepsilon^-} \rceil + 1$ шагов величины ε^- влево. Вероятность каждого такого шага не меньше ε^- , поэтому вероятность, исходя из x_0 , выйти за левую границу отрезка за N^- шагов не меньше $(\varepsilon^-)^{N^-}$.

Учитывая, что $\varepsilon^+, \varepsilon^- > 0$, получаем, что вероятность $\tau(x_0)$ остаться в пределах отрезка $[-T, T]$ за $N^* = \max\{N^-, N^+\}$ шагов не больше $1 - (\varepsilon^+)^{N^+} - (\varepsilon^-)^{N^-}$. Следовательно,

$$\tau = \sup_{x_0 \in [-T, T]} \tau(x_0) \leq 1 - (\varepsilon^+)^{N^+} - (\varepsilon^-)^{N^-} < 1.$$

Если за N^* шагов марковский процесс $\tilde{R}_n^{-1}(x_0)$ не вышел за пределы отрезка $[-T, T]$, то рассуждения можно повторить с новым значением x_0 , равным $\tilde{R}_{N^*}^{-1}(x_0)$. Поэтому вероятность остаться в пределах отрезка за N таких итераций по N^* шагов не превосходит τ^N и стремится к нулю при $N \rightarrow +\infty$.

Следовательно, для любого x_0 процесс $\tilde{R}_n^{-1}(x_0)$ выходит за пределы отрезка $[-T, T]$ почти наверное. ■

Следующий шаг состоит в доказательстве того, что $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ уходит на бесконечность почти наверное.

Лемма 2.4. *Для любого x предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$ почти наверное.*

Доказательство. Предположим без ограничения общности, что первый выход процесса $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ за пределы отрезка $[-T^*, T^*]$, где T^* — выбранное в лемме 2.2 число, был вправо. Обозначим этот момент через $N_0 = \min\{n \mid \tilde{R}_n^{-1}(x) > T^*\}$ и рассмотрим процесс $\{\tilde{R}^{-1}(x)\}$ в момент $N_0 + n$. Так как $g_{W_n}(\tilde{R}_{n-1}^{-1}(x))$ — это смещение процесса $\{\tilde{R}^{-1}(x)\}$ на n -м шаге, то состояние процесса в момент $N_0 + n$ можно представить следующим образом:

$$\tilde{R}_{N_0+n}^{-1}(x) = \tilde{R}_{N_0}^{-1}(x) + \sum_{i=1}^n g_{W_{N_0+i}}(\tilde{R}_{N_0+i-1}^{-1}(x)).$$

Рассмотрим сумму

$$G_n = \sum_{i=1}^n g_{W_{N_0+i}}(T^*).$$

Как уже было доказано в лемме 2.2, $\mathbf{E}g_{W_{N_0+i}}(T^*) > 0$, причем все функции $g_{W_{N_0+i}}$ независимы и одинаково распределены, поэтому по закону больших чисел предел их суммы $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n$ равен $+\infty$ почти наверное. Как следствие, случайное событие H_+ , состоящее в том, что $G_l = \sum_{i=1}^l g_{W_{N_0+i}}(T^*) > 0$ для любого l , имеет положительную вероятность η_+ , не зависящую от x .

Докажем по индукции, что если выполняется событие H_+ , то $\tilde{R}_{N_0+j}^{-1}(x) > T^*$ для всех $j \geq 0$. База индукции, то есть случай $j = 0$, следует из того,

что за N_0 шагов процесс $\{\tilde{R}^{-1}(x)\}$ вышел за пределы отрезка $[-T^*, T^*]$ вправо. Пусть утверждение выполнено для всех $j \leq J - 1$, докажем его для $j = J$:

$$\tilde{R}_{N_0+J}^{-1}(x) = \tilde{R}_{N_0}^{-1}(x) + \sum_{i=1}^J g_{W_{N_0+i}} \left(\tilde{R}_{N_0+i-1}^{-1}(x) \right) > T^* + \sum_{i=1}^J g_{W_{N_0+i}}(T^*)$$

в силу индуктивного предположения и того, что функции $g_{W_{N_0+i}}$ возрастают. В свою очередь, из условия выполнения события H_+ следует, что $T^* + \sum_{i=1}^J g_{W_{N_0+i}}(T^*) > T^*$, что и требовалось.

Так как $\tilde{R}_{N_0+j}^{-1}(x) > T^*$, то состояние процесса в момент $N_0 + n$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{N_0+n}^{-1}(x) &= \tilde{R}_{N_0}^{-1}(x) + \sum_{i=1}^n g_{W_{N_0+i}} \left(\tilde{R}_{N_0+i-1}^{-1}(x) \right) > \\ &> T^* + \sum_{i=1}^n g_{W_{N_0+i}}(T^*) = T^* + G_n. \end{aligned}$$

Так как $G_n \rightarrow +\infty$ почти наверное, то при выполнении события H_+ процесс $\tilde{R}_{N_0+n}^{-1}(x) \rightarrow +\infty$ почти наверное.

Аналогично рассматривая симметричный случай $\tilde{R}_{N_0}^{-1}(x) < -T^*$ и событие H_- , имеющее вероятность $\eta_- > 0$, получаем, что при выполнении этого события процесс $\tilde{R}_{N_0+n}^{-1}(x) \rightarrow -\infty$ почти наверное.

Таким образом, после того, как процесс $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ вышел за пределы отрезка $[-T^*, T^*]$, он с некоторой положительной вероятностью η больше в него не вернется и уйдет либо в $+\infty$, либо в $-\infty$.

Если после первого выхода за границы отрезка $[-T^*, T^*]$ марковский процесс $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ вернулся в него обратно, то рассуждения можно повторить с новым значением x , взяв за него точку возвращения процесса. Поэтому вероятность вернуться в отрезок в N -й раз не превосходит $(1 - \eta)^N$ и стремится к нулю при $N \rightarrow +\infty$.

Следовательно, для любого x предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(x)$ почти наверное равен $\pm\infty$. ■

На основе леммы 2.4 теперь несложно доказать выполнение одного из

необходимых условий теоремы 2.1, а именно, что предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное и не зависит от x .

Лемма 2.5. *Случайная величина $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное и не зависит от x .*

Доказательство. Так как функции $g_i(x)$ возрастают, то и $f_i^{-1}(x) = g_i(x) + x$ также возрастают, а значит, возрастают и функции $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ как их композиции.

Пусть Y — счетное всюду плотное в \mathbb{R} множество. Тогда, используя лемму 2.4 и не рассматривая множество нулевой меры, можно считать, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(y) = \pm\infty$ для любого $y \in Y$. Заметим, что если этот предел равен $+\infty$, то он равен $+\infty$ и для всех чисел, больших y , в силу возрастания $\tilde{R}_n^{-1}(y)$. Аналогично, если он равен $-\infty$, то такой же предел будет и у всех чисел, меньших y .

Рассмотрим теперь случайную величину

$$y_0 = \inf_{y \in Y} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(y) = +\infty \right\} = \sup_{y \in Y} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(y) = -\infty \right\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие случайные величины y_+, y_- , принимающие значения в Y , что выполняется одно из следующих условий. Если y_0 конечен, то $y_- < y_0 < y_+$, причем $y_+ - y_- < \varepsilon$. Если $y_0 = +\infty$, то $\frac{1}{\varepsilon} < y_- = y_+$. Наконец, если $y_0 = -\infty$, то $y_- = y_+ < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Выберем теперь произвольное число $x \in \mathbb{R}$. Для достаточно большого N , зависящего от x и реализации случайного процесса $\{W_n\}$, будет выполняться одна из следующих возможностей. Если y_0 конечен, то $\tilde{R}_N^{-1}(y_-) < x$ и $\tilde{R}_N^{-1}(y_+) > x$, откуда $y_- < \tilde{R}_N(x) < y_+$, причем $y_+ - y_- < \varepsilon$. Если $y_0 = +\infty$, то $\tilde{R}_N^{-1}(y_-) < x$ и $\frac{1}{\varepsilon} < y_-$, откуда $\tilde{R}_N(x) > y_- > \frac{1}{\varepsilon}$. Наконец, если $y_0 = -\infty$, то $\tilde{R}_N^{-1}(y_+) > x$ и $y_+ < -\frac{1}{\varepsilon}$, откуда $\tilde{R}_N(x) < y_+ < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Так как эти утверждения верны для любого $\varepsilon > 0$, во всех трех случаях получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x) = y_0, \tag{2.7}$$

то есть рассматриваемый предел существует почти наверное и не зависит от x .

■

Таким образом, мы доказали, что предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное и не зависит от x . Для доказательства выполнения условий теоремы 2.1 осталось убедиться, что он к тому же конечен.

Лемма 2.6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ конечен почти наверное.

Доказательство. Пусть $\tilde{G}_n = \sum_{i=1}^n g_{W_i}(T^*)$, при этом $\tilde{G}_0 = 0$. Рассмотрим событие $\left\{ \min_{n \geq 0} \tilde{G}_n > -t \right\}$. Докажем по индукции, что если это событие выполняется, то

$$\tilde{R}_n^{-1}(T^* + t) \geq T^* + t + \tilde{G}_n.$$

База индукции, то есть случай $n = 0$, следует из того, что по определению $\tilde{R}_0^{-1}(T^* + t) = T^* + t$ и $\tilde{G}_0 = 0$. Пусть утверждение выполнено для всех $n \leq N - 1$, докажем его для $n = N$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_N^{-1}(T^* + t) &= \tilde{R}_{N-1}^{-1}(T^* + t) + g_{W_N}(\tilde{R}_{N-1}^{-1}(T^* + t)) \geq \\ &\geq T^* + t + \tilde{G}_{N-1} + g_{W_N}(T^* + t + \tilde{G}_{N-1}) \end{aligned}$$

в силу предположения индукции и того, что функция g_{W_N} возрастает. Снова пользуясь возрастанием этой функции и тем, что $\min_{n \geq 0} \tilde{G}_n > -t$, последнее выражение можно оценить снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} T^* + t + \tilde{G}_{N-1} + g_{W_N}(T^* + t + \tilde{G}_{N-1}) &\geq \\ &\geq T^* + t + \tilde{G}_{N-1} + g_{W_N}(T^* + t - t) = T^* + t + \tilde{G}_N, \end{aligned}$$

что и требовалось. Таким образом, $\tilde{R}_n^{-1}(T^* + t) \geq T^* + t + \tilde{G}_n > T^*$, откуда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(T^* + t) \geq T^*$.

Аналогично пределу G_n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{G}_n = +\infty$ почти наверное, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left\{ \min_{n \geq 0} \tilde{G}_n > -t \right\} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(T^* + t) \geq T^* \right\} = 1,$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n^{-1}(t) = -\infty \right\} = 0.$$

По определению y_0 это означает, что $\mathbb{P}\{y_0 = +\infty\} = 0$. Отсюда и из доказанного в лемме 2.5 соотношения (2.7) следует, что

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x) = +\infty \right\} = 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Аналогично рассматривая симметричный случай и сумму $\sum_{i=1}^n g_{W_i}(-T^*)$, получаем, что $\mathbb{P}\{\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x) = -\infty\} = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, предел $\tilde{R}_n(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ конечен почти наверное. ■

Таким образом, мы окончательно получаем следующую теорему:

Теорема 2.2. *Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$.*

Доказательство. По лемме 2.5 предел $\tilde{R}_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное и не зависит от x , а по лемме 2.6 он к тому же конечен.

Следовательно, по теореме 2.1 распределение \tilde{R}_∞ является единственным стационарным распределением процесса $\{R_n(x)\}$, что и требовалось. ■

2.5. Общий случай,

вспомогательные леммы

Рассмотрим теперь общий случай $\alpha, k > 0$. Как уже было сказано в разделе 2.3, тогда функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ необязательно являются монотонными, поэтому воспользоваться методами раздела 2.4 уже нельзя.

Докажем в этом разделе несколько вспомогательных лемм и утверждений. Для начала напомним некоторые определения из условия теоремы 2.3:

$$\psi(x) = \exp\{c\lambda(x)\},$$

где

$$\lambda(x) = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right|, \quad c = \frac{\alpha^2 k}{3 \left(1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right)}.$$

Введем теперь следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} = \\ &= (1-q) \frac{\psi(f_0(x))}{\psi(x)} L_x(f_0) + q \frac{\psi(f_1(x))}{\psi(x)} L_x(f_1) = \\ &= \frac{L_x(f)}{\psi(x)} ((1-q)\psi(f_0(x)) + q\psi(f_1(x))). \end{aligned}$$

Тогда условие (2.6) принимает вид

$$\sup_x \Psi_q(x) \leq r < 1.$$

Докажем сначала одно из свойств функции $\Psi_q(x)$.

Лемма 2.7. $\Psi_q(x) = \Psi_{1-q}\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right)$.

Доказательство. Функция $\lambda(x)$ симметрична относительно $-\frac{\beta}{\alpha}$:

$$\lambda\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) = \left| \left| -\frac{2\beta}{\alpha} - x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| = \lambda(x),$$

поэтому $\psi\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) = \psi(x)$.

Функция $L_x(f)$ также симметрична относительно этой точки:

$$L_{-\frac{2\beta}{\alpha}-x}(f) = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-2\beta-\alpha x+\beta)^2} \right| = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x+\beta)^2} \right| = L_x(f).$$

Так как $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, то

$$\begin{aligned} \left| f_0\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) + \frac{\beta}{\alpha} \right| &= \left| -\frac{2\beta}{\alpha} - x - k\Phi(-2\beta - \alpha x + \beta) + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \\ &= \left| x + k\Phi(-\alpha x - \beta) + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| x - k\Phi(\alpha x + \beta) + k + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} \right| \end{aligned}$$

и аналогично $\left| f_1\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} \right|$, поэтому при $i = 0, 1$

$$\lambda\left(f_i\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right)\right) = \lambda(f_{1-i}(x))$$

и, следовательно, $\psi\left(f_i\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right)\right) = \psi(f_{1-i}(x))$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\Psi_{1-q}\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) = \frac{L_x(f)}{\psi(x)}(q\psi(f_1(x)) + (1-q)\psi(f_0(x))) = \Psi_q(x),$$

что и требовалось. ■

Из леммы 2.7 следует, что для доказательства оценки (2.6) в нашем случае достаточно рассмотреть только $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, +\infty\right)$.

Лемма 2.8. При всех положительных α и k определим числа x_3 и x_4 как максимальные корни уравнений $f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}$ и $f_0(x_4) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$ соответственно. Тогда

$$-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} < x_3 < -\frac{\beta}{\alpha} + k < x_4 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2},$$

$$f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \quad -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} < f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Кроме того, при $\alpha k > \sqrt{2\pi}$ определим числа x_1 и x_2 как максимальные корни уравнений $f'_0(x_1) = 0$ и $f_0(x_2) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}$ соответственно. Тогда

$$-\frac{\beta}{\alpha} < x_1 < x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2},$$

причем

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}}, \quad f_0(x_1) > -\frac{\beta}{\alpha} - k.$$

Доказательство. Как уже было замечено, функции $f_i(x)$ строго возрастают при $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ и не монотонны при $\alpha k > \sqrt{2\pi}$.

В случае $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ существование единственных x_3, x_4 , определенных в условиях леммы, следует из строгого возрастания $f_0(x)$.

Пусть $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, найдем максимальный корень уравнения $f'_0(x_1) = 0$:

$$1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x_1 + \beta)^2} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}(\alpha x_1 + \beta)^2 = \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}},$$

откуда в силу условия максимальности

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

При этом

$$\begin{aligned} f_0(x_1) &= -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} - k\Phi\left(-\beta + \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} + \beta\right) > \\ &> -\frac{\beta}{\alpha} - k\Phi\left(\sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}}\right) > -\frac{\beta}{\alpha} - k. \end{aligned}$$

Так как в этом случае $f'_i\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} < 0$, то функции $f_i(x)$ строго убывают от точки $-\frac{\beta}{\alpha}$ до точки x_1 , после чего строго и неограниченно возрастают. Следовательно, существуют единственные определенные в условиях леммы $x_2, x_3, x_4 > x_1$, а именно такие, что $f_0(x_2) = f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}$, $f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}$, $f_0(x_4) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$.

Кроме того, так как $f(x) < -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}$ для любого $x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, x_2\right)$, то из неравенства

$$f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} - k\Phi\left(\frac{\alpha k}{2}\right) > -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x_2)$$

следует, что $x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$.

Получим теперь оценки чисел x_3 и x_4 для произвольных $\alpha, k > 0$, пользуясь возрастанием $f_0(x)$ при $x \geq x_3$.

Так как

$$f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} - k\Phi\left(\frac{\alpha k}{2}\right) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

то $f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) < -\frac{\beta}{\alpha} = f_0(x_3)$, поэтому из возрастания $f_0(x)$ при $x \geq x_3$ следует, что $x_3 > -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$, при этом $-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} < f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Аналогично:

$$f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + k\right) = -\frac{\beta}{\alpha} + k - k\Phi(\alpha k) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) = (f_0(x_3), f_0(x_4)),$$

откуда $x_3 < -\frac{\beta}{\alpha} + k < x_4$.

Наконец,

$$f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} - k\Phi\left(\frac{3\alpha k}{2}\right) > -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} - k = f_0(x_4),$$

поэтому $x_4 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}$. ■

Лемма 2.9. Пусть

$$u_t(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2x^2}, \quad \tilde{u}_{3/2}(x) = 1 - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2}.$$

Тогда при $x > 0$ и $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$0 < \frac{1}{2} < u_t(x) < \tilde{u}_{3/2}(x) < 1.$$

Доказательство. Неравенство $\tilde{u}_{3/2}(x) < 1$ следует из условия $x > 0$.

Так как $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$, то $e^{-\frac{1}{8}x^2} \geq e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \geq e^{-\frac{9}{8}x^2}$, откуда

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}x^2} \leq 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \leq 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2} < 1 - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2},$$

поэтому достаточно доказать, что $u_{1/2}(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}x^2} > \frac{1}{2}$.

Легко проверить, что

$$u'_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}x^2}\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)$$

и $u'_{1/2}(2) = 0$. Так как при $0 < x < 2$ выражение в скобках отрицательно, а при $x > 2$ положительно, то минимальное значение $u_{1/2}(x)$ принимает в точке $x = 2$.

Вычислив значение интересующей нас функции в этой точке, имеем: $0.52 > u_{1/2}(2) > 0.51 > \frac{1}{2}$, что и требовалось. ■

Лемма 2.10. При $x > 0$ и $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$u_t(x) \exp\left\{\frac{x^2(1 - \Phi(tx))}{3\tilde{u}_{3/2}(x)}\right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(x).$$

Доказательство. Пользуясь леммой 2.9, разделим обе части доказываемого неравенства на $u_t(x)$, после чего прологарифмируем их.

Затем оценим правую часть снизу с помощью неравенства $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$:

$$\log \frac{\tilde{u}_{3/2}(x)}{u_t(x)} \geq \frac{\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2}}{\tilde{u}_{3/2}(x)}.$$

Снова применяя лемму 2.9 и умножая обе части доказываемого неравенства на $\tilde{u}_{3/2}(x)$, получаем, что достаточно установить следующее неравенство:

$$\frac{x^2}{3}(1 - \Phi(tx)) \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2}.$$

Воспользуемся следующей известной оценкой для хвоста функции нормального распределения (см., например, [18]):

$$1 - \Phi(tx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{tx}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{tx}^{+\infty} \frac{v}{tx} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}tx},$$

так как $v \geq tx > 0$.

Тогда требуемое неравенство примет следующий вид:

$$\frac{x}{3\sqrt{2\pi}t}e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2},$$

что эквивалентно

$$\frac{x}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{8}x^2} \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{3t}\right) e^{-\frac{1}{2}t^2x^2}.$$

При $t \geq \frac{1}{2}$ выражение в скобках не меньше $\frac{1}{3}$, поэтому правая часть неравенства положительна. Пользуясь тем, что $t \leq \frac{3}{2}$, экспоненту в правой части можно оценить как $e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \geq e^{-\frac{9}{8}x^2}$. После умножения обеих частей на $3\sqrt{2\pi}\frac{t}{x}e^{\frac{9}{8}x^2}$ остается доказать неравенство $t \leq 3t - 1$, которое следует из условия $t \geq \frac{1}{2}$. ■

Лемма 2.11. При $x > \sqrt{2\pi}$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - 1\right) \exp\left\{-\frac{x^2}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{2 \ln \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}\right)\right)\right\} < e^{-1/330} < \tilde{u}_{3/2}(x).$$

Доказательство. Найдем производную правой части:

$$\tilde{u}'_{3/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2} \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Так как $x > \sqrt{2\pi} > \frac{2}{3}$, то выражение в скобках положительно, поэтому функция в правой части неравенства возрастает.

Вычислим ее значение в точке $\sqrt{2\pi}$: $0.9997 < \tilde{u}_{3/2}(\sqrt{2\pi}) < 0.9998$. Так как при этом $0.996 < e^{-1/330} < 0.997$, то вторая часть требуемого утверждения выполняется.

Учитывая, что $\tilde{u}_{3/2}(x) < 1$, оценим выражение в левой части следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{x}{\sqrt{2\pi}}} \right) \right) \right\} < \\ < \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{3} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{x}{\sqrt{2\pi}}} \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Произведем при $y > 0$ замену $x = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}y^2}$ и прологарифмируем обе части. В таком случае остается доказать неравенство

$$\frac{y^2}{2} - \frac{2\pi}{3} e^{y^2} (1 - \Phi(y)) < -\frac{1}{330},$$

что эквивалентно

$$v_1(y) = 1 - \Phi(y) - \frac{3y^2}{4\pi} e^{-y^2} - \frac{1}{220\pi} e^{-y^2} > 0.$$

Заметим, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} v_1(y) = 0$, поэтому для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что производная $v_1(y)$ строго отрицательна.

Вычислим эту производную:

$$\begin{aligned} v'_1(y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} \left(e^{\frac{1}{2}y^2} + \frac{3y}{\sqrt{2\pi}} - \frac{3y^3}{\sqrt{2\pi}} - \frac{y}{55\sqrt{2\pi}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} \left(e^{\frac{1}{2}y^2} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} y \left(y - \sqrt{\frac{164}{165}} \right) \left(y + \sqrt{\frac{164}{165}} \right) \right). \end{aligned}$$

При $0 < y \leq \sqrt{\frac{164}{165}}$ выражение в скобках строго положительно, поэтому $v_1'(y) < 0$. Таким образом, остается доказать, что

$$e^{\frac{1}{2}y^2} > \frac{3}{\sqrt{2\pi}} y \left(y - \sqrt{\frac{164}{165}} \right) \left(y + \sqrt{\frac{164}{165}} \right)$$

при $y > \sqrt{\frac{164}{165}}$. Прологарифмируем обе части неравенства и перенесем их в одну сторону, тогда требуемое утверждение примет вид:

$$v_2(y) = \frac{y^2}{2} - \log \frac{3}{\sqrt{2\pi}} - \log y - \log \left(y - \sqrt{\frac{164}{165}} \right) - \log \left(y + \sqrt{\frac{164}{165}} \right) > 0.$$

Снова найдем производную функции в левой части:

$$v_2'(y) = y - \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \sqrt{\frac{164}{165}}} - \frac{1}{y + \sqrt{\frac{164}{165}}} = \frac{165y^4 - 659y^2 + 164}{165y^3 - 164y}.$$

Решая соответствующее биквадратное уравнение, получаем, что при $y > \sqrt{\frac{164}{165}}$ оно имеет только один корень $y = \sqrt{\frac{41}{11}}$.

Так как предел $v_2'(y)$ равен $-\infty$ при $y \rightarrow \sqrt{\frac{164}{165}}^+$ и $+\infty$ при $y \rightarrow +\infty$, то функция $v_2(y)$ строго убывает на интервале $\left(\sqrt{\frac{164}{165}}, \sqrt{\frac{41}{11}} \right)$, после чего строго возрастает.

Вычислив ее значение в точке $\sqrt{\frac{41}{11}}$, найдем ее минимум: $0.03 > v_2\left(\sqrt{\frac{41}{11}}\right) > 0.02 > 0$, что и требовалось. ■

Кроме того, верно следующее утверждение.

Утверждение 2.3. При $x \geq -\frac{\beta}{\alpha}$ функция $f_0'(x)$ строго возрастает.

Доказательство. Действительно,

$$f_0''(x) = \frac{\alpha^2 k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} (\alpha x + \beta) \geq 0 \quad (2.8)$$

при $x \geq -\frac{\beta}{\alpha}$, причем $f_0''(x) = 0$ только в одной точке $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. Следовательно, $f_0'(x)$ строго возрастает, что и требовалось. ■

2.6. Доказательство теоремы 2.3

Докажем теперь условие (2.6), а именно неравенство

$$\sup_x \Psi_q(x) \leq r < 1,$$

разбив всю область значений x на отдельные полуинтервалы в зависимости от знаков выражений под модулями функции $\Psi_q(x)$.

Случай 2.1. $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$, $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)$.

Доказательство. Из условия $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ следует, что $f_0(x)$ строго возрастает, поэтому по лемме 2.8

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq f_0(x) < f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha}\right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k\right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$ и

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= L_x(f) \frac{\exp\left\{c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}} = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2}\right) \exp\left\{c\left(x + f_0(x) + \frac{2\beta}{\alpha}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $f_0(x)$ возрастает по условию, а $f'_0(x)$ по утверждению 2.3, то возрастает также и $\Psi_q(x)$. Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \Psi_q\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) = \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{8}}\right) \exp\left\{ck\left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\right\}.$$

Заметим, что по определению

$$ck = \frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)}. \quad (2.9)$$

Применяя лемму 2.10 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{1}{2}$, получаем, что

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) \exp\left\{\frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} \left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

■

Случай 2.2. $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, x_1\right)$.

Доказательство. Это единственный случай, когда $f_0(x)$ строго убывает.

По лемме 2.8

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq f_0(x) > f_0(x_1) > -\frac{\beta}{\alpha} - k.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - k, -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right] &\implies \lambda(f_0(x)) = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right] &\implies \lambda(f_1(x)) = -f_1(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как функции $f_i(x)$ убывают, то

$$L_x(f) = -f'_i(x) = -1 + \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \leq \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) = L_x(f) \frac{\exp\left\{c\left(-f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}} &\leq \\ &\leq \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1\right) \exp\{c(x - f_0(x) - k)\} = \\ &= \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1\right) \exp\{ck(\Phi(\alpha x + \beta) - 1)\}. \end{aligned}$$

По определению x_1 имеем оценку:

$$\alpha x + \beta < \alpha x_1 + \beta = \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}}.$$

Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \left\{ -ck \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} \right) \right) \right\}.$$

Пользуясь выражением (2.9) и леммой 2.11 при $x = \alpha k$, получаем:

$$\Psi_q(x) < \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} \right) \right) \right\} < \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r. \quad \blacksquare$$

Случай 2.3. $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, $x \in [x_1, x_2)$.

Доказательство. По лемме 2.8

$$-\frac{\beta}{\alpha} - k < f_0(x_1) \leq f_0(x) < f_0(x_2) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - k, -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = -f_1(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $L_x(f) = f'_i(x)$ и $f'_0(x)$ возрастает по утверждению 2.3, то

$$L_x(f) < L_{-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}}(f) = 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{8}} = u_{1/2}(\alpha k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) = L_x(f) \frac{\exp \left\{ c \left(-f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}} &< \\ &< u_{1/2}(\alpha k) \exp \{ c(x - f_0(x) - k) \} = \\ &= u_{1/2}(\alpha k) \exp \{ ck(\Phi(\alpha x + \beta) - 1) \}. \end{aligned}$$

В силу того, что $x < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$, получаем оценку

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) \exp\left\{-ck\left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\right\}.$$

Заметим теперь, что из выражения (2.9) и леммы 2.9 следует, что $ck > 0$, откуда по той же лемме 2.9

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) < \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

■

Случай 2.4. $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, $x \in \left[x_2, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)$.

Доказательство. По лемме 2.8

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x_2) \leq f_0(x) < f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha}\right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k\right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае 2.3, $L_x(f) < u_{1/2}(\alpha k)$, поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= L_x(f) \frac{\exp\left\{c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}} < \\ &< u_{1/2}(\alpha k) \exp\left\{c\left(x + f_0(x) + \frac{2\beta}{\alpha}\right)\right\} = \\ &= u_{1/2}(\alpha k) \exp\left\{c\left(2x - k\Phi(\alpha x + \beta) + \frac{2\beta}{\alpha}\right)\right\}. \end{aligned}$$

В силу того, что $x < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$, имеем оценку

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) \exp\left\{ck\left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\right)\right\},$$

совпадающую с оценкой в случае 2.1. Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

■

Случай 2.5. $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, x_3\right)$.

Доказательство. По лемме 2.8

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} < f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) \leq f_0(x) < f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k\right) &\implies \lambda(x) = x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha}\right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k\right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$ и

$$\Psi_q(x) = L_x(f) \frac{\exp\left\{c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}} = f'_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}.$$

Докажем, что функция $\Psi_q(x)$ возрастает. Производная второго множителя в выражении для $\Psi_q(x)$ равняется

$$c(f'_0(x) - 1) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi'_q(x) &= f''_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\} + \\ &\quad + f'_0(x) c(f'_0(x) - 1) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}. \end{aligned}$$

Заметим, используя выражение (2.8), что верно представление

$$f''_0(x) = -\alpha(f'_0(x) - 1)(\alpha x + \beta), \tag{2.10}$$

откуда

$$\Psi'_q(x) = -(f'_0(x) - 1)(\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x)) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}.$$

В силу оценки $-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \leq x < -\frac{\beta}{\alpha} + k$ и убывания функции $-f'_0(x)$ по утверждению 2.3, имеем следующее неравенство:

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) \geq \frac{\alpha^2 k}{2} - c \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 k^2}\right).$$

Учитывая определение $u_t(x)$, выражение (2.9) и лемму 2.9 при $x = \alpha k$ и $t = 1$, получаем:

$$\frac{\alpha^2 k}{2} - c \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 k^2}\right) = \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} u_1(\alpha k) > \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3} = \frac{\alpha^2 k}{6} > 0.$$

Наконец, так как

$$-(f'_0(x) - 1) = \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} > 0, \quad (2.11)$$

окончательно получаем, что $\Psi'_q(x) > 0$ и функция $\Psi_q(x)$ возрастает, поэтому

$$\Psi_q(x) < \Psi_q\left(-\frac{\beta}{\alpha} + k\right) = \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{2}}\right) \exp\{ck(1 - \Phi(\alpha k))\}.$$

Применяя лемму 2.10 при $x = \alpha k$ и $t = 1$, получаем, что

$$\Psi_q(x) < u_1(\alpha k) \exp\left\{\frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)}(1 - \Phi(\alpha k))\right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

■

Случай 2.6. $x \in [x_3, x_4)$.

Доказательство. По лемме 2.8

$$-\frac{\beta}{\alpha} = f_0(x_3) \leq f_0(x) < f_0(x_4) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}.$$

Таким образом,

$$x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}\right) \implies \lambda(x) = x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2},$$

$$f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) \implies \lambda(f_0(x)) = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2},$$

$$f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + k, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}\right) \implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}.$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$, поэтому

$$\begin{aligned}\Psi_q(x) &= (1-q)f'_0(x) \frac{\exp\left\{c\left(-f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}} + qf'_0(x) \frac{\exp\left\{c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}} = \\ &= (1-q)f'_0(x) \exp\left\{c\left(-x - f_0(x) - \frac{2\beta}{\alpha} + k\right)\right\} + qf'_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}.\end{aligned}$$

Докажем, что вторая экспонента не меньше первой, для этого рассмотрим их отношение:

$$v_3(x) = \exp\left\{2c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}.$$

Производная этого отношения

$$v'_3(x) = 2cf'_0(x) \exp\left\{2c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$$

положительна в силу того, что $c > 0$ и $f'_0(x) > 0$ при $x > x_1$. Кроме того, на левой границе рассматриваемого полуинтервала $f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}$, поэтому $v_3(x_3) = 1$. Значит, первая экспонента не больше второй.

Следовательно,

$$\Psi_q(x) \leq f'_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}.$$

Согласно доказательству случая 2.5, эта функция возрастает при

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) > 0.$$

Учитывая, что $-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} < x < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}$ и $-f'_0(x)$ убывает по утверждению 2.3, имеем следующее неравенство:

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) \geq \frac{\alpha^2 k}{2} - c\left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}\right).$$

Пользуясь выражением (2.9) и леммой 2.9 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{3}{2}$, получаем:

$$\frac{\alpha^2 k}{2} - c\left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}\right) = \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} u_{3/2}(\alpha k) > \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3} = \frac{\alpha^2 k}{6} > 0,$$

что и требовалось. Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}\right) \exp\left\{ck\left(1 - \Phi\left(\frac{3\alpha k}{2}\right)\right)\right\}.$$

Применяя лемму 2.10 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{3}{2}$, получаем, что

$$\Psi_q(x) < u_{3/2}(\alpha k) \exp\left\{\frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)}\left(1 - \Phi\left(\frac{3\alpha k}{2}\right)\right)\right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

■

Случай 2.7. $x \in [x_4, +\infty)$.

Доказательство. По лемме 2.8

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} + k, +\infty\right) &\implies \lambda(x) = x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, +\infty\right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}, +\infty\right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$ и

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= (1-q)f'_0(x) \frac{\exp\left\{c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}} + qf'_0(x) \frac{\exp\left\{c\left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right)\right\}}{\exp\left\{c\left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}\right)\right\}} = \\ &= (1-q)f'_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x))\} + qf'_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}. \end{aligned}$$

Производная $\Psi'_q(x)$ равна

$$\begin{aligned} \Psi'_q(x) &= (1-q)f''_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x))\} + \\ &\quad + (1-q)f'_0(x)c(f'_0(x) - 1) \exp\{c(-x + f_0(x))\} + \\ &\quad + qf''_0(x) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\} + \\ &\quad + qf'_0(x)c(f'_0(x) - 1) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}. \end{aligned}$$

Пользуясь представлением (2.10), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}\Psi'_q(x) = & -(1-q)\alpha(f'_0(x)-1)(\alpha x + \beta) \exp\{c(-x + f_0(x))\} + \\ & + (1-q)f'_0(x)c(f'_0(x)-1) \exp\{c(-x + f_0(x))\} - \\ & - q\alpha(f'_0(x)-1)(\alpha x + \beta) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\} + \\ & + qf'_0(x)c(f'_0(x)-1) \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}.\end{aligned}$$

Группируя общие члены, имеем:

$$\begin{aligned}\Psi'_q(x) = & -(f'_0(x)-1)(\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x)) \times \\ & \times ((1-q) \exp\{c(-x + f_0(x))\} + q \exp\{c(-x + f_0(x) + k)\}).\end{aligned}$$

Заметим, что из выражения (2.9) и леммы 2.9 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{3}{2}$ следует, что $\frac{1}{3}\alpha^2 k < c < \frac{2}{3}\alpha^2 k$.

Так как $x > -\frac{\beta}{\alpha} + k$ и $f'_0(x) < 1$, то

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) > \alpha^2 k - c > \frac{\alpha^2 k}{3} > 0.$$

Отсюда, учитывая (2.11), получаем, что $\Psi'_q(x) > 0$ и функция $\Psi_q(x)$ возрастает. Следовательно,

$$\Psi_q(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_q(x) = (1-q)e^{-ck} + q < (1-q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \leq r.$$

■

Окончательно получаем, что

$$\sup_x \Psi_q(x) \leq r,$$

где

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1-q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\} < 1$$

в силу того, что $e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} < 1$ и $\tilde{u}_{3/2}(\alpha k) < 1$ по лемме 2.9. Таким образом, верна следующая теорема:

Теорема 2.3. *Для итерационной системы \mathcal{R} условие*

$$\sup_x \mathbb{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1$$

выполнено с функцией нормировки $\psi(x) = \exp\{c\lambda(x)\}$, где

$$\lambda(x) = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right|, \quad c = \frac{\alpha^2 k}{3 \left(1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right)},$$

и числом

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1 - q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\}.$$

2.7. Стационарное распределение

Докажем теперь теорему из статьи [51], связывающую выполнение условия (2.6) с локальной сжимаемостью итерационной системы.

Теорема 2.4. *Если для непрерывной функции $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ выполнено условие*

$$\sup_x \mathbf{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1,$$

то итерационная функциональная система \mathcal{R} является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$.

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$U_n(x) = \mathbf{E} \left\{ L_x(\tilde{R}_n) \right\} \leq \psi(x)r^n$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}_0$.

Докажем это утверждение индукцией по n . База индукции при $n = 0$ следует из того, что $\tilde{R}_0(x) = x$, $U_0(x) = \mathbf{E} \left\{ L_x(\tilde{R}_0) \right\} = 1$ и $\psi(x) \geq 1$.

Перейдем к шагу индукции. По утверждению 2.2

$$U_{n+1}(x) = \mathbf{E} \left\{ L_x(\tilde{R}_{n+1}) \right\} = \mathbf{E} \left\{ L_x(\tilde{R}_n \circ f_{W_{n+1}}) \right\} = \mathbf{E} \left\{ L_{f_{W_{n+1}}(x)}(\tilde{R}_n) L_x(f_{W_{n+1}}) \right\}.$$

В силу того, что все W_i независимы, \tilde{R}_n и $f_{W_{n+1}}$ также независимы, поэтому

$$U_{n+1}(x) = \mathbf{E} \left\{ U_n(f_{W_{n+1}}(x)) L_x(f_{W_{n+1}}) \right\}.$$

Пользуясь предположением индукции, получаем, что

$$U_{n+1}(x) \leq r^n \mathbf{E} \left\{ \psi(f_{W_{n+1}}(x)) L_x(f_{W_{n+1}}) \right\}.$$

Так как все W_i одинаково распределены, то

$$U_{n+1}(x) \leq r^n \mathbf{E}\{\psi(f(x))L_x(f)\} = r^n \psi(x) \mathbf{E}\left\{\frac{\psi(f(x))}{\psi(x)}L_x(f)\right\}.$$

По условию теоремы данное математическое ожидание не превосходит r , откуда $U_{n+1}(x) \leq \psi(x)r^{n+1}$, что и требовалось доказать. \blacksquare

Таким образом, из теорем 2.3 и 2.4 следует, что итерационная функциональная система \mathcal{R} является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$.

Теперь можно доказать основную теорему о стационарном распределении $\{R_n(x)\}$.

Теорема 2.5. *Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha, k > 0$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.1, то есть докажем, что предел $\tilde{R}_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное, конечен и не зависит от x .

Рассмотрим некоторое $l \in \mathbb{N}$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{\left|\tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x)\right|\right\} &= \mathbf{E}\left\{\left|\tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_l \circ f_{W_{l+1}}(x)\right|\right\} \leq \\ &\leq \mathbf{E}\left\{\left|x - f_{W_{l+1}}(x)\right| \int_0^1 L_{x+t(f_{W_{l+1}}(x)-x)}(\tilde{R}_l) dt\right\}. \end{aligned}$$

Оценивая интеграл произведением длины отрезка интегрирования и максимума подынтегральной функции, получаем:

$$\mathbf{E}\left\{\left|\tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x)\right|\right\} \leq \mathbf{E}\left\{\left|x - f_{W_{l+1}}(x)\right| \sup_{0 \leq t \leq 1} L_{x+t(f_{W_{l+1}}(x)-x)}(\tilde{R}_l)\right\}.$$

Из независимости \tilde{R}_l и $f_{W_{l+1}}$, а также одинаковости распределенности всех W_i имеем:

$$\mathbf{E}\left\{\left|\tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x)\right|\right\} \leq \mathbf{E}\left\{\left|x - f(x)\right| \sup_{0 \leq t \leq 1} U_l(x + t(f(x) - x))\right\}.$$

По теореме 2.4 итерационная система \mathcal{R} является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$, поэтому

$$\mathbf{E}\left\{\left|\tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x)\right|\right\} \leq r^l \mathbf{E}\left\{|x - f(x)| \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(f(x) - x))\right\}.$$

Для оценки входящего в эту формулу супремума представим его в следующем виде:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(f_i(x) - x)) = \exp\left\{c \sup_{0 \leq t \leq 1} \lambda(x + t(f_i(x) - x))\right\}.$$

Тогда при $0 \leq t \leq 1$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \lambda(x + t(f_0(x) - x)) &= \left| \left| x - tk\Phi(\alpha x + \beta) + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk\Phi(\alpha x + \beta) + \frac{k}{2} \leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \lambda(x + t(f_1(x) - x)) &= \left| \left| x + tk(1 - \Phi(\alpha x + \beta)) + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk(1 - \Phi(\alpha x + \beta)) + \frac{k}{2} \leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой $c < \frac{2}{3}\alpha^2 k$, получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(f_i(x) - x)) &\leq \exp\left\{c \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \frac{3k}{2} \right)\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{\left|\tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x)\right|\right\} &\leq r^l \mathbf{E}\left\{|x - f(x)| \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2\right\}\right\} = \\ &= r^l \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2\right\} ((1 - q)|k\Phi(\alpha x + \beta)| + q|k - k\Phi(\alpha x + \beta)|) \leq \\ &\leq r^l k \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2\right\}. \end{aligned}$$

Просуммировав это выражение по всем l от n до бесконечности:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{l=n}^{+\infty} \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq \frac{r^n}{1-r} k \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\},$$

получим оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_\infty(x) \right| \right\} &\leq \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=n}^{+\infty} \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} k \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выражение в правой части конечно для любого x , поэтому $\tilde{R}_\infty(x)$ существует и конечен почти наверное.

Повторим теперь те же действия с $\mathbb{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_n(y) \right| \right\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_n(y) \right| \right\} &\leq r^n \mathbb{E} \left\{ |y-x| \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x+t(y-x)) \right\} = \\ &= r^n |y-x| \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x+t(y-x)). \end{aligned}$$

Снова оценим супремум, пользуясь тем, что $c < \frac{2}{3} \alpha^2 k$. При $0 \leq t \leq 1$ верно неравенство

$$\lambda(x+t(y-x)) = \left| \left| x+t(y-x) + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| \leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + t|y-x| + \frac{k}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x+t(y-x)) &\leq \exp \left\{ c \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |y-x| + \frac{k}{2} \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |y-x| \right) + \frac{1}{3} \alpha^2 k^2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_n(y) \right| \right\} \leq r^n |y-x| \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |y-x| \right) + \frac{1}{3} \alpha^2 k^2 \right\}. \quad (2.13)$$

Устремив n к бесконечности, получаем, что $\tilde{R}_\infty(x)$ не зависит от x , что окончательно доказывает наличие единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$. ■

Также из доказательства этой теоремы, объединяя неравенства (2.12) и (2.13), получаем следующую оценку скорости сходимости $\tilde{R}_n(x)$:

Теорема 2.6. *Для процесса $\{\tilde{R}_n(x)\}$ верно следующее неравенство:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left|\tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_\infty(y)\right|\right\} &\leq r^n \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k \left|x + \frac{\beta}{\alpha}\right| + \frac{1}{3}\alpha^2 k^2\right\} \times \\ &\times \left(\frac{k}{1-r} \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k^2\right\} + |x-y| \exp\left\{\frac{2}{3}\alpha^2 k|x-y|\right\}\right), \end{aligned}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$ и

$$r = \max\left\{1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1-q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q\right\} < 1.$$

2.8. Медиана распределения

В заключение рассмотрим случай одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника и найдем медиану стационарного распределения рейтинга игрока при этом условии.

Теорема 2.7. *При $s_A = s_B$ стационарное распределение симметрично и его медиана $m = \frac{R_0^A + R_0^B}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.*

Доказательство. Так как $s_A = s_B$, то $q = \Phi\left(\frac{s^A - s^B}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$, а значит, случайная величина W имеет стандартное распределение Бернулли и $W \sim 1 - W$.

Заметим теперь, что выражение для изменения рейтинга игрока в утверждении 2.1 в таком случае полностью совпадает с выражением для изменения рейтинга его соперника. Так как по теореме 2.1 стационарное распределение для такого процесса не зависит от его начального распределения, то стационарные распределения рейтингов игрока и его соперника совпадают.

Следовательно, из условия (2.1) сохранения суммы рейтингов получаем, что

$$\mathbb{P}\{R_\infty^A \leq x\} = \mathbb{P}\{R_\infty^B \leq x\} = \mathbb{P}\{R_0^A + R_0^B - R_\infty^A \leq x\}.$$

Отсюда

$$\mathbb{P}\{R_\infty^A \leq m + x\} = \mathbb{P}\{R_\infty^A \geq m - x\},$$

где $m = \frac{R_0^A + R_0^B}{2}$, то есть стационарное распределение является симметричным с медианой m .

Наконец, равенство $\frac{R_0^A + R_0^B}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ следует из определения α и β . ■

Глава 3

Система TrueSkill

3.1. Описание модели

TrueSkill™ [30] — байесовская рейтинговая система, разработанная в Microsoft Research и применяемая в онлайн-сервисе для многопользовательских игр Xbox Live. Вследствие этого система TrueSkill позволяет рассчитывать рейтинги игроков в условиях, когда в матче может принимать участие сразу несколько команд разных размеров. Кроме того, в отличие от системы Эло, в данной модели изначально заложена возможность ничьей между некоторыми из команд.

Для описания системы TrueSkill предположим, что в некоторой игре приняли участие n игроков, объединившихся в k непересекающихся команд $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$, где $T_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ и $T_i \cap T_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Результатом игры является набор чисел $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_k\}$, где $r_i \in \{1, \dots, k\}$ обозначает место, занятое командой T_i : победитель имеет $r_i = 1$; если между некоторыми из команд возникла ничья, то соответствующие им r_i равны.

Опишем модель результатов игры. Пусть каждому игроку i соответствует некоторый уровень мастерства s_i . Допустим также, что его сила в каждой игре имеет распределение $p_i \sim \mathcal{N}(s_i, \beta^2)$, где β — некоторая константа, одинаковая для всех игроков. Будем моделировать силу t_j каждой команды T_j как сумму сил входящих в нее игроков: $t_j = \sum_{i \in T_j} p_i$.

Обозначим уровни мастерства, силы игроков и команд соответственно

через $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$, $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_k\}$.

Переупорядочим команды в соответствии с занятыми ими местами: $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(k)}$. Если предполагать, что ничьи в игре невозможны, то такой результат игры соответствовал бы условию $t_{r_{(1)}} > \dots > t_{r_{(k)}}$.

Для того, чтобы ввести в систему ничьи между некоторыми из команд, введем дополнительные переменные $d_i = t_{r_{(i)}} - t_{r_{(i+1)}}$, $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_{k-1}\}$. Тогда условию более высокого занятого места $r_{(i)} < r_{(i+1)}$ соответствует неравенство $d_i > \varepsilon$, а условию одинаковых занятых мест $r_{(i)} = r_{(i+1)}$ — неравенство $|d_i| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое заданное число.²⁵

Перейдем теперь к модели вычисления рейтингов в данной системе. Так как для каждого игрока точное значение его уровня мастерства s_i неизвестно, будем предполагать перед каждой игрой, что оно имеет априорное распределение $s_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, зависящее от его рейтинга μ_i и дисперсии σ_i^2 , и отражающее нашу уверенность в соответствии его уровня мастерства данному рейтингу.

Таким образом, задача пересчета рейтингов и дисперсий игроков заключается в нахождении апостериорной плотности распределения их уровней мастерства:

$$P(\mathbf{s} | \mathbf{r}, \mathbf{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{d} | \mathbf{r}, \mathbf{T}) d\mathbf{p},$$

где $P(\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{d} | \mathbf{r}, \mathbf{T})$ это совместная плотность распределения данных величин.

Соответствующая задача маргинализации решается с помощью представления $P(\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{d} | \mathbf{r}, \mathbf{T})$ в виде определенного фактор-графа, отражающего внутреннюю структуру данного совместного распределения, и приближения возникающих сложных маргинальных распределений нормальными путем вычисления их двух первых моментов.

К сожалению, в виду отсутствия в [30] вывода итоговых формул, алгоритм может представлять некоторые сложности для читателей. Так, например, в статье [43] объяснение работы TrueSkill на нескольких примерах дано с ошибками.

²⁵Недостатки такого подхода обсуждаются в разделе 3.11.

В данной главе будет дано подробное разъяснение работы алгоритма сначала для двух игроков, затем в общем случае нескольких команд разных размеров, после чего будет проведено исследование свойств данной модели, и наконец приведен обзор ее возможных улучшений.

3.2. Свойства нормального распределения

Для начала сформулируем необходимые свойства нормального распределения, на которые опирается алгоритм TrueSkill. Доказательства приведены в разделе 3.12.

Введем следующее обозначение:

$$\varphi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

— плотность нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . В случае стандартного нормального распределения будем писать сокращенно

$$\varphi(x) = \varphi(x, 0, 1),$$

откуда по определению

$$\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \sigma\varphi(x, \mu, \sigma^2).$$

Также напомним используемое обозначение функции стандартного нормального распределения:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

Легко заметить, что по определению верно следующее.

Утверждение 3.1. *При всех $x, y \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$*

$$\varphi(x, y, \sigma^2) = \varphi(y, x, \sigma^2).$$

Первые две леммы связаны с произведением и отношением плотностей нормального распределения.

Лемма 3.1. При всех $x, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) = \varphi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \varphi(x, \mu, \sigma^2),$$

где

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Лемма 3.2. При всех $x, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_2 > \sigma_1 > 0$

$$\frac{\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2)}{\varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \times \frac{\varphi(x, \mu, \sigma^2)}{\varphi(\mu_1, \mu_2, \sigma_2^2 - \sigma_1^2)},$$

где

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}.$$

Следующие две леммы касаются интегрирования плотности нормального распределения.

Лемма 3.3. При всех $x, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x, \sigma_y > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, \sigma_x^2) \varphi(y, \mu_y, \sigma_y^2) dy = \varphi(x, \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

Лемма 3.4. При всех $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \Phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right).$$

Наконец, приведем также без доказательства известные свойства моментов и линейной комбинации нормально распределенных случайных величин (см., например, [19; 56]).

Лемма 3.5. Пусть $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Тогда третий и четвертый моменты X имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X^3 &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2, \\ \mathbf{E}X^4 &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Пусть X_1 и X_2 — две независимые нормально распределенные случайные величины, $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2 \neq 0$ одновременно. Тогда

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \sim \mathcal{N}(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2, a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2).$$

В частности,

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2), \\ X_1 - X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \end{aligned}$$

3.3. Усеченное нормальное распределение

Для приближения некоторых распределений, возникающих в процессе работы алгоритма TrueSkill, нам понадобятся свойства усеченного нормального распределения. Соответствующие доказательства снова приведены в разделе 3.12.

Рассмотрим усеченное нормальное распределение $\mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$ на интервале (l, r) при условии $-\infty \leq l < x < r \leq +\infty$, где $l, r \neq \infty$ одновременно.

Обозначим его плотность следующим образом:

$$\varphi_{(l,r)}(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} \varphi(x, \mu, \sigma^2) \mathbf{1}_{l < x < r},$$

где коэффициент выбран из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(l,r)}(x, \mu, \sigma^2) dx = 1$.

Следуя работе [29], введем следующие функции.

Определение 3.1.

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, l, r) &= -\frac{\varphi(r-x) - \varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)}, \\ \tilde{w}(x, l, r) &= (\tilde{v}(x, l, r))^2 + \frac{(r-x)\varphi(r-x) - (l-x)\varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)}. \end{aligned}$$

Обозначим производящую функцию моментов случайной величины X через

$$M_X(t) = \mathbf{E}e^{tX}$$

при $t \in \mathbb{R}$.

Если $M_X(t)$ дифференцируема в нуле, то n -й момент случайной величины X можно вычислить следующим образом:

$$\mathbb{E}X^n = \frac{d^n M_X}{dt^n}(0).$$

Найдем производящую функцию моментов усеченной нормальной случайной величины X , после чего используем ее для вычисления математического ожидания и дисперсии соответствующего распределения.

Лемма 3.7. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}. \quad (3.1)$$

Лемма 3.8. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$\mathbb{E}X = \mu + \sigma \tilde{v}\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right).$$

Лемма 3.9. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$\text{Var}X = \sigma^2 - \sigma^2 \tilde{w}\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right).$$

Рассмотрим теперь нормальное распределение, усеченное только с левой стороны. Для этого введем следующее определение.

Определение 3.2.

$$v(x, l) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{v}(x, l, r),$$

$$w(x, l) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{w}(x, l, r).$$

Для этих функций можно вывести явные формулы.

Лемма 3.10. При всех $x, l \in \mathbb{R}$

$$v(x, l) = \frac{\varphi(x-l)}{\Phi(x-l)},$$

$$w(x, l) = v(x, l)(v(x, l) + (x-l)).$$

Наконец, нам потребуется важное свойство усеченного нормального распределения: если $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$, то $\text{Var}X < \sigma^2$, то есть дисперсия усеченного нормального распределения строго меньше дисперсии соответствующего неусеченного. Хотя это свойство может показаться очевидным, оно не является верным в общем случае для любого распределения. В различных источниках этот факт для односторонне усеченных нормальных величин упоминается без доказательства. В работах [28; 40] соответствующее утверждение для различных усеченных распределений доказывается в виде нестрогого неравенства. В статье [9] доказательство неполно, так как неявно рассматривается только случай $\mu \in (l, r)$.

Сформулируем это свойство для одностороннего и двустороннего случаев.

Лемма 3.11. *При всех $x, l \in \mathbb{R}$*

$$0 < w(x, l) < 1.$$

Лемма 3.12. *При всех $x, l, r \in \mathbb{R}$, $l < r$*

$$0 < \tilde{w}(x, l, r) < 1.$$

3.4. Фактор-графы

Как уже упоминалось в разделе 3.1, в модели TrueSkill используется представление совместной плотности распределения $P(\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{d} \mid \mathbf{r}, \mathbf{T})$ в виде фактор-графа.

Фактор-графы являются одной из основных графических вероятностных моделей, то есть моделей, в которых зависимости между случайными величинами представлены в виде графа.

Пусть мы имеем дело с некоторой действительной функцией $g(a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{A}_i$. Следуя [32], введем следующее обозначение для суммирования по всем переменным, кроме одной:

$$\sum_{\sim\{a_i\}} g(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{a_j \in \mathbb{A}_j, \\ j \neq i}} g(a_1, \dots, a_n).$$

Нас интересует алгоритм для эффективного вычисления маргинальных функций

$$g_i(a_i) = \sum_{\sim\{a_i\}} g(a_1, \dots, a_n),$$

использующий информацию о том, как разлагается функция $g(a_1, \dots, a_n)$ в произведение более простых функций, а также значения промежуточных вычислений.

В случае системы TrueSkill в качестве функции $g(a_1, \dots, a_n)$ выступает совместная плотность распределения $P(\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{d} | \mathbf{r}, \mathbf{T})$, при этом в силу непрерывности данных величин вместо суммирования используется операция интегрирования. Соответственно, задача пересчета рейтингов состоит в нахождении маргинальной функции $P(\mathbf{s} | \mathbf{r}, \mathbf{T})$.

Вернемся к общему случаю. Пусть функция $g(a_1, \dots, a_n)$ имеет следующее представление в виде произведения так называемых локальных функций:

$$g(a_1, \dots, a_n) = \prod_{j \in J} f_j(A_j), \quad (3.2)$$

где $A_j \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ и $f_j(A_j)$ — функция, имеющая в качестве своих аргументов элементы множества A_j .

Определение 3.3. *Фактор-граф* — это двудольный граф, отражающий структуру факторизации (3.2).

Фактор-граф имеет вершину-переменную для каждой переменной a_i , фактор-вершину для каждой локальной функции f_j , и ребро, соединяющее вершину a_i с вершиной f_j в том и только в том случае, когда a_i является аргументом функции f_j .

В дальнейшем на изображениях фактор-графов будем обозначать вершины-переменные белыми кругами и фактор-вершины черными квадратами.

Рассмотрим функцию g и соответствующий ей фактор-граф T . Пусть T является деревом и имеет N вершин-переменных. Выделим в нем некоторую вершину x в качестве корня. Так как T является деревом, то множества потомков различных детей x не пересекаются. Поэтому, учиты-

вая (3.2), функцию g можно представить в следующем виде:

$$g(x, x_1, \dots, x_{N-1}) = \prod_{i=1}^K F_i(x, X_i), \quad (3.3)$$

где $F_i(x, X_i)$ — произведение всех локальных функций в i -м поддереве T , имеющем в качестве корня i -ю смежную с x вершину, а X_i — множество всех переменных в этом поддереве.

Лемма 3.13. *Для фактор-графа T*

$$\sum_{\sim\{x\}} g(x, x_1, \dots, x_{N-1}) = \prod_{i=1}^K \sum_{\sim\{x\}} F_i(x, X_i).$$

Доказательство. В силу того, что T является деревом, $X_i \cap X_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Кроме того, $X_1 \cup \dots \cup X_K = \{x_1, \dots, x_{N-1}\}$, то есть X_1, \dots, X_K является разбиением множества $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$. Следовательно, по свойству дистрибутивности

$$\begin{aligned} \sum_{\sim\{x\}} g(x, x_1, \dots, x_{N-1}) &= \sum_{X_1} \dots \sum_{X_K} F_1(x, X_1) \dots F_K(x, X_K) = \\ &= \left(\sum_{X_1} F_1(x, X_1) \right) \dots \left(\sum_{X_K} F_K(x, X_K) \right) = \prod_{i=1}^K \sum_{\sim\{x\}} F_i(x, X_i), \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Рассмотрим теперь поддерево T , соответствующее $F_1(x, X_1)$. Без ограничения общности можно пронумеровать вершины таким образом, что

$$F_1(x, X_1) = f_1(x, x_1, \dots, x_L) G_1(x_1, X_{1,1}) \dots G_L(x_L, X_{1,L}),$$

где $G_i(x_i, X_{1,i})$ — произведение всех локальных функций в соответствующем поддереве, и $X_{1,i}$ — множество всех переменных в нем, что проиллюстрировано на рисунке 3.1.

Лемма 3.14. *Для фактор-графа T*

$$\sum_{\sim\{x\}} F_1(x, X_1) = \sum_{\sim\{x\}} \left(f_1(x, x_1, \dots, x_L) \prod_{i=1}^L \sum_{\sim\{x_i\}} G_i(x_i, X_{1,i}) \right).$$

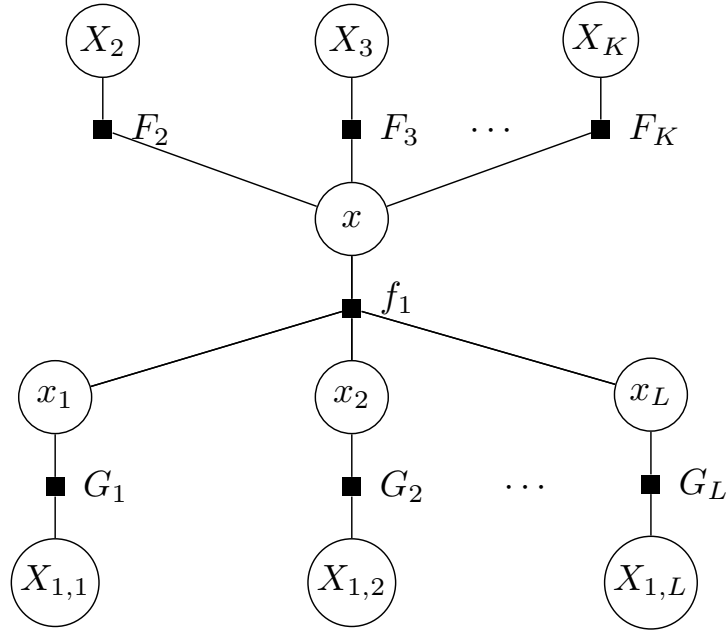


Рис. 3.1. Фактор-граф T с выделенным поддеревом, соответствующем произведению $F_1(x, X_1)$.

Доказательство. Как и в лемме 3.13, воспользуемся тем, что объединение x_1, \dots, x_L и $X_{1,1}, \dots, X_{1,L}$ является разбиением множества X_1 . Тогда по свойству дистрибутивности

$$\begin{aligned}
\sum_{\sim\{x\}} F_1(x, X_1) &= \sum_{\sim\{x\}} f_1(x, x_1, \dots, x_L) G_1(x_1, X_{1,1}) \dots G_L(x_L, X_{1,L}) = \\
&= \sum_{x_1, \dots, x_L} f_1(x, x_1, \dots, x_L) \left(\sum_{X_{1,1}} G_1(x_1, X_{1,1}) \right) \dots \left(\sum_{X_{1,L}} G_L(x_L, X_{1,L}) \right) = \\
&= \sum_{\sim\{x\}} \left(f_1(x, x_1, \dots, x_L) \prod_{i=1}^L \sum_{\sim\{x_i\}} G_i(x_i, X_{1,i}) \right),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Теперь для вычисления маргинальных функций $g_i(x_i)$ достаточно последовательно применять лемму 3.14.

Опишем так называемый алгоритм Belief Propagation [32] для вычисления маргинальных функций на фактор-графе. На первом шаге алгоритма каждая фактор-вершина f , являющаяся листом, передает своей

смежной вершине функцию f , а каждая вершина-переменная, являющаяся листом, передает своей смежной вершине тождественную функцию. Будем называть функции, передающиеся в процессе работы алгоритма от одних вершин к другим, сообщениями.

Затем на каждом шаге каждая вершина фактор-графа v ждет, пока не получит сообщения от всех своих смежных вершин, кроме одной, после чего передает оставшейся вершине u сообщение по следующему правилу, вытекающему из леммы 3.14.

Определение 3.4. Пусть $n(v)$ — множество вершин, смежных с v .

Сообщение от вершины-переменной к фактор-вершине:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in n(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x).$$

Сообщение от фактор-вершины к вершине-переменной:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left(f(X) \prod_{y \in n(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) \right),$$

где $X = n(f)$ — множество аргументов функции f .

Затем вершина v снова переходит в состояние ожидания, пока не получит обратное сообщение от u , после чего передает сообщения по определению 3.4 всем остальным своим смежным вершинам.

Заметим, что сообщение от вершины-переменной к фактор-вершине имеет более простой вид, так как в этом случае отсутствует локальная функция, на которую надо домножать, а внешнюю сумму можно опустить вследствие того, что все сомножители зависят только от x .

Процесс передачи сообщений прекращается после того, как по каждому ребру переданы сообщения в обе стороны.

Наконец, для вычисления маргинальных функций $g_i(x_i)$ после этого по лемме 3.13 необходимо перемножить все сообщения, переданные к x_i , или же, учитывая определение 3.4, перемножить любые два сообщения, отправленные в противоположных направлениях по одному и тому же ребру, инцидентному x_i .

Как уже было замечено, в случае множеств $\mathbb{A}_i \subseteq \mathbb{R}$ суммирование следует заменить на интегрирование. Кроме того, данный алгоритм можно обобщить, заменив область значений функции $g(a_1, \dots, a_n)$ с множества действительных чисел со стандартными операциями сложения и умножения на произвольное коммутативное полукольцо [1], так как основным условием работы алгоритма является выполнение дистрибутивного закона. В частности, вместо операций сложения-умножения можно использовать максимизацию-умножение, минимизацию-сложение или другие варианты.

Недостатком алгоритма Belief Propagation является то обстоятельство, что в случае непрерывных переменных некоторые из сообщений, возможно, нельзя будет вычислить в явном виде, и их необходимо как-то аппроксимировать. Опишем используемый для этой цели в байесовском анализе алгоритм Expectation Propagation [41].

Пусть факторизуемая функция $g(a_1, \dots, a_n)$ является плотностью некоторого распределения и с точностью до константы разлагается в произведение

$$g(a_1, \dots, a_n) \propto \prod_{j \in J} f_j(A_j),$$

где знак \propto означает пропорциональность функций. Выберем некоторое семейство аппроксимирующих распределений, например, экспоненциальное (в частности, в системе TrueSkill используется семейство нормальных распределений), и будем искать приближение для функции $g(a_1, \dots, a_n)$ в виде

$$\hat{g}(a_1, \dots, a_n) \propto \prod_{j \in J} \hat{f}_j(A_j),$$

где все \hat{f}_j принадлежат выбранному семейству. В качестве минимизируемого функционала в алгоритме Expectation Propagation используется расстояние Кульбака-Лейблера:

$$D_{\text{KL}}(p||q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

где $q(x)$ принадлежит аппроксимирующему семейству.²⁶ Как следствие, при приближении нормальным распределением минимизация этого расстояния равносильна приравнению математических ожиданий и дисперсий обоих распределений.²⁷

Для аппроксимации функции $g(a_1, \dots, a_n)$ данный алгоритм итеративно приближает каждый из факторов $\hat{f}_j(A_j)$ при фиксированных остальных факторах $\hat{f}_i(A_i)$, $i \neq j$, для чего вместо сообщений

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \int_{\sim\{x\}} f(X) \prod_{y \in X \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(y) dX$$

используются сообщения

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \text{proj} \left(\int_{\sim\{x\}} f(X) \prod_{y \in X} \mu_{y \rightarrow f}(y) dX \right) / \mu_{x \rightarrow f}(x),$$

где $\text{proj}(\cdot)$ это оператор проекции функции в заданное семейство.

В заключение отметим, что часто при реализации различных алгоритмов приходится вводить дополнительные переменные, зависящие от уже существующих. При использовании фактор-графов дополнительные вершины-переменные вводятся с помощью символа Кронекера $\tilde{\delta}_i$ в дискретном случае и дельта-функции Дирака δ_x в непрерывном случае [35] в виде фактор-вершин путем применения фильтрующего свойства [57]:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}_{i-j} f(i) = f(j),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{x-y} f(x) dx = f(y)$$

при всех $j \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$.

²⁶В силу несимметричности это выражение отличается от $D_{\text{KL}}(q||p)$, минимизируемого в вариационных байесовских методах. Стоит также отметить, что использование функционала $D_{\text{KL}}(p||q)$ ведет к плохим приближениям в случае мультимодальных распределений [6].

²⁷Также можно использовать и другие параметризации: например, для алгоритма TrueSkill в статье [30] используются мера точности $\pi = \sigma^{-2}$ и скорректированное математическое ожидание $\tau = \mu\sigma^{-2}$.

3.5. Случай победы при двух игроках

Рассмотрим модель TrueSkill в случае двух игроков и победы одного из них.

Пусть в игре приняли участие два игрока W и L с рейтингами и дисперсиями μ_W, σ_W^2 и μ_L, σ_L^2 соответственно, при этом игрок W выиграл, то есть $r_W < r_L$. Факторизуемой функцией в этом случае является совместная плотность распределения сил и уровней мастерства обоих игроков

$$P(s_W, s_L, p_W, p_L \mid r_W < r_L)$$

при условии победы игрока W . Соответствующий фактор-граф изображен на рисунке 3.2. Напомним, что величины β и ε являются заданными константами.

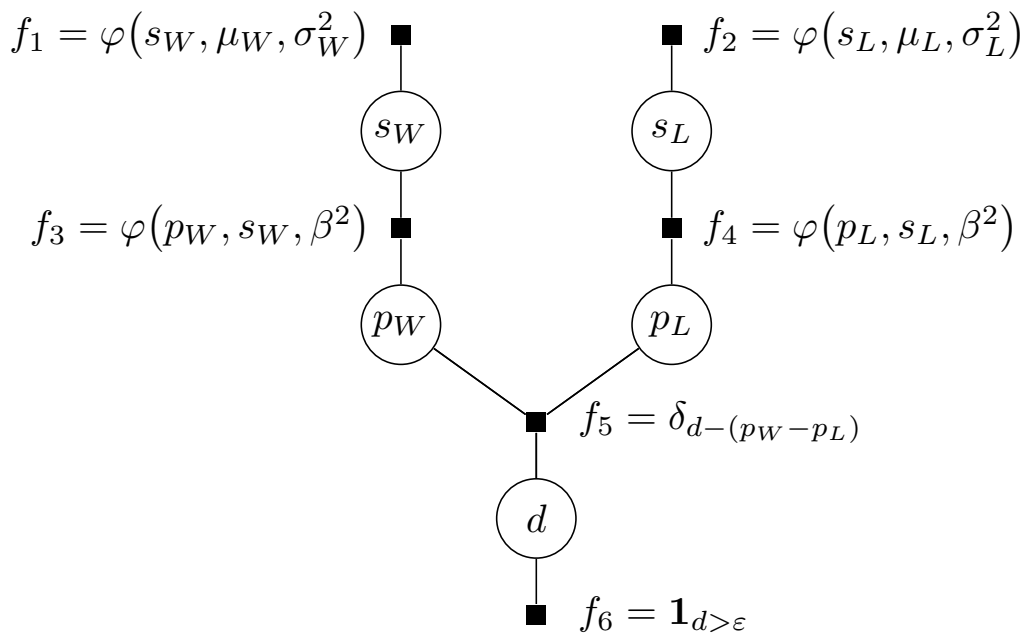


Рис. 3.2. Фактор-граф для модели TrueSkill в случае двух игроков и победы одного из них.

Продемонстрируем работу алгоритма и найдем итоговые формулы для изменения рейтингов игроков в этом случае.

Шаг 1.

На первом шаге фактор-вершины, являющиеся листьями, передают

соответствующие функции своим смежным вершинам:

$$\begin{aligned}\mu_{f_1 \rightarrow s_W}(s_W) &= \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2), \\ \mu_{f_2 \rightarrow s_L}(s_L) &= \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2), \\ \mu_{f_6 \rightarrow d}(d) &= \mathbf{1}_{d > \varepsilon}.\end{aligned}$$

Шаг 2.

Так как каждая вершина-переменная имеет только двух соседей, эти сообщения просто передаются дальше:

$$\begin{aligned}\mu_{s_W \rightarrow f_3}(s_W) &= \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2), \\ \mu_{s_L \rightarrow f_4}(s_L) &= \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2), \\ \mu_{d \rightarrow f_5}(d) &= \mathbf{1}_{d > \varepsilon}.\end{aligned}$$

Шаг 3.

Для явного вычисления сообщений на следующем шаге воспользуемся леммой 3.3:

$$\begin{aligned}\mu_{f_3 \rightarrow p_W}(p_W) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(p_W, s_W) \mu_{s_W \rightarrow f_3}(s_W) ds_W = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_W, s_W, \beta^2) \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) ds_W = \varphi(p_W, \mu_W, \sigma_W^2 + \beta^2), \\ \mu_{f_4 \rightarrow p_L}(p_L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_4(p_L, s_L) \mu_{s_L \rightarrow f_4}(s_L) ds_L = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_L, s_L, \beta^2) \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) ds_L = \varphi(p_L, \mu_L, \sigma_L^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 4.

Передаем сообщения дальше:

$$\begin{aligned}\mu_{p_W \rightarrow f_5}(p_W) &= \varphi(p_W, \mu_W, \sigma_W^2 + \beta^2), \\ \mu_{p_L \rightarrow f_5}(p_L) &= \varphi(p_L, \mu_L, \sigma_L^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 5.

Для вычисления сообщения, посылаемого к вершине d , воспользуемся

леммой 3.6:

$$\begin{aligned}
\mu_{f_5 \rightarrow d}(d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(d, p_W, p_L) \mu_{p_W \rightarrow f_5}(p_W) \mu_{p_L \rightarrow f_5}(p_L) dp_W dp_L = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{d-(p_W-p_L)} \varphi(p_W, \mu_W, \sigma_W^2 + \beta^2) \varphi(p_L, \mu_L, \sigma_L^2 + \beta^2) dp_W dp_L = \\
&= \varphi(d, \mu_W - \mu_L, \sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим сообщения, которые нужно передать к вершинам p_W и p_L :

$$\begin{aligned}
\mu_{f_5 \rightarrow p_W}(p_W) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(d, p_W, p_L) \mu_{d \rightarrow f_5}(d) \mu_{p_L \rightarrow f_5}(p_L) dd dp_L = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{d-(p_W-p_L)} \mathbf{1}_{d>\varepsilon} \varphi(p_L, \mu_L, \sigma_L^2 + \beta^2) dd dp_L = \\
&= \Phi\left(\frac{p_W - \varepsilon - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2 + \beta^2}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{f_5 \rightarrow p_L}(p_L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(d, p_W, p_L) \mu_{d \rightarrow f_5}(d) \mu_{p_W \rightarrow f_5}(p_W) dd dp_W = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{d-(p_W-p_L)} \mathbf{1}_{d>\varepsilon} \varphi(p_W, \mu_W, \sigma_W^2 + \beta^2) dd dp_W = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{p_L + \varepsilon - \mu_W}{\sqrt{\sigma_W^2 + \beta^2}}\right).
\end{aligned}$$

В отличие от сообщений, переданных на предыдущем шаге, они уже не являются плотностями нормального распределения. Хотя в случае двух игроков вычисления можно довести до конца, что выполнено в разделе 3.9, в общем случае нескольких команд при дальнейшей передаче сообщений интегралы нельзя будет вычислить в явном виде, и необходима аппроксимация.

Шаг 6.

Воспользуемся алгоритмом Expectation Propagation. Для этого сначала передадим сообщение $\mu_{d \rightarrow f_6}(d)$:

$$\mu_{d \rightarrow f_6}(d) = \varphi(d, \mu_W - \mu_L, \sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2).$$

Рассмотрим теперь маргинальную плотность распределения случайной величины, соответствующей вершине d . Для этого перемножим и нормализуем сообщения, отправленные в обе стороны по ребру, инцидентному вершинам f_6 и d , то есть сообщения $\mu_{f_6 \rightarrow d}(d)$ и $\mu_{d \rightarrow f_6}(d)$. Получим, что данная плотность с точностью до константы равна

$$P(d) \propto \mathbf{1}_{d > \varepsilon} \varphi(d, \mu_W - \mu_L, \sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2). \quad (3.4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \\ V &= v\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \\ W &= w\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \end{aligned}$$

и приблизим плотность усеченного нормального распределения (3.4) с помощью лемм 3.8 и 3.9, то есть заменим $P(d)$ на

$$\tilde{P}(d) = \varphi(d, \mu_W - \mu_L + cV, c^2 - c^2W).$$

Снова представим эту плотность с точностью до константы в виде произведения сообщений $\tilde{P}(d) \propto \tilde{\mu}_{f_6 \rightarrow d}(d) \mu_{d \rightarrow f_6}(d)$, откуда

$$\tilde{\mu}_{f_6 \rightarrow d}(d) \propto \frac{\tilde{P}(d)}{\mu_{d \rightarrow f_6}(d)} = \frac{\varphi(d, \mu_W - \mu_L + cV, c^2 - c^2W)}{\varphi(d, \mu_W - \mu_L, c^2)}.$$

Из леммы 3.11 следует, что $1 > W > 0$, поэтому $c^2 > c^2 - c^2W > 0$ и можно воспользоваться леммой 3.2. Вычислим соответствующие математическое ожидание и дисперсию:

$$\frac{(\mu_W - \mu_L + cV)c^2 - (\mu_W - \mu_L)(c^2 - c^2W)}{c^2 - (c^2 - c^2W)} = \mu_W - \mu_L + c \frac{V}{W},$$

$$\frac{(c^2 - c^2W)c^2}{c^2 - (c^2 - c^2W)} = c^2 \frac{1 - W}{W},$$

откуда

$$\tilde{\mu}_{f_6 \rightarrow d}(d) \propto \frac{\varphi(d, \mu_W - \mu_L + cV, c^2 - c^2W)}{\varphi(d, \mu_W - \mu_L, c^2)} \propto \varphi\left(d, \mu_W - \mu_L + c\frac{V}{W}, c^2 \frac{1 - W}{W}\right)$$

и, следовательно,

$$\tilde{\mu}_{d \rightarrow f_5}(d) = \varphi\left(d, \mu_W - \mu_L + c\frac{V}{W}, c^2 \frac{1 - W}{W}\right).$$

Шаг 7.

Теперь можно передать приближенные сообщения к вершинам p_W и p_L :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{f_5 \rightarrow p_W}(p_W) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(d, p_W, p_L) \tilde{\mu}_{d \rightarrow f_5}(d) \mu_{p_L \rightarrow f_5}(p_L) dd dp_L = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(d, \mu_W - \mu_L + c\frac{V}{W}, c^2 \frac{1 - W}{W}\right) \varphi(p_L, \mu_L, \sigma_L^2 + \beta^2) \times \\ &\quad \times \delta_{d-(p_W-p_L)} dd dp_L = \varphi\left(p_W, \mu_W + c\frac{V}{W}, \sigma_L^2 + \beta^2 + c^2 \frac{1 - W}{W}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{f_5 \rightarrow p_L}(p_L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(d, p_W, p_L) \tilde{\mu}_{d \rightarrow f_5}(d) \mu_{p_W \rightarrow f_5}(p_W) dd dp_W = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(d, \mu_W - \mu_L + c\frac{V}{W}, c^2 \frac{1 - W}{W}\right) \varphi(p_W, \mu_W, \sigma_W^2 + \beta^2) \times \\ &\quad \times \delta_{d-(p_W-p_L)} dd dp_W = \varphi\left(p_L, \mu_L - c\frac{V}{W}, \sigma_W^2 + \beta^2 + c^2 \frac{1 - W}{W}\right). \end{aligned}$$

Шаг 8.

Передаем сообщения дальше:

$$\tilde{\mu}_{p_W \rightarrow f_3}(p_W) = \varphi\left(p_W, \mu_W + c\frac{V}{W}, \sigma_L^2 + \beta^2 + c^2 \frac{1 - W}{W}\right),$$

$$\tilde{\mu}_{p_L \rightarrow f_4}(p_L) = \varphi\left(p_L, \mu_L - c\frac{V}{W}, \sigma_W^2 + \beta^2 + c^2 \frac{1 - W}{W}\right).$$

Шаг 9.

Для вычисления сообщений воспользуемся утверждением 3.1 и леммой 3.3:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{f_3 \rightarrow s_W}(s_W) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(p_W, s_W) \tilde{\mu}_{p_W \rightarrow f_3}(p_W) dp_W = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_W, p_W, \beta^2) \varphi\left(p_W, \mu_W + c \frac{V}{W}, \sigma_L^2 + \beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right) dp_W = \\
&= \varphi\left(s_W, \mu_W + c \frac{V}{W}, \sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right), \\
\tilde{\mu}_{f_4 \rightarrow s_L}(s_L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_4(p_L, s_L) \tilde{\mu}_{p_L \rightarrow f_4}(p_L) dp_L = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_L, p_L, \beta^2) \varphi\left(p_L, \mu_L - c \frac{V}{W}, \sigma_W^2 + \beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right) dp_L = \\
&= \varphi\left(s_L, \mu_L - c \frac{V}{W}, \sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right).
\end{aligned}$$

Шаг 10.

Снова передаем сообщения:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{s_W \rightarrow f_1}(s_W) &= \varphi\left(s_W, \mu_W + c \frac{V}{W}, \sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right), \\
\tilde{\mu}_{s_L \rightarrow f_2}(s_L) &= \varphi\left(s_L, \mu_L - c \frac{V}{W}, \sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right).
\end{aligned}$$

Теперь можно вычислить апостериорные плотности распределения случайных величин, соответствующих вершинам s_W и s_L , перемножив и нормализовав сообщения, отправленные в обе стороны по ребрам, инцидентным этим вершинам:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(s_W) &\propto \mu_{f_1 \rightarrow s_W}(s_W) \tilde{\mu}_{s_W \rightarrow f_1}(s_W) = \\
&= \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) \varphi\left(s_W, \mu_W + c \frac{V}{W}, \sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(s_L) &\propto \mu_{f_2 \rightarrow s_L}(s_L) \tilde{\mu}_{s_L \rightarrow f_2}(s_L) = \\
&= \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) \varphi\left(s_L, \mu_L - c \frac{V}{W}, \sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2 \frac{1-W}{W}\right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 3.1 и вычислим соответствующие математическое ожидание и дисперсию для s_W :

$$\frac{\mu_W(\sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W}) + (\mu_W + c\frac{V}{W})\sigma_W^2}{\sigma_W^2 + (\sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W})} = \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}V,$$

$$\frac{\sigma_W^2(\sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W})}{\sigma_W^2 + (\sigma_L^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W})} = \sigma_W^2 \left(1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}W\right),$$

и для s_L :

$$\frac{\mu_L(\sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W}) + (\mu_L - c\frac{V}{W})\sigma_L^2}{\sigma_L^2 + (\sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W})} = \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}V,$$

$$\frac{\sigma_L^2(\sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W})}{\sigma_L^2 + (\sigma_W^2 + 2\beta^2 + c^2\frac{1-W}{W})} = \sigma_L^2 \left(1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}W\right).$$

Следовательно,

$$\tilde{P}(s_W) = \varphi\left(s_W, \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}V, \sigma_W^2 \left(1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}W\right)\right), \quad (3.5a)$$

$$\tilde{P}(s_L) = \varphi\left(s_L, \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}V, \sigma_L^2 \left(1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}W\right)\right), \quad (3.5b)$$

что совпадает с формулами из [11].²⁸

Таким образом, получаем следующие формулы для пересчета.

Теорема 3.1. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае победы игрока W их параметры пересчитываются следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mu'_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}V, & \mu'_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}V, \\ \sigma'_W &= \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}W}, & \sigma'_L &= \sigma_L \sqrt{1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}W}, \end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad V = v\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \quad W = w\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

²⁸Также см. TrueSkill™ Ranking System: Details <http://research.microsoft.com/en-us/projects/trueskill/details.aspx>

3.6. Случай ничьей при двух игроках

Рассмотрим теперь модель TrueSkill для двух игроков в случае их ничьей. Соответствующий фактор-граф изображен на рисунке 3.3.

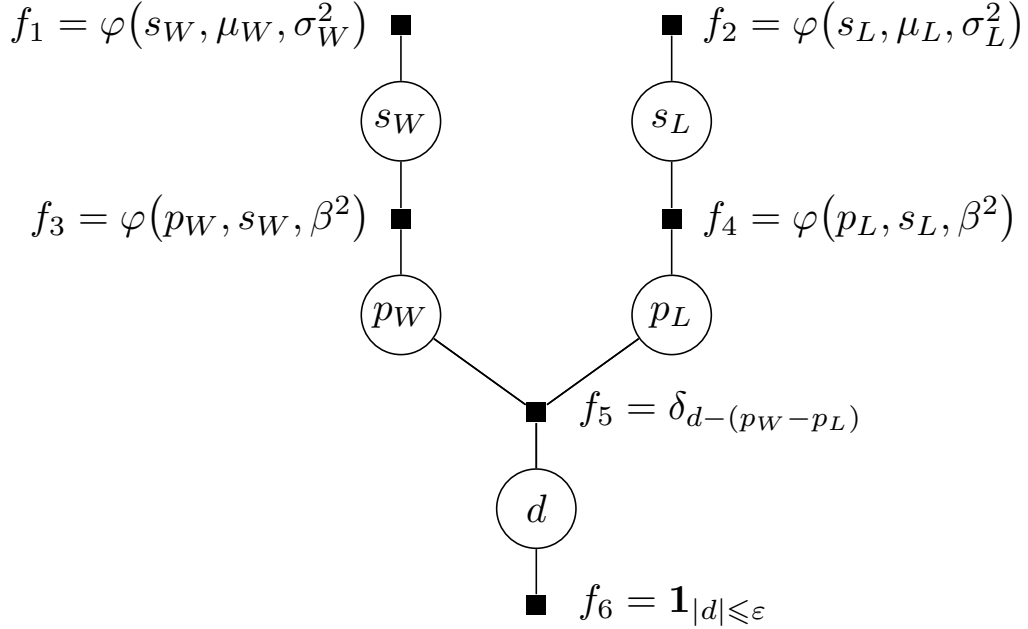


Рис. 3.3. Фактор-граф для модели TrueSkill в случае ничьей двух игроков.

Алгоритм аналогичен предыдущему случаю и различается с ним только в приближении сообщений, не являющихся плотностями нормального распределения.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{V} = \tilde{v} \left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c} \right),$$

$$\tilde{W} = \tilde{w} \left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c} \right),$$

где, как и прежде, $c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}$.

Выпишем маргинальную плотность распределения случайной величины, соответствующей вершине d :

$$P(d) \propto \mathbf{1}_{|d| \leq \varepsilon} \varphi(d, \mu_W - \mu_L, \sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2). \quad (3.6)$$

Приближим данную плотность усеченного нормального распределения с помощью лемм 3.8 и 3.9, то есть заменим $P(d)$ на

$$\tilde{P}(d) = \varphi\left(d, \mu_W - \mu_L + c\tilde{V}, c^2 - c^2\tilde{W}\right).$$

Снова представим эту плотность с точностью до константы в виде произведения сообщений $\tilde{P}(d) \propto \tilde{\mu}_{f_6 \rightarrow d}(d)\mu_{d \rightarrow f_6}(d)$, откуда

$$\tilde{\mu}_{f_6 \rightarrow d}(d) \propto \frac{\tilde{P}(d)}{\mu_{d \rightarrow f_6}(d)} = \frac{\varphi\left(d, \mu_W - \mu_L + c\tilde{V}, c^2 - c^2\tilde{W}\right)}{\varphi(d, \mu_W - \mu_L, c^2)}.$$

Из леммы 3.12 следует, что $1 > \tilde{W} > 0$, поэтому $c^2 > c^2 - c^2\tilde{W} > 0$ и можно воспользоваться леммой 3.2. Далее действуем аналогично предыдущему случаю, в результате чего находим:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(s_W) &= \varphi\left(s_W, \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}\tilde{V}, \sigma_W^2\left(1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}\tilde{W}\right)\right), \\ \tilde{P}(s_L) &= \varphi\left(s_L, \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}\tilde{V}, \sigma_L^2\left(1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}\tilde{W}\right)\right).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Таким образом, получаем следующие формулы для пересчета.

Теорема 3.2. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае ничьей их параметры пересчитываются следующим образом:*

$$\begin{aligned}\mu'_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c}\tilde{V}, & \mu'_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c}\tilde{V}, \\ \sigma'_W &= \sigma_W\sqrt{1 - \frac{\sigma_W^2}{c^2}\tilde{W}}, & \sigma'_L &= \sigma_L\sqrt{1 - \frac{\sigma_L^2}{c^2}\tilde{W}},\end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad \tilde{V} = \tilde{v}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \quad \tilde{W} = \tilde{w}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

3.7. Общий случай

Рассмотрим модель TrueSkill на следующем примере, позволяющем понять схему работы алгоритма в общем случае: первая команда из одного игрока победила, а вторая команда из двух игроков и третья из одного

игрока поделили второе и третье место. Соответствующий фактор-граф изображен на рисунке 3.4.

В этом случае, помимо вершин-переменных s_i и p_i , соответствующих уровням мастерства и силам игроков, вводятся дополнительные переменные t_i , обозначающие силы команд. Из леммы 3.6 следует, что вычислять силу команды из сил составляющих ее игроков можно с помощью произвольной линейной функции, но следуя оригинальной работе [30] мы будем использовать просто их сумму.

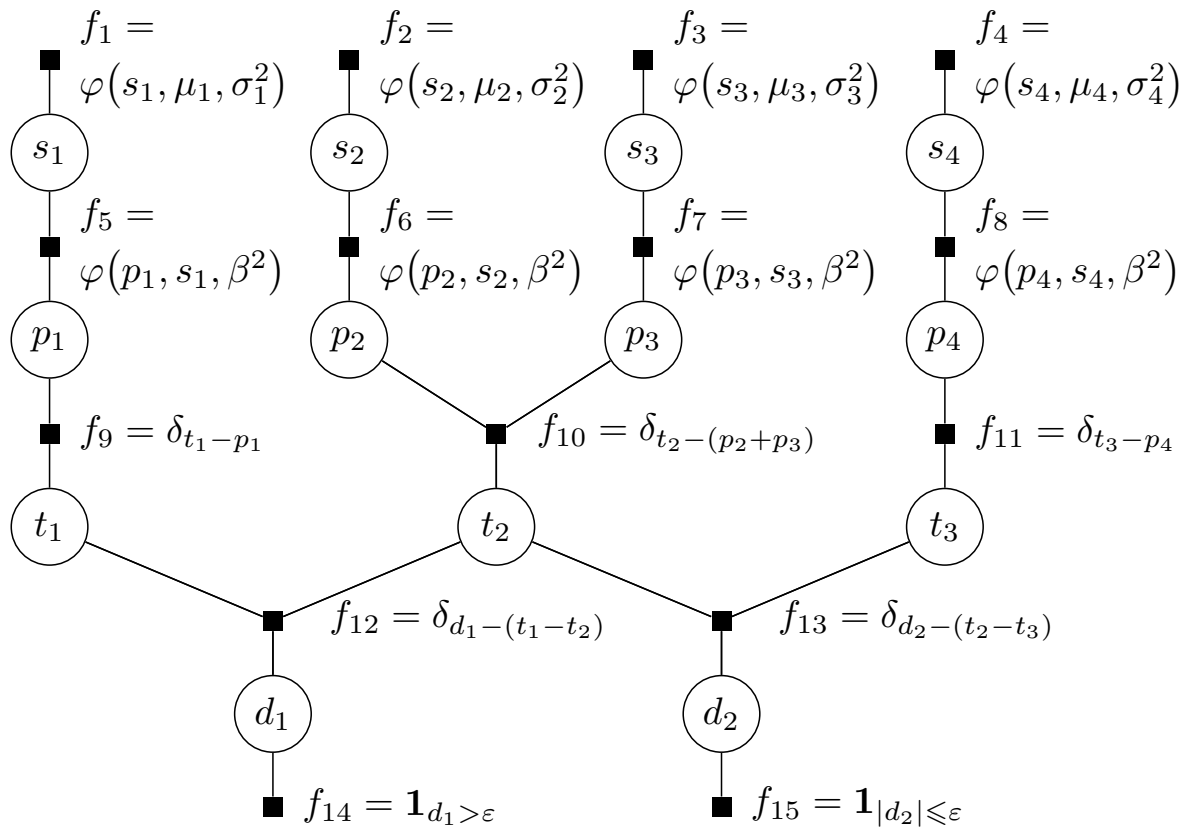


Рис. 3.4. Фактор-граф для модели TrueSkill в случае четырех игроков, объединенных в три команды.

Промоделируем работу алгоритма аналогично разделу 3.5.

Шаг 1.

$$\begin{aligned}\mu_{f_1 \rightarrow s_1}(s_1) &= \varphi(s_1, \mu_1, \sigma_1^2), \\ \mu_{f_2 \rightarrow s_2}(s_2) &= \varphi(s_2, \mu_2, \sigma_2^2), \\ \mu_{f_3 \rightarrow s_3}(s_3) &= \varphi(s_3, \mu_3, \sigma_3^2), \\ \mu_{f_4 \rightarrow s_4}(s_4) &= \varphi(s_4, \mu_4, \sigma_4^2).\end{aligned}$$

Шаг 2.

$$\begin{aligned}\mu_{s_1 \rightarrow f_5}(s_1) &= \varphi(s_1, \mu_1, \sigma_1^2), \\ \mu_{s_2 \rightarrow f_6}(s_2) &= \varphi(s_2, \mu_2, \sigma_2^2), \\ \mu_{s_3 \rightarrow f_7}(s_3) &= \varphi(s_3, \mu_3, \sigma_3^2), \\ \mu_{s_4 \rightarrow f_8}(s_4) &= \varphi(s_4, \mu_4, \sigma_4^2).\end{aligned}$$

Шаг 3.

По лемме 3.3

$$\begin{aligned}\mu_{f_5 \rightarrow p_1}(p_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_1, s_1, \beta^2) \varphi(s_1, \mu_1, \sigma_1^2) ds_1 = \varphi(p_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2), \\ \mu_{f_6 \rightarrow p_2}(p_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_2, s_2, \beta^2) \varphi(s_2, \mu_2, \sigma_2^2) ds_2 = \varphi(p_2, \mu_2, \sigma_2^2 + \beta^2), \\ \mu_{f_7 \rightarrow p_3}(p_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_3, s_3, \beta^2) \varphi(s_3, \mu_3, \sigma_3^2) ds_3 = \varphi(p_3, \mu_3, \sigma_3^2 + \beta^2), \\ \mu_{f_8 \rightarrow p_4}(p_4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_4, s_4, \beta^2) \varphi(s_4, \mu_4, \sigma_4^2) ds_4 = \varphi(p_4, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 4.

$$\begin{aligned}\mu_{p_1 \rightarrow f_9}(p_1) &= \varphi(p_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2), \\ \mu_{p_2 \rightarrow f_{10}}(p_2) &= \varphi(p_2, \mu_2, \sigma_2^2 + \beta^2), \\ \mu_{p_3 \rightarrow f_{10}}(p_3) &= \varphi(p_3, \mu_3, \sigma_3^2 + \beta^2), \\ \mu_{p_4 \rightarrow f_{11}}(p_4) &= \varphi(p_4, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 5.

По лемме 3.6:

$$\begin{aligned}\mu_{f_9 \rightarrow t_1}(t_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_1-p_1} \varphi(p_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2) dp_1 = \varphi(t_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2), \\ \mu_{f_{10} \rightarrow t_2}(t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_2-(p_2+p_3)} \varphi(p_2, \mu_2, \sigma_2^2 + \beta^2) \varphi(p_3, \mu_3, \sigma_3^2 + \beta^2) dp_2 dp_3 = \\ &= \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2), \\ \mu_{f_{11} \rightarrow t_3}(t_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_3-p_4} \varphi(p_4, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2) dp_4 = \varphi(t_3, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 6.

Без учета аппроксимации дальнейшая работа алгоритма проходила бы аналогичным образом. Причем, так как соответствующий фактор-граф является деревом, по каждому ребру сообщения прошли бы в обе стороны по одному разу.

Тем не менее, передающиеся в таком случае сообщения снова не будут являться плотностями нормального распределения, поэтому их необходимо приблизить. Для этого, как и в случае двух игроков, нужно вычислить маргинальные плотности распределения случайных величин, соответствующих вершинам d_i , и приблизить их плотностями нормального распределения. Но так как маргинальная плотность случайной величины, соответствующей вершине d_1 , через сообщения $\mu_{f_{13} \rightarrow t_2}(t_2)$ и $\mu_{t_2 \rightarrow f_{12}}(t_2)$ зависит от маргинальной плотности случайной величины, соответствующей вершине d_2 (и аналогично наоборот), то поступить таким же образом не получится.

Поэтому на данном этапе, согласно алгоритму Expectation Propagation, происходит итеративный обмен сообщениями по кратчайшему пути между вершинами-переменными d_1 и d_2 , пока плотности соответствующих случайных величин не сойдутся к некоторым приближенным значениям.

Проинициализируем сообщения следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_{t_1 \rightarrow f_{12}}(t_1) &= \varphi(t_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2), \\ \mu_{t_2 \rightarrow f_{12}}^{(1)}(t_2) &= \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2), \\ \mu_{t_2 \rightarrow f_{13}}^{(1)}(t_2) &= \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2), \\ \mu_{t_3 \rightarrow f_{13}}(t_3) &= \varphi(t_3, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 7.

По лемме 3.6:

$$\begin{aligned}\mu_{f_{12} \rightarrow d_1}^{(1)}(d_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2) \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2) \times \\ &\quad \times \delta_{d_1 - (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 = \varphi(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 3\beta^2), \\ \mu_{f_{13} \rightarrow d_2}^{(1)}(d_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2) \varphi(t_3, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2) \times \\ &\quad \times \delta_{d_2 - (t_2 - t_3)} dt_2 dt_3 = \varphi(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + 3\beta^2).\end{aligned}$$

Шаг 8.

$$\begin{aligned}\mu_{d_1 \rightarrow f_{14}}^{(1)}(d_1) &= \varphi(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 3\beta^2), \\ \mu_{d_2 \rightarrow f_{15}}^{(1)}(d_2) &= \varphi(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + 3\beta^2).\end{aligned}$$

Теперь, как и в разделе 3.5, приближаем плотности случайных величин, соответствующих вершинам d_1 и d_2 , с помощью лемм 3.8 и 3.9, то есть заменяем

$$\begin{aligned}P^{(1)}(d_1) &\propto \mathbf{1}_{d_1 > \varepsilon} \varphi(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 3\beta^2), \\ P^{(1)}(d_2) &\propto \mathbf{1}_{|d_2| \leq \varepsilon} \varphi(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + 3\beta^2)\end{aligned}$$

на

$$\begin{aligned}\tilde{P}^{(1)}(d_1) &= \varphi(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + c_1 V_1, c_1^2 - c_1^2 W_1), \\ \tilde{P}^{(1)}(d_2) &= \varphi(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + c_2 V_2, c_2^2 - c_2^2 W_2),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 3\beta^2}, & c_2 &= \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + 3\beta^2}, \\
V_1 &= v\left(\frac{\mu_1 - \mu_2 - \mu_3}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), & V_2 &= \tilde{v}\left(\frac{\mu_2 + \mu_3 - \mu_4}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), \\
W_1 &= w\left(\frac{\mu_1 - \mu_2 - \mu_3}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right), & W_2 &= \tilde{w}\left(\frac{\mu_2 + \mu_3 - \mu_4}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда по лемме 3.2

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{f_{14} \rightarrow d_1}^{(1)}(d_1) &\propto \frac{\tilde{P}(d_1)}{\mu_{d_1 \rightarrow f_{14}}^{(1)}(d_1)} = \frac{\varphi(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + c_1 V_1, c_1^2 - c_1^2 W_1)}{\varphi(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, c_1^2)} \propto \\
&\propto \varphi\left(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + c_1 \frac{V_1}{W_1}, c_1^2 \frac{1 - W_1}{W_1}\right), \\
\tilde{\mu}_{f_{15} \rightarrow d_2}^{(1)}(d_2) &\propto \frac{\tilde{P}(d_2)}{\mu_{d_2 \rightarrow f_{15}}^{(1)}(d_2)} = \frac{\varphi(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + c_2 V_2, c_2^2 - c_2^2 W_2)}{\varphi(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4, c_2^2)} \propto \\
&\propto \varphi\left(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + c_2 \frac{V_2}{W_2}, c_2^2 \frac{1 - W_2}{W_2}\right).
\end{aligned}$$

Шаг 9.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{d_1 \rightarrow f_{12}}^{(1)}(d_1) &= \varphi\left(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + c_1 \frac{V_1}{W_1}, c_1^2 \frac{1 - W_1}{W_1}\right), \\
\tilde{\mu}_{d_2 \rightarrow f_{13}}^{(1)}(d_2) &= \varphi\left(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + c_2 \frac{V_2}{W_2}, c_2^2 \frac{1 - W_2}{W_2}\right).
\end{aligned}$$

По лемме 3.6

$$\begin{aligned}
\mu_{f_{12} \rightarrow t_2}^{(1)}(t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{d_1 - (t_1 - t_2)} \varphi\left(d_1, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + c_1 \frac{V_1}{W_1}, c_1^2 \frac{1 - W_1}{W_1}\right) \times \\
&\times \varphi(t_1, \mu_1, \sigma_1^2 + \beta^2) dt_1 dd_1 = \varphi\left(t_2, \mu_2 + \mu_3 - c_1 \frac{V_1}{W_1}, \sigma_1^2 + \beta^2 + c_1^2 \frac{1 - W_1}{W_1}\right), \\
\mu_{f_{13} \rightarrow t_2}^{(1)}(t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{d_2 - (t_2 - t_3)} \varphi\left(d_2, \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + c_2 \frac{V_2}{W_2}, c_2^2 \frac{1 - W_2}{W_2}\right) \times \\
&\times \varphi(t_3, \mu_4, \sigma_4^2 + \beta^2) dt_3 dd_2 = \varphi\left(t_2, \mu_2 + \mu_3 + c_2 \frac{V_2}{W_2}, \sigma_4^2 + \beta^2 + c_2^2 \frac{1 - W_2}{W_2}\right).
\end{aligned}$$

Шаг 10.

По лемме 3.1

$$\begin{aligned}\mu_{t_2 \rightarrow f_{12}}^{(2)}(t_2) &= \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2) \times \\ &\quad \times \varphi\left(t_2, \mu_2 + \mu_3 + c_2 \frac{V_2}{W_2}, \sigma_4^2 + \beta^2 + c_2^2 \frac{1 - W_2}{W_2}\right) \propto \\ &\propto \varphi\left(t_2, \mu_2 + \mu_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2}{c_2} V_2, (\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2) \left(1 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2}{c_2^2} W_2\right)\right), \\ \mu_{t_2 \rightarrow f_{13}}^{(2)}(t_2) &= \varphi(t_2, \mu_2 + \mu_3, \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2) \times \\ &\quad \times \varphi\left(t_2, \mu_2 + \mu_3 - c_1 \frac{V_1}{W_1}, \sigma_1^2 + \beta^2 + c_1^2 \frac{1 - W_1}{W_1}\right) \propto \\ &\propto \varphi\left(t_2, \mu_2 + \mu_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2}{c_1} V_1, (\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2) \left(1 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\beta^2}{c_1^2} W_1\right)\right).\end{aligned}$$

Получив новые сообщения $\mu_{t_2 \rightarrow f_{12}}^{(2)}(t_2)$ и $\mu_{t_2 \rightarrow f_{13}}^{(2)}(t_2)$, можно повторять шаги 7–10 до сходимости маргинальных плотностей случайных величин, соответствующих вершинам d_1 и d_2 .

После того, как сообщения $\tilde{\mu}_{f_{14} \rightarrow d_1}$ и $\tilde{\mu}_{f_{15} \rightarrow d_2}$ сошлись к некоторым значениям, остается аналогично разделу 3.5 подняться по дереву до переменных s_i и перемножить сообщения, отправленные по соответствующим им ребрам, получив таким образом новые значения уровней мастерства игроков.

3.8. Свойства модели

Докажем некоторые свойства модели TrueSkill. Из главы 2 известно, что в модели Эло при встрече двух игроков и победе одного из них рейтинг победителя всегда возрастает, а рейтинг проигравшего убывает на точно такую же величину. Посмотрим, как изменяются рейтинги в модели TrueSkill в такой ситуации.

Теорема 3.3. *В модели TrueSkill для двух игроков в случае победы одного из них рейтинг победителя возрастает, а рейтинг проигравшего*

убывает, то есть

$$\tilde{\mu}_W > \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L < \mu_L$$

при победе игрока W над игроком L .

Доказательство. Из формул (3.5) новые рейтинги обоих игроков равняются:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c} V, \\ \tilde{\mu}_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c} V, \end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad V = v\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

По лемме 3.10 при всех $x, l \in \mathbb{R}$

$$v(x, l) = \frac{\varphi(x - l)}{\Phi(x - l)} > 0,$$

поэтому $c, V > 0$. Следовательно,

$$\tilde{\mu}_W > \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L < \mu_L,$$

что и требовалось. ■

При этом, в отличие от модели Эло, величины, на которые изменяются рейтинги, уже различны и зависят от соответствующих дисперсий.

Рассмотрим теперь случай ничьей при встрече двух игроков.

Теорема 3.4. Пусть до игры рейтинг игрока W был выше, чем рейтинг игрока L , то есть $\mu_W > \mu_L$. Тогда в модели TrueSkill для двух игроков в случае их ничьей рейтинг игрока L возрастает, а рейтинг игрока W убывает, то есть

$$\tilde{\mu}_W < \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L > \mu_L.$$

Доказательство. Из выражения (3.7) новые рейтинги обоих игроков равняются:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c} \tilde{V}, \\ \tilde{\mu}_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c} \tilde{V}, \end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad \tilde{V} = \tilde{v}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right).$$

По определению **3.1**:

$$\tilde{v}(x, l, r) = -\frac{\varphi(r-x) - \varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)}.$$

Так как $\mu_W > \mu_L$ и $\varepsilon > 0$, то для того, чтобы найти знак \tilde{V} , достаточно найти знак $\tilde{v}(x, -r, r)$ при $x, r > 0$.

В силу возрастания функции $\Phi(x)$, для этого достаточно оценить

$$-(\varphi(r-x) - \varphi(-r-x)).$$

Так как $x, r > 0$, то $|r-x| < |-r-x|$, поэтому $\varphi(r-x) > \varphi(-r-x)$. Следовательно, $\tilde{v}(x, -r, r) < 0$, откуда $\tilde{V} < 0$ и $\tilde{\mu}_W < \mu_W$, $\tilde{\mu}_L > \mu_L$. ■

Теорема 3.5. Пусть до игры рейтинги игроков W и L были равны, то есть $\mu_W = \mu_L$. Тогда в модели TrueSkill для двух игроков в случае ничьей их рейтинги не изменяются:

$$\tilde{\mu}_W = \mu_W, \quad \tilde{\mu}_L = \mu_L.$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме **3.4**,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_W &= \mu_W + \frac{\sigma_W^2}{c} \tilde{V}, \\ \tilde{\mu}_L &= \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{c} \tilde{V}, \end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}, \quad \tilde{V} = \tilde{v}\left(\frac{\mu_W - \mu_L}{c}, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right),$$

$$\tilde{v}(x, l, r) = -\frac{\varphi(r-x) - \varphi(l-x)}{\Phi(r-x) - \Phi(l-x)}.$$

Так как $\mu_W = \mu_L$, то $\tilde{V} = \tilde{v}(0, -\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c})$. В силу симметричности стандартного нормального распределения $\varphi(\frac{\varepsilon}{c}) = \varphi(-\frac{\varepsilon}{c})$, откуда $\tilde{V} = 0$ и $\tilde{\mu}_W = \mu_W$, $\tilde{\mu}_L = \mu_L$, что и требовалось. ■

Рассмотрим теперь общий случай и докажем, что в результате пересчета рейтинги игроков каждой команды изменяются в одну и ту же сторону.

Теорема 3.6. *В модели TrueSkill рейтинги игроков каждой команды в результате пересчета изменяются в одну и ту же сторону.*

Доказательство. Рассмотрим одну из участвующих команд, состоящую из l игроков, пронумерованных от 1 до l , и посмотрим, как изменится в ней рейтинг i -го игрока. Часть фактор-графа, соответствующая данной команде, изображена на рисунке 3.5.

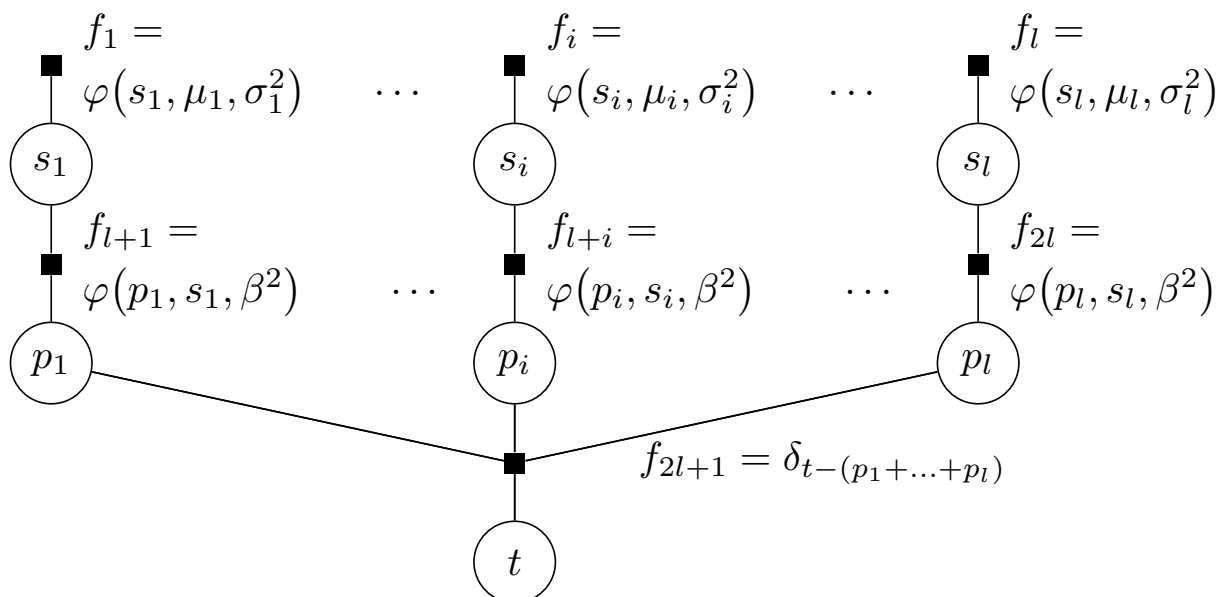


Рис. 3.5. Часть фактор-графа для модели TrueSkill, соответствующая одной команде.

Обозначим множество сил всех игроков, кроме i -го, через $\mathbf{p}_i = \{p_j | j \neq i\}$.

Будем рассматривать работу алгоритма, начиная с шага, на котором передается обратное сообщение $\mu_{t \rightarrow f_{2l+1}}(t)$. Согласно схеме работы алгоритма, это сообщение будет равняться плотности некоторого нормального распределения $\varphi(t, \mu_t, \sigma_t^2)$.

Шаг 1'.

$$\mu_{t \rightarrow f_{2l+1}}(t) = \varphi(t, \mu_t, \sigma_t^2).$$

Шаг 2'.

По лемме 3.6:

$$\begin{aligned}\mu_{f_{2l+1} \rightarrow p_i}(p_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{2l+1}(t, p_i, \mathbf{p}_i) \mu_{t \rightarrow f_{2l+1}}(t) \prod_{\substack{1 \leq j \leq l, \\ j \neq i}} \mu_{p_j \rightarrow f_{2l+1}}(p_j) dt d\mathbf{p}_i = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t - \sum_{j=1}^l p_j} \varphi(t, \mu_t, \sigma_t^2) \prod_{j \neq i} \varphi(p_j, \mu_j, \sigma_j^2 + \beta^2) dt d\mathbf{p}_i = \\ &= \varphi\left(p_i, \mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j, \sigma_t^2 + \sum_{j \neq i} (\sigma_j^2 + \beta^2)\right).\end{aligned}$$

Шаг 3'.

$$\mu_{p_i \rightarrow f_{l+i}}(p_i) = \varphi\left(p_i, \mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j, \sigma_t^2 + \sum_{j \neq i} (\sigma_j^2 + \beta^2)\right).$$

Шаг 4'.

По утверждению 3.1 и лемме 3.3:

$$\begin{aligned}\mu_{f_{l+i} \rightarrow s_i}(s_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{l+i}(p_i, s_i) \mu_{p_i \rightarrow f_{l+i}}(p_i) dp_i = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_i, p_i, \beta^2) \varphi\left(p_i, \mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j, \sigma_t^2 + \sum_{j \neq i} (\sigma_j^2 + \beta^2)\right) dp_i = \\ &= \varphi\left(s_i, \mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j, \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i} (\sigma_j^2 + \beta^2)\right).\end{aligned}$$

Шаг 5'.

$$\mu_{s_i \rightarrow f_i}(s_i) = \varphi\left(s_i, \mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j, \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i} (\sigma_j^2 + \beta^2)\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{P}(s_i) &\propto \mu_{f_i \rightarrow s_i}(s_i) \mu_{s_i \rightarrow f_i}(s_i) = \\ &= \varphi(s_i, \mu_i, \sigma_i^2) \varphi\left(s_i, \mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j, \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i} (\sigma_j^2 + \beta^2)\right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Пользуясь леммой 3.1, сравним значения μ_i до игры и $\tilde{\mu}_i$ после, вычислив для этого знак их разности:

$$\begin{aligned}
& \text{sgn}(\tilde{\mu}_i - \mu_i) = \\
& = \text{sgn}\left(\frac{\mu_i\left(\sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)\right) + \left(\mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j\right)\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)} - \mu_i\right) = \\
& = \text{sgn}\left(\mu_i\left(\sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)\right) + \left(\mu_t - \sum_{j \neq i} \mu_j\right)\sigma_i^2 - \right. \\
& \quad \left. - \mu_i\left(\sigma_i^2 + \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)\right)\right) = \\
& = \text{sgn}\left(\mu_t\sigma_i^2 - \sigma_i^2 \sum_{j \neq i} \mu_j - \sigma_i^2\mu_i\right) = \\
& = \text{sgn}\left(\mu_t - \sum_{1 \leq j \leq l} \mu_j\right).
\end{aligned}$$

В силу независимости данного выражения от i , получаем требуемое утверждение. ■

Наконец, докажем в общем случае, что дисперсии игроков всегда уменьшаются.

Теорема 3.7. *В модели TrueSkill дисперсии игроков каждой команды в результате пересчета уменьшаются.*

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями предыдущей теоремы 3.6, а именно выражением (3.8), и сравним значения дисперсии σ_i^2 до игры

и $\tilde{\sigma}_i^2$ после, вычислив для этого знак их разности:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2) = \\
& = \operatorname{sgn}\left(\frac{\sigma_i^2(\sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2))}{\sigma_i^2 + \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)} - \sigma_i^2\right) = \\
& = \operatorname{sgn}\left(\sigma_i^2\left(\sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)\right) - \right. \\
& \quad \left. - \sigma_i^2\left(\sigma_i^2 + \sigma_t^2 + \beta^2 + \sum_{j \neq i}(\sigma_j^2 + \beta^2)\right)\right) = \\
& = \operatorname{sgn}(-\sigma_i^4) = -1.
\end{aligned}$$

Следовательно, для любого i получаем $\tilde{\sigma}_i^2 < \sigma_i^2$, то есть дисперсии всех игроков уменьшаются. ■

3.9. Оценка аппроксимации для двух игроков

Хотя в общем случае произвольного количества игроков, разбитых по нескольким командам, часть сообщений в явном виде вычислить невозможно, и необходима аппроксимация, в рассмотренном случае двух игроков вычисления можно довести до конца и сравнить точный и приближенный результаты.

Рассмотрим фактор-граф, изображенный на рисунке 3.2 и соответствующий случаю двух игроков при победе одного из них.

Как уже было найдено, на пятом шаге алгоритма передаются следующие сообщения:

$$\begin{aligned}
\mu_{f_5 \rightarrow p_W}(p_W) &= \Phi\left(\frac{p_W - \varepsilon - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2 + \beta^2}}\right), \\
\mu_{f_5 \rightarrow p_L}(p_L) &= 1 - \Phi\left(\frac{p_L + \varepsilon - \mu_W}{\sqrt{\sigma_W^2 + \beta^2}}\right).
\end{aligned}$$

Продemonстрируем дальнейшую работу алгоритма без учета аппроксимации.

Шаг 6'.

Передаем сообщения дальше:

$$\begin{aligned}\mu_{p_W \rightarrow f_3}(p_W) &= \Phi\left(\frac{p_W - \varepsilon - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2 + \beta^2}}\right), \\ \mu_{p_L \rightarrow f_4}(p_L) &= 1 - \Phi\left(\frac{p_L + \varepsilon - \mu_W}{\sqrt{\sigma_W^2 + \beta^2}}\right).\end{aligned}$$

Шаг 7'.

Для вычисления сообщений воспользуемся утверждением 3.1 и леммой 3.4:

$$\begin{aligned}\mu_{f_3 \rightarrow s_W}(s_W) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(p_W, s_W) \mu_{p_W \rightarrow f_3}(p_W) dp_W = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_W, p_W, \beta^2) \Phi\left(\frac{p_W - \varepsilon - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2 + \beta^2}}\right) dp_W = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_L + \varepsilon - s_W}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right), \\ \mu_{f_4 \rightarrow s_L}(s_L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_4(p_L, s_L) \mu_{p_L \rightarrow f_4}(p_L) dp_L = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_L, p_L, \beta^2) \left(1 - \Phi\left(\frac{p_L + \varepsilon - \mu_W}{\sqrt{\sigma_W^2 + \beta^2}}\right)\right) dp_L = \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_W - \varepsilon - s_L}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right).\end{aligned}$$

Шаг 8'.

Снова передаем сообщения дальше:

$$\begin{aligned}\mu_{s_W \rightarrow f_1}(s_W) &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_L + \varepsilon - s_W}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right), \\ \mu_{s_L \rightarrow f_2}(s_L) &= \Phi\left(\frac{\mu_W - \varepsilon - s_L}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right).\end{aligned}$$

Пользуясь симметрией, представим эти сообщения следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_{s_W \rightarrow f_1}(s_W) &= \Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right), \\ \mu_{s_L \rightarrow f_2}(s_L) &= 1 - \Phi\left(\frac{s_L - \mu_W + \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right).\end{aligned}$$

Вычислим апостериорные плотности распределения случайных величин, соответствующих s_W и s_L , перемножив и нормализовав сообщения, отправленные в обе стороны по ребрам, инцидентным этим вершинам:

$$P(s_W) \propto \mu_{f_1 \rightarrow s_W}(s_W) \mu_{s_W \rightarrow f_1}(s_W) = \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) \Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right),$$

$$P(s_L) \propto \mu_{f_1 \rightarrow s_L}(s_L) \mu_{s_W \rightarrow f_1}(s_W) = \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) \left(1 - \Phi\left(\frac{s_L - \mu_W + \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right)\right).$$

Для нахождения нормировочных констант воспользуемся леммой 3.4:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) \Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right) ds_W &= \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_L + \varepsilon - \mu_W}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2 + \sigma_W^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) \left(1 - \Phi\left(\frac{s_L - \mu_W + \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right)\right) ds_L &= \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_W - \varepsilon - \mu_L}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2 + \sigma_L^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(s_W) = \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) \Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right), \quad (3.9a)$$

$$P(s_L) = \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) \Phi\left(\frac{-s_L + \mu_W - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right). \quad (3.9b)$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3.8. *В модели TrueSkill для двух игроков W и L в случае победы игрока W и отсутствия аппроксимации точные апостериорные плотности распределения их уровней мастерства выглядят следующим образом:*

$$P(s_W) = \varphi(s_W, \mu_W, \sigma_W^2) \Phi\left(\frac{s_W - \mu_L - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_L^2 + 2\beta^2}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right),$$

$$P(s_L) = \varphi(s_L, \mu_L, \sigma_L^2) \Phi\left(\frac{-s_L + \mu_W - \varepsilon}{\sqrt{\sigma_W^2 + 2\beta^2}}\right) / \Phi\left(\frac{\mu_W - \mu_L - \varepsilon}{c}\right),$$

где

$$c = \sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_L^2 + 2\beta^2}.$$

Сравним точные значения функции $P(s_W)$ (3.9a) и ее приближения $\tilde{P}(s_W)$ (3.5a). Из работы алгоритма следует, что первые два момента этих распределений совпадают, то есть для случайной величины X_W с плотностью $P(s_W)$ и случайной величины \tilde{X}_W с плотностью $\tilde{P}(s_W)$ выполнено:

$$\mathbf{E}X_W = \mathbf{E}\tilde{X}_W, \quad \mathbf{Var}X_W = \mathbf{Var}\tilde{X}_W.$$

В качестве простой оценки аппроксимации можно сравнить третьи моменты этих случайных величин. Численное моделирование показывает, что приближение оказывается хуже при $\sigma_L = 0$ и $\varepsilon = 0$. Для упрощения вычислений предположим также, что $\mu_W = \mu_L = 0$. Обозначим для краткости σ_W через σ . Так как по лемме 3.10

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \frac{\varphi(0)}{\Phi(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ w(0, 0) &= v(0, 0)^2 = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

то случайные величины X_W и \tilde{X}_W имеют следующие скошенную нормальную и обычную нормальную плотности соответственно:

$$P_0(s_W) = \varphi(s_W, 0, \sigma^2) \frac{\Phi\left(\frac{s_W}{\sqrt{2}\beta}\right)}{\Phi(0)} = \frac{2}{\sigma} \Phi\left(\frac{s_W}{\sqrt{2}\beta}\right) \varphi\left(\frac{s_W}{\sigma}\right), \quad (3.10a)$$

$$\tilde{P}_0(s_W) = \varphi\left(s_W, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + 2\beta^2}}, \sigma^2 - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma^4}{\sigma^2 + 2\beta^2}\right). \quad (3.10b)$$

Обозначим третьи моменты рассматриваемых случайных величин через $M_3 = \mathbf{E}X_W^3$ и $\tilde{M}_3 = \mathbf{E}\tilde{X}_W^3$, и вычислим их отношение.

Лемма 3.15. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_L = \varepsilon = 0$, $\sigma_W = \sigma$, тогда

$$\tilde{M}_3 = \frac{\sqrt{2}(3\pi - 4)\sigma^6 + 6\sqrt{2}\pi\beta^2\sigma^4}{\pi^{3/2}(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}}.$$

Доказательство. Действительно, из выражения (3.10b) по лемме 3.5 имеем:

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_3 &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + 2\beta^2}} \right)^3 + 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + 2\beta^2}} \left(\sigma^2 - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma^4}{\sigma^2 + 2\beta^2} \right) = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sigma^6 + 3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sigma^4 (\sigma^2 + 2\beta^2) - 3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sigma^6}{(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}(3\pi - 4)\sigma^6 + 6\sqrt{2}\pi\beta^2\sigma^4}{\pi^{3/2}(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Лемма 3.16. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_L = \varepsilon = 0$, $\sigma_W = \sigma$, тогда

$$M_3 = \frac{2\sqrt{2}\sigma^4(\sigma^2 + 3\beta^2)}{\sqrt{\pi}(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}}.$$

Доказательство. Из выражения (3.10a) по определению

$$M_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_W^3 \frac{2}{\sigma} \Phi\left(\frac{s_W}{\sqrt{2}\beta}\right) \varphi\left(\frac{s_W}{\sigma}\right) ds_W.$$

Произведем следующую замену переменных: $s_W = \sigma x$. Тогда

$$M_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \sigma^4 \frac{2}{\sigma} \Phi\left(\frac{\sigma x}{\sqrt{2}\beta}\right) \varphi(x) dx = 2\sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \Phi(\lambda x) \varphi(x) dx,$$

где $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\beta}$.

Рассмотрим данный интеграл как функцию от λ :

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \Phi(\lambda x) \varphi(x) dx,$$

и вычислим ее производную:

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \varphi(\lambda x) \varphi(x) dx.$$

По лемме 3.1

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x) \varphi(x) &= \frac{1}{\lambda} \varphi\left(x, 0, \frac{1}{\lambda^2}\right) \varphi(x, 0, 1) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \varphi\left(0, 0, 1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \varphi\left(x, 0, \frac{1}{\lambda^2 + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda^2 + 1)}} \varphi\left(x, 0, \frac{1}{\lambda^2 + 1}\right),\end{aligned}$$

откуда по лемме 3.5

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda^2 + 1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \varphi\left(x, 0, \frac{1}{\lambda^2 + 1}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda^2 + 1)}} \frac{3}{(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2 + 1)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы проинтегрировать теперь данное выражение по λ , выполним замену $\lambda = \tan \theta$. Тогда по свойствам тригонометрических функций $\lambda^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ и $d\lambda = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2 + 1)^{5/2}} d\lambda &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\cos^5 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int \cos^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \int \cos \theta d\theta \right) = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \sin \theta \right) + C. \end{aligned}$$

Так как $\theta = \arctan \lambda$ и $\sin(\arctan \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$, $\cos(\arctan \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$, то

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2 + 1)^{5/2}} d\lambda &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \right) + C = \\ &= \frac{\lambda + 2\lambda(\lambda^2 + 1)}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2 + 1)^{3/2}} + C = \frac{\lambda(2\lambda^2 + 3)}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2 + 1)^{3/2}} + C. \end{aligned}$$

Для нахождения константы интегрирования вычислим значение $I(0)$, используя лемму 3.5:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \Phi(0) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \varphi(x) dx = 0,$$

откуда следует, что $C = 0$.

Подставляя $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}}$, окончательно получаем, что

$$M_3 = 2\sigma^3 \frac{\lambda(2\lambda^2 + 3)}{\sqrt{2\pi}(\lambda^2 + 1)^{3/2}} = 2\sigma^3 \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}}(2\frac{\sigma^2}{2\beta^2} + 3)}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma^2}{2\beta^2} + 1\right)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}\sigma^4(\sigma^2 + 3\beta^2)}{\sqrt{\pi}(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}}.$$

■

Теперь можно найти отношение $\frac{\widetilde{M}_3}{M_3}$ и оценить его сверху и снизу.

Теорема 3.9. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_L = \varepsilon = 0$, $\sigma_W = \sigma$, тогда

$$\frac{\widetilde{M}_3}{M_3} = \frac{(3\pi - 4)\sigma^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma^2 + 3\beta^2)},$$

причем

$$1 > \frac{\widetilde{M}_3}{M_3} \geq \frac{3\pi - 4}{2\pi} \approx 0.86.$$

Доказательство. Из лемм 3.15 и 3.16 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{M}_3}{M_3} &= \frac{\sigma^4(\sqrt{2}(3\pi - 4)\sigma^2 + 6\sqrt{2}\pi\beta^2)}{\pi^{3/2}(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}} \times \frac{\sqrt{\pi}(\sigma^2 + 2\beta^2)^{3/2}}{2\sqrt{2}\sigma^4(\sigma^2 + 3\beta^2)} = \\ &= \frac{(3\pi - 4)\sigma^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma^2 + 3\beta^2)} = 1 + \frac{(\pi - 4)\sigma^2}{2\pi(\sigma^2 + 3\beta^2)} = 1 + \frac{\pi - 4}{2\pi(1 + 3\widetilde{\lambda})}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{\lambda} = \frac{\beta^2}{\sigma^2} > 0$.

Пользуясь положительностью $\widetilde{\lambda}$, получаем оценки

$$0 > \frac{\pi - 4}{2\pi(1 + 3\widetilde{\lambda})} \geq \frac{\pi - 4}{2\pi},$$

откуда и следует требуемое утверждение. ■

Сравнение точного значения функции $P_0(s_W)$ (3.9a) и ее приближения $\widetilde{P}_0(s_W)$ (3.5a) при $\sigma = 5$, $\beta = 1$ произведено на рисунке 3.6.

Аналогично сравним точные значения функции $P(s_L)$ (3.9b) и ее приближения $\widetilde{P}(s_L)$ (3.5b). Пусть $\sigma_W = 0$, $\varepsilon = 0$, $\mu_W = \mu_L = 0$, обозначим также σ_L через σ_* и третьи моменты случайных величин с плотностями $P(s_L)$ и $\widetilde{P}(s_L)$ через M_3^* и \widetilde{M}_3^* соответственно. Выпишем плотности в этом случае:

$$P_0(s_L) = \varphi(s_L, 0, \sigma_*^2) \frac{\Phi\left(\frac{-s_L}{\sqrt{2}\beta}\right)}{\Phi(0)} = \frac{2}{\sigma_*} \Phi\left(-\frac{s_L}{\sqrt{2}\beta}\right) \varphi\left(\frac{s_L}{\sigma_*}\right), \quad (3.11a)$$

$$\widetilde{P}_0(s_L) = \varphi\left(s_L, -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_*^2}{\sqrt{\sigma_*^2 + 2\beta^2}}, \sigma_*^2 - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_*^4}{\sigma_*^2 + 2\beta^2}\right), \quad (3.11b)$$

и докажем соответствующие утверждения.

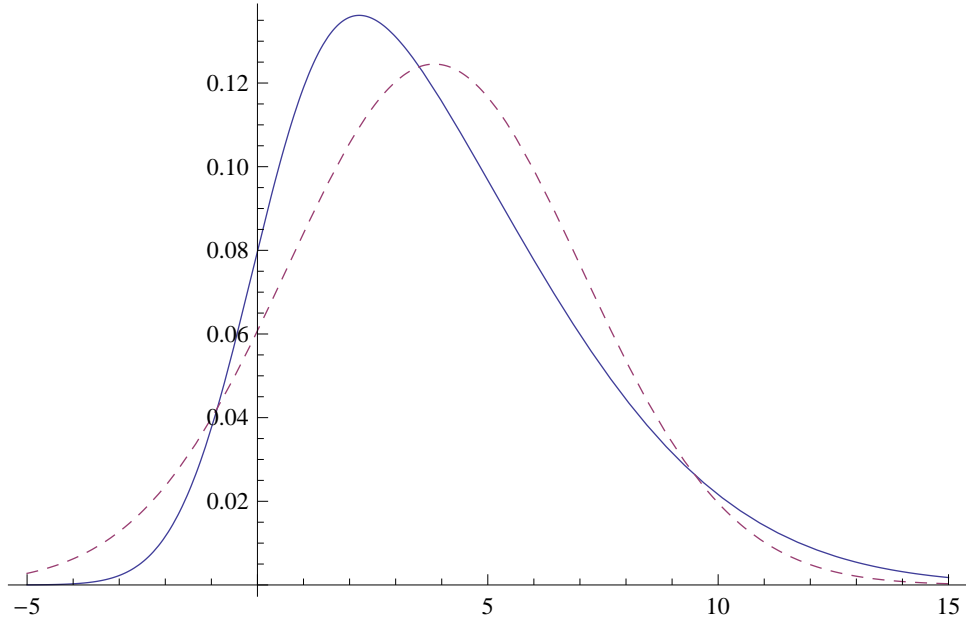


Рис. 3.6. Функция $P_0(s_W)$ при точном вычислении (сплошной линией) и функция $\tilde{P}_0(s_W)$ при аппроксимации нормальным распределением (пунктиром) в случае $\mu_W = \mu_L = \sigma_L = \varepsilon = 0$, $\sigma_W = 5$, $\beta = 1$.

Лемма 3.17. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_W = \varepsilon = 0$, $\sigma_L = \sigma_*$, тогда

$$\tilde{M}_3^* = -\frac{\sqrt{2}(3\pi - 4)\sigma_*^6 + 6\sqrt{2}\pi\beta^2\sigma_*^4}{\pi^{3/2}(\sigma_*^2 + 2\beta^2)^{3/2}}.$$

Доказательство. Из выражения (3.11b) по лемме 3.5 имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_3^* &= \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_*^2}{\sqrt{\sigma_*^2 + 2\beta^2}}\right)^3 - 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_*^2}{\sqrt{\sigma_*^2 + 2\beta^2}} \left(\sigma_*^2 - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_*^4}{\sigma_*^2 + 2\beta^2}\right) = \\ &= \frac{-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sigma_*^6 - 3\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sigma_*^4 (\sigma_*^2 + 2\beta^2) + 3\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sigma_*^6}{(\sigma_*^2 + 2\beta^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}(3\pi - 4)\sigma_*^6 + 6\sqrt{2}\pi\beta^2\sigma_*^4}{\pi^{3/2}(\sigma_*^2 + 2\beta^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

■

Лемма 3.18. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_W = \varepsilon = 0$, $\sigma_L = \sigma_*$, тогда

$$M_3^* = -\frac{2\sqrt{2}\sigma_*^4(\sigma_*^2 + 3\beta^2)}{\sqrt{\pi}(\sigma_*^2 + 2\beta^2)^{3/2}}.$$

Доказательство. Из выражения (3.11a) по определению

$$\begin{aligned} M_3^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_L^3 \frac{2}{\sigma_*} \Phi\left(-\frac{s_L}{\sqrt{2}\beta}\right) \varphi\left(\frac{s_L}{\sigma_*}\right) ds_L = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_L^3 \varphi(s_L, 0, \sigma_*^2) ds_L - \int_{-\infty}^{+\infty} s_L^3 \frac{2}{\sigma_*} \Phi\left(\frac{s_L}{\sqrt{2}\beta}\right) \varphi\left(\frac{s_L}{\sigma_*}\right) ds_L, \end{aligned}$$

так как $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

По лемме 3.5 первый интеграл равняется нулю, а второй был вычислен в лемме 3.16, откуда

$$M_3^* = -\frac{2\sqrt{2}\sigma_*^4(\sigma_*^2 + 3\beta^2)}{\sqrt{\pi}(\sigma_*^2 + 2\beta^2)^{3/2}},$$

что и требовалось. ■

Теорема 3.10. Пусть $\mu_W = \mu_L = \sigma_W = \varepsilon = 0$, $\sigma_L = \sigma_*$, тогда

$$\frac{\widetilde{M}_3^*}{M_3^*} = \frac{(3\pi - 4)\sigma_*^2 + 6\pi\beta^2}{2\pi(\sigma_*^2 + 3\beta^2)},$$

причем

$$1 > \frac{\widetilde{M}_3^*}{M_3^*} \geq \frac{3\pi - 4}{2\pi} \approx 0.86,$$

Доказательство. Из лемм 3.15, 3.17 и 3.16, 3.18 следует, что выражения для \widetilde{M}_3 и \widetilde{M}_3^* (и аналогично M_3 и M_3^*) совпадают с точностью до знака при замене σ на σ_* .

Поэтому требуемое утверждение прямо следует из теоремы 3.9. ■

3.10. Параметры модели

Как было доказано в теореме 3.7, в рассматриваемой модели дисперсия каждого игрока после игры уменьшается, поэтому после нескольких игр его рейтинг перестает сильно изменяться.

В реальности же уровень мастерства игрока зависит от времени — например, в результате накопления опыта он поднимается, а после длительного отсутствия тренировок опускается. Для того, чтобы учесть этот эффект, в модель TrueSkill можно ввести дополнительные фактор-вершины

$\varphi(s_{i,j}, s_{i,j-1}, \gamma^2)$, которые увеличивают дисперсию i -го игрока на γ^2 (где γ — некоторая константа) и не дают ей приблизиться к нулю.

Таким образом, в модели TrueSkill присутствуют следующие параметры: начальные значения рейтинга и стандартного отклонения μ_0, σ_0 , число ε из условия ничьей между командами, константы β, γ и функция вычисления силы команды, по умолчанию равная сумме сил входящих в нее игроков.

Наиболее подходящие значения параметров зависят от ситуации, в которой применяется алгоритм. Авторы оригинальной статьи [30] использовали следующие значения для онлайн-сервиса многопользовательских игр Xbox Live: $\mu_0 = 25$, $\sigma_0 = \frac{1}{3}\mu_0$, $\beta = \frac{1}{2}\sigma_0$ и $\gamma = \frac{1}{100}\sigma_0$.

Значение оставшейся переменной ε связано с вероятностью ничьей между двумя сравниваемыми командами и зависит от их размеров.

Предположим, что в партии участвуют два игрока с одинаковыми уровнями мастерства, то есть $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Из формулы (3.6) известно, что тогда $p_1 - p_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2) = \mathcal{N}(0, 2\beta^2)$.

По определению условие ничьей записывается как $|p_1 - p_2| \leq \varepsilon$, поэтому вероятность ничьей между двумя игроками с одинаковыми уровнями мастерства равняется

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x, 0, 2\beta^2) dx = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\beta}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2}\beta}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\beta}\right) - 1.$$

Пусть теперь первая команда состоит из N_1 игроков, а вторая из N_2 игроков, тогда сила первой команды $t_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \dots + \mu_{N_1}, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_{N_1}^2 + N_1\beta^2)$, и сила второй команды $t_2 \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_1 + \dots + \tilde{\mu}_{N_2}, \tilde{\sigma}_1^2 + \dots + \tilde{\sigma}_{N_2}^2 + N_2\beta^2)$, где $s_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\tilde{s}_i \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i^2)$ — уровни мастерства i -го игрока из первой и второй команд соответственно.

Отсюда аналогично получаем, что при $\mu_1 + \dots + \mu_{N_1} = \tilde{\mu}_1 + \dots + \tilde{\mu}_{N_2}$ и $\sigma_i = \tilde{\sigma}_j = 0$ для всех возможных i, j , верно равенство $t_1 - t_2 \sim \mathcal{N}(0, N_1\beta^2 + N_2\beta^2)$, откуда вероятность ничьей

$$\begin{aligned} P_{\text{draw}} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x, 0, (N_1 + N_2)\beta^2) dx = \\ &= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{N_1 + N_2}\beta}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{N_1 + N_2}\beta}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{N_1 + N_2}\beta}\right) - 1, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой из [30]. Отсюда следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{N_1 + N_2} \beta \Phi^{-1} \left(\frac{P_{\text{draw}} + 1}{2} \right),$$

где P_{draw} можно вычислить эмпирически по доступным данным как вероятность ничьей между двумя командами одинакового уровня мастерства.²⁹

Важной задачей в многопользовательских онлайн-играх является также подбор таких оппонентов, чтобы процесс игры был наиболее увлекательным и интересным. Если уровни мастерства соперников сильно несбалансированы, то проигрывающему игроку такая ситуация явно не понравится, поэтому главным критерием подбора оппонентов является прогнозируемая вероятность ничьей.

Более конкретно, в оригинальной статье [30] в качестве стратегии подбора соперников предлагается максимизировать величину q_{draw} , а именно предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ отношения вероятности ничьей между данными двумя командами к максимальной вероятности ничьей между любыми двумя командами с таким же количеством игроков.

Выведем формулу для величины q_{draw} . Для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции стандартного нормального распределения:

$$\Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) = \Phi \left(-\frac{\mu}{\sigma} \right) + \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) + \mathcal{O}(x^2),$$

откуда

$$\Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-x - \mu}{\sigma} \right) = \frac{2x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) + \mathcal{O}(x^2). \quad (3.12)$$

Рассмотрим для простоты случай, когда в каждой команде находится по одному игроку. Тогда, как уже было замечено, вероятность ничьей между ними согласно выражению (3.6) равняется

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x, \mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2) dx.$$

²⁹Например, в калькуляторе TrueSkill™ Ranking System: Calculators <http://research.microsoft.com/en-us/projects/trueskill/calculators.aspx> используется значение по умолчанию $P_{\text{draw}} = 10\%$.

Максимальная вероятность ничьей между двумя игроками будет достигаться при $\mu_1 = \mu_2$ и минимальной дисперсии, то есть при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Следовательно, она будет равняться уже рассмотренному выше выражению

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x, 0, 2\beta^2) dx.$$

Отсюда, используя (3.12), получаем:

$$\begin{aligned} q_{\text{draw}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x, \mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2) dx}{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x, 0, 2\beta^2) dx} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi\left(\frac{\varepsilon - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2}}\right)}{\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\beta}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2}\beta}\right)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2}} \exp\left(-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{2\beta^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2}} \exp\left(-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2)}\right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

что снова совпадает с формулой из [30].³⁰

В общем случае нескольких команд разных размеров формула для q_{draw} выводится аналогичным образом, используя многомерное нормальное распределение.

Пусть в матче приняли участие n игроков, объединившихся в k непересекающихся команд. Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}^\top$, $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$, $\mathbf{a}_i = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\}^\top$, $1 \leq i \leq k$, где $a_{i,j} = 1$, если j -й игрок состоит в i -й команде, и $a_{i,j} = 0$ иначе (в случае, если возможно неполное время игры, то $a_{i,j}$ это доля времени, проведенного j -м игроком в i -й команде), наконец, \mathbf{A} — это $n \times (k-1)$ матрица, в которой i -й столбец равен $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1}$.

Рассмотрим n -мерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ с плотно-

³⁰Стоит отметить, что в некоторых реализациях алгоритма, например <http://trueskill.org/>, неявно предлагается использовать значение q_{draw} в качестве P_{draw} , что не соответствует смыслу данных величин.

СТЫЮ

$$\varphi(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \tilde{\boldsymbol{\mu}})^\top \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\mathbf{x} - \tilde{\boldsymbol{\mu}})\right\}.$$

Вспомним, как записывается условие ничьей между всеми этими командами: $|t_i - t_{i+1}| \leq \varepsilon$ при всех $1 \leq i \leq k-1$, где t_i — сила i -й команды.

Следовательно, вероятность ничьей между всеми командами равняется

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}^\top (\beta^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{A}) d\mathbf{x},$$

где \mathbf{I} — единичная матрица $n \times n$, и $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}^\top$.

Аналогично максимальная вероятность ничьей между любым набором команд с таким же количеством игроков равняется

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \beta^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A}) d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой $(k-1) \times 1$ вектор, и q_{draw} равен их отношению [42]:

$$\begin{aligned} q_{\text{draw}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}^\top (\beta^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{A}) d\mathbf{x}}{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \beta^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A}) d\mathbf{x}} = \\ &= \sqrt{\frac{|\beta^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A}|}{|\beta^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A} (\beta^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu}\right). \end{aligned}$$

3.11. Улучшения модели

Рассмотрим возможные улучшения системы TrueSkill в таких аспектах, как: моделирование ничьих между некоторыми из команд, зависимость силы команды от сил составляющих ее игроков, учет дополнительной информации о заработанных командами очков, и стратегия подбора оппонентов.

Для начала обратим внимание на обработку общей ничьей между несколькими командами. В оригинальной статье [30] отмечено, что используемое в алгоритме условие не является транзитивным: например, ничья между тремя командами с силами t_1 , t_2 и t_3 моделируется как

$|t_1 - t_2| \leq \varepsilon$ и $|t_2 - t_3| \leq \varepsilon$ несмотря на возможность того, что $|t_1 - t_3| > \varepsilon$, так как из первых двух условий следует только тот факт, что $|t_1 - t_3| \leq 2\varepsilon$. При увеличении количества сыгравших вничью команд этот эффект только усиливается: например, в случае, если первые четыре команды сыграли вничью, а пятая им проиграла, может даже оказаться, что $t_5 - t_1 > \varepsilon$.

В большинстве игр наличие ничьей сразу между несколькими командами довольно маловероятно, но в некоторых из них такие события уже не являются редкими и представляют собой серьезную проблему. Одним из примеров может служить спортивная версия игры «Что? Где? Когда?», в которой большое число команд соревнуются в ответах за ограниченное время на специально подобранные вопросы, после чего ранжируются по числу правильных ответов на них.

При построении индивидуального рейтинга для этой игры авторы статей [44—46] предложили решить проблему ничьей между несколькими командами с помощью новой структуры фактор-графа, а именно добавив в него еще один уровень, связывающий сыгравшие вничью команды в одну вершину, которая и участвует в дальнейшем выводе. Новые переменные представляют собой в некотором смысле их среднюю силу: если команды с силами t_1, \dots, t_s поделили одно и то же место, то для соответствующей им переменной l должны быть выполнены условия $|l - t_i| \leq \varepsilon$ при всех $1 \leq i \leq s$; в структуре фактор-графа такая связь выражается через набор фактор-вершин $\delta_{u_i - (l - t_i)}$ и $\mathbf{1}_{|u_i| \leq \varepsilon}$. Как следствие данной структуры, для переменных d_i остается только один тип условий вида $\mathbf{1}_{d_i > 2\varepsilon}$. Пример такого фактор-графа, соответствующего случаю 3.4, приведен на рисунке 3.7.

В этих же [44—46] статьях авторы рассматривают и уже упоминавшуюся возможность изменения функции вычисления силы команды. В исследовавшейся ими игре «Что? Где? Когда?» все команды состоят из шести или меньшего числа человек, но недоукомплектованные команды часто выступают на том же уровне, что и полные, поэтому обычная функция суммы сил игроков не вполне правильно отражает силу команды.

Как уже отмечалось в разделе 3.7, из леммы 3.6 следует, что вычислять силу команды из сил составляющих ее игроков можно с помощью произвольной линейной функции. Более сложные функции можно

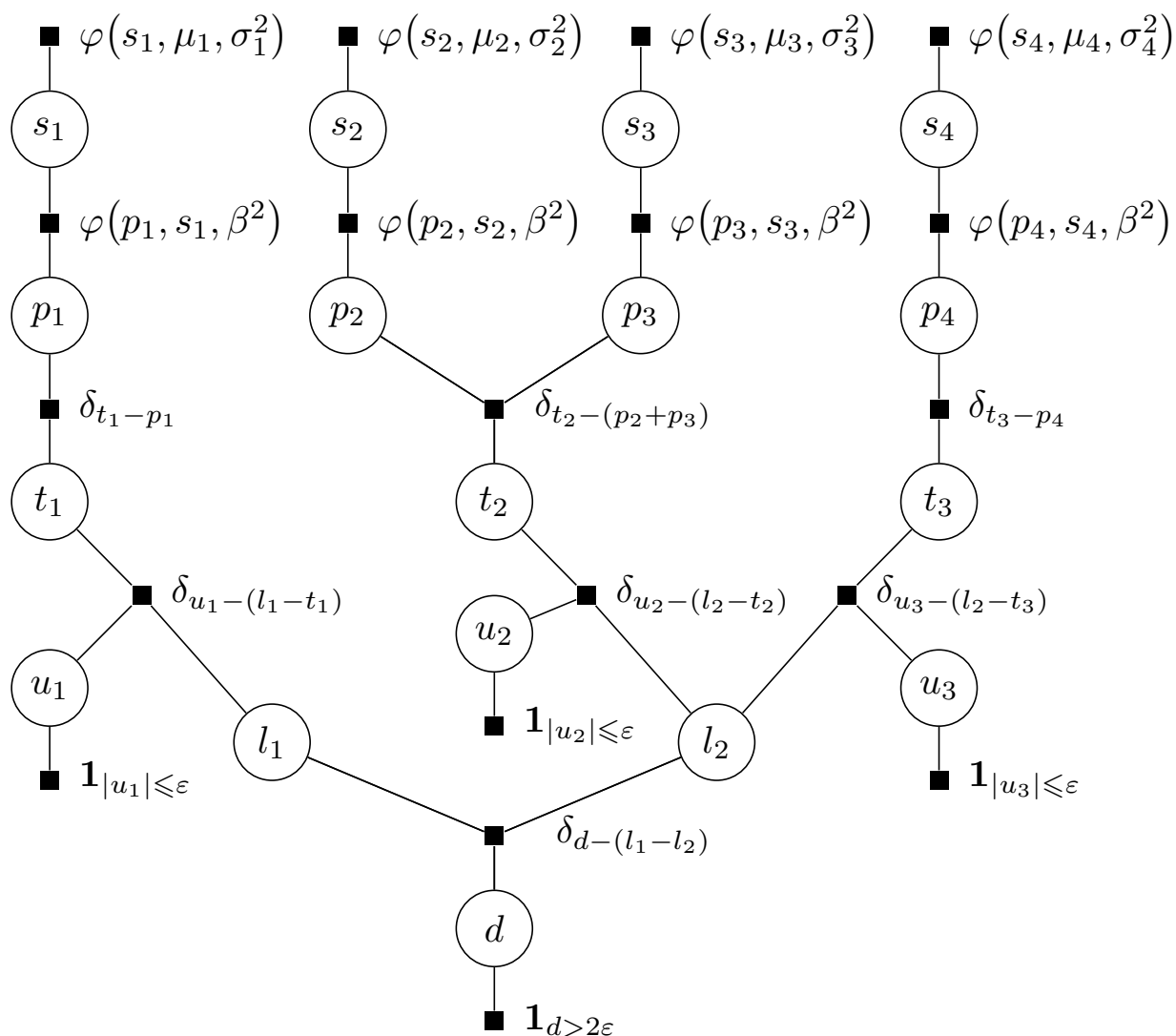


Рис. 3.7. Фактор-граф для модели, предложенной в [44–46], в случае четырех игроков, объединенных в три команды.

аппроксимировать линейными: например, квадратичную функцию $t = \sum_{i=1}^N p_i^2$ можно приблизить линейной функцией $t = \sum_{i=1}^N \mu_i p_i$, так как коэффициенты μ_i являются известными перед началом работы алгоритма.

Ясно, что оптимальный вид функции силы команды зависит от конкретной игры. Для обсуждавшейся выше игры «Что? Где? Когда?» авторы предлагают в [45; 46] сложную формулу, учитывающую тот факт, что в каждый отдельный момент в команде может быть не более 6 человек, но учитывая замены, общее число игроков может достигать до 9.³¹ А

³¹Кодекс спортивного ЧГК <http://mak-chgk.ru/rules/codex/>

именно, при размере команды до шести человек ее сила рассчитывается как среднее арифметическое сил состоящих в ней игроков со штрафом в 2% за каждого недостающего участника; при размере команды больше шести человек ее сила считается как сумма сил состоящих в ней игроков, умноженная на вес, равный среднему арифметическому рейтингов лучших шести игроков, разделенному на сумму рейтингов всех игроков в команде:

$$t = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N p_i}{N} \times (0.88 + 0.02N), & N \leq 6, \\ \sum_{i=1}^N p_i \times \frac{\sum_{i=1}^6 \mu_{(i)}}{6 \sum_{i=1}^N \mu_i}, & N > 6, \end{cases}$$

где $\mu_{(1)} \geq \dots \geq \mu_{(N)}$. Зависимость формулы во второй части от всех игроков команды требуется для того, чтобы после пересчета рейтинги изменились у всех, а не только, например, у лучших шести из них. В дальнейшем авторы использовали еще более сложную формулу, при которой лидеры команды (то есть игроки с бóльшим рейтингом) имели бóльший вклад в силу команды.³²

Кроме того, в статье [46] авторы предлагают простой способ учета дополнительной информации о результатах игры: пусть для каждой группы команд l_i , помимо занятого места, известно итоговое количество заработанных очков w_i , тогда фактор-вершины $\mathbf{1}_{d_i > 2\varepsilon}$ можно заменить на

$$\mathbf{1}_{d_i > 2\varepsilon \omega(w_i - w_{i+1})},$$

где $\omega(x)$ — заданная положительная возрастающая функция. При этом наилучший результат с предсказательной точки зрения в их экспериментах показала квадратичная функция $\omega(x) = x^2$.

Более подробное исследование способов учета информации о заработанных очках w_i проведено в работе [25]. Авторы рассмотрели три модели, самая простая из которых использует фактор-граф, аналогичный изображенному на рисунке 3.2 с добавлением наблюдаемой вершины-переменной $w = w_1 - w_2$ (где w_1, w_2 это очки, заработанные первым и вторым игроком соответственно) и фактор-вершины $\varphi(w, d, \zeta^2)$, где ζ —

³²Индивидуальный рейтинг ЧГК <http://kknop.com/rating/>

некоторая константа. Соответствующий фактор-граф изображен на рисунке 3.8.

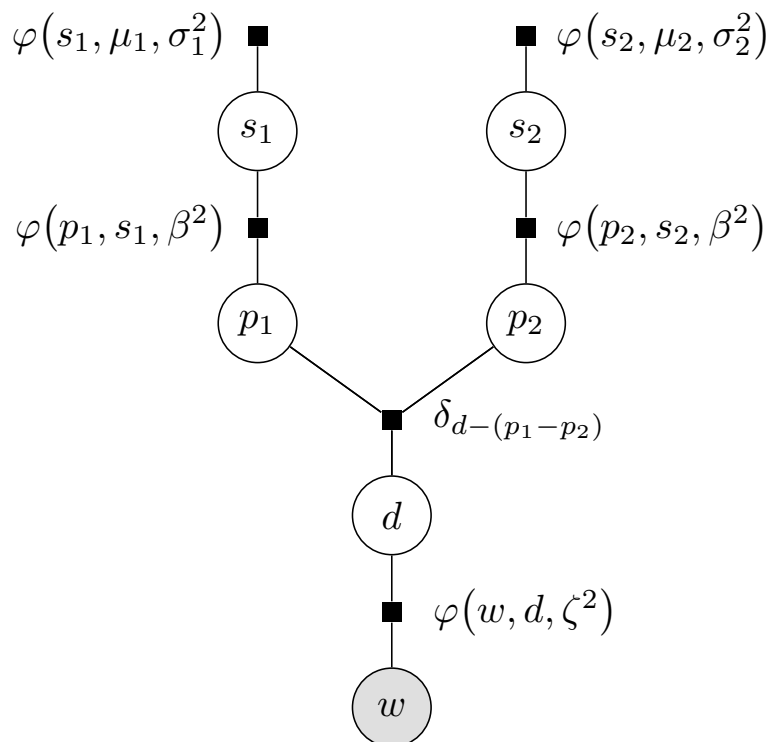


Рис. 3.8. Фактор-граф для модели, предложенной в [25].

Проводя вывод аналогично разделу 3.5, получаем, что для апостериорных плотностей распределения уровней мастерства обоих соперников выполнено:

$$\begin{aligned}\widehat{P}(s_1) &\propto \varphi(s_1, \mu_1, \sigma_1^2) \varphi(s_1, \mu_2 + w, \sigma_2^2 + 2\beta^2 + \zeta^2), \\ \widehat{P}(s_2) &\propto \varphi(s_2, \mu_2, \sigma_2^2) \varphi(s_2, \mu_1 - w, \sigma_1^2 + 2\beta^2 + \zeta^2),\end{aligned}$$

откуда, пользуясь представлением $w = w_1 - w_2$ и леммой 3.1, получаем следующие итоговые формулы:

$$\begin{aligned}\widehat{P}(s_1) &= \varphi\left(s_1, \mu_1 + \sigma_1^2 \frac{w_1 - w_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2 + \zeta^2}, \sigma_1^2 \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2 + \zeta^2}\right)\right), \\ \widehat{P}(s_2) &= \varphi\left(s_2, \mu_2 - \sigma_2^2 \frac{w_1 - w_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2 + \zeta^2}, \sigma_2^2 \left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\beta^2 + \zeta^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Две другие рассмотренные авторами в [25] модели представляют набранные игроком очки в виде разности уровня нападения самого игрока

и уровня защиты его соперника: $w_i = o_i - \tilde{o}_j$ (соответственно, $w_j = o_j - \tilde{o}_i$), где o_i, o_j — уровни нападения, а \tilde{o}_i, \tilde{o}_j — уровни защиты обоих игроков. Между собой эти модели отличаются тем, что в одной из них количество набранных очков моделируется нормальным распределением, а в другой — распределением Пуассона.

Рассмотрим теперь подробнее процесс подбора оппонентов в случае двух игроков. В системе TrueSkill, как уже было найдено в (3.13), в качестве соперников выбираются пары игроков с максимальным значением

$$q_{i,j} = \sqrt{\frac{2\beta^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\beta^2}} \exp\left(-\frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\beta^2)}\right).$$

В статье [49] используется прямо пропорциональная ей величина $\tilde{q}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta^2}} q_{i,j}$, но на смысл дальнейших вычислений это никак не влияет.

Зафиксируем одного из игроков, обозначив его номером 0. Предположим, что он собирается сыграть G игр, а в качестве возможных соперников для него есть игроки с номерами от 1 до M , которые на протяжении всего этого периода не играют больше ни с кем, кроме него.

Рассмотрим момент перед игрой под номером n , $1 \leq n \leq G$. Обозначим доступную информацию о рейтингах всех игроков в этот момент через

$$k^{(n)} = \left\{ \left(\mu_i^{(n)}, \sigma_i^{(n)} \right) \mid i = 0, \dots, M \right\},$$

а величину $q_{i,j}$ через $q_{i,j}^{(n)}$.

Обозначим также через $\Omega(k^{(n)}) \in \{1, \dots, M\}$ некоторую стратегию выбора оппонента нулевому игроку на n -м шаге. Нас интересует выбор такой стратегии, которая максимизировала бы ожидаемое число ничьих за весь период игр:

$$\sup_{\Omega} \mathbf{E} \sum_{n=0}^G q_{0, \Omega(k^n)}^{(n)}.$$

Самой простой стратегией «point estimate» является выбор оппонента с наиболее близким значением μ , не обращая внимания на уверенности в их рейтингах:

$$\Omega^{\text{PE}}(k^{(n)}) = \arg \min_{1 \leq i \leq M} \left| \mu_0^{(n)} - \mu_i^{(n)} \right|.$$

В системе TrueSkill, как уже было сказано, используется стратегия «draw chance» максимизации величины q_{draw} , то есть

$$\Omega^{\text{DC}}\left(k^{(n)}\right) = \arg \max_{1 \leq i \leq M} q_{0,i}^{(n)}.$$

В статье [49] предложена более эффективная стратегия, основанная на построении оценки на одну игру вперед. Предположим, что $\varepsilon = 0$, то есть ничьи невозможны (случай $\varepsilon > 0$ реализуется аналогичным образом). Как следует из (3.4), вероятность победы 0-го игрока над j -м в n -й игре в таком случае равняется³³

$$\begin{aligned} P^{(\text{W},n)} &= \int_0^{+\infty} \varphi\left(x, \mu_0^{(n)} - \mu_j^{(n)}, \left(\sigma_0^{(n)}\right)^2 + \left(\sigma_j^{(n)}\right)^2 + 2\beta^2\right) dx = \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0^{(n)} - \mu_j^{(n)}}{\sqrt{\left(\sigma_0^{(n)}\right)^2 + \left(\sigma_j^{(n)}\right)^2 + 2\beta^2}}\right), \end{aligned}$$

а вероятность поражения соответственно

$$\begin{aligned} P^{(\text{L},n)} &= \int_{-\infty}^0 \varphi\left(x, \mu_0^{(n)} - \mu_j^{(n)}, \left(\sigma_0^{(n)}\right)^2 + \left(\sigma_j^{(n)}\right)^2 + 2\beta^2\right) dx = \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_j^{(n)} - \mu_0^{(n)}}{\sqrt{\left(\sigma_0^{(n)}\right)^2 + \left(\sigma_j^{(n)}\right)^2 + 2\beta^2}}\right). \end{aligned}$$

Пусть в игре под номером n мы рассматриваем в качестве соперника игрока под номером j . Если 0-й игрок его победит, их рейтинги определенным образом изменятся; обозначим в этом случае $k^{(n+1)}$ через $k^{(\text{W},n+1)}$. Если же он проиграет, их рейтинги тоже изменятся, но по-другому; обозначим тогда $k^{(n+1)}$ через $k^{(\text{L},n+1)}$. Теперь на основе этих величин можно вычислить $q_{0,i}^{(n+1)}$, обозначим их в случае победы и поражения 0-го игрока через $q_{0,i}^{(\text{W},n+1)}$ и $q_{0,i}^{(\text{L},n+1)}$ соответственно.

Найдем максимумы этих величин по всем возможным соперникам:

$$\begin{aligned} Q^{(\text{W},n+1)} &= \max_{1 \leq i \leq M} q_{0,i}^{(\text{W},n+1)}, \\ Q^{(\text{L},n+1)} &= \max_{1 \leq i \leq M} q_{0,i}^{(\text{L},n+1)}. \end{aligned}$$

³³В оригинальной статье [49] потеряны операции взятия корня в знаменателях обеих дробей.

Отсюда условное математическое ожидание максимального значения $q_{0,i}^{(n+1)}$ при выборе на n -м шаге соперника под номером j равняется

$$Q_j^{(n)} = P^{(W,n)} Q^{(W,n+1)} + P^{(L,n)} Q^{(L,n+1)}.$$

Так как данная стратегия рассматривает результат только одной наступающей игры, то есть переход от $k^{(n)}$ к $k^{(n+1)}$, то для всех последующих игр предполагается, что доступная информация не изменилась: $k^{(n')} = k^{(n+1)}$ при $n' \geq n+1$. Как следствие, стратегия «knowledge gradient» принимает следующий вид:

$$\tilde{\Omega}^{\text{KG}}(k^{(n)}) = \arg \max_{1 \leq i \leq M} \left\{ q_{0,i}^{(n)} + (G - n) Q_i^{(n)} \right\},$$

где множитель $G - n$ отвечает за количество оставшихся игр.

Так как в реальности планируемое количество игр G неизвестно, авторы статьи [49] заменяют второе слагаемое на бесконечную геометрическую прогрессию с коэффициентом дисконтирования ξ , получая следующую окончательную стратегию:

$$\Omega^{\text{KG}}(k^{(n)}) = \arg \max_{1 \leq i \leq M} \left\{ q_{0,i}^{(n)} + \frac{\xi}{1 - \xi} Q_i^{(n)} \right\},$$

где ξ — заданная константа (в своих экспериментах авторы использовали $\xi = 0.99$).

Стоит отметить, что развитие системы TrueSkill идет и в других направлениях. Например, в статьях [14; 15] авторы пытаются учесть «командную химию», то есть степень взаимодействия внутри команды путем рассмотрения рейтингов не только для отдельных игроков, но и для всех их возможных подгрупп в команде. В статье [58] уровень мастерства игрока считается зависящим от контекста игры: например, в шахматах он может различаться в зависимости от игры белыми фигурами или черными. При небольшом количестве таких условий систему TrueSkill можно применить, считая каждого игрока виртуальной командой с различными уровнями мастерства в зависимости от условий, однако при большом количестве вариантов доступной информации по каждому из условий оказывается недостаточно, и приходится использовать более сложные модели.

3.12. Доказательства лемм

В заключение приведем доказательства лемм из разделов 3.2 и 3.3.

Лемма 3.1. При всех $x, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) = \varphi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \varphi(x, \mu, \sigma^2),$$

где

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Доказательство. По определению

$$\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\right).$$

Обозначим выражение в скобках через t . Раскрывая скобки, получим:

$$t = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)x^2 - 2(\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2)x + (\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ и воспользуемся определением μ и σ :

$$t = \frac{x^2 - 2\mu x + \frac{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{2\sigma^2} = \frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2} + \frac{\frac{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \mu^2}{2\sigma^2}.$$

Рассмотрим числитель второго слагаемого:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \left(\frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2 = \\ & = \frac{\mu_1^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^4 + \mu_1^2\sigma_2^4 + \mu_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} - \frac{\mu_1^2\sigma_2^4 + 2\mu_1\mu_2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} = \\ & = \frac{(\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $t = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$, откуда:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2)\varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = \\ &= \varphi(x, \mu, \sigma^2)\varphi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2),\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Лемма 3.2. При всех $x, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$

$$\frac{\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2)}{\varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \times \frac{\varphi(x, \mu, \sigma^2)}{\varphi(\mu_1, \mu_2, \sigma_2^2 - \sigma_1^2)},$$

где

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}.$$

Доказательство. По определению

$$\frac{\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2)}{\varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \exp\left(-\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\right).$$

Снова обозначим выражение в скобках через t , раскроем скобки и разделим числитель и знаменатель дроби на $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$:

$$\begin{aligned}t &= \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)x^2 - 2(\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2)x + (\mu_1^2\sigma_2^2 - \mu_2^2\sigma_1^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2\mu x + \frac{\mu_1^2\sigma_2^2 - \mu_2^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}{2\sigma^2} = \frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2} + \frac{\frac{\mu_1^2\sigma_2^2 - \mu_2^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} - \mu^2}{2\sigma^2}.\end{aligned}$$

Рассмотрим числитель второго слагаемого:

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1^2\sigma_2^2 - \mu_2^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} - \left(\frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 &= \\ &= \frac{\mu_1^2\sigma_2^4 - \mu_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2 - \mu_1^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^4}{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2} - \frac{\mu_1^2\sigma_2^4 - 2\mu_1\mu_2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^4}{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2} = \\ &= -\frac{(\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2}.\end{aligned}$$

Следовательно, $t = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}$, откуда:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x, \mu_1, \sigma_1^2)}{\varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2)} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}\right) = \\ &= \frac{\sigma_2 \sqrt{2\pi\sigma} \sqrt{\sigma_2^2-\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma_1 \sqrt{2\pi\sigma} \sqrt{\sigma_2^2-\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}\right)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2} \times \frac{\varphi(x, \mu, \sigma^2)}{\varphi(\mu_1, \mu_2, \sigma_2^2-\sigma_1^2)}, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Лемма 3.3. При всех $x, \mu_y \in \mathbb{R}$, $\sigma_x, \sigma_y > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, \sigma_x^2) \varphi(y, \mu_y, \sigma_y^2) dy = \varphi(x, \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

Доказательство. Заметим, что $\varphi(x, y, \sigma_x^2) = \varphi(y, x, \sigma_x^2)$ по утверждению **3.1**. Воспользуемся теперь леммой **3.1**:

$$\varphi(y, x, \sigma_x^2) \varphi(y, \mu_y, \sigma_y^2) = \varphi(x, \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2) \varphi(y, \mu, \sigma^2),$$

где $\mu = \frac{x\sigma_y^2 + \mu_y\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ и $\sigma^2 = \frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$. Учитывая независимость $\varphi(x, \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ от y , получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y, x, \sigma_x^2) \varphi(y, \mu_y, \sigma_y^2) dy = \varphi(x, \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y, \mu, \sigma^2) dy.$$

Так как $\varphi(y, \mu, \sigma^2)$ — это плотность нормального распределения, то интеграл от нее по всей области значений y равняется единице, откуда и следует требуемое утверждение. ■

Лемма 3.4. При всех $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx &= \Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, тогда первый искомый интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx = \mathbf{E} \Phi\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right).$$

Рассмотрим случайную величину $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, не зависящую от X . Заметим, что по определению $\Phi(x) = \mathbf{P}\{Y \leq x\}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\Phi\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \mathbf{P}\left\{Y \leq \frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right\} = \mathbf{P}\{X - \sigma_1 Y \geq \mu_1\}.$$

По лемме 3.6 имеем, что $X - \sigma_1 Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2 + \sigma_1^2)$, откуда

$$\mathbf{P}\{X - \sigma_1 Y \geq \mu_1\} = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right),$$

что и требовалось.

Для доказательства второго утверждения остается только заметить, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx = 1$ и раскрыть скобки. ■

Лемма 3.7. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}. \quad (3.1)$$

Доказательство. По определению

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \varphi_{(l,r)}(x, \mu, \sigma^2) dx = \int_l^r e^{tx} \frac{\varphi(x, \mu, \sigma^2)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} dx.$$

Из следующей цепочки преобразований:

$$\begin{aligned} \int_l^r \exp(tx) \varphi(x, \mu, \sigma^2) dx &= \int_l^r \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(tx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \int_l^r \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{-2\sigma^2 tx + x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \int_l^r \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x - (\mu + \sigma^2 t))^2 - \sigma^4 t^2 - 2\mu\sigma^2 t}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^4 t^2 + 2\mu\sigma^2 t}{2\sigma^2}\right) \int_l^r \varphi\left(\frac{x - (\mu + \sigma^2 t)}{\sigma}\right) dx = \\ &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \left(\Phi\left(\frac{r - \mu}{\sigma} - \sigma t\right) - \Phi\left(\frac{l - \mu}{\sigma} - \sigma t\right)\right), \end{aligned}$$

и независимости $\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)$ от x следует требуемое утверждение. ■

Лемма 3.8. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$\mathbf{E}X = \mu + \sigma \tilde{v}\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right).$$

Доказательство. По свойству производящей функции моментов выполнено следующее равенство: $\mathbf{E}X = (M_X(t))'_{t=0}$.

Производная первого сомножителя в выражении (3.1) равняется

$$\frac{d}{dt} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) (\mu + \sigma^2 t),$$

а производная второго соответственно

$$\frac{d}{dt} \frac{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} = \frac{-\sigma \varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) + \sigma \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (M_X(t))' &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) (\mu + \sigma^2 t) \frac{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} + \\ &+ \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{-\sigma \varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) + \sigma \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

откуда

$$\mathbf{E}X = (M_X(t))'_{t=0} = \mu - \sigma \frac{\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}.$$

Учитывая определение 3.1, получаем требуемое утверждение. ■

Лемма 3.9. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l,r)}(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$\mathbf{Var}X = \sigma^2 - \sigma^2 \tilde{w}\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right).$$

Доказательство. Найдем второй момент X по свойству $\mathbf{E}X^2 = (M_X(t))''_{t=0}$.

Для этого преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) = \\
& = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)^2\right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 + (r-\mu)t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(rt - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(lt - \frac{1}{2}\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Следовательно, производная второго слагаемого в выражении (3.14) равняется:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{-\sigma \varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma} - \sigma t\right) + \sigma \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma} - \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} = \\
= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{r \exp\left(rt - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\right) - l \exp\left(lt - \frac{1}{2}\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}.
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что первое слагаемое в выражении (3.14) можно представить в виде $(\mu + \sigma^2 t)M_X(t)$, поэтому его производная по t равняется

$$\sigma^2 M_X(t) + (\mu + \sigma^2 t)(M_X(t))'.$$

Таким образом, $\mathbf{E}X^2 = (M_X(t))''_{t=0}$ равняется:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 M_X(0) + \mu(M_X(t))'_{t=0} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{r \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\right) - l \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} = \\
= \sigma^2 + \mu^2 - \mu\sigma \frac{\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} - \sigma \frac{r\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - l\varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}.
\end{aligned}$$

Теперь можно вычислить дисперсию случайной величины X :

$$\begin{aligned}
\text{Var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \mu\sigma \frac{\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} - \sigma \frac{r\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - l\varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} - \\
&- \mu^2 + 2\mu\sigma \frac{\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} - \sigma^2 \left(\frac{\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} \right)^2 = \\
&= \sigma^2 - \sigma^2 \frac{\frac{r-\mu}{\sigma}\varphi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \frac{l-\mu}{\sigma}\varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} - \sigma^2 \left(\tilde{v}\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) \right)^2.
\end{aligned}$$

Учитывая определение 3.1, получаем требуемое утверждение. ■

Лемма 3.10. При всех $x, l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
v(x, l) &= \frac{\varphi(x-l)}{\Phi(x-l)}, \\
w(x, l) &= v(x, l)(v(x, l) + (x-l)).
\end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что в силу симметрии $\varphi(l-x) = \varphi(x-l)$ и $1 - \Phi(l-x) = \Phi(x-l)$.

Кроме того, $r\varphi(r) = \frac{r}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$ в силу неравенства $\exp\left(\frac{r^2}{2}\right) > \frac{r^2}{2}$.

Устремляя r к $+\infty$, получаем:

$$\begin{aligned}
v(x, l) &= -\frac{0 - \varphi(l-x)}{1 - \Phi(l-x)} = \frac{\varphi(x-l)}{\Phi(x-l)}, \\
w(x, l) &= (v(x, l))^2 + \frac{0 - (l-x)\varphi(l-x)}{1 - \Phi(l-x)} = (v(x, l))^2 + (x-l)v(x, l),
\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Лемма 3.11. При всех $x, l \in \mathbb{R}$

$$0 < w(x, l) < 1.$$

Доказательство. По лемме 3.10 $v(x, l) = \frac{\varphi(x-l)}{\Phi(x-l)} > 0$, поэтому для доказательства положительности $w(x, l)$ достаточно показать, что $v(x, l) + (x-l) > 0$, причем ясно, что можно рассматривать только случай $x-l < 0$.

Обозначим $-(x - l)$ через $y > 0$, тогда требуемое утверждение примет вид $\frac{\varphi(-y)}{\Phi(-y)} - y > 0$, что в силу симметрии эквивалентно $\frac{\varphi(y)}{1-\Phi(y)} > y$.

Воспользуемся следующей известной оценкой для хвоста функции нормального распределения (см., например, [18]):

$$1 - \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{+\infty} \frac{v}{y} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{\varphi(y)}{y},$$

так как $v > y > 0$.

Пользуясь данным неравенством, получаем, что $w(x, l) > 0$. В частности, отсюда следует, что для случайной величины $X \sim \mathcal{N}_{(l, +\infty)}(\mu, \sigma^2)$ дисперсия $\text{Var}X = \sigma^2 - \sigma^2 w\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}\right) < \sigma^2$.

Наконец, неравенство $w(x, l) < 1$ следует из того, что $\text{Var}X > 0$. ■

Лемма 3.12. *При всех $x, l, r \in \mathbb{R}$, $l < r$*

$$0 < \tilde{w}(x, l, r) < 1.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проведем, основываясь на [28] и [47].

Напомним, что функция $F(x)$, определенная на выпуклом множестве, называется логарифмически вогнутой, если для любых x_1, x_2 из ее области определения и $0 \leq \lambda \leq 1$ выполнено:

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq (F(x_1))^\lambda (F(x_2))^{1-\lambda}.$$

При этом для дважды дифференцируемой функции $F(x)$ это определение эквивалентно следующему:

$$F(x)F''(x) \leq (F'(x))^2.$$

Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}_{(l, +\infty)}(\mu, \sigma^2)$. Рассмотрим ее функцию распределения

$$F_0(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\} = \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)} \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \mathbf{1}_{x>l}.$$

Так как и индикаторная, и константная, и функция стандартного нормального распределения логарифмически вогнуты, то их произведение $F_0(x)$ также является логарифмически вогнутой функцией.

Пусть теперь

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x F_0(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(t) \mathbf{1}_{t \leq x} dt,$$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^x F_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t) \mathbf{1}_{t \leq x} dt.$$

Так как свойство логарифмической вогнутости сохраняется при интегрировании по одному из параметров функции [48], то $F_2(x)$ также логарифмически вогнута. Отсюда по определению логарифмической вогнутости получаем, что $F_0(x)F_2(x) \leq (F_1(x))^2$.

Вычислим теперь дисперсию случайной величины X при условии дополнительного усечения на интервале $(-\infty, r)$ в терминах функций $F_i(x)$, $0 \leq i \leq 2$.

Сначала найдем математическое ожидание путем интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X \mid X < r\} &= \int_{-\infty}^r \frac{x}{F_0(r)} dF_0(x) = \frac{1}{F_0(r)} \left(xF_0(x) \Big|_{-\infty}^r - \int_{-\infty}^r F_0(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{F_0(r)} (rF_0(r) - F_1(r)) = r - \frac{F_1(r)}{F_0(r)}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $(xF_1(x) - F_2(x))' = xF_0(x)$, найдем второй момент:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{X^2 \mid X < r\} &= \int_{-\infty}^r \frac{x^2}{F_0(r)} dF_0(x) = \frac{1}{F_0(r)} \left(x^2F_0(x) \Big|_{-\infty}^r - \int_{-\infty}^r 2xF_0(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{F_0(r)} \left(r^2F_0(r) - 2(xF_1(x) - F_2(x)) \Big|_{-\infty}^r \right) = r^2 - 2 \frac{rF_1(r) - F_2(r)}{F_0(r)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Var}\{X \mid X < r\} &= \mathbf{E}\{X^2 \mid X < r\} - (\mathbf{E}\{X \mid X < r\})^2 = \\ &= r^2 - 2 \frac{rF_1(r) - F_2(r)}{F_0(r)} - r^2 + 2r \frac{F_1(r)}{F_0(r)} - \left(\frac{F_1(r)}{F_0(r)} \right)^2 = \frac{2F_2(r)}{F_0(r)} - \left(\frac{F_1(r)}{F_0(r)} \right)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{Var}\{X \mid X < r\}}{\partial r} &= 2 \frac{F_1(r)F_0(r) - F_2(r)F_0'(r)}{F_0^2(r)} - 2 \frac{F_1(r)}{F_0(r)} \times \frac{F_0^2(r) - F_1(r)F_0'(r)}{F_0^2(r)} = \\
&= \frac{2}{F_0^2(r)} \left(F_1(r)F_0(r) - F_2(r)F_0'(r) - F_1(r)F_0(r) + \frac{F_1^2(r)F_0'(r)}{F_0(r)} \right) = \\
&= \frac{2F_0'(r)}{F_0^2(r)} \left(\frac{F_1^2(r)}{F_0(r)} - F_2(r) \right).
\end{aligned}$$

Так как $F_0(r), F_0'(r) \geq 0$ по определению и $F_1^2(r) - F_0(r)F_2(r) \geq 0$ в силу логарифмической вогнутости, то

$$\frac{\partial \text{Var}\{X \mid X < r\}}{\partial r} \geq 0.$$

Следовательно, для любого $r \in \mathbb{R}$

$$\text{Var}\{X \mid X < r\} \leq \text{Var}\{X\}.$$

Из леммы **3.11** известно, что $\text{Var}\{X\} < \sigma^2$, поэтому $\text{Var}\{X \mid X < r\} = \sigma^2 - \sigma^2 \tilde{w}\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{l}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) < \sigma^2$, откуда $\tilde{w}(x, l, r) > 0$.

Неравенство же $\tilde{w}(x, l, r) < 1$ следует из того, что $\text{Var}\{X \mid X < r\} > 0$ при $l < r$, что окончательно доказывает требуемое утверждение. \blacksquare

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Исследован процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником в модели Эло. Доказана локальная сжимаемость возникающей итерационной функциональной системы.
- Доказано, что в модели Эло при любых значениях параметров имеет место сходимость процесса изменения рейтинга игрока к единственному стационарному распределению. В частном случае наличия некоторых ограничений на параметры модели приводится также дополнительное доказательство, подходящее для более широкого класса процессов.
- Найдена медиана стационарного распределения рейтинга игрока в случае одинаковых уровней мастерства у игрока и его соперника в модели Эло.
- Исследованы свойства рейтинговой системы TrueSkill. Найдена точная формула для апостериорного распределения уровня мастерства в случае двух игроков и получены оценки точности ее аппроксимации.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с доказательством гипотезы, что стационарное распределение процесса изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним соперником в модели Эло является сингулярным. Кроме того, для обеих систем Эло и TrueSkill представляет интерес вопрос о распределении исходов игры между двумя случайно выбранными игроками. Наконец, естественный

интерес представляет исследование поведения совокупности рейтингов при большом числе участников.

Список литературы

1. *Aji S. M., McEliece R. J.* The generalized distributive law // IEEE Transactions on Information Theory. — 2000. — Vol. 46, no. 2. — Pp. 325–343. — DOI: [10.1109/18.825794](https://doi.org/10.1109/18.825794).
2. *Alonso O., Rose D. E., Stewart B.* Crowdsourcing for Relevance Evaluation // ACM SIGIR Forum. — 2008. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 9–15. — DOI: [10.1145/1480506.1480508](https://doi.org/10.1145/1480506.1480508).
3. *Авдеев В. А.* Стационарное распределение рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 4. — С. 3–14. — DOI: [10.4213/dm1299](https://doi.org/10.4213/dm1299).
4. *Авдеев В. А.* Локальная сжимаемость процесса изменения рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 1. — С. 3–21. — DOI: [10.4213/dm1311](https://doi.org/10.4213/dm1311).
5. *Авдеев В. А.* Формализация и исследование рейтинговой системы TrueSkill // Деп. в ВИНТИ. — 2016. — № 33–В2016. — С. 68.
6. *Bishop C. M.* Pattern Recognition and Machine Learning. — Springer-Verlag New York, 2006. — (Information Science and Statistics).
7. *Block H. D.* Economic Information, Decision, and Prediction //. — Springer Netherlands, 1974. — Chap. Random Orderings and Stochastic Theories of Responses (1960). Pp. 172–217. — DOI: [10.1007/978-94-010-9276-0_8](https://doi.org/10.1007/978-94-010-9276-0_8).
8. *Carlsson N.* A Contractivity Condition for Iterated Function Systems // Journal of Theoretical Probability. — 2002. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 613–630. — DOI: [10.1023/A:1016215831096](https://doi.org/10.1023/A:1016215831096).

9. *Cha J., Cho B. R., Sharp J. L.* Rethinking the truncated normal distribution // International Journal of Experimental Design and Process Optimisation. — 2013. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 327–363. — DOI: [10.1504/ijedpo.2013.059667](https://doi.org/10.1504/ijedpo.2013.059667).
10. *Clarke R. W. B.* Системы индивидуальных коэффициентов // 64. — 1969. — Т. 2, № 31. — С. 6–7.
11. TrueSkill Through Time: Revisiting the History of Chess / P. Dangauthier, R. Herbrich, T. Minka, T. Graepel // Advances in Neural Information Processing Systems. Vol. 20. — 2007. — Pp. 931–938.
12. *Дэвид Г.* Метод парных сравнений / под ред. Ю. П. Адлер. — Москва : Статистика, 1978.
13. *Davidson R. R., Solomon D. L.* A Bayesian Approach to Paired Comparison Experimentation // Biometrika. — 1973. — Vol. 60, no. 3. — Pp. 477–487. — DOI: [10.2307/2334996](https://doi.org/10.2307/2334996).
14. TeamSkill: Modeling Team Chemistry in Online Multi-player Games / C. DeLong, N. Pathak, K. Erickson, E. Perrino, K. Shim, J. Srivastava // Advances in Knowledge Discovery and Data Mining. Vol. 6635. — Springer Berlin Heidelberg, 2011. — Pp. 519–531. — (Lecture Notes in Computer Science). — DOI: [10.1007/978-3-642-20847-8_43](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20847-8_43).
15. *DeLong C., Srivastava J.* TeamSkill Evolved: Mixed Classification Schemes for Team-Based Multi-player Games // Advances in Knowledge Discovery and Data Mining. Vol. 7301. — Springer Berlin Heidelberg, 2012. — Pp. 26–37. — (Lecture Notes in Computer Science). — DOI: [10.1007/978-3-642-30217-6_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30217-6_3).
16. *Diaconis P., Freedman D.* Iterated Random Functions // Society for Industrial and Applied Mathematics Review. — 1999. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 45–76. — DOI: [10.1137/S0036144598338446](https://doi.org/10.1137/S0036144598338446).
17. *Elo A. E.* The Rating Of Chess Players, Past & Present. — 1st ed. — Arco Publishing, 1978.
18. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — Москва : Мир, 1984.

19. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — Москва : Мир, 1984.
20. *Fenner T., Levene M., Loizou G.* A Discrete Evolutionary Model for Chess Players' Ratings // IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games. — 2012. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 84–93. — DOI: [10.1109/TCIAIG.2012.2190603](https://doi.org/10.1109/TCIAIG.2012.2190603).
21. *Glickman M. E.* Chess Rating Systems // American Chess Journal. — 1995. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 59–102. — URL: <http://www.glicko.net/research/acjpaper.pdf>.
22. *Glickman M. E.* Parameter Estimation in Large Dynamic Paired Comparison Experiments // Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics). — 1999. — Vol. 48, no. 3. — Pp. 377–394. — DOI: [10.1111/1467-9876.00159](https://doi.org/10.1111/1467-9876.00159). — URL: <http://www.glicko.net/research/glicko.pdf>.
23. *Glickman M. E.* Dynamic paired comparison models with stochastic variances // Journal of Applied Statistics. — 2001. — Vol. 28, no. 6. — Pp. 673–689. — DOI: [10.1080/02664760120059219](https://doi.org/10.1080/02664760120059219). — URL: <http://www.glicko.net/research/dpcmsv.pdf>.
24. Web-Scale Bayesian Click-Through Rate Prediction for Sponsored Search Advertising in Microsoft's Bing Search Engine / T. Graepel, J. Q. Candela, T. Borchert, R. Herbrich // Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. — 2010. — Pp. 13–20.
25. Score-Based Bayesian Skill Learning / S. Guo, S. Sanner, T. Graepel, W. Buntine // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. Vol. 7523. — Springer Berlin Heidelberg, 2012. — Pp. 106–121. — (Lecture Notes in Computer Science). — DOI: [10.1007/978-3-642-33460-3_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33460-3_12).
26. *Хачатуров А. А.* Вопросы квалификации и система индивидуальных коэффициентов // Шахматы в СССР. — 1946. — Т. 23, № 11–12. — С. 256.
27. *Harkness K.* Official chess handbook. — David McKay Company, 1967.

28. *Heckman J. J., Honoré B. E.* The Empirical Content of the Roy Model // *Econometrica*. — 1990. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 1121–1149. — DOI: [10.2307/2938303](https://doi.org/10.2307/2938303).
29. *Herbrich R.* On Gaussian Expectation Propagation. — 2005. — Microsoft Research.
30. *Herbrich R., Minka T., Graepel T.* TrueSkill™: A Bayesian Skill Rating System // *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 19. — 2006. — Pp. 569–576.
31. *Kamihigashi T., Stachurski J.* Asymptotics Of Stochastic Recursive Economies Under Monotonicity // *KIER Working Papers*. — 2009. — Vol. 666. — Pp. 1–34.
32. *Kschischang F. R., Frey B. J., Loeliger H.-A.* Factor graphs and the sum-product algorithm // *IEEE Transactions on Information Theory*. — 2001. — Vol. 47, no. 2. — Pp. 498–519. — DOI: [10.1109/18.910572](https://doi.org/10.1109/18.910572).
33. *Leonard T.* An Alternative Bayesian Approach to the Bradley-Terry Model for Paired Comparisons // *Biometrics*. — 1977. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 121–132. — DOI: [10.2307/2529308](https://doi.org/10.2307/2529308).
34. *Letac G.* A contraction principle for certain Markov chains and its applications // *Random Matrices and Their Applications*. Vol. 50. — American Mathematical Society, 1986. — Pp. 263–273. — (Contemporary Mathematics). — DOI: [10.1090/conm/050](https://doi.org/10.1090/conm/050).
35. *Loeliger H.-A.* An Introduction to Factor Graphs // *IEEE Signal Processing Magazine*. — 2004. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 28–41. — DOI: [10.1109/MSP.2004.1267047](https://doi.org/10.1109/MSP.2004.1267047).
36. *Luce R. D.* Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis. — Dover Publications, 2012. — (Dover Books on Mathematics). — Original work published 1959.
37. *Luce R. D., Suppes P.* Handbook of Mathematical Psychology //. Vol. 3. — Wiley, 1965. — Chap. Preference, Utility, and Subjective Probability. Pp. 249–410.

38. *Luce R. D.* Thurstone's discriminial processes fifty years later // *Psychometrika*. — 1977. — Vol. 42, no. 4. — Pp. 461–489. — DOI: [10.1007/BF02295975](https://doi.org/10.1007/BF02295975).
39. *Luce R. D.* Thurstone and sensory scaling: Then and now // *Psychological Review*. — 1994. — Vol. 101, no. 2. — Pp. 271–277. — DOI: [10.1037/0033-295X.101.2.271](https://doi.org/10.1037/0033-295X.101.2.271).
40. *Mailhot L.* Une propriété de la variance de certaines lois de probabilité réelles tronquées // *Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Série I, Mathématique*. — 1985. — Vol. 301, no. 5. — Pp. 241–244.
41. *Minka T. P.* Expectation propagation for approximate Bayesian inference // *Proceedings of the Seventeenth conference on Uncertainty in artificial intelligence*. — 2001. — Pp. 362–369.
42. *Moser J.* *The Math Behind TrueSkill*. — 2010.
43. *Николенко С. И., Сироткин А. В.* Рейтинг-системы с точки зрения байесовского вывода // *Труды конференции «Интегрированные модели, мягкие вычисления, вероятностные системы и комплексы программ в искусственном интеллекте»*. Т. 2. — Москва : Физматлит, 2009. — С. 29–48.
44. *Nikolenko S. I., Sirotkin A. V.* Extensions of the TrueSkill rating system // *Proceedings of the International Conference on Applications of Fuzzy Systems and Soft Computing*. Vol. 9. — 2010. — Pp. 151–160.
45. *Nikolenko S. I., Sirotkin A. V.* A New Bayesian Rating System for Team Competitions // *Proceedings of the International Conference on Machine Learning*. Vol. 28. — 2011. — Pp. 601–608.
46. *Николенко С. И., Сердюк Д. В., Сироткин А. В.* Байесовские рейтинг-системы с учётом дополнительной информации о результатах // *Труды СПИИРАН*. — 2012. — Т. 22. — С. 189–204.
47. *Pratt J. W.* Concavity of the Log Likelihood // *Journal of the American Statistical Association*. — 1981. — Vol. 76, no. 373. — Pp. 103–106. — DOI: [10.1080/01621459.1981.10477613](https://doi.org/10.1080/01621459.1981.10477613).

48. *Prékopa A.* On logarithmic concave measures and functions // *Acta Scientiarum Mathematicarum*. — 1973. — Vol. 34. — Pp. 335–343.
49. *Ryzhov I. O., Tariq A., Powell W. B.* May the best man win: Simulation optimization for match-making in e-sports // *Proceedings of the Winter Simulation Conference*. — 2011. — Pp. 4234–4245. — DOI: [10.1109/WSC.2011.6148111](https://doi.org/10.1109/WSC.2011.6148111).
50. *Steinsaltz D.* Zeno’s walk: A random walk with refinements // *Probability Theory and Related Fields*. — 1997. — Vol. 107, no. 1. — Pp. 99–121. — DOI: [10.1007/s004400050078](https://doi.org/10.1007/s004400050078).
51. *Steinsaltz D.* Locally Contractive Iterated Function Systems // *The Annals of Probability*. — 1999. — Vol. 27, no. 4. — Pp. 1952–1979. — DOI: [10.1214/aop/1022874823](https://doi.org/10.1214/aop/1022874823).
52. *Stenflo Ö.* A survey of average contractive iterated function systems // *Journal of Difference Equations and Applications*. — 2012. — Vol. 18, no. 8. — Pp. 1355–1380. — DOI: [10.1080/10236198.2011.610793](https://doi.org/10.1080/10236198.2011.610793).
53. *Thurstone L. L.* A law of comparative judgment // *Psychological Review*. — 1994. — Vol. 101, no. 2. — Pp. 266–270. — DOI: [10.1037/0033-295X.101.2.271](https://doi.org/10.1037/0033-295X.101.2.271). — Original work published 1927.
54. *Thurstone L. L.* Psychophysical Analysis // *The American Journal of Psychology*. — 1927. — Vol. 38, no. 3. — Pp. 368–389. — DOI: [10.2307/1415006](https://doi.org/10.2307/1415006).
55. *Tsukida K., Gupta M. R.* How to Analyze Paired Comparison Data: Technical Report Series / University of Washington. — 2011. — No. 4.
56. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — Москва : Наука, 1969.
57. *Wymeersch H.* Iterative Receiver Design. — Cambridge University Press, 2007.
58. A Factor-Based Model for Context-Sensitive Skill Rating Systems / L. Zhang, J. Wu, Z.-C. Wang, C.-J. Wang // *22nd IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*. Vol. 2. — 2010. — Pp. 249–255. — DOI: [10.1109/ICTAI.2010.108](https://doi.org/10.1109/ICTAI.2010.108).