

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Авдеева В.А. «Исследование вероятностных моделей рейтинговых систем», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Актуальность работы.

Каждый шахматист, игравший онлайн в Интернете короткие (с контролем 3-5 минут) партии, знает, насколько неприятным бывает поражение от человека с гораздо более низким рейтингом. В отличие от исследуемого в работе рейтинга Эло для классических шахмат (зачастую $k=10$ или 20 для рейтингов выше 2300), на таких площадках используется очень высокий коэффициент изменения рейтинга (константа k в терминах диссертации) – около 40 и даже выше. В результате колебания рейтинга могут быть очень большими даже в течение одного дня. Для разрешения подобных сложностей есть несколько способов – например, вручную выставлять ограничения по рейтингу оппонентов, или объединять в пары людей с очень близкими рейтингами для более точной оценки способностей игрока. Но встаёт вопрос: а что, если в пары всегда будут объединяться люди с одинаковым или близким рейтингом – приведёт ли это в бесконечно повторяющихся играх к некоему стационарному распределению, и будет ли оно единственным? Диссертация отвечает на него – в рамках системы Эло: действительно, независимо от параметров, стационарное распределение существует и единственно. Кроме того, для широко распространённой (см. использование в Xbox Live от Microsoft) системы TrueSkill показываются «естественные» характеристики этого пересчёта рейтинга (см. ниже). В этом прикладном смысле актуальность работы очень высока: рейтингование используется всюду, от игровых приложений до поездок на такси, ресторанов и управляющих активами фондов.

Кроме того, поскольку работа носит теоретический характер (хотя и имеет очевидные приложения), нужно отметить, что исследование рейтингов Эло и TrueSkill проводятся и в англоязычной литературе (ссылки корректно указаны в работе). Поэтому теоретическая актуальность работы высока: по информации, доступной мне, результаты диссертации являются новыми и добавляют существенный вклад к пониманию данных рейтинговых систем.

2. Результаты работы.

Представленная диссертация посвящена вопросам дискретной теории вероятностей и связанных с ней рейтинговых систем. Она состоит из введения и двух глав, разбитых в совокупности на 22 части. В диссертации 141 страница, из которых 132 отведены введению и результатам. В списке литературы содержится 58 ссылок.

Основных целей у работы две. Первой из них является доказательство предельной теоремы для распределения рейтинга игроков в бесконечной цепочке игр в условные «шахматы» и соответствующей рейтинговой системе Эло. Оказывается, что вне зависимости от параметров изменения рейтинга, существует невырожденное предельное распределение, и получена геометрическая оценка скорости сходимости к этому распределению. Наконец, в случае одинаковых способностей игроков показано, что предельное распределение симметрично, и найдена его медиана.

Второй крупной частью является исследование системы TrueSkill. Она отличается от системы Эло составом команд: больше не является необходимым, что играют два игрока, и в соревновании могут участвовать сколь угодно разные по количеству группы людей. В случае этой схемы оценки рейтингов получены интуитивные, но достаточно нетривиальные результаты о «правильности» рейтингования:

- 1) выигрыш игрока в парной игре приводит к увеличению его рейтинга;
- 2) ничья в парной игре снижает рейтинг более сильного участника;
- 3) ничья в парной игре между одинаково сильными игроками не меняет рейтинг;
- 4) дисперсия оценки рейтинга снижается после каждой игры;
- 5) рейтинги всех игроков одной команды меняются в одну сторону.

Эти результаты, при всей их желательности для «правильной» или «естественной» системы рейтингования, неочевидны и получены из аккуратного исследования явного вида изменения рейтинга, формулы для которого получены в диссертации.

3. Формальные детали: апробация, публикации, доказательства.

Результаты работы прошли апробацию на семинарах в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, в Математическом институте им. В.А. Стеклова и в МГУ. Результаты работы достаточно полно опублико-

ваны по главам. Все три публикации действительны, в том числе две из них находятся в выпусках «Дискретной Математики» на заявленном месте и соответствуют содержанию диссертации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным использованием математических методов. Все леммы и теоремы аккуратно доказаны.

Диссертация написана абсолютно понятно, и результаты в ней соответствуют содержанию автореферата.

4. Замечания по работе.

Несмотря на высокое качество текста и доказательств, некоторые моменты могли бы быть улучшены для более полного понимания:

- 1) Не совсем ясно, для каких ещё распределений, кроме нормального, в частном случае $ak \leq \sqrt{2\pi}$ можно было бы доказать сходимость к стационарному распределению. Возможно, дополнительные примеры могли бы расширить восприятие текста;
- 2) Что будет происходить в случае, когда дисперсии у игроков в обеих системах различны? Вероятно, это значительно усложняет доказательства (хотя, возможно, не так существенно в случае системы Эло), но при этом делает рассмотрение несколько более реалистичным – с учётом упоминаемого автором факта, что в онлайн-играх обычно у участников разное количество прошлых участия в соревнованиях, а значит, и разная оценка дисперсии. По крайней мере, было бы интересно подробнее обсудить этот вопрос;
- 3) Было бы также интересно понять, насколько усложняются доказательства, если разрешить ничьи между игроками в системе Эло – этот вопрос также не обсуждается с математической точки зрения;
- 4) Очень интересным, хотя едва ли легко разрешимым, является вопрос изменения способностей при обучении. Формально игроки в рамках диссертации имеют внутреннюю способность, которая является неизменной и постоянной, но большинство игр от шахмат до упоминаемого в работе «Что? Где? Когда?» являются играми с обучением. Каждая следующая игра может повышать способности игрока, и в этой ситуации было бы сложно, но очень интересно обдумать, как моделировать подобные изменения;

- 5) Также в системе Эло было бы интересно попробовать учесть то, что белые и чёрные фигуры имеют разное влияние на результат (играть белыми несколько лучше для среднего результата). Таким образом, право хода может влиять на способность выиграть данную партию, и можно рассмотреть «перемену цвета», когда игроки имеют не фиксированные способности, а переменные, зависящие от цвета или права первого хода.

5. Заключение по работе.

Отмеченные недочёты незначительны и не влияют на общую положительную оценку работы. Диссертация Авдеева В.А. «Исследование вероятностных моделей рейтинговых систем» является самостоятельной законченной научной квалификационной работой высокого уровня, в которой получены важные свойства систем рейтинговых систем Эло и TrueSkill. Автор в своем исследовании продемонстрировал высокую математическую культуру и осведомленность в рассматриваемых вопросах. В связи с этим я считаю, что данная работа удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемых к диссертационным работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика», а ее автор заслуживает присуждения искомой степени.

Отзыв составил:

Официальный оппонент,

кандидат физико-математических наук,

доцент финансов НОУ ВПО «Российская Экономическая Школа»

(специальность 01.01.05)

Шибанов Олег Константинович

Почтовый адрес: 143026, г. Москва, деревня Сколково, ул. Новая, д. 100А, РЭШ,
офис 2.14

Телефон: +7 (495) 956 95 08

Электронная почта: oshibanov@phs.ru

Дата: 03.06.20

Подпись:

Шибанов / *[подпись]*

