

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи
УДК 531.36

Черняков Глеб Анатольевич

**Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по
абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости методом
Ковачича**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель –
к.ф.-м.н., доцент
А.С. Кулешов

Москва – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Алгоритм Ковачича и его теоретическое обоснование.....	7
1.1. Постановка задачи.....	7
1.2. Некоторые вспомогательные утверждения.....	9
1.2.1. Четыре случая.....	9
1.2.2. Необходимые условия.....	15
1.3. Алгоритм Ковачича и его обоснование.....	20
1.3.1. Алгоритм Ковачича для Случая 1.....	20
1.3.2. Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 1.....	23
1.3.3. Алгоритм Ковачича для Случая 2.....	29
1.3.4. Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 2.....	31
1.3.5. Алгоритм Ковачича для Случая 3.....	36
Глава 2. Постановка задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости. Движение круглого диска и диска со смещенным центром масс.....	39
2.1. Постановка задачи.....	39
2.1.1. Основные системы координат.....	39
2.1.2. Уравнения движения.....	44
2.2. Движение круглого диска.....	48
2.2.1. Уравнения движения. Интегрируемость уравнений движения в гипергеометрических функциях.....	48
2.2.2. Применение алгоритма Ковачича к задаче о движении диска.....	50
2.3. Движение диска со смещенным центром масс.....	54
Глава 3. Движение тора.....	59
3.1. Постановка задачи. Уравнения движения. Общий случай и частные случаи.....	59
3.2. Исследование общего случая.....	63
3.3. Исследование частного случая $A_3 = A_1 \neq m(a^2 - R^2)$	67
3.4. Исследование частного случая $A_3 = A_1 = m(a^2 - R^2)$	72

3.5. Исследование частного случая $A_1 = m(a^2 - R^2) \neq A_3$	75
3.6. Исследование частного случая $A_3(A_1 + mR^2) = A_1(A_1 + mR^2 - ma^2)$	79
Глава 4. Движение параболоида вращения.....	87
4.1. Постановка задачи и уравнения движения	87
4.2. Существование лиувиллевых решений.....	89
4.3. Движение однородного параболического сегмента	94
4.3.1. Анализ изменения угла θ	94
4.3.2. Случай $F(1) = 0$	99
4.3.3. Случай $F(1) < 0$	102
4.4. Стационарные движения параболоида и их устойчивость...	104
Добавление.....	109
Глава 5. Движение веретенообразного тела.....	112
5.1. Постановка задачи. Уравнения движения. Общий случай и частные случаи	112
5.2. Исследование общего случая	116
5.3. Исследование частного случая $A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3) = 0$	120
5.4. Исследования частного случая $B = \frac{9A_1A_3}{4(3A_3 - 4A_1)}$	124
5.5. Исследование частного случая $B = \frac{A_1^2}{4(A_3 - A_1)}$	129
Заключение	137
Список литературы	139

ВВЕДЕНИЕ

Изучение задач динамики тел, соприкасающихся во всё время движения с неподвижной или движущейся твёрдой поверхностью, имеет довольно длительную историю. Оно тесно связано с процессом становления и развития целого раздела аналитической механики – динамики неголономных систем. Ещё в исследованиях И. Ньютона [27], Л. Эйлера [48], И. Эйлера [47], И. Бернулли [2], Ж. Даламбера [5], Ж. Лагранжа [17] встречались элементы задач о качении твёрдых тел без проскальзывания, являющиеся характерными для движения систем с неголономными связями. Поэтому задачи о качении тел по твёрдой поверхности без проскальзывания считаются классическими задачами механики неголономных систем.

Одной из таких классических задач является задача о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости тяжёлого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения (тела вращения). Впервые данная задача была рассмотрена в работе Э. Линделёфа [60], причём при её решении Э. Линделёф исходил из принципа Гамильтона или из уравнений Лагранжа второго рода, которые из него можно получить. Написав два уравнения неголономных связей, он использовал их при составлении кинетической энергии и ошибочно считал, что этим полностью учтена неголономность задачи, а потому можно составлять уравнения Лагранжа второго рода. Естественно, что полученная таким образом система дифференциальных уравнений оказалась проще истинной и могла быть решена в квадратурах.

Допущенную Э. Линделёфом существенную ошибку одним из первых заметил С.А. Чаплыгин, о чём уведомил автора, а 25 октября 1895 года сделал об этом доклад на заседании отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. С.А. Чаплыгин отмечает, что в своей работе "... на первых же страницах ... Линделёф допустил важную ошибку, вследствие которой найденные им уравнения оказались проще истинных, чем и объясняется весь кажущийся успех автора". В этом же докладе С.А. Чаплыгин впервые приводит свои уравнения движения неголономных систем. Через два года он нашёл правильное решение задачи Линделёфа и опубликовал свои результаты в статье [30]. В этой работе С.А. Чаплыгин показал, что решение задачи Линделёфа сводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от формы поверхности, ограничивающей движущееся по плоскости твёрдое тело. После того, как найдется решение соответствующего уравнения, задача сводится к взятию ряда

квадратур. С.А. Чаплыгин указал также два случая, когда можно найти общее решение полученного им уравнения второго порядка. В одном из этих случаев катящееся по плоскости тело является неоднородным динамически симметричным шаром, а в другом – круглым диском или обручем. Причём в случае качения по плоскости круглого диска или обруча соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка заменой переменных приводится к гипергеометрическому уравнению, то есть задача о движении диска решается в гипергеометрических функциях. Этот установленный С.А. Чаплыгиным факт чуть позднее был доказан также П. Аппелем [34], Д. Кортевегом [56, 57] и Э. Геллопом [51].

В 1932 году Х.М. Муштари продолжил исследование задачи о движении тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости [25]. При дополнительном условии, накладывающем ограничения на распределение масс и форму поверхности тела, были найдены два новых частных случая, когда движение тела можно исследовать полностью. В первом случае движущееся твёрдое тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через её фокус, а во втором случае движущееся тело представляет собой параболоид вращения. Дальнейшее развитие результатов Х.М. Муштари было дано в работах А.С. Кулешова [13]-[16].

Для других тел вращения, катящихся по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, полное решение задачи прежде указано не было. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для каких ещё тел, катящихся без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, задача описания их движения может быть решена до конца. Поскольку решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, то для нахождения его общего решения можно воспользоваться так называемым алгоритмом Ковачича.

В 1986 году американский математик Дж. Ковачич предложил алгоритм [58], позволяющий получить решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда оно выражается через так называемые лиувиллевы функции [10, 29, 58]. В случае, если у рассматриваемого уравнения не имеется лиувиллевых решений, алгоритм Ковачича также позволяет установить этот факт. Для того, чтобы было возможно применение алгоритма Ковачича к тому или иному линейному дифференциальному уравнению второго порядка, необходимо, чтобы коэффициенты соответствующего уравнения были рациональными функциями независимой переменной.

Основы теории, на которой строится алгоритм Ковачича, были заложены ещё в классических работах Ж. Лиувилля [61]-[68]. Именно поэтому функции, через которые выражается искомое решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, стали называться лиувиллевыми [69]. Результаты Ж. Лиувилля получили дальнейшее развитие в работах Л. Фукса [49, 50], К. Жордана [52], Т. Пепина [82, 83], Э. Пикара [84, 85], Э. Вессио [91], Д. Д. Мордухай – Болтовского [22]. Окончательный вид теория, лежащая в основе алгоритма Ковачича, приобрела во второй половине XX века в работах Дж. Ритта [86], Э. Колчина [53, 54, 55] (см. также [38]), Ф. Балдассарри [35, 36] и М. Сингера [87, 88, 90]. Некоторые теоретические результаты, лежащие в основе алгоритма Ковачича, изложены в известных курсах по теории дифференциальных уравнений, например в книге Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона [12] и в монографии Ф. Хартмана [28].

Алгоритм Ковачича уже не раз успешно применялся при изучении различных задач механики и математической физики. Первые результаты по применению алгоритма Ковачича к задачам математической физики были получены в работах Э. Дюваль [44, 45]. В работе Б. С. Бардина [1] алгоритм Ковачича применялся при исследовании орбитальной устойчивости периодических движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Но наиболее часто алгоритм Ковачича используется для нахождения новых интегрируемых случаев в задачах гамильтоновой механики или при доказательстве неинтегрируемости различных гамильтоновых систем. Исследованиям подобного рода посвящены работы П. Акосты – Уманеса [31]-[33], Т. Комбо [42, 43], М. Ю. Ивочкина [8, 9], А. Мациевского с соавторами [37, 46], [71]-[74] (см. также [89]), Х. Моралеса – Руиса [75]-[81] и многих других специалистов по теории дифференциальных уравнений и их приложений в механике.

В настоящей диссертации алгоритм Ковачича применяется к задаче о движении тяжёлого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении описываются основные результаты, полученные в разные годы в рассматриваемой задаче. Все упомянутые результаты подкреплены ссылками на соответствующие работы, в которых они были получены.

В первой главе диссертации обсуждаются теоретические основы алгоритма Ковачича, даётся описание самого алгоритма и рассказывается о том, как с его помощью находят лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами.

Во второй главе дана постановка задачи о движении тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Дан вывод дифференциального уравнения второго порядка, к которому сводится решение задачи. Рассматриваются случаи, когда катящееся по плоскости тело является круглым диском или диском со смещенным центром масс. В каждом из этих случаев (а также во всех последующих главах) для полученного уравнения второго порядка находится замена переменных, приводящая его коэффициенты к рациональному виду. В результате становится возможным применение к полученному уравнению алгоритма Ковачича. С помощью алгоритма установлено, что в случае, когда катящееся по плоскости тело является круглым диском или диском со смещённым центром масс, соответствующее уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений.

В третьей главе диссертации рассматривается задача о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. Получено дифференциальное уравнение второго порядка, к решению которого сводится задача о движении тора. С помощью алгоритма Ковачича доказано, что соответствующее дифференциальное уравнение не имеет лиувиллевых решений для почти всех физически допустимых значений параметров задачи.

В четвертой главе при помощи алгоритма Ковачича исследуется уравнение второго порядка, получающееся в случае, когда движущееся по плоскости тело представляет собой динамически симметричный параболоид. Доказано, что все решения соответствующего дифференциального уравнения являются лиувиллевыми. Дано качественное описание движения по плоскости динамически симметричного параболоида. Установлено, что следом точки касания параболоида с плоскостью на поверхности параболоида является кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочерёдно к двум параллелям параболоида. След точки касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, заключенную между двумя концентрическими окружностями. Также в этой главе дано описание всех стационарных движений параболоида (перманентных вращений и регулярных прецессий) и доказано, что все они являются устойчивыми. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

Последняя, пятая глава диссертации посвящена исследованию задачи о движении веретенообразного тела (тела, ограниченного поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через её фокус), рассматривавшегося ранее в работе Х.М. Муштари [25]. Получено линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к решению которого сводится задача и установлено, что оно не имеет лиувиллевых решений для

почти всех физически допустимых значений параметров задачи за исключением случая, когда параметры задачи удовлетворяют условиям, указанным Х.М. Муштари [25].

В заключении ещё раз кратко сформулированы основные результаты работы.

Результаты диссертации опубликованы в статьях [92]-[97].

ГЛАВА 1. АЛГОРИТМ КОВАЧИЧА И ЕГО ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Исследование многих задач механики и математической физики сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В 1986 году американский математик Дж. Ковачич в своей работе [58] представил алгоритм, позволяющий найти так называемые лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Если у дифференциального уравнения нет лиувиллевых решений, алгоритм также позволяет установить этот факт. Поскольку большая часть результатов данной работы была получена именно с помощью алгоритма Ковачича, то в этой главе мы кратко обсудим, в чём состоит алгоритм, и как с его помощью находятся лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами.

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное поле $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций одного комплексного переменного x . Наша задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$z'' + a(x)z' + b(x)z = 0, \quad (1.1.1)$$

где $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$, причём интересовать нас будут так называемые лиувиллевы решения данного уравнения. Решение называется лиувиллевым, если оно является элементом лиувиллева поля, где лиувиллево поле определяется следующим образом.

Определение 1.1. Пусть F – дифференциальное поле функций одного комплексного переменного x , которое содержит $\mathbb{C}(x)$, то есть F – поле характеристики ноль с операцией дифференцирования $()'$, действующей на элементы этого поля по правилу $(a + b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b + ab'$ для любых a и b из F . Поле F называется лиувиллевым, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей

$$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = F,$$

получающаяся присоединением одного элемента, такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением экспоненты неопределённого интеграла над F_{i-1})

или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением интеграла над F_{i-1})

или F_i является конечным алгебраическим расширением над F_{i-1} (то есть $F_i = F_{i-1}(\alpha)$ и α удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0,$$

где $a_j \in F_{i-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ и не все равны нулю). \square

Таким образом, лиувиллевы решения строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределённого интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения. Мы можем получить таким образом логарифмические функции, тригонометрические функции, но не сложные специальные функции типа гипергеометрической функции Гаусса, полиномов Лежандра или Бесселевых функций.

Применяя алгоритм, достаточно найти только одно лиувиллево решение дифференциального уравнения (1.1.1) потому, что другое его решение можно найти следующим образом. Это решение разыскивается в виде $z_2 = \nu z_1$, где z_1 – известное первое решение и ν – некоторая функция, подлежащая определению. Используя дифференциальное уравнение (1.1.1), можно получить на функцию ν уравнение

$$z_1 \frac{d^2\nu}{dx^2} + \left(2 \frac{dz_1}{dx} + a(x) z_1 \right) \frac{d\nu}{dx} = 0,$$

решение которого даёт для z_2 следующее выражение:

$$z_2 = z_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{z_1^2} dx.$$

Если первое решение z_1 уравнения является лиувиллевым, то ясно, что и второе его решение z_2 также будет лиувиллевым и, следовательно, все решения дифференциального уравнения (1.1.1) будут лиувиллевыми (поскольку всякое другое решение является линейной комбинацией z_1 и z_2).

Для того, чтобы привести исходное дифференциальное уравнение к более простому виду, сделаем следующую замену переменных:

$$y(x) = z(x) e^{\frac{1}{2} \int a(x) dx}. \quad (1.1.2)$$

Тогда уравнение (1.1.1) примет вид

$$y'' + \left(b - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a' \right) y = 0$$

или

$$y'' = r(x) y, \quad r(x) = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b. \quad (1.1.3)$$

Заметим, что данная замена переменных не изменяет свойств решений уравнения (1.1.1), и те его решения, которые являются лиувиллевыми, будут таковыми и для уравнения (1.1.3). В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемое нами дифференциальное уравнение имеет как раз вид (1.1.3). С помощью формулы

$$z(x) = y(x) e^{-\frac{1}{2} \int a(x) dx}$$

можно осуществить обратный переход от решений уравнения (1.1.3) к решениям уравнения (1.1.1).

1.2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе представлены основные факты из теории линейных дифференциальных уравнений, которые лежат в основе алгоритма Ковачича. Часть из них снабжена доказательствами, другие даны без доказательства, но с указанием источников, откуда это доказательство можно почерпнуть. Начнём с описания возможной структуры решения дифференциального уравнения (1.1.3).

1.2.1. Четыре случая. Следующая теорема, доказанная Ковачичем [58], определяет структуру решения, с которым имеет дело алгоритм.

Теорема 1.2.1.1. Для дифференциального уравнения (1.1.3) справедливы только следующие 4 случая.

1. Дифференциальное уравнение имеет решение вида $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ и $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$.
2. Дифференциальное уравнение имеет решение вида $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$, где $\omega(x)$ – алгебраическая функция степени 2 над $\mathbb{C}(x)$, и Случай 1 не имеет места.
3. Все решения дифференциального уравнения (1.1.3) являются алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$ и Случаи 1 и 2 не имеют места. Решение уравнения (1.1.3) имеет в данном случае вид $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ и $\omega(x)$ – алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над $\mathbb{C}(x)$.

4. Дифференциальное уравнение не имеет лиувиллевых решений.

□

Кратко укажем здесь основные этапы доказательства данной теоремы. Пусть η и ζ – два независимых решения дифференциального уравнения (1.1.3). Обозначим \overline{G} дифференциальное расширение поля $\mathbb{C}(x)$, образованное η и ζ , то есть $\overline{G} = \mathbb{C}(x)(\eta, \eta', \zeta, \zeta')$. Производные функций η и ζ более высокого порядка нам не понадобятся, поскольку $\eta'' = r\eta \in \overline{G}$, $\eta''' = r'\eta + r\eta' \in \overline{G}$ и т.д.

Группой Галуа дифференциального уравнения (1.1.3) является группа Галуа \overline{G} относительно $\mathbb{C}(x)$, и она обозначается $G = G(\overline{G}/\mathbb{C}(x))$. Иными словами, G представляет собой группу всех дифференциальных автоморфизмов \overline{G} , оставляющих элементы поля $\mathbb{C}(x)$ неподвижными. Напомним, что автоморфизмом группы H называется изоморфизм H на себя. Дифференциальный автоморфизм – это автоморфизм, коммутирующий с операцией дифференцирования $()'$. Это означает, что G – группа всех автоморфизмов $\sigma : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ таких, что $\sigma(a') = (\sigma a)'$ для всех $a \in \overline{G}$ и $\sigma f = f$ для всех $f \in \mathbb{C}(x)$.

Группа Галуа G дифференциального уравнения (1.1.3) изоморфна подгруппе группы $GL(2, \mathbb{C})$ – группы всех обратимых матриц порядка 2×2 с комплексными коэффициентами, то есть каждому автоморфизму $\sigma \in G$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix},$$

где $a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma$ и d_σ принадлежат \mathbb{C} . Это соответствие устанавливается следующим образом. Поскольку η и ζ являются решениями уравнения (1.1.3), и поскольку $\sigma \in G$ – дифференциальный автоморфизм, то

$$(\sigma\eta)'' = \sigma(\eta'') = \sigma(r\eta) = \sigma r \cdot \sigma\eta = r\sigma\eta$$

и, следовательно, $\sigma\eta$ также будет решением дифференциального уравнения (1.1.3). Далее, $\sigma\eta$ может быть только линейной комбинацией η и ζ , поскольку всякое решение уравнения (1.1.3) является линейной комбинацией двух независимых решений того же уравнения. Поэтому мы можем написать, что

$$\sigma\eta = a_\sigma\eta + b_\sigma\zeta, \quad a_\sigma, b_\sigma \in \mathbb{C}.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\sigma\zeta = c_\sigma\eta + d_\sigma\zeta, \quad c_\sigma, d_\sigma \in \mathbb{C}.$$

Объединяя эти два результата, имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma\eta \\ \sigma\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\sigma\eta + b_\sigma\zeta \\ c_\sigma\eta + d_\sigma\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

и ясно, что действие σ соответствует умножению решения η, ζ на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}.$$

Используя определитель Вронского решений η и ζ , мы можем показать, что группа Галуа G дифференциального уравнения (1.1.3) изоморфна подгруппе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Элементами группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ являются обратимые матрицы порядка 2×2 с определителем, равным единице. Определитель Вронского решений η и ζ по определению равен $W = \eta\zeta' - \eta'\zeta$. Возьмём производную W и получим

$$W' = \eta'\zeta' + \eta\zeta'' - \eta'\zeta' - \eta''\zeta = \eta\zeta'' - \eta''\zeta = \eta r\zeta - r\eta\zeta = 0.$$

Следовательно, определитель Вронского решений η и ζ должен быть постоянным и поэтому для любого $\sigma \in G$ имеем $\sigma W = W$ (так как $W \in \mathbb{C}(x)$ и σ , по определению, оставляет элементы $\mathbb{C}(x)$ неподвижными). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sigma W &= \sigma(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = \sigma\eta(\sigma\zeta)' - (\sigma\eta)'\sigma\zeta = \\ &= (a_\sigma\eta + b_\sigma\zeta)(c_\sigma\eta' + d_\sigma\zeta') - (a_\sigma\eta' + b_\sigma\zeta')(c_\sigma\eta + d_\sigma\zeta) = \\ &= (a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma)(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = (a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma)W \end{aligned}$$

и поэтому

$$a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma = 1.$$

Следующие два утверждения мы оставим без доказательства.

Теорема 1.2.1.2. Группа Галуа G дифференциального уравнения (1.1.3) изоморфна алгебраической подгруппе группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. \square

Эта теорема является одним из фундаментальных фактов теории Пикара – Вессио. Её доказательство можно найти в [58]. Напомним, что некоторая подгруппа K группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ называется алгебраической группой, если существует конечное число многочленов P_1, \dots, P_n , каждый из которых принадлежит кольцу $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ (кольцу многочленов от четырёх неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 над полем \mathbb{C}), такое, что матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является элементом K тогда и только тогда, когда $P_1(a, b, c, d) = \dots = P_n(a, b, c, d) = 0$.

Далее, для любой алгебраической подгруппы группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ справедлива следующая лемма. Её доказательство можно найти в работах [10, 58].

Лемма 1.2.1.1. Если G – алгебраическая подгруппа группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, то для неё имеет место один из четырёх случаев.

1. G – триангулируема, то есть существует $x \in G$ такой, что для любого $g \in G$ матрица xgx^{-1} является треугольной. Мы предположим, что xgx^{-1} – нижняя треугольная матрица, и поэтому она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{C}$. Напомним, что G – подгруппа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и поэтому определитель соответствующей нижней треугольной матрицы должен быть равен единице.

2. G сопряжена подгруппе группы D^\dagger , где

$$D^\dagger = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$

и Случай 1 не имеет места, то есть существует $x \in G$ такой, что для любого $g \in G$ матрица xgx^{-1} является или диагональной или антидиагональной, но не существует такого $x \in G$, чтобы для всех $g \in G$ матрица xgx^{-1} была бы нижней треугольной (этот случай включает в себя лишь вариант, когда матрица получается диагональной).

3. G – конечная алгебраическая подгруппа, и Случаи 1 и 2 не имеют места.
4. $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, то есть G – бесконечная группа всех матриц порядка 2×2 с определителем, равным 1.

□

Итак, нам известно, что G – группа Галуа рассматриваемого дифференциального уравнения – изоморфна алгебраической подгруппе группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Мы также знаем, что всякая алгебраическая подгруппа группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ удовлетворяет сформулированной выше лемме. Мы можем применить теперь лемму к группе Галуа дифференциального уравнения (1.1.3) и установить связь между различными подгруппами группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и решениями уравнения (1.1.3), перечисленными в Теореме 1.2.1.1.

В первом случае G триангулируема. Предположим, что элемент $x \in G$ найден и каждая матрица сопряжена нижней треугольной матрице (это эквивалентно изменению базиса в векторном пространстве или выбору двух специальных независимых решений $\bar{\eta}$ и $\bar{\zeta}$). Тогда каждый элемент $\sigma \in G$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ c_\sigma & a_\sigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad a_\sigma, c_\sigma \in \mathbb{C}$$

и отображает η в $\sigma\eta = a_\sigma\eta$. Теперь если мы положим $\omega = \frac{\eta'}{\eta}$ или, что эквивалентно, $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$, тогда

$$\sigma\omega = \sigma \left(\frac{\eta'}{\eta} \right) = \frac{(\sigma\eta)'}{\sigma\eta} = \frac{a_\sigma\eta'}{a_\sigma\eta} = \frac{\eta'}{\eta} = \omega$$

и, следовательно, $\omega \in \mathbb{C}(x)$. Это первый случай оригинальной теоремы Ковачича: дифференциальное уравнение (1.1.3) имеет решение $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$, где $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$.

В Случае 2 группа G сопряжена подгруппе группы D^\dagger . В таком случае каждый элемент G либо имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & a_\sigma^{-1} \end{pmatrix},$$

либо вид

$$\begin{pmatrix} 0 & b_\sigma \\ -b_\sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

так что или $\sigma\eta = a_\sigma\eta$, $\sigma\zeta = a_\sigma^{-1}\zeta$ или $\sigma\eta = b_\sigma\zeta$, $\sigma\zeta = -b_\sigma^{-1}\eta$. Легко показать, что в обоих названных случаях имеем $\sigma(\eta^2\zeta^2) = \eta^2\zeta^2$, так что $\eta^2\zeta^2 \in \mathbb{C}(x)$. Если мы положим теперь $\omega = \frac{\eta'}{\eta}$ (то есть $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$) и $\varphi = \frac{\zeta'}{\zeta}$, то либо получим $\sigma\omega = \omega$, $\sigma\varphi = \varphi$, либо $\sigma\omega = \varphi$, $\sigma\varphi = \omega$. Минимально, оба случая описываются условием $\sigma^2\omega = \omega$ или $\sigma^2\omega - \omega = 0$, то есть ω удовлетворяет полиномиальному соотношению степени 2 над $\mathbb{C}(x)$ и, следовательно, является алгебраической функцией степени 2 над $\mathbb{C}(x)$. Этот случай соответствует Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1.

В Случае 3 группа G является конечной группой, то есть в ней имеется только конечное число автоморфизмов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Рассмотрим любую элементарную симметрическую функцию от $\sigma_1\eta, \sigma_2\eta, \dots, \sigma_n\eta$, например,

$$\sum \sigma_i\eta = \sigma_1\eta + \sigma_2\eta + \dots + \sigma_n\eta.$$

Для любого $\sigma_j \in G$ имеем

$$\sigma_j \left(\sum \sigma_i\eta \right) = \sum \sigma_i\eta,$$

поскольку $\sigma_i \sigma_j \in G$ для всех σ_i (так как G является группой и, следовательно, замкнута). Значит, $\sum \sigma_i \eta = f(x) \in \mathbb{C}(x)$ и решение η удовлетворяет уравнению

$$\sigma_1 \eta + \sigma_2 \eta + \cdots + \sigma_n \eta - f(x) = 0,$$

то есть является алгебраическим. Аналогичные рассуждения применимы и к решению ζ , то есть η и ζ являются алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$, то есть все решения дифференциального уравнения (1.1.3) являются в этом случае алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$.

Чтобы уточнить, какую структуру имеет G в Случае 3, представим здесь без доказательства одну теорему, касающуюся этого вопроса. Детали её доказательства могут быть найдены в [58].

Теорема 1.2.1.3. Если K – конечная подгруппа группы $SL(2, \mathbb{C})$, то имеет место одна из следующих четырёх возможностей:

1. K сопряжена подгруппе группы D^\dagger .
2. K имеет порядок 24.
3. K имеет порядок 48.
4. K имеет порядок 120.

□

Ясно, что первый случай, упомянутый в этой теореме, это частный случай Случая 2 Леммы 1.2.1.1. Это означает, что для Случая 3 указанной Леммы группа G имеет порядок 24, 48 или 120 и, следовательно, порядок η над $\mathbb{C}(x)$ равен 24, 48 или 120 соответственно.

Для каждого из этих случаев известно, какие именно функции решений η и ζ принадлежат $\mathbb{C}(x)$: если G имеет порядок 24, то $(\eta^4 + 8\eta\zeta^3)^3 \in \mathbb{C}(x)$, если G имеет порядок 48, то $(\eta^5\zeta - \eta\zeta^5)^2 \in \mathbb{C}(x)$, а если G имеет порядок 120, то $\eta^{11}\zeta - 11\eta^6\zeta^6 - \eta\zeta^{11} \in \mathbb{C}(x)$. Доказательства соответствующих утверждений приведены в [58].

В Случае 4 Леммы 1.2.1.1 имеем $G = SL(2, \mathbb{C})$. Мы хотим показать, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1.3) не имеет лиувиллевых решений. Мы предположим противное и приведём рассуждение к противоречию.

Предположим, что дифференциальное уравнение (1.1.3) имеет одно лиувиллево решение. Тогда второе решение, которое можно получить методом понижения порядка (см. выше), также должно быть лиувиллевым, и, следовательно, все решения уравнения (1.1.3) должны быть в таком случае лиувиллевыми (поскольку каждое решение уравнения (1.1.3) представляется в

виде линейной комбинации двух независимых решений). Ясно, что в таком случае $\overline{G} = \mathbb{C}(x)(\eta, \eta', \zeta, \zeta')$ должна содержаться в лиувиллевом расширении, и можно показать, что компонента единицы G^0 группы G должна быть разрешимой [55, стр. 415].

Напомним, что компонентой единицы некоторой группы называется наибольшая связная подгруппа данной группы, содержащая единицу. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить путём, целиком лежащим в этом множестве.

Группа H называется разрешимой (в смысле теории Галуа) если

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_m = \{e\},$$

где каждая H_{i+1} нормальна в H_i , каждая фактор-группа H_i/H_{i+1} абелева и e – единичный элемент H .

Если $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, то $G^0 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и, следовательно, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ должна быть разрешима. Но, как известно, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ не разрешима и, следовательно, мы получили противоречие. Значит, первоначальная гипотеза была ошибочной, то есть дифференциальное уравнение (1.1.3) не имеет лиувиллевых решений. Этот случай соответствует Случаю 4 Теоремы 1.2.1.1.

1.2.2. Необходимые условия. Для того, чтобы сократить объём вычислений, связанных с решением дифференциального уравнения (1.1.3), в работе [58] был указан ряд условий на функцию r , стоящую в правой части уравнения (1.1.3). Для каждого из трёх случаев существования лиувиллевых решений у уравнения (1.1.3), перечисленных в Теореме 1.2.1.1, эти условия различны. И если выполняются условия на функцию r , соответствующие, например, Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1, то решение уравнения (1.1.3) следует искать именно в том виде, в котором оно указано при описании Случая 1. Если же функция r такова, что для неё не выполняется ни одно из условий, соответствующих Случаям 1, 2 или 3 Теоремы 1.2.1.1, то можно сказать сразу, что дифференциальное уравнение (1.1.3) не имеет лиувиллевых решений.

Данные условия на функцию r являются необходимыми, но не достаточными. Если, например, нарушены условия для реализации Случая 1 Теоремы 1.2.1.1, следует сразу же переходить к проверке условий, необходимых для Случаев 2 и 3 той же теоремы. Но если эти условия оказываются выполненными, то следует искать решение уравнения (1.1.3) с помощью алгоритма Ковачича именно в том виде, в котором оно представлено при описании соответствующего случая, хотя вовсе необязательно, что в итоге такое решение будет найдено.

Для того, чтобы понимать смысл необходимых условий, налагаемых на функцию r , напомним кратко некоторые утверждения из комплексного ана-

лиза, которые могут нам потребоваться.

Напомним, что всякая аналитическая функция f комплексного переменного z в окрестности некоторой точки a комплексной плоскости может быть разложена в ряд Лорана по степеням $z - a$ вида

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \frac{a_{-2}}{(z - a)^2} + \dots$$

Часть ряда, отвечающая неотрицательным степеням аргумента $z - a$, то есть ряд

$$a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

называется правильной частью ряда Лорана. Другая его часть, а именно

$$\frac{a_{-1}}{z - a} + \frac{a_{-2}}{(z - a)^2} + \dots$$

называется главной частью ряда Лорана.

По определению, точка a называется полюсом порядка n функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана функции f в окрестности этой точки, содержит конечное число членов, последний из которых имеет вид

$$\frac{a_{-n}}{(z - a)^n}.$$

Пусть $f(z)$ – рациональная функция аргумента z . Тогда a – полюс порядка n функции $f(z)$, если a является корнем кратности n многочлена, стоящего в знаменателе функции $f(z)$.

Далее, пусть n – порядок точки $z = \infty$ как нуля функции $f(z)$, то есть n – порядок точки $z = 0$ как полюса функции $f(z)$. Тогда говорят, что n – порядок функции f в точке ∞ . Если f является рациональной функцией, то её порядок в точке $z = \infty$ определяется как разность степени знаменателя и степени числителя.

Следующая теорема определяет необходимые условия для того, чтобы один из трёх первых случаев, перечисленных в Теореме 1.2.1.1 мог иметь место.

Теорема 1.2.2.1. Для дифференциального уравнения (1.1.3) следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трёх первых случаев, перечисленных в Теореме 1.2.1.1, имел место, то есть чтобы у уравнения (1.1.3) существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.

1. Каждый полюс функции r имеет порядок 1 или чётный порядок. Порядок r в ∞ чётный или выше, чем второй.

2. r имеет по меньшей мере один полюс или порядка 2 или нечётного порядка, большего чем 2.
3. r не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок r в ∞ равен по меньшей мере 2. Если разложение функции r в сумму простейших дробей имеет вид

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$

то

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q} \quad \text{для любого } i,$$

$$\sum_j \beta_j = 0$$

и, кроме того,

$$\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \text{где } \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j.$$

□

Ниже представлены основные идеи доказательства этой теоремы. Часть из них будет обсуждаться более детально при описании самого алгоритма (см. параграф 1.3).

В Случае 1 дифференциальное уравнение (1.1.3) имеет решение вида

$$\eta = e^{\int \omega(x) dx}, \quad \text{где } \omega(x) \in \mathbb{C}(x). \quad (1.2.1)$$

Подставляя данное решение в уравнение (1.1.3), убеждаемся, что функция $\omega(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\omega' + \omega^2 = r. \quad (1.2.2)$$

Поскольку в этом случае обе функции $r(x) \in \mathbb{C}(x)$ и $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$, то они могут быть разложены в ряд Лорана в окрестности точки c комплексной плоскости следующим образом:

$$\omega = b(x - c)^\mu + \text{члены более высокого порядка по } x - c, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \quad (1.2.3)$$

$$r = \alpha(x - c)^\nu + \text{члены более высокого порядка по } x - c, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq 0 \quad (1.2.4)$$

Подставляя разложения (1.2.3) и (1.2.4) в (1.2.2), получим

$$\mu b(x - c)^{\mu-1} + \dots + b^2(x - c)^{2\mu} + \dots = \alpha(x - c)^\nu + \dots \quad (1.2.5)$$

Мы хотим показать, что если c является полюсом r (то есть $\nu < 0$), то его порядок либо равен 1, либо является чётным. В разложении (1.2.5) указаны только наимизшие степени $x - c$, имеющиеся в каждом слагаемом. Эти наимизшие степени должны сокращаться. Действительно,

1. если $\nu = -1$, то $\mu = -1$ и два члена наимизшей степени, стоящие в левой части соотношения (1.2.5), сокращаются между собой;
2. если $\nu = -2$, то $\mu = -1$ и сокращаются три члена наимизшей степени;
3. если $\nu \leq -3$, то соответствующие члены наимизших степеней по $x - c$, стоящие в разложении (1.2.5), дают

$$\nu \geq \min(\mu - 1, 2\mu).$$

Если $\nu \leq -3$, то из этого следует, что $\mu < -1$, т.е. $2\mu < \mu - 1$. Поскольку $b \neq 0$ (по предположению), то $\nu = 2\mu$, то есть ν действительно является чётным, что и утверждалось.

Эти рассуждения доказывают также, что если r имеет полюс порядка $-\nu = -2\mu \geq 4$ в точке c , то ω имеет в той же точке полюс порядка $-\mu$. Этот факт потребуется нам в дальнейшем в пункте 1.3.2 при обосновании алгоритма.

Проверка условий на порядок r в точке $x = \infty$ производится совершенно аналогично и использует разложения r и ω в точке $x = \infty$. Подробности см. в [58].

В Случае 2 дифференциальное уравнение (1.1.3) имеет решение вида

$$\eta = e^{\int \omega(x) dx}, \text{ где } \omega(x) \text{ — алгебраическая функция степени 2 над } \mathbb{C}(x). \quad (1.2.6)$$

Группа Галуа G дифференциального уравнения сопряжена подгруппе группы D^\dagger , так что для любого $\sigma \in G$ или $\sigma\eta = a_\sigma\eta$, $\sigma\zeta = a_\sigma^{-1}\zeta$ или $\sigma\eta = b_\sigma\zeta$, $\sigma\zeta = -b_\sigma^{-1}\eta$. В любом случае мы имеем $\sigma(\eta^2\zeta^2) = \eta^2\zeta^2$, так что $\eta^2\zeta^2 \in \mathbb{C}(x)$. При этом $\eta\zeta \notin \mathbb{C}(x)$, поскольку если бы это было не так, мы имели бы $\sigma(\eta\zeta) = \eta\zeta = a_\sigma\eta a_\sigma^{-1}\zeta$ и G должна была бы состоять из диагональных матриц с коэффициентами a_σ и a_σ^{-1} на диагонали (то есть случай $\sigma\eta = b_\sigma\zeta$, $\sigma\zeta = -b_\sigma^{-1}\eta$ был бы невозможен).

Следовательно, мы можем представить $\eta^2\zeta^2$ в виде

$$\prod (x - c_i)^{e_i}, \quad e_i \in \mathbb{Z}$$

и по меньшей мере один из e_i является нечётным (если бы все они были чётными, то мы имели бы $\eta\zeta \in \mathbb{C}(x)$, что невозможно). Предположим тогда,

что $\eta^2\zeta^2 = (x - c)^e \prod (x - c_i)^{e_i}$, где e – нечётное число. Пусть

$$\varphi = \frac{(\eta\zeta)'}{\eta\zeta} = \frac{\frac{1}{2}(\eta^2\zeta^2)'}{\eta^2\zeta^2}.$$

Так как $\eta'' = r\eta$ и $\zeta'' = r\zeta$, то непосредственной проверкой можно установить, что φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 = 4r\varphi + 2r'. \quad (1.2.7)$$

Разложим r и φ в ряд Лорана в окрестности точки c . Тогда

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}e}{x - c} + \text{полиномиальное выражение по } x - c, \quad (1.2.8)$$

$$r = \alpha(x - c)^\nu + \text{члены более высокого порядка по } x - c. \quad (1.2.9)$$

Подставляя разложения (1.2.8) и (1.2.9) в дифференциальное уравнение (1.2.7), получим

$$\frac{e}{(x - c)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}e^2}{(x - c)^3} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e^3}{(x - c)^3} + \dots = 2\alpha(e + \nu)(x - c)^{\nu-1} + \dots$$

Если $\nu > -2$, тогда

$$e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3 = 0$$

и значит $e = 0, 2, 4$. Но степень e должна быть нечётной, поэтому $\nu \leq -2$. Если $\nu < -2$, следовательно $2\alpha(e + \nu) = 0$ и $e = -\nu$, то есть степень ν является нечётной. Следовательно, либо $\nu = -2$, либо $\nu < -2$ и является нечётной. Значит r имеет либо полюс порядка 2, либо полюс нечётного порядка, большего, чем 2.

В Случае 3 дифференциальное уравнение (1.1.3) имеет решение вида

$$\eta = e^{\int \omega(x) dx}, \text{ где } \omega(x) \text{ — алгебраическая функция} \quad (1.2.10)$$

степени 4, 6 или 12 над $\mathbb{C}(x)$.

Поскольку функция η является алгебраической над $\mathbb{C}(x)$, то она может быть разложена в ряд Пюизо (ряд с дробными показателями степеней) в окрестности некоторой точки комплексной плоскости. Так как η – решение дифференциального уравнения (1.1.3), то

$$\eta'' = r\eta. \quad (1.2.11)$$

Раскладывая η и r в ряд в окрестности точки c , имеем:

$$\eta = a(x - c)^\mu + \text{члены более высокого порядка по } x - c, \quad a \in \mathbb{C}, a \neq 0, \mu \in \mathbb{Q} \quad (1.2.12)$$

$$r = \alpha (x - c)^\nu + \text{члены более высокого порядка по } x - c, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0, \nu \in \mathbb{Z} \quad (1.2.13)$$

Подставим (1.2.12) и (1.2.13) в (1.2.11) и получим

$$a\mu(\mu - 1)(x - c)^{\mu-2} + \dots = \alpha a(x - c)^{\mu+\nu} + \dots \quad (1.2.14)$$

Член наименьшего порядка, стоящий в правой части, получается как произведение членов наименьшего порядка функций η и r . Этот стоящий в правой части член не может быть равен нулю, а потому он должен быть равен одному из членов выражения, стоящего в левой части. Отсюда имеем $\mu + \nu \geq \mu - 2$, то есть $\nu \geq -2$, а значит порядок полюсов функции r может быть только первым или вторым.

Если $\nu = -2$, то приравнивая коэффициенты при выражении $(x - c)^{\mu-2}$ в левой и правой части равенства (1.2.14), получим

$$\alpha = \mu(\mu - 1) \text{ или } \mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\alpha}.$$

Поскольку по предположению $\mu \in \mathbb{Q}$, то должно быть $\sqrt{1 + 4\alpha} \in \mathbb{Q}$ и разложение функции r в сумму простейших дробей должно иметь вид

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j} + \text{полиномиальное выражение}$$

и для любого i должно быть $\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}$.

Оставшиеся условия, перечисленные в Случае 3, получаются совершенно аналогичным способом, а именно разложением r и η в ряд в окрестности точки $x = \infty$ и подстановкой соответствующих рядов в уравнение (1.2.11).

1.3. АЛГОРИТМ КОВАЧИЧА И ЕГО ОБОСНОВАНИЕ

1.3.1. Алгоритм Ковачича для Случая 1. Цель алгоритма Ковачича в Случае 1 состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения (1.1.3) в виде $\eta = Pe^{\int \theta(x) dx}$, где $P \in \mathbb{C}[x]$ – многочлен с коэффициентами из поля \mathbb{C} , а $\theta \in \mathbb{C}(x)$. Поскольку функция η может быть представлена в виде $\eta = e^{\int (\frac{P'}{P} + \theta) dx}$, то это соответствует общему виду решения в Случае 1, описанном в Теореме 1.2.1.1, где

$$\omega = \frac{P'}{P} + \theta.$$

Первый шаг алгоритма состоит в том, чтобы определить части разложения функции θ на простейшие дроби. Второй шаг состоит в том, чтобы,

сложив эти части вместе, образовать функцию, являющуюся кандидатом на роль функции θ . Максимальное число возможных кандидатов оказывается равным $2^{\rho+1}$, где ρ – число конечных полюсов функции r . Если таких кандидатов не находится, то Случай 1 не имеет места. Третий и последний шаг алгоритма состоит в том, чтобы для каждого выбранного θ попытаться подобрать подходящий многочлен P . Если такой многочлен находится, то мы получаем искомое решение дифференциального уравнения (1.1.3). Если нет, то Случай 1 не имеет места.

Предположим, что необходимые условия для существования решения в Случае 1 выполнены и обозначим через Γ множество конечных полюсов функции r .

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим рациональную функцию $[\sqrt{r}]_c$ и два комплексных числа α_c^+ и α_c^- так, как описано ниже.

(c₁) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка 1, то

$$[\sqrt{r}]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c₂) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка 2, то

$$[\sqrt{r}]_c = 0.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции r на простейшие дроби. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

(c₃) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка $2\nu \geq 4$ (необходимо чётного порядка в силу соответствующих необходимых условий), тогда функция $[\sqrt{r}]_c$ представляет собой сумму членов, которые включают в себя все $\frac{1}{(x-c)^i}$ для $2 \leq i \leq \nu$ в разложении функции \sqrt{r} в ряд Лорана в окрестности точки c . Причём для этой функции $[\sqrt{r}]_c$ имеются два значения, различающиеся знаком; одно из них может быть выбрано. Таким образом,

$$[\sqrt{r}]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \dots + \frac{d}{(x-c)^2}. \quad (1.3.1)$$

На практике вовсе не обязательно строить ряд Лорана для \sqrt{r} в окрестности точки c , достаточно построить функцию $[\sqrt{r}]_c$ методом неопределённых коэффициентов. Пусть b – коэффициент при

$\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ у функции $r - [\sqrt{r}]_c^2$. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} + \nu \right).$$

(∞_1) Если порядок функции r в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

(∞_2) Если порядок функции r в точке $x = \infty$ равен 2, то

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении в ряд Лорана функции r в окрестности $x = \infty$. Если $r = s/t$, где s и t – взаимно простые многочлены одного комплексного переменного, то b является частным от деления старшего коэффициента s на старший коэффициент t . Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

(∞_3) Если порядок r в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$ (и является чётным в силу сформулированных ранее необходимых условий), тогда функция $[\sqrt{r}]_\infty$ представляет собой сумму членов со степенями x^i , $0 \leq i \leq \nu$ разложения в ряд Лорана функции \sqrt{r} в точке $x = \infty$ (может быть выбрана одна из двух возможностей). Тогда

$$[\sqrt{r}]_\infty = ax^\nu + \dots + d.$$

Пусть b – коэффициент при $x^{\nu-1}$ в r минус коэффициент при $x^{\nu-1}$ в $([\sqrt{r}]_\infty)^2$. Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} - \nu \right).$$

Шаг 2. Для каждого семейства $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$, где $s(c)$ может быть как знаком $+$, так и знаком $-$, положим

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}. \quad (1.3.2)$$

Если d является неотрицательным целым числом, то функция

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left(s(c) [\sqrt{r}]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x-c} \right) + s(\infty) [\sqrt{r}]_\infty \quad (1.3.3)$$

является кандидатом на роль θ . Если d не является неотрицательным целым числом, то соответствующее семейство s исключается из рассмотрения. Если таким образом из рассмотрения будут исключены все возможные семейства s , значит Случай 1 не имеет места.

Шаг 3. Этот шаг совершается для каждого из семейств s , сохранённых на предыдущем шаге. Если на этом шаге достигнут успех, то решение дифференциального уравнения (1.1.3) найдено. В противном случае рассматриваемое семейство s отбрасывается. Если таким образом будут отброшены все семейства s , отобранные на шаге 2, значит Случай 1 не имеет места для дифференциального уравнения (1.1.3).

Для каждого семейства s будем искать многочлен P степени d (постоянная d определяется формулой (1.3.2)) с комплексными коэффициентами, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r) P = 0. \quad (1.3.4)$$

Наиболее удобно произвести поиск такого многочлена, воспользовавшись обычным методом неопределённых коэффициентов. Если такой многочлен отыщется для какого-либо из семейств s , то

$$\eta = P e^{\int \theta(x) dx}$$

является искомым решением дифференциального уравнения (1.1.3). Если ни для одного из семейств s многочлен P найти не удалось, то Случай 1 не имеет места для дифференциального уравнения (1.1.3).

Ниже представлено обоснование описанного только что алгоритма для поиска решений в Случае 1 дифференциального уравнения (1.1.3).

1.3.2. Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 1. Итак, в Случае 1 мы ищем решение дифференциального уравнения (1.1.3) вида (1.2.1), где

$$\omega(x) = \theta(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}, \quad \theta(x) \in \mathbb{C}(x), \quad P(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Поскольку функция $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$, то она может быть разложена в ряд Лорана в окрестности любой точки комплексной плоскости. Алгоритм начинается с того, что определяется разложение функции $\omega(x)$ на простейшие дроби с использованием разложения в ряд Лорана функции r и уравнения Риккати (1.2.2).

Мы можем записать ряд Лорана функции ω в окрестности точки c , являющейся полюсом функции r , в виде

$$\omega = \sum_{i=2}^{\mu} \frac{a_i}{(x-c)^i} + \frac{e_c}{x-c} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-c)^j.$$

В дальнейшем нам не нужно будет определять все a_i и b_j явно, поэтому мы можем для краткости обозначить

$$[\omega]_c = \sum_{i=2}^{\mu} \frac{a_i}{(x-c)^i} \text{ и } \bar{\omega}_c = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-c)^j.$$

Тогда

$$\omega = \sum_{i=2}^{\mu} \frac{a_i}{(x-c)^i} + \frac{e_c}{x-c} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-c)^j = [\omega]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c. \quad (1.3.5)$$

Основная задача алгоритма состоит в том, чтобы определить эти части функции ω , то есть найти $[\omega]_c$, e_c и остаток $\bar{\omega}_c$, имеющий форму полиномиального выражения.

Нам известно, что согласно необходимым условиям для Случая 1 все полюса функции r имеют или порядок 1, или порядок 2, или четный порядок ≥ 4 .

Сначала предположим, что c – полюс функции r порядка 1. Тогда

$$r = \frac{\alpha}{x-c} + \text{выражение, полиномиальное по } x-c. \quad (1.3.6)$$

Подставляя выражения (1.3.5) и (1.3.6) в уравнение Риккати (1.2.2), получим

$$-\frac{\mu a_{\mu}}{(x-c)^{\mu+1}} + \dots + \frac{a_{\mu}^2}{(x-c)^{2\mu}} + \dots = \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Если предположить, что $a_{\mu} \neq 0$ и $\mu \geq 2$, то $2\mu \geq 4$ и член $\frac{a_{\mu}^2}{(x-c)^{2\mu}}$ не может сократиться ни с каким другим членом. Поэтому $[\omega]_c = 0$ и

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c.$$

Используя это выражение и снова подставляя его в уравнение Риккати (1.2.2), получим

$$-\frac{e_c}{(x-c)^2} + \bar{\omega}'_c + \frac{e_c^2}{(x-c)^2} + \frac{2e_c \bar{\omega}_c}{x-c} + \bar{\omega}_c^2 = \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Член степени $\frac{1}{(x-c)^2}$ должен обращаться в ноль, поэтому мы получаем $-e_c + e_c^2 = 0$, то есть e_c или равен 0 или равен 1. Случай $e_c = 0$ не может иметь места, поскольку в этом случае левая часть уравнения Риккати вообще не содержит полюсов, тогда как в правой части имеется полюс порядка 1.

Следовательно, если c является полюсом r порядка 1, то ω имеет вид

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c \text{ и } e_c = 1.$$

Предположим теперь, что c является полюсом r порядка 2. Тогда

$$r = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \dots \quad (1.3.7)$$

Подставляя выражения (1.3.5) и (1.3.7) в уравнение Риккати (1.2.2), получаем

$$-\frac{\mu a_\mu}{(x-c)^{\mu+1}} + \dots + \frac{a_\mu^2}{(x-c)^{2\mu}} + \dots = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Как и раньше, если предположить, что $a_\mu \neq 0$ и $\mu \geq 2$, то есть $2\mu \geq 4$, то получается, что член $\frac{a_\mu^2}{(x-c)^{2\mu}}$ не может сократиться ни с каким другим членом. Поэтому $[\omega]_c = 0$ и

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c.$$

Теперь подставим это выражение в уравнение Риккати (1.2.2) и получим

$$-\frac{e_c}{(x-c)^2} + \bar{\omega}'_c + \frac{e_c^2}{(x-c)^2} + \frac{2e_c\bar{\omega}_c}{x-c} + \bar{\omega}_c^2 = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Приравнявая нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ с учётом обеих частей данного равенства, получаем

$$e_c^2 - e_c = b,$$

то есть имеем для e_c две возможности

$$e_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4b} \quad \text{или} \quad e_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

Следовательно, если c является полюсом r второго порядка, то

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c \text{ и } e_c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

Теперь предположим, что c является полюсом r порядка $2\nu \geq 4$. Из доказательства необходимых условий для Случая 1 (см. пункт 1.2.2) мы получаем, что в таком случае функция ω должна иметь полюс порядка ν , то есть

$$[\omega]_c = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{a_i}{(x-c)^i}.$$

С учётом того, что написано в алгоритме, введём функцию $[\sqrt{r}]_c$ по формуле (1.3.1). Если теперь обозначить

$$\bar{r}_c = \sqrt{r} - [\sqrt{r}]_c,$$

тогда

$$r = (\bar{r}_c + [\sqrt{r}]_c)^2 = \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c [\sqrt{r}]_c + ([\sqrt{r}]_c)^2$$

и, следовательно,

$$r - ([\sqrt{r}]_c)^2 = \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c [\sqrt{r}]_c. \quad (1.3.8)$$

Используя уравнение Риккати (1.2.2) и выражение (1.3.5), можно показать, что

$$\begin{aligned} & ([\omega]_c + [\sqrt{r}]_c) ([\omega]_c - [\sqrt{r}]_c) = ([\omega]_c)^2 - ([\sqrt{r}]_c)^2 = \\ & = -[\omega]_c' + \frac{e_c}{(x-c)^2} - \bar{\omega}_c' + r - ([\sqrt{r}]_c)^2 - \frac{2e_c [\omega]_c}{x-c} - \frac{e_c^2}{(x-c)^2} - \\ & - \frac{2e_c \bar{\omega}_c}{x-c} - 2[\omega]_c \bar{\omega}_c - \bar{\omega}_c^2. \end{aligned}$$

Левая часть данного соотношения включает в себя только слагаемые вида $\frac{1}{(x-c)^i}$ и $i = \nu + 2, \dots, 2\nu$. Правая часть данного соотношения включает в себя слагаемые вида $\frac{1}{(x-c)^i}$, причём $i = 1, \dots, \nu + 1$, а также полиномиальные по $x - c$ выражения. Поскольку в правой части не имеется членов вида $\frac{1}{(x-c)^i}$ для $i = \nu + 2, \dots, 2\nu$, то, следовательно, выражение в левой части равенства должно обращаться в ноль (мы учитываем, что $\nu \geq 2$) и поэтому либо

$$[\omega]_c = [\sqrt{r}]_c, \text{ либо } [\omega]_c = -[\sqrt{r}]_c$$

и, окончательно,

$$\omega = \pm [\sqrt{r}]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c.$$

Используя это представление функции ω и снова подставляя его в уравнение Риккати (1.2.2), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pm a\nu}{(x-c)^{\nu+1}} + \dots + \frac{e_c}{(x-c)^2} - \bar{\omega}'_c + \frac{b}{(x-c)^{\nu+1}} + \dots \\ & \dots + \frac{\mp 2ae_c}{(x-c)^{\nu+1}} - \frac{e_c^2}{(x-c)^2} - \frac{2e_c\bar{\omega}_c}{x-c} \mp \frac{2\bar{\omega}_c a}{(x-c)^\nu} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ в обеих частях данного равенства, получаем

$$\pm a\nu + b \mp 2ae_c = 0,$$

откуда

$$e_c = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{b}{a} \right) \quad \text{или} \quad e_c = \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{b}{a} \right).$$

Следовательно, если c – полюс r чётного порядка $2\nu \geq 4$, то

$$\omega = \pm [\sqrt{r}]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c, \quad e_c = \frac{1}{2} \left(\nu \pm \frac{b}{a} \right).$$

Теперь рассмотрим точку g – точку комплексной плоскости, которая не является полюсом функции r . Разложение функции r в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит только правильную часть ряда, то есть r в окрестности точки g представляет собой полиномиальное выражение по $x-g$. Раскладывая теперь ω в ряд Лорана в окрестности точки g и используя уравнение Риккати (1.2.2), получим, применяя рассуждения, аналогичные предыдущим, что

$$\omega = \frac{f}{x-g} + \text{полиномиальное выражение по } x-g,$$

где f равно 0 или 1.

Собирая вместе всё то, что мы получили, мы можем написать, что

$$\omega = [\omega]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c = \sum_{c \in \Gamma} \left(\frac{e_c}{x-c} \pm [\sqrt{r}]_c \right) + \sum_{i=1}^d \frac{1}{x-g_i} + R,$$

где $[\sqrt{r}]_c = 0$ если c не является полюсом r порядка ≥ 4 , а R – многочлен, принадлежащий $\mathbb{C}[x]$.

Теперь определим полиномиальную часть R функции ω . Для этого воспользуемся разложением в ряд Лорана функции ω в окрестности точки $x = \infty$. Будем иметь

$$\omega = R + \frac{e_\infty}{x} + \text{более низкие степени по } x. \quad (1.3.9)$$

Используя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно получить следующие результаты. Если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то $e_\infty = 0$; 1 и $R = 0$, если порядок полюса в точке $x = \infty$ равен 2, то

$$e_\infty = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}, \quad R = 0$$

и, наконец, если порядок полюса в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$, то

$$e_\infty = \frac{1}{2} \left(-\nu \pm \frac{b}{a} \right), \quad R = \pm [\sqrt{r}]_\infty.$$

Следовательно,

$$\omega = \sum_{c \in \Gamma} \left(\frac{e_c}{x - c} + s(c) [\sqrt{r}]_c \right) + s(\infty) [\sqrt{r}]_\infty + \sum_{i=1}^d \frac{1}{x - g_i}, \quad (1.3.10)$$

где $s(c)$ равно $+$ или $-$ в зависимости от того, какой знак выбирается у соответствующего e_c , а $s(\infty)$ равно $+$ или $-$ в зависимости от того, какой знак выбирается у e_∞ ; также $[\sqrt{r}]_c = 0$, если c не является полюсом r порядка ≥ 4 и $[\sqrt{r}]_\infty = 0$, если порядок полюса в $x = \infty$ больше, либо равен 2. Раскладывая выражение (1.3.9) в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ и приравнявая получившееся выражение к выражению (1.3.10), получим уравнение

$$e_\infty = \sum_{c \in \Gamma} e_c + \sum_{i=1}^d 1$$

и, следовательно, отсюда можно получить выражение для d через e_∞ и e_c :

$$d = e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c.$$

Если мы теперь положим $P = \prod_{i=1}^d (x - g_i)$ (заметим, что d является степенью P), то тогда

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{x - g_i}$$

и если

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left(\frac{e_c}{x - c} \pm [\sqrt{r}]_c \right) \pm [\sqrt{r}]_\infty,$$

то тогда

$$\omega = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Таким образом, теперь про θ нам всё известно; остаётся только в явном виде определить P . Сделать это можно следующим образом. Снова воспользуемся уравнением Риккати (1.2.2) и подставим в него выражение для ω вида

$$\omega = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega' &= \theta' + \frac{PP'' - P'^2}{P^2}, & \omega^2 &= \theta^2 + \frac{2\theta P'}{P} + \frac{P'^2}{P^2}, \\ P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r)P &= 0. \end{aligned}$$

Мы получили, что если ω удовлетворяет уравнению Риккати (1.2.2), то P удовлетворяет уравнению (1.3.4). Мы можем убедиться, что справедливо и обратное: если P удовлетворяет уравнению (1.3.4), то ω удовлетворяет уравнению Риккати (1.2.2) и, следовательно, функция $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ является решением дифференциального уравнения (1.1.3). Действительно,

$$\begin{aligned} \omega' + \omega^2 &= \theta' + \frac{PP'' - P'^2}{P^2} + \theta^2 + \frac{2\theta P'}{P} + \frac{P'^2}{P^2} = \\ &= \frac{P'' + 2\theta P' + P(\theta' + \theta^2)}{P} = \frac{Pr}{P} = r. \end{aligned}$$

Этот вывод завершает доказательство корректности алгоритма Ковачича в Случае 1.

1.3.3. Алгоритм Ковачича для Случая 2. При рассмотрении алгоритма Ковачича для Случая 2 мы сразу предположим, что необходимые условия существования решения для Случая 2 выполнены, а кроме того – что Случай 1 не имеет места.

Как и для Случая 1, мы будем собирать данные о каждом конечном полюсе функции r , а также о полюсе этой функции в точке $x = \infty$. Для каждого из полюсов мы сформируем множество E_c (или E_∞), состоящее из целых чисел в количестве от одного до трёх. Затем мы рассмотрим семейства элементов из этих множеств – часть из этих семейств будет после рассмотрения отброшена нами, а часть – сохранена. Если ни одно из семейств сохранено не будет, следовательно, Случай 2 не имеет места для дифференциального уравнения (1.1.3). Для каждого сохранённого семейства мы попытаемся найти многочлен, удовлетворяющий определённому дифференциальному уравнению. Если для некоторого семейства такой многочлен найдётся, то мы сможем получить решение дифференциального уравнения (1.1.3). Если же мы не сможем найти такой многочлен ни для одного из сохранённых семейств,

следовательно, Случай 2 не имеет места для дифференциального уравнения (1.1.3).

Теперь перейдём непосредственно к изложению алгоритма. Обозначим через Γ множество конечных полюсов функции r .

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим множество E_c следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 1, то

$$E_c = \{4\}.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 2, и если b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции r на простейшие дроби, то

$$E_c = \left\{ \left(2 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка $\nu > 2$, то

$$E_c = \{\nu\}.$$

(∞_1) Если r имеет порядок > 2 в точке $x = \infty$, то

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

(∞_2) Если r имеет порядок 2 в точке $x = \infty$, и b – коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении в ряд Лорана функции r в точке $x = \infty$, тогда

$$E_\infty = \left\{ \left(2 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

(∞_3) Если r имеет порядок $\nu < 2$ в точке $x = \infty$, то

$$E_\infty = \{\nu\}.$$

Шаг 2. Рассмотрим семейства $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$ и по крайней мере одно из этих чисел является нечётным. Пусть

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right). \quad (1.3.11)$$

Если d – неотрицательное целое число, то соответствующее семейство должно быть сохранено. В противном случае оно должно быть отброшено.

Шаг 3. Для каждого семейства, сохранённого на шаге 2, образуем рациональную функцию

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} \quad (1.3.12)$$

и попытаемся отыскать многочлен степени d (где d определяется формулой (1.3.11)) такой, что

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r) P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r') P = 0. \quad (1.3.13)$$

Если успех достигнут, и соответствующий многочлен найден, положим

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}$$

и пусть ω – решение квадратного уравнения (алгебраического уравнения степени 2) вида

$$\omega^2 - \varphi\omega + \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - r = 0. \quad (1.3.14)$$

Тогда $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ – решение дифференциального уравнения (1.1.3). Если соответствующий многочлен P найти не удалось, то Случай 2 не имеет места.

Ниже представлено обоснование алгоритма Ковачича для Случая 2.

1.3.4. Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 2. В Случае 2 наша задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения (1.1.3) вида (1.2.6). Группа Галуа соответствующего дифференциального уравнения сопряжена подгруппе группы

$$D^\dagger = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$

и функция $\eta^2 \zeta^2$ является инвариантом группы (то есть, элемент $\eta^2 \zeta^2$ остаётся неподвижным при действии на него автоморфизма из группы Галуа дифференциального уравнения (1.1.3)). Следовательно, $\eta^2 \zeta^2 \in \mathbb{C}(x)$, но при этом $\eta \zeta \notin \mathbb{C}(x)$ (иначе мы снова получаем Случай 1). Поэтому мы можем написать, что

$$\eta^2 \zeta^2 = \alpha \prod_{c \in \Gamma} (x - c)^{e_c} \prod_{i=1}^m (x - g_i)^{f_i}, \quad \alpha = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{(\eta \zeta)'}{\eta \zeta} = \frac{1}{2} \frac{(\eta^2 \zeta^2)'}{\eta^2 \zeta^2} = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{f_i}{x - g_i}. \quad (1.3.15)$$

Задача алгоритма заключается в том, чтобы получить явные значения для e_c и f_i (нам не требуется находить явные значения g_i). Как только функция φ будет определена, мы укажем квадратное уравнение, с коэффициентами, зависящими от φ и её производных, которое задаёт функцию ω и, следовательно, определяет решение дифференциального уравнения (1.1.3).

Поскольку η и ζ являются решениями дифференциального уравнения (1.1.3), то $\eta'' = r\eta$, $\zeta'' = r\zeta$. Поэтому для функции φ имеет место дифференциальное уравнение (1.2.7). Именно с помощью этого уравнения мы будем искать зависимость между функцией φ (то есть, по сути, между e_c и f_i) и известной заданной функцией r .

Определим теперь коэффициенты e_c , рассматривая полюса функции r и анализируя разложения в ряд Лорана функций r и φ в окрестности этих полюсов.

Предположим, что c является полюсом r порядка 1. Тогда

$$r = \frac{\alpha}{x-c} + \text{полиномиальное выражение по } x-c \quad (1.3.16)$$

и также

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{e_c}{x-c} + k + \text{выражение, полиномиальное по } x-c, k \in \mathbb{C}. \quad (1.3.17)$$

Подставляя (1.3.16) и (1.3.17) в (1.2.7), получим

$$\begin{aligned} & \frac{e_c}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}e_c^2}{(x-c)^3} + \frac{-\frac{3}{2}e_ck}{(x-c)^2} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e_c^3}{(x-c)^3} + \\ & + \frac{\frac{3}{4}e_c^2k}{(x-c)^2} + \dots = \frac{2\alpha e_c}{(x-c)^2} + \dots + \frac{-2\alpha}{(x-c)^2} + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^3}$ в данном равенстве, получим

$$e_c - \frac{3}{4}e_c^2 + \frac{1}{8}e_c^3 = 0, \text{ то есть } e_c = 0, 2, 4.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в данном равенстве, получим

$$-\frac{3}{2}e_ck + \frac{3}{4}e_c^2k = 2\alpha e_c - 2\alpha.$$

Поскольку $\alpha \neq 0$, следовательно $e_c \neq 0$ и $e_c \neq 2$.

Следовательно, если c является полюсом r порядка 1, то

$$e_c = 4.$$

Теперь предположим, что значение c является полюсом функции r порядка 2. Тогда

$$r = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \text{полиномиальное выражение по } x-c \quad (1.3.18)$$

и также

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{e_c}{x-c} + \text{выражение, полиномиальное по } x-c. \quad (1.3.19)$$

Подставляя (1.3.18) и (1.3.19) в уравнение (1.2.7), получим

$$\frac{e_c}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}e_c^2}{(x-c)^3} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e_c^3}{(x-c)^3} = \frac{2be_c}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-4b}{(x-c)^3} + \dots$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^3}$ в обеих частях данного равенства, получим

$$e_c - \frac{3}{4}e_c^2 + \frac{1}{8}e_c^3 = 2be_c - 4b$$

или три возможных значения для e_c :

$$e_c = 2, \quad e_c = 2 + 2\sqrt{1+4b}, \quad e_c = 2 - 2\sqrt{1+4b}.$$

Поскольку e_c предполагается целым, то значения e_c , не являющиеся целыми, должны быть отброшены.

Следовательно, если c является полюсом функции r порядка 2, то

$$e_c = 2, \quad 2 \pm 2\sqrt{1+4b} \in \mathbb{Z}.$$

Теперь предположим, что c является полюсом r порядка $\nu > 2$. Тогда

$$r = \frac{\alpha}{(x-c)^\nu} + \text{более высокие степени по } x-c, \quad (1.3.20)$$

а для функции φ справедливо равенство (1.3.19). Подставляя (1.3.19) и (1.3.20) в уравнение (1.2.7), получим

$$\frac{e_c}{(x-c)^3} + \frac{-\frac{3}{4}e_c^2}{(x-c)^3} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e_c^3}{(x-c)^3} + \dots = \frac{2\alpha e_c}{(x-c)^{\nu+1}} + \dots + \frac{-2\alpha\nu}{(x-c)^{\nu+1}} + \dots$$

Так как $\nu > 2$, следовательно, $\nu + 1 > 3$ и $2\alpha e_c - 2\alpha\nu = 0$, то есть $e_c = \nu$. Следовательно, если c – полюс функции r порядка $\nu > 2$, то

$$e_c = \nu.$$

Теперь посмотрим на точки g_i , которые являются полюсами функции φ , но для функции r не будут особыми точками. Тогда

$$r = \text{полиномиальное выражение по } x - g_i \quad (1.3.21)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{f_i}{x - g_i} + g + \text{выражение, полиномиальное по } x - g_i, \quad g \in \mathbb{C}. \quad (1.3.22)$$

Подставляя (1.3.21) и (1.3.22) в (1.2.7), получим

$$\begin{aligned} & \frac{f_i}{(x - g_i)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}f_i^2}{(x - g_i)^3} + \frac{-\frac{3}{2}f_i g}{(x - g_i)^2} + \dots + \frac{\frac{1}{8}f_i^3}{(x - g_i)^3} + \\ & + \frac{\frac{3}{4}f_i^2 g}{(x - g_i)^2} + \dots = \frac{\alpha}{x - g_i} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку в правой части данного равенства вообще нет слагаемых вида $\frac{1}{(x - g_i)^3}$, следовательно

$$f_i - \frac{3}{4}f_i^2 + \frac{1}{8}f_i^3 = 0,$$

откуда

$$f_i = 0, 2, 4,$$

следовательно, все f_i в φ являются чётными.

Собирая вместе всё то, что мы выяснили к настоящему моменту, получим

$$\eta^2 \zeta^2 = \alpha \prod_{c \in \Gamma} (x - c)^{e_c} P^2,$$

где $\alpha = \text{const}$, а $P \in \mathbb{C}[x]$ – многочлен такой, что

$$P^2 = \prod_{i=1}^m (x - g_i)^{f_i}.$$

Теперь воспользуемся разложением функции φ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$, а именно

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}e_\infty}{x} + \text{более низкие степени } x. \quad (1.3.23)$$

Используя теперь рассуждения, совершенно аналогичные представленным выше, можно получить, что если порядок функции r в точке $x = \infty$ больше двух, то $e_\infty = 0, 2, 4$; если порядок функции r в точке $x = \infty$ равен 2, то $e_\infty = 2, 2 \pm 2\sqrt{1 + 4b}$; и, наконец, если порядок функции r в точке $x = \infty$ равен $\nu < 2$, то $e_\infty = \nu$.

Разложим выражение (1.3.15) в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ и приравняем результат к выражению (1.3.23). В полученном соотношении приравняем к нулю коэффициент при $\frac{1}{x}$. В результате мы получим уравнение

$$\frac{1}{2}e_\infty = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} e_c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i.$$

Если d – степень многочлена P , тогда $2d = \sum_{i=1}^m f_i$, так что из последнего равенства получаем

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right) -$$

выражение для степени многочлена P , полученное с помощью значений e_∞ и e_c и в точности совпадающее с выражением, определяемым формулой (1.3.11).

Если теперь положить

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c},$$

тогда

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Используя это выражение и уравнение (1.2.7), получим для P дифференциальное уравнение (1.3.13). Но мы до сих пор не имеем выражения для функции ω , нахождение которой составляет цель нашего алгоритма. В работе [58] вводится уравнение (1.3.14) для нахождения функции ω . Мы можем убедиться, что если ω является решением данного уравнения и для дифференциального уравнения (1.1.3) имеет место Случай 2, то функция ω удовлетворяет уравнению (1.2.2) и, следовательно, функция $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ является решением дифференциального уравнения (1.1.3).

Если мы продифференцируем уравнение (1.3.14), то получим

$$(2\omega - \varphi)\omega' = \varphi'\omega - \frac{1}{2}\varphi'' - \varphi\varphi' + r'.$$

С другой стороны, из (1.3.14) мы имеем

$$\omega^2 - r = \varphi\omega - \frac{1}{2}\varphi' - \frac{1}{2}\varphi^2,$$

то есть

$$(2\omega - \varphi)(\omega' + \omega^2 - r) = -\frac{1}{2}(\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 - 4r\varphi - 2r') = -\frac{1}{2} \cdot (1.2.7) = 0,$$

следовательно, или $2\omega - \varphi = 0$ или $\omega' + \omega^2 - r = 0$. Однако $2\omega - \varphi$ не может быть нулём, поскольку $\varphi \in \mathbb{C}(x)$ и, значит, $\omega = \frac{1}{2}\varphi \in \mathbb{C}(x)$, что приводит нас к Случаю 1, который не может иметь места, когда имеет место Случай 2.

Следовательно, $\omega' + \omega^2 - r = 0$ и $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ является решением дифференциального уравнения (1.1.3). Это доказывает корректность приведённого алгоритма для Случая 2.

1.3.5. Алгоритм Ковачича для Случая 3. В Случае 3 дифференциальное уравнение (1.1.3) допускает только решения в алгебраической форме. Предположим с самого начала, что Случаи 1 и 2 не имеют места (хотя и в этих случаях возможно, что у уравнения (1.1.3) существуют алгебраические решения).

Пусть η – решение уравнения (1.1.3) и пусть $\omega = \eta'/\eta$. Можно показать (см. [58]), что ω представляет собой алгебраическую функцию над $\mathbb{C}(x)$ и удовлетворяет алгебраическому уравнению степени 4, 6 или 12. Задачей алгоритма в данном случае является нахождение соответствующего минимального многочлена, которому удовлетворяет функция ω . Сам алгоритм описывается следующим образом. Как и прежде, обозначим через Γ множество конечных полюсов функции r . Отметим, что в силу необходимых условий, в Случае 3 функция r не может иметь полюс порядка большего, чем 2.

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим множество E_c , состоящее из целых чисел, следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 1, то

$$E_c = \{12\}.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 2, и b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции r на простейшие дроби, то

$$E_c = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6.$$

(∞) Если разложение функции r в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$r = \frac{b}{x^2} + \dots,$$

где $b \in \mathbb{C}$ и, возможно, $b = 0$, тогда

$$E_\infty = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6.$$

Шаг 2. Рассмотрим семейства $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$.

Пусть

$$d = e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c. \quad (1.3.24)$$

Если d – неотрицательное целое число, то соответствующее семейство должно быть сохранено, в противном случае оно должно быть отброшено.

Шаг 3. Для каждого семейства, сохранённого на шаге 2, образуем рациональную функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} \quad (1.3.25)$$

и многочлен

$$S = \prod_{c \in \Gamma} (x - c). \quad (1.3.26)$$

Теперь будем искать многочлен P степени d , удовлетворяющих дифференциальному уравнению, которое можно рекуррентно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{12} &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP'_i + ((12 - i)S' - S\theta)P_i - (12 - i)(i + 1)S^2rP_{i+1}, \\ P_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Второе из соотношений (1.3.27) используется при $i = 12, \dots, 0$. Смысл последнего соотношения состоит в том, что когда мы вычислим P_{-1} , пользуясь второй из формул, мы должны приравнять его к нулю.

Если успех достигнут, то пусть ω – корень алгебраического уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{12} \frac{S^i P_i}{(12 - i)!} \omega^i = 0.$$

Тогда $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ – решение дифференциального уравнения (1.1.3). Если получить P_i не удалось, значит Случай 3 не имеет места.

Обоснование корректности алгоритма Ковачича для Случая 3 во многом схоже с обоснованием корректности этого алгоритма для Случая 2, которое было приведено выше. Поэтому не будем приводить здесь соответствующее

рассуждение для Случая 3. Полное обоснование корректности алгоритма в Случае 3 содержится в оригинальной статье Ковачича [58].

Таким образом, если задача исследования какой-либо механической системы сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, можно попытаться найти замену переменных, приводящую коэффициенты данного уравнения к рациональному виду, а затем, используя алгоритм Ковачича, можно попытаться найти лиувиллевы решения соответствующего уравнения. Ниже алгоритм Ковачича применяется для исследования одной из классических задач механики неголономных систем – задачи о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости тяжёлого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЁЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ. ДВИЖЕНИЕ КРУГЛОГО ДИСКА И ДИСКА СО СМЕЩЁННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1.1. Основные системы координат. Пусть твёрдое тело движется по горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Поверхность, ограничивающая твёрдое тело, предполагается выпуклой, так что имеется только одна точка соприкосновения твёрдого тела и плоскости. В большинстве рассмотренных задач считается, что в точке соприкосновения поверхность, ограничивающая твёрдое тело, имеет вполне определённую единственную касательную плоскость. Рассматривается также движение тела, имеющего острый край (ребро), одной из точек которого тело при движении касается неподвижной опорной плоскости.

Отнесём движение тела к неподвижной системе координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O опорной плоскости; ось Oz этой системы координат направим вертикально вверх. Пусть γ – единичный вектор нормали к поверхности тела, построенный в точке M касания тела и плоскости (Рис. 1).

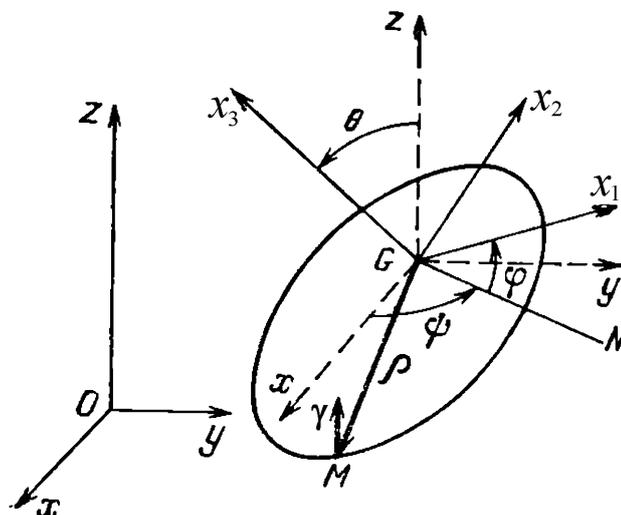


Рис. 1. Качение тела вращения: углы Эйлера.

Предположим теперь, что движущееся по горизонтальной плоскости тело является динамически и геометрически симметричным. Под динамически и геометрически симметричным телом подразумевается тело, ограниченное выпуклой поверхностью вращения, причём ось симметрии поверхности тела совпадает с его осью динамической симметрии, на которой расположен центр тяжести G тела.

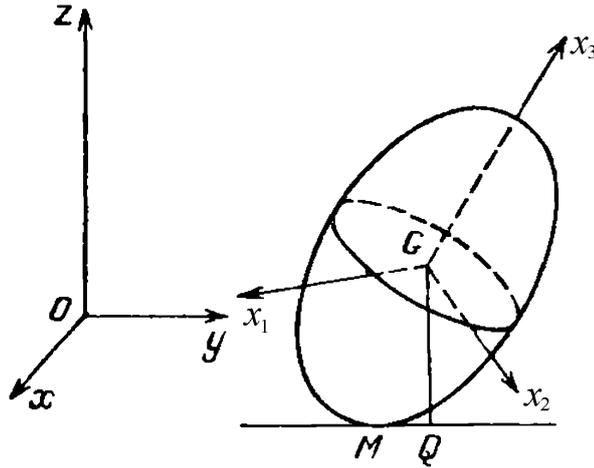


Рис. 2. Качение тела вращения: главные центральные оси инерции.

С твёрдым телом жёстко свяжем систему координат $Gx_1x_2x_3$ с началом в его центре тяжести G и осями, направленными вдоль главных центральных осей инерции тела. В силу динамической и геометрической симметрии тела его ось симметрии является одной из главных центральных осей инерции; направим вдоль неё ось Gx_3 введённой системы координат (Рис. 2). Ориентация тела относительно неподвижной системы координат задаётся углами Эйлера ψ, θ, φ , где θ – угол между осью динамической симметрии тела Gx_3 и осью Oz неподвижной системы координат. Таким образом, взаимная ориентация систем координат $Oxyz$ и $Gx_1x_2x_3$ определяется с помощью матрицы \mathbf{A} направляющих косинусов, задаваемых таблицей

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ x & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ y & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ z & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \end{array} .$$

Величины a_{ij} выражаются через углы Эйлера по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta, \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \\ a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, \\ a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Уравнение поверхности тела в системе координат $Gx_1x_2x_3$ запишем в виде

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (2.1.2)$$

выбирая знак функции F так, чтобы имело место равенство

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= -\frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}, \\ \text{grad } F &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \mathbf{e}_3, \\ |\text{grad } F| &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2}, \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 – единичные векторы осей Gx_1 , Gx_2 и Gx_3 соответственно. Отсюда и из равенств (2.1.1) получаем

$$\begin{aligned} a_{31} = \sin \theta \sin \varphi &= -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \\ a_{32} = \sin \theta \cos \varphi &= -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_2}, \\ a_{33} = \cos \theta &= -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Поскольку движущееся твёрдое тело является геометрически симметричным, то уравнение (2.1.2), определяющее его поверхность, может быть переписано в виде

$$F(\delta, x_3) = 0, \quad \delta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.1.4)$$

Равенства (2.1.3) перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{31} = \sin \theta \sin \varphi &= -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial \delta} \cdot \frac{x_1}{\delta}, \\ a_{32} = \sin \theta \cos \varphi &= -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial \delta} \cdot \frac{x_2}{\delta}, \\ a_{33} = \cos \theta &= -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Первые два равенства из (2.1.5) дают тождество

$$x_1 \cos \varphi = x_2 \sin \varphi. \quad (2.1.6)$$

Ортогональные оси Gx_1 и Gx_2 ввиду динамической симметрии тела можно выбирать с точностью до их одновременного поворота на произвольный угол в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции. Выберем их так, чтобы при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, координата x_1 точки касания M равнялась $-\delta$. На Рис. 3 показано меридианное сечение поверхности тела, отвечающее значению угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

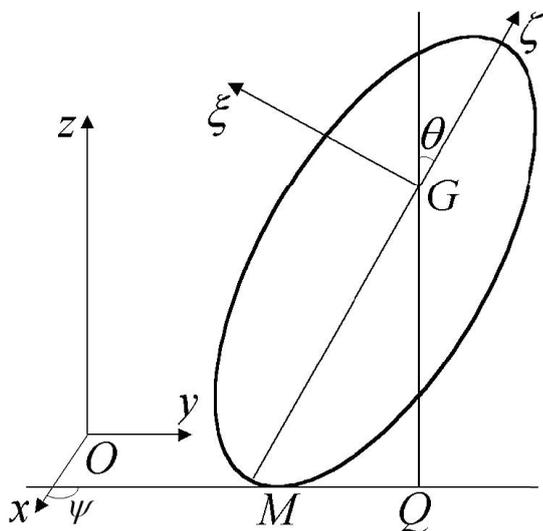


Рис. 3. Качение тела вращения: основные системы координат.

Из (2.1.4) и (2.1.6) следует, что

$$x_1 = -\delta \sin \varphi, \quad x_2 = -\delta \cos \varphi. \quad (2.1.7)$$

Из (2.1.7) и из второго и третьего соотношений (2.1.5) получаем равенство

$$\frac{\partial F}{\partial \delta} \cos \theta + \frac{\partial F}{\partial x_3} \sin \theta = 0,$$

которое с учётом (2.1.4) показывает, что величины δ и x_3 являются функциями угла θ .

Введём теперь подвижную как в теле, так и в абсолютном пространстве систему координат $G\xi\eta\zeta$, с началом в центре масс тела G и осью $G\zeta$, направленной по оси динамической симметрии тела (то есть совпадающей по направлению с осью Gx_3 системы координат $Gx_1x_2x_3$). Ось $G\eta$ данной системы будет сонаправлена с векторным произведением $[\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\gamma}]$, а ось $G\xi$ будет дополнять оси $G\eta$ и $G\zeta$ до правой тройки (Рис. 3). Единичные базисные векторы системы координат $G\xi\eta\zeta$ будем обозначать \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_ζ . Несложно понять, что во всё время движения ось $G\eta$ будет перпендикулярна меридианному сечению поверхности тела, отвечающему значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а ось $G\xi$

будет принадлежать этой плоскости. В силу того, как направлена ось $G\eta$, имеем для вектора \mathbf{e}_η следующую формулу:

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{\sin \theta} [\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\gamma}].$$

Учитывая теперь формулы (2.1.1), получаем

$$\mathbf{e}_\eta = -\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

и, следовательно,

$$\mathbf{e}_\xi = [\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta] = [\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_3] = \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2.$$

Таким образом, единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ связаны с единичными векторами $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ формулами

$$\mathbf{e}_1 = \sin \varphi \mathbf{e}_\xi - \cos \varphi \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{e}_2 = \cos \varphi \mathbf{e}_\xi + \sin \varphi \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\zeta.$$

В разложении по единичным базисным векторам $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ системы координат $G\xi\eta\zeta$ единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \sin \theta \mathbf{e}_\xi + \cos \theta \mathbf{e}_\zeta,$$

а радиус-вектор \overrightarrow{GM} точки M касания тела с плоскостью имеет вид

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM} &= (x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_\xi + (x_2 \sin \varphi - x_1 \cos \varphi) \mathbf{e}_\eta + x_3 \mathbf{e}_\zeta = \\ &= \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta + \zeta \mathbf{e}_\zeta. \end{aligned}$$

С учётом формул (2.1.6) и (2.1.7) можно сделать вывод, что

$$\xi = -\delta, \quad \eta = 0, \quad \zeta = x_3,$$

то есть все компоненты вектора \overrightarrow{GM} в системе координат $G\xi\eta\zeta$ будут функциями только угла θ . Отсюда следует, что расстояние от центра тяжести до горизонтальной плоскости будет функцией только угла θ :

$$GQ = -(\overrightarrow{GM} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = -\xi \sin \theta - \zeta \cos \theta = f(\theta). \quad (2.1.8)$$

Уравнения $\xi = \xi(\theta), \zeta = \zeta(\theta)$ в параметрической форме задают меридианное сечение поверхности тела, изображённое на Рис. 3. Так как вектор \overrightarrow{MQ} лежит на касательной к этому сечению, то он коллинеарен вектору, имеющему в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компоненты ξ' и ζ' , где штрих обозначает

производную по θ ; вектор \overrightarrow{GQ} коллинеарен вектору γ . В силу ортогональности векторов \overrightarrow{MQ} и \overrightarrow{GQ} отсюда следует тождество

$$\xi' \sin \theta + \zeta' \cos \theta = 0. \quad (2.1.9)$$

Дифференцируя обе части равенства (2.1.8) по θ и используя тождество (2.1.9), получаем

$$f'(\theta) = -\xi \cos \theta + \zeta \sin \theta. \quad (2.1.10)$$

Из (2.1.8) и (2.1.10) получаем параметрические уравнения меридианного сечения в такой форме:

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta. \quad (2.1.11)$$

Таким образом, функция $f(\theta)$, определяемая соотношением (2.1.8), полностью характеризует форму поверхности движущегося тела. В дальнейшем движение тела по плоскости мы будем рассматривать относительно введённой нами системы координат $G\xi\eta\zeta$.

2.1.2. Уравнения движения. Уравнения движения тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости получим с помощью общих теорем динамики. Положение тела на плоскости будет вполне определено углами θ , ψ и φ и координатами x и y точки касания M . Пусть векторы скорости \mathbf{v} центра масс G , угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости \mathbf{R} задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами $v_\xi, v_\eta, v_\zeta; p, q, r; \Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.

Уравнения движения тела, отнесенные к системе координат $G\xi\eta\zeta$, имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + m[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}, \quad (2.1.12)$$

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}] = [\overrightarrow{GM} \times \mathbf{R}], \quad (2.1.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{0}, \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GM}] = \mathbf{0}. \quad (2.1.15)$$

Уравнения (2.1.12) и (2.1.13) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента тела, уравнение (2.1.14) выражает условие постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в системе координат $Oxyz$, а уравнение (2.1.15) – условие отсутствия проскальзывания в точке касания тела и плоскости. Здесь g – величина ускорения свободного падения, \mathbf{K} – кинетический момент тела относительно центра масс. Пусть ξ, η, ζ – координаты точки

касания M тела и плоскости в подвижной системе координат $G\xi\eta\zeta$. Тогда $\eta = 0$, а ξ и ζ определяются формулами (2.1.11).

Запишем уравнения (2.1.12), (2.1.13) и (2.1.15) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}\frac{dv_\xi}{dt} + \Omega_\eta v_\zeta - \Omega_\zeta v_\eta &= -g \sin \theta + \frac{R_\xi}{m}, \\ \frac{dv_\eta}{dt} + \Omega_\zeta v_\xi - \Omega_\xi v_\zeta &= \frac{R_\eta}{m},\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv_\zeta}{dt} + \Omega_\xi v_\eta - \Omega_\eta v_\xi &= -g \cos \theta + \frac{R_\zeta}{m}; \\ A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 r \Omega_\eta - A_1 q \Omega_\zeta &= -\zeta R_\eta, \\ A_1 \frac{dq}{dt} + A_1 p \Omega_\zeta - A_3 r \Omega_\xi &= \zeta R_\xi - \xi R_\zeta,\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

$$\begin{aligned}A_3 \frac{dr}{dt} + A_1 q \Omega_\xi - A_1 p \Omega_\eta &= \xi R_\eta; \\ v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

Выясним теперь, как связаны между собой компоненты векторов угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и угловой скорости $\mathbf{\omega}$ тела. Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то

$$\Omega_\xi = p, \quad \Omega_\eta = q.\tag{2.1.19}$$

Величина же Ω_ζ может быть выражена через p ; действительно, поскольку (в силу (2.1.14)) вектор $\mathbf{\Omega}$ перпендикулярен вектору $\dot{\gamma}$, то отсюда и из (2.1.19) следует, что

$$\Omega_\zeta = \Omega_\xi \operatorname{ctg} \theta = p \operatorname{ctg} \theta.\tag{2.1.20}$$

Исключение величин R_ξ , R_η и R_ζ из уравнений (2.1.16), (2.1.17) и некоторые упрощения, опирающиеся на (2.1.11), (2.1.18)–(2.1.20), приводят к трем уравнениям

$$\begin{aligned}\left[A_1 + m (\xi^2 + \zeta^2) \right] \frac{dq}{dt} &= mgf'(\theta) + (A_3 r - A_1 p \operatorname{ctg} \theta) p - \\ - mp (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) (p\zeta - r\xi) - mq \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} \right),\end{aligned}\tag{2.1.21}$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{dt} = (A_1 p \operatorname{ctg} \theta - A_3 r) q,$$

$$\frac{d}{dt} (p\zeta - r\xi) - \frac{A_3}{m\xi} \frac{dr}{dt} = (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) pq.$$

Здесь ξ и ζ – функции угла θ , определяемые равенствами (2.1.11). Добавив к (2.1.21) очевидное соотношение

$$q = -\frac{d\theta}{dt}, \quad (2.1.22)$$

получим замкнутую систему четырех дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени p , q , r , θ .

Полученная система уравнений допускает интеграл энергии

$$E = T + V = \text{const.}$$

Воспользовавшись теоремой Кенига и условиями отсутствия скольжения (2.1.18), его можно записать в таком виде:

$$\frac{1}{2}A_1p^2 + \frac{1}{2}(A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2))q^2 + \frac{1}{2}A_3r^2 + \frac{1}{2}m(p\zeta - r\xi)^2 + mgf(\theta) = \text{const.} \quad (2.1.23)$$

Будем считать, что $\theta \neq \text{const.}$ Тогда, используя равенство (2.1.22), перейдем во втором и третьем из уравнений (2.1.21) к новой независимой переменной – углу θ . Получим

$$A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A_1 p \text{ctg} \theta + A_3 r, \quad (2.1.24)$$

$$\zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} = -(\zeta \text{ctg} \theta + \xi + \zeta') p + \xi' r.$$

Эти линейные уравнения первого порядка приводят к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Интегрирование этого уравнения или системы (2.1.24) дает зависимость p и r от θ с двумя произвольными постоянными; затем интегрирование задачи заканчивается в квадратурах.

В самом деле, если p и r найдены, то величина q может быть определена из интеграла энергии (2.1.23). Зависимость же угла θ от времени получится из уравнения

$$dt = -\frac{d\theta}{q}.$$

Напомним, что φ - угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо его фиксированной меридианной плоскостью, а ψ - угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и неподвижной осью Ox (см. Рис. 3). Тогда углы φ и ψ определяются квадратурами из следующих кинематических уравнений:

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \Omega_\zeta = r - p \text{ctg} \theta, \quad \frac{d\psi}{dt} = p \sin \theta + \Omega_\zeta \cos \theta = \frac{p}{\sin \theta}. \quad (2.1.25)$$

Координаты x , y точки M также найдутся при помощи квадратур. Действительно, пусть $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ – соответственно элементарные дуги меридиана и параллели в точке M , отсчитываемые следующим образом: $d\sigma_1$ от M к Q , а $d\sigma_2$ – перпендикулярно плоскости Рис. 3 в направлении оси $G\eta$. Тогда

$$d\sigma_1 = \sqrt{\xi'^2 + \zeta'^2} d\theta, \quad d\sigma_2 = -\xi d\varphi. \quad (2.1.26)$$

Так как скольжение отсутствует, то

$$dx = d\sigma_1 \cos \psi + d\sigma_2 \sin \psi, \quad dy = d\sigma_1 \sin \psi - d\sigma_2 \cos \psi. \quad (2.1.27)$$

Из (2.1.26) и (2.1.27) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\xi'^2 + \zeta'^2} \cos \psi \frac{d\theta}{dt} - \xi \sin \psi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sqrt{\xi'^2 + \zeta'^2} \sin \psi \frac{d\theta}{dt} + \xi \cos \psi \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Если θ , ψ и φ уже определены как функции времени, то величины x , y находятся отсюда квадратурами.

Таким образом, решение задачи о качении без скольжения тяжёлого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости сводится к решению системы уравнений (2.1.24). Разрешим эту систему относительно производных:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\theta} &= \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{A_3 m \zeta (\xi + \zeta')}{\Delta} \right) p + \frac{A_3 (A_3 + m\xi^2 + m\xi'\zeta')}{\Delta} r, \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{A_1 m \xi (\xi + \zeta')}{\Delta} p + \frac{m\xi (A_3 \zeta - A_1 \xi')}{\Delta} r. \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

Здесь и в дальнейшем через Δ будем обозначать выражение

$$\Delta = A_1 A_3 + A_1 m \xi^2 + A_3 m \zeta^2.$$

Заметим, что если $\xi + \zeta' = 0$, то второе уравнение системы (2.1.29) интегрируется отдельно. Этому условию удовлетворяет тело вращения

$$f(\theta) = R - d \cos \theta, \quad \xi = -R \sin \theta, \quad \zeta = d - R \cos \theta,$$

то есть динамически симметричный шар радиуса R , геометрический центр которого отстоит от центра тяжести, лежащего на оси динамической симметрии, на расстояние d . Движение по горизонтальной плоскости неоднородного

динамически симметричного шара было полностью исследовано С.А. Чаплыгиным [30], которому удалось показать, что в этом случае система уравнений (2.1.24) или (2.1.29) допускает два линейных по p и r первых интеграла

$$A_1 p \sin \theta + A_3 r \left(\cos \theta - \frac{d}{R} \right) = j_1 = \text{const},$$

$$r \sqrt{A_1 A_3 + m R^2 \left(A_1 \sin^2 \theta + A_3 \left(\cos \theta - \frac{d}{R} \right)^2 \right)} = j_2 = \text{const},$$

и, следовательно, разрешима в лиувиллевых функциях. В дальнейшем мы будем считать, что $\xi + \zeta' \neq 0$. Тогда из системы (2.1.29) можно получить для r следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{3m(A_1 \xi \xi' + A_3 \zeta \zeta')}{\Delta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\xi(\xi + \zeta'))}{\xi(\xi + \zeta')} \right] \frac{dr}{d\theta} + \\ + \frac{m\xi(\xi + \zeta')}{\Delta \sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{(A_1 \xi' - A_3 \zeta) \sin \theta}{\xi + \zeta'} \right) - A_3 \sin \theta \right] r = 0. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Дальнейшее решение задачи сводится к интегрированию линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (2.1.30). В данной работе мы будем изучать движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости различных тел, для каждого из которых будем выписывать соответствующее уравнение вида (2.1.30) и, используя алгоритм Ковачича, выяснять, допускает ли полученное линейное уравнение второго порядка решение, выражающееся через лиувиллевы функции.

2.2. ДВИЖЕНИЕ КРУГЛОГО ДИСКА

2.2.1. Уравнения движения. Интегрируемость уравнений движения в гипергеометрических функциях. Для начала рассмотрим задачу о движении по абсолютно шероховатой плоскости динамически симметричного тела, имеющего острый край в форме окружности, центр которой совпадает с центром тяжести G тела; ось симметрии тела $G\zeta$ перпендикулярна плоскости острого края [30, 34, 56]. Такое твёрдое тело будем называть диском. В частности, диск может быть однородной круглой пластинкой. Рассмотрим движение диска радиуса R в однородном поле тяжести, предполагая, что он опирается о горизонтальную плоскость одной точкой своего острого края. Тогда формулы (2.1.8), (2.1.11) дают

$$f(\theta) = R \sin \theta, \quad \xi = -R, \quad \zeta = 0. \quad (2.2.1)$$

С учётом формул (2.2.1) система (2.1.24) запишется в виде

$$(A_3 + mR^2) \frac{dr}{d\theta} = mR^2 p, \quad A_1 \frac{d}{d\theta} (p \sin \theta) = A_3 r \sin \theta, \quad (2.2.2)$$

а дифференциальное уравнение второго порядка (2.1.30) примет вид

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta} - Br = 0, \quad B = \frac{mR^2 A_3}{A_1 (A_3 + mR^2)}, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (2.2.3)$$

Вводя в это уравнение вместо угла θ новую независимую переменную z , определяемую равенством [30, 34, 56]

$$\cos \theta = 1 - 2z,$$

окончательно получим

$$z(1-z) \frac{d^2 r}{dz^2} + (1-2z) \frac{dr}{dz} - Br = 0. \quad (2.2.4)$$

Полученное линейное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой гипергеометрическое уравнение Гаусса [4]. Таким образом, задача о движении диска интегрируется при помощи гипергеометрических функций.

Если обозначить через

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z)$$

гипергеометрический ряд Гаусса

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1) \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n)} z^{n+1} + \dots, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

то данный ряд будет одним из частных решений дифференциального уравнения

$$z(1-z) \frac{d^2 r}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dr}{dz} - \alpha\beta r = 0.$$

Для уравнения (2.2.4) параметры удовлетворяют условиям

$$\alpha + \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \alpha\beta = B = \frac{mR^2 A_3}{A_1 (A_3 + mR^2)}, \quad \frac{\alpha + \beta + 1}{2} = \gamma,$$

и, следовательно, его общее решение можно записать в виде [4]

$$r = c_1 F(\alpha, \beta, 1; z) + c_2 F(\alpha, \beta, 1; 1-z),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а α и β – корни квадратного уравнения

$$s^2 - s + B = 0.$$

Отметим [4], что ряд (2.2.5) сходится равномерно на любом отрезке числовой оси, лежащем внутри интервала $-1 < z < 1$.

Возвращаясь от z к прежней независимой переменной θ , получим функцию $r(\theta)$ в виде

$$r = c_1 F\left(\alpha, \beta, 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + c_2 F\left(\alpha, \beta, 1; \cos^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (2.2.6)$$

Функцию $p = p(\theta)$ находим из соотношений (2.2.2) и (2.2.6):

$$p = \frac{A_3}{2A_1} \sin \theta \left[c_1 F\left(\alpha+1, \beta+1, 2; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - c_2 F\left(\alpha+1, \beta+1, 2; \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.2.7)$$

с учётом выражения для производной гипергеометрической функции

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z).$$

Таким образом, общее решение системы уравнений (2.2.2) представляется в виде (2.2.6), (2.2.7) и выражается через гипергеометрические функции. Следовательно, в общем случае решение уравнения (2.2.3) не выражается через лиувиллевы функции. Выясним, могут ли существовать лиувиллевы решения у дифференциального уравнения (2.2.3) при каких-либо частных значениях параметра B (то есть, при дополнительных ограничениях на распределение масс в диске). Для этого воспользуемся алгоритмом Ковачича.

2.2.2. Применение алгоритма Ковачича к задаче о движении диска. Для применения к дифференциальному уравнению (2.2.3) алгоритма Ковачича, представим коэффициенты этого уравнения в виде рациональных функций. Для этого сделаем в уравнении (2.2.3) замену независимой переменной по формуле $\cos \theta = x$. Тогда оно примет вид

$$\frac{d^2 r}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dr}{dx} - \frac{B}{1-x^2} r = 0. \quad (2.2.8)$$

Полученное уравнение является исходным для применения алгоритма Ковачича. Если положить

$$a(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad b(x) = -\frac{B}{1-x^2},$$

то уравнение (2.2.8) будет в точности иметь вид уравнения (1.1.1). При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (2.2.8) приводится к уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D(x)y, \quad (2.2.9)$$

$$D(x) = \frac{2B-1}{4(x+1)} - \frac{2B-1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{4(x-1)^2}.$$

Разложение функции $D(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$D(x)|_{x=\infty} = -\frac{B}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены.

Замечание 2.2.2.1. Здесь и всюду в дальнейшем нами будут рассматриваться только те значения параметров задачи, которые имеют физический смысл. Под этим понимается положительность геометрических параметров, массы тела и всех его моментов инерции, а также выполнение неравенства треугольника для моментов инерции. Однако алгоритм Ковачича позволяет найти лиувиллевы решения линейного дифференциального уравнения второго порядка при любых значениях параметров. Например, если $B = 0$ (масса диска сосредоточена на его оси симметрии), то уравнение (2.2.3) имеет решение, выражающееся через элементарные функции:

$$r(\theta) = c_1 \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) + c_2. \quad (2.2.10)$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (2.2.9) приводит к следующему результату.

Теорема 2.2.2.1. При всех физически допустимых значениях параметров задачи уравнение (2.2.9) не имеет решения, выражающегося через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (2.2.9) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $D(x)$ имеет два полюса – в точках $x = 1$ и $x = -1$, каждый из которых имеет второй порядок. В точке $x = \infty$ функция $D(x)$ также имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (2.2.9) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$\left[\sqrt{D}\right]_{\pm 1} = 0, \quad b_{\pm 1} = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_1^{\pm} = \alpha_{-1}^{\pm} = \frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{D}\right]_{\infty} = 0, \quad b_{\infty} = -B, \quad \alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4B}}{2}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $D(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков $s = (s(\infty), s(1), s(-1))$. Для каждого из этих восьми наборов по формуле (1.3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)}.$$

Вычисления показывают, что из восьми значений d различны только два, а именно

$$d = \frac{\pm\sqrt{1 - 4B} - 1}{2}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Но поскольку по физическому смыслу задачи мы имеем $B > 0$, то число d в данном случае может быть только отрицательным. Это означает, что у уравнения (2.2.9) не может существовать решения вида (1.2.1). Заметим ещё, что при $B = 0$ для d находится единственное неотрицательное значение $d = 0$, и у уравнения (2.2.9) существует лиувиллево решение, которое для исходного уравнения (2.2.3) имеет вид (2.2.10).

Теперь попытаемся найти у уравнения (2.2.9) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (2.2.9) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{2\}, \quad E_{-1} = \{2\}, \quad E_{\infty} = \left\{ \left(2 \pm k\sqrt{1 - 4B} \right) \cap \mathbb{Z}, k = 0, \pm 2 \right\}.$$

Определим, какие целые числа могут составлять множество E_{∞} . Легко показать, что при условиях

$$B > 0, \quad 1 - 4B \geq 0$$

имеем либо

$$E_{\infty} = \{1, 2, 3\}$$

при $B = \frac{3}{16}$, либо

$$E_{\infty} = \{2\}$$

при остальных допустимых значениях B .

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$ элементов множеств E_1, E_{-1}, E_∞ , причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Очевидно, что нечётные числа в наборе s могут появиться только при $B = \frac{3}{16}$. Имеем ровно два таких набора чисел: $(1, 2, 2)$ и $(3, 2, 2)$. Однако соответствующие им значения постоянной d , вычисляемые по формуле (1.3.11)

$$d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_1 - e_{-1}),$$

не являются целыми неотрицательными числами: для набора $(1, 2, 2)$ имеем $d = -\frac{3}{2}$, а для набора $(3, 2, 2)$ имеем $d = -\frac{1}{2}$. Следовательно, у уравнения (2.2.9) не может существовать решения вида (1.2.6).

Попытаемся, наконец, найти у уравнения (2.2.9) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (2.2.9). Функция $D(x)$ может быть записана в виде

$$D(x) = \frac{\alpha_1}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{\beta_1}{x+1} + \frac{\beta_2}{x-1},$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \quad \beta_1 = \frac{2B-1}{4}, \quad \beta_2 = -\frac{2B-1}{4},$$

то есть она имеет в точности такой вид, какой указан в описании необходимых условий существования решения вида (1.2.10) у уравнения (2.2.9), приведённых в Теореме 1.2.2.1. Причём

$$\sqrt{1+4\alpha_1} = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1+4\alpha_2} = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \beta_1 + \beta_2 = 0.$$

Таким образом, для того, чтобы у уравнения (2.2.9) могло существовать решение вида (1.2.10), должно выполняться лишь одно условие:

$$\sqrt{1+4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2.$$

Для уравнения (2.2.9) это условие приводится к виду

$$\sqrt{1-4B} \in \mathbb{Q}.$$

Будем считать, что оно выполняется. Теперь по шагам будем применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{6\}, \quad E_{-1} = \{6\}, \quad E_\infty = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1-4B} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6.$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$ элементов множеств E_1, E_{-1}, E_∞ и найдём в соответствии с формулой (1.3.24) число d :

$$d = e_\infty - e_1 - e_{-1} = k\sqrt{1-4B} - 6.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. При этом $k = 6$ является наибольшим возможным значением, которое может принимать постоянная k . Поэтому при $B > 0$ число d не может быть неотрицательным целым. Это означает, что у уравнения (2.2.9) не может существовать решения вида (1.2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что уравнение (2.2.9) при $B > 0$ не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

Итак, мы доказали, что задача о качении круглого диска по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости не интегрируется в лиувиллевых функциях. Иными словами, гипергеометрические функции (2.2.6), (2.2.7) не сводятся к лиувиллевым функциям ни при каких частных значениях параметра B .

2.3. ДВИЖЕНИЕ ДИСКА СО СМЕЩЁННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

Пусть снова по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости движется динамически симметричное тело, имеющее острый край в форме окружности радиуса R . Предположим, что ось симметрии $G\zeta$ тела, проходящая через его центр масс, проходит также через центр этой окружности перпендикулярно плоскости острого края. В отличие от предыдущего случая будем теперь считать, что центр окружности и центр масс G тела не совпадают друг с другом, а лежат на оси динамической симметрии на расстоянии h друг от друга. Такое тело принято называть диском со смещённым центром масс или диском конечной толщины [39, 40, 41, 59, 70]. Будем считать, что в процессе движения диск наклонен по отношению к вертикали и, следовательно, касается плоскости в единственной точке. Расстояние от центра масс диска до опорной плоскости выражается формулой

$$f(\theta) = R \sin \theta + h \cos \theta.$$

Тогда по формулам (2.1.11) имеем

$$\xi = -R, \quad \zeta = -h.$$

Система уравнений (2.1.29) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\theta} &= - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{A_3 m R h}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2} \right) p + \frac{A_3 (A_3 + m R^2)}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2} r, \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{A_1 m R^2}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2} p + \frac{A_3 m R h}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2} r,\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

а уравнение (2.1.30) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dr}{d\theta} - \frac{A_3 m R (R \sin \theta + h \cos \theta)}{(A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2) \sin \theta} r &= 0, \\ \theta \in \left(0, \pi - \arccos \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right).\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Общее решение системы (2.3.1), выражающееся через гипергеометрические функции, было впервые указано в работах М. Батисты [39, 40, 41]. Гипергеометрические ряды, с помощью которых представляются функции $p(\theta)$ и $r(\theta)$, имеют в данном случае более сложную структуру, чем предыдущем случае. Поэтому не будем детально описывать здесь процедуру получения общего решения системы уравнений (2.3.1), как это было сделано в задаче о качении круглого диска (см. пункт 2.2.1 нашей работы). Зададимся вопросом о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (2.3.2). Сделаем в этом уравнении замену независимой переменной по формуле $\operatorname{ctg} \theta = x$ и введём следующие обозначения:

$$A = \frac{A_3 m h R}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2}, \quad B = \frac{A_3 m R^2}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2}.\tag{2.3.3}$$

В результате уравнение (2.3.2) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \frac{dr}{dx} - \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} r = 0.\tag{2.3.4}$$

Если обозначить

$$a(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad b(x) = -\frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2},$$

то уравнение (2.3.4) примет в точности вид уравнения (1.1.1). При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (2.3.4) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D_1(x) y,\tag{2.3.5}$$

$$D_1(x) = \frac{(4B+1)i}{16(x+i)} - \frac{3+4B-4Ai}{16(x+i)^2} - \frac{(4B+1)i}{16(x-i)} - \frac{3+4B+4Ai}{16(x-i)^2}.$$

Разложение функции $D_1(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ имеет вид

$$D_1(x)|_{x=\infty} = -\frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (2.3.5) приводит к следующему результату.

Теорема 2.2.3.1. При всех физически допустимых значениях параметров задачи уравнение (2.3.5) не имеет решения, выражающегося через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (2.3.5) решение вида (1.2.1). Заметим, что функция $D_1(x)$ имеет два полюса – в точках $x = i$ и $x = -i$, каждый из которых имеет второй порядок. В точке $x = \infty$ функция $D_1(x)$ также имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (2.3.5) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (2.3.5) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{D_1}\right]_{\pm i} &= 0, & \alpha_i^{\pm} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - B - Ai}, & \alpha_{-i}^{\pm} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai}, \\ \left[\sqrt{D_1}\right]_{\infty} &= 0, & b_{\infty} &= -\frac{1}{4}, & \alpha_{\infty}^{\pm} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $D_1(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков $s = (s(\infty), s(i), s(-i))$. Для каждого из этих восьми наборов по формуле (1.3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_i^{s(i)} - \alpha_{-i}^{s(-i)}.$$

В явном виде постоянная d записывается следующим образом:

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - B - Ai} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai}.$$

Здесь знак радикала обозначает пару противоположных по знаку комплексных чисел. Поскольку квадратные корни извлекаются из двух комплексно сопряженных чисел, то полученные в результате четыре числа имеют вид

$$u + vi, u - vi, -u + vi, -u - vi,$$

где $u = \left| \operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \right|$, $v = \left| \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \right|$.

Следовательно, d может быть неотрицательным целым числом только если из указанных четырех чисел в выражении для d будет участвовать пара комплексно сопряженных чисел с положительной действительной частью, т.е. если

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u + vi + u - vi) = -\frac{1}{2} + \left| \operatorname{Re} \sqrt{1/4 - B + Ai} \right|.$$

Можно показать, что

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - 4B + \sqrt{16A^2 + (1 - 4B)^2}}{2}}. \quad (2.3.6)$$

Докажем, что равенству (2.3.6) не удовлетворяет ни одно целое неотрицательное значение d при A и B , определяемых формулами (2.3.3). Перепишем равенство (2.3.6) в виде

$$16A^2 = 4(2d + 1)^4 - 4(2d + 1)^2(1 - 4B).$$

Обозначим $2(2d + 1)^2 = k \geq 2$ при $d \geq 0$. С учетом этого обозначения получим

$$16A^2 = k^2 - 2k(1 - 4B).$$

Преобразуем последнее равенство к виду

$$8B\left(2\frac{A^2}{B} - k\right) = k(k - 2). \quad (2.3.7)$$

Покажем, что при $k \geq 2$ левая часть равенства (2.3.7) отрицательна, в то время как правая часть неотрицательна. Для этого достаточно получить оценку $\frac{A^2}{B} < 1$ и учесть, что $B > 0$. Из (2.3.3) вытекает, что

$$\frac{A^2}{B} = \frac{A_3mh^2}{A_1A_3 + A_1mR^2 + A_3mh^2} < \frac{A_3mh^2}{A_3mh^2} = 1.$$

Полученное противоречие говорит о том, что у дифференциального уравнения (2.3.5) не существует решения вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (2.3.5) решение вида (1.2.6). Необходимые условия существования такого решения у уравнения (2.3.5) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Для поиска решения будем по шагам применять алгоритм Ковачича так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_{\pm i} = \left\{ \left(2 + k\sqrt{\frac{1}{4} - B \mp Ai} \right) \cap \mathbb{Z} \right\} = \{2\}, \quad k = 0, \pm 2,$$

$$E_{\infty} = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы $s = (e_{\infty}, e_i, e_{-i})$ элементов множеств E_i, E_{-i}, E_{∞} , причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Очевидно в данном случае ни одного такого набора не существует. Следовательно, у уравнения (2.3.5) не может существовать решения вида (1.2.6).

Попытаемся найти у уравнения (2.3.5) решение вида (1.2.10). Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (2.3.5). Функция $D_1(x)$ может быть представлена в виде

$$D_1(x) = \frac{\alpha_1}{(x+i)^2} + \frac{\alpha_2}{(x-i)^2} + \frac{\beta_1}{x+i} + \frac{\beta_2}{x-i},$$

$$\alpha_1 = -\frac{3+4B-4Ai}{16}, \quad \alpha_2 = -\frac{3+4B+4Ai}{16},$$

$$\beta_1 = \frac{(4B+1)i}{16}, \quad \beta_2 = -\frac{(4B+1)i}{16}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{1+4\alpha_1} = \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \notin \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{1+4\alpha_2} = \sqrt{\frac{1}{4} - B - Ai} \notin \mathbb{Q}.$$

Таким образом, необходимые условия существования решения вида (1.2.10) уравнения (2.3.5) не выполняются. Следовательно, у уравнения (2.3.5) не может существовать решения вида (1.2.10). Окончательно, можно сделать вывод, что уравнение (2.3.5) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

Итак, мы доказали, что задача о качении диска со смещённым центром масс по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости не интегрируется в лиувиллевых функциях.

ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ ТОРА

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ И ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. Пусть R – радиус меридиана тора на экваторе, и $a + R$ – радиус экваториальной окружности, центр которой совпадает с центром масс тора (Рис. 4). Тогда высота центра масс тора над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = R + a \sin \theta.$$

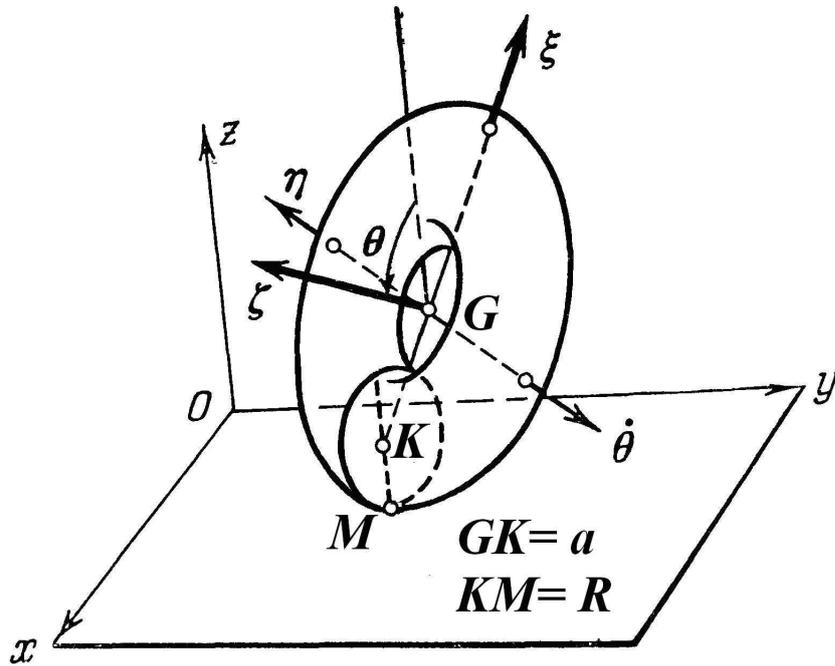


Рис. 4. Качение тора по горизонтальной плоскости.

В соответствии с (2.1.11) имеем

$$\xi = -a - R \sin \theta, \quad \zeta = -R \cos \theta.$$

Система уравнений (2.1.29) принимает вид

$$\frac{dp}{d\theta} = - \left(1 + \frac{A_3 m a R \sin \theta}{\Delta} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p + \frac{A_3 (A_3 + m a^2 + m R^2 + 2 m a R \sin \theta)}{\Delta} r,$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{A_1 m a (R \sin \theta + a)}{\Delta} p + \frac{m R (A_3 - A_1) (R \sin \theta + a) \cos \theta}{\Delta} r,$$

$$\Delta = (A_1 - A_3) m R^2 \sin^2 \theta + 2 A_1 m R a \sin \theta + A_1 A_3 + A_1 m a^2 + A_3 m R^2, \quad (3.1.1)$$

а уравнение (2.1.30) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi), \quad (3.1.2)$$

$$b_1 = \frac{a \cos \theta}{(R \sin \theta + a) \sin \theta} + \frac{3mR((A_1 - A_3)R \sin \theta + A_1 a) \cos \theta}{\Delta},$$

$$b_2 = \frac{m(R \sin \theta + a)(R(A_1 - A_3)(1 - 2 \sin^2 \theta) - A_3 a \sin \theta)}{\Delta \sin \theta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3) m R^2 \sin^2 \theta + 2A_1 m R a \sin \theta + A_1 A_3 + A_1 m a^2 + A_3 m R^2.$$

Система уравнений (3.1.1) впервые была получена в работах Л.Г. Лобаса [18, 19] (см. также [6, 26]). Зададимся вопросом о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (3.1.2). Сделаем в уравнении (3.1.2) замену независимой переменной по формуле $\sin \theta = x$ и введём обозначение

$$B = \frac{a}{R}.$$

Поскольку $a > R$, то $B > 1$.

В результате уравнение (3.1.2) переписывается в виде

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (3.1.3)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3mR^2((A_1 - A_3)x + A_1 B)}{\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{mR^2(x+B)((A_1 - A_3)(2x^2 - 1) + A_3 Bx)}{x(x^2 - 1)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3) m R^2 x^2 + 2A_1 B m R^2 x + A_1 A_3 + A_1 B^2 m R^2 + A_3 m R^2.$$

При $A_3 \neq A_1$ многочлен Δ , входящий в знаменатели коэффициентов d_1 и d_2 , имеет два корня, которые мы обозначим x_1 и x_2 . В явном виде они записываются следующим образом:

$$x_1 = -\frac{A_1 m R B - \sqrt{A_3 m (A_1 m R^2 B^2 - (A_1 - A_3) (A_1 + m R^2))}}{m R (A_1 - A_3)}, \quad (3.1.4)$$

$$x_2 = -\frac{A_1 m R B + \sqrt{A_3 m (A_1 m R^2 B^2 - (A_1 - A_3) (A_1 + m R^2))}}{m R (A_1 - A_3)}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (3.1.3) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = T(x)y, \quad (3.1.5)$$

$$T(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} +$$

$$+ \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2} + \frac{\beta_5}{x+B} + \frac{\alpha_5}{(x+B)^2} + \frac{\beta_6}{x} + \frac{\alpha_6}{x^2}, \quad (3.1.6)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = \frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 + 2)B^2 + (5x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9)B}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)(B + 1)} +$$

$$+ \frac{x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 5}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)(B + 1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 - 2)B^2 + (5x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9)B}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(B - 1)} +$$

$$+ \frac{x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 5}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(B - 1)},$$

$$\beta_3 = \frac{8x_1B^3 + 4(x_1^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_1^3 - 4x_1^2x_2 + x_1 + 6x_2)B}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 - x_2)(x_1 + B)} +$$

$$+ \frac{(3x_1^2 - 2x_1x_2 - 1)x_1^2}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 - x_2)(x_1 + B)},$$

$$\beta_4 = \frac{8x_2B^3 + 4(x_2^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_2^3 - 4x_1x_2^2 + 6x_1 + x_2)B}{8x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1)(x_2 - x_1)(x_2 + B)} +$$

$$+ \frac{(3x_2^2 - 2x_1x_2 - 1)x_2^2}{8x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1)(x_2 - x_1)(x_2 + B)},$$

$$\beta_5 = \frac{10B^4 + 7(x_1 + x_2)B^3 + 4(x_1x_2 - 2)B^2 - 5(x_1 + x_2)B - 2x_1x_2}{4B(B - 1)(B + 1)(x_1 + B)(x_2 + B)},$$

$$\beta_6 = -\frac{4B^2 + 3(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2}{4x_1x_2B}.$$

Таким образом, функция $T(x)$ имеет шесть конечных полюсов в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -B$, $x = x_1$ и $x = x_2$. В общем случае эти полюса не совпадают друг с другом. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных условиях на параметры задачи функция $T(x)$ имеет вид, отличный от того, что представлен выше. Перечислим далее все возможные случаи, когда структура функции $T(x)$ меняется.

1. При выполнении условия

$$A_3 = A_1 \quad (3.1.7)$$

степень многочлена Δ меняется со второй на первую. Единственным корнем многочлена Δ в этом случае будет значение x_0 , равное

$$x_0 = -\frac{A_1 + mR^2 + mR^2B^2}{2mBR^2}. \quad (3.1.8)$$

2. Для значения x_0 , определяемого формулой (3.1.8), справедлива оценка $x_0 < -1$. Поэтому x_0 не может быть равным 0, 1 или -1 . Однако, при выполнении условия

$$A_3 = A_1 = mR^2(B^2 - 1) = m(a^2 - R^2) \quad (3.1.9)$$

мы получаем, что $x_0 = -B$.

3. При выполнении условий

$$A_3 \neq A_1, \quad A_1 = m(a^2 - R^2) \quad (3.1.10)$$

будем иметь совпадение значений $x_1 = -B$.

4. При выполнении условия

$$A_3 = \frac{A_1}{A_1 + mR^2} (A_1 + mR^2 - ma^2) \quad (3.1.11)$$

будем иметь совпадение значений $x_1 = x_2$, которые будут при этом равны

$$x_1 = x_2 = -\frac{A_1 + mR^2}{mBR^2}.$$

Для того, чтобы условие (3.1.11) имело физический смысл, необходимо выполнение неравенства $A_1 + mR^2 - ma^2 > 0$, с учётом которого имеем для $x_1 = x_2$ оценку

$$x_1 = x_2 < -B.$$

Следовательно, при выполнении условия (3.1.11) значения $x_1 = x_2$ не могут совпадать ни с одним из оставшихся значений $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -B$.

Таким образом, для полного исследования вопроса о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (3.1.5) необходимо изучение не только общего случая, когда функция $T(x)$ имеет вид (3.1.6), но и четырёх частных случаев, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10) или (3.1.11).

3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Предположим сначала, что функция $T(x)$ определяется формулой (3.1.6), то есть все полюсы этой функции различны. В этом случае разложение функции $T(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$T(x)|_{x=\infty} \approx \frac{12B^2 + 4(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8}{16x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (3.1.5) приводит к следующему результату:

Теорема 3.3.2.1. В случае, когда все полюсы функции $T(x)$ различны, уравнение (3.1.5) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (3.1.5) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $T(x)$ имеет шесть конечных полюсов в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -B$, $x = x_1$ и $x = x_2$, каждый из которых имеет второй порядок. В точке $x = \infty$ функция $T(x)$ имеет порядок не ниже четвертого. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (3.1.5) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (3.1.5) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$\left[\sqrt{T}\right]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{-B} = 0, \quad \alpha_{-B}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{-B}^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = \frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $T(x)$ равно 6, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^7 = 128$ наборов знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(x_1), s(x_2), s(-B), s(0)).$$

Для каждого из этих наборов по формуле (1.3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)} - \alpha_{-B}^{s(-B)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$\alpha = (\alpha_\infty^-, \alpha_1^-, \alpha_{-1}^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-, \alpha_{-B}^-, \alpha_0^-) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

для которого $d = 0$. Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, вычисляемая по формуле (1.3.3), для указанного набора значений α имеет вид

$$\theta = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)} - \frac{1}{2(x+B)} + \frac{1}{2x}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений α мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (1.3.4), которое после подстановки в него многочлена нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, примет вид

$$-\frac{B(2B+x_1+x_2)(Bx+1)}{2x(x^2-1)(x+B)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Учитывая, что $B \neq 0$ получаем, что для существования решения вида (1.2.1) у дифференциального уравнения (3.1.5) должно выполняться условие, которое с учётом явного вида выражений x_1 и x_2 (см. (3.1.4)) может

быть записано следующим образом:

$$2B + x_1 + x_2 = \frac{2A_3B}{A_3 - A_1} = 0.$$

Поскольку $B > 0$ и $A_3 > 0$, то соответствующее условие не имеет места. Таким образом, уравнение (3.1.5) не имеет решений вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.1.5) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.1.5) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\}, \\ E_{-B} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{2\}, \quad E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{-B} - e_0).$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$ и E_∞ убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0) = (4, 1, 1, 1, 1, -2, 2),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x+B} + \frac{1}{x}.$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него $P \equiv 1$ принимает вид

$$\frac{B(2B + x_1 + x_2)(Bx^2 - (2B^2 - 2)x - B)}{x^2(x+B)^2(x^2-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Поскольку ни один из трех сомножителей в числителе дроби не может быть тождественно равен нулю, то последнее соотношение не может выполняться ни при каких значениях параметров системы, имеющих физический смысл. Следовательно, уравнение (3.1.5) не может иметь решения вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.1.5) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.1.5) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $T(x)$ не имеет полюсов порядка, большего, чем 2. Порядок функции $T(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $T(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (3.1.6). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 1.2.2.1 также выполняются:

$$\sqrt{1+4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \sqrt{1+4\alpha_5} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1+4\alpha_6} = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=1}^6 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1+4\gamma} = 1 \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = 0.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{-1} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{x_1} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{x_2} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{-B} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, & E_0 &= \{6\}, \\ E_\infty &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$ и по формуле (1.3.24) найдём число d :

$$d = e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{-B} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1,$

$E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$, убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0) = (12, 3, 3, 3, 3, -6, 6),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.25) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-x_1} + \frac{3}{x-x_2} - \frac{6}{x+B} + \frac{6}{x}.$$

По формуле (1.3.26) составим многочлен

$$S = x(x-1)(x+1)(x-x_1)(x-x_2)(x+B).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных соотношений (1.3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2T(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых $P_{12} = -P \equiv -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие тождества $P_{-1} = 0$). Из выполнения этого тождества необходимым образом получается, что либо $B = 0$, либо $x_1 = 0$, либо $x_2 = 0$, либо $x_1 + x_2 + 2B = 0$. Ранее было показано, что $B \neq 0$, $x_1 + x_2 + 2B \neq 0$. Тот факт, что $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ следует из формул (3.1.4). Это означает, что у уравнения (3.1.5) не может существовать решения вида (1.2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае, когда все полюсы функции $T(x)$ различны, уравнение (3.1.5) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ $A_3 = A_1 \neq m(a^2 - R^2)$

Предположим, что моменты инерции тора связаны соотношением (3.1.7). Обозначим $A_3 = A_1 = A$. Тогда уравнение (3.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x)\frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (3.3.1)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{2(x-x_0)},$$

$$d_2(x) = \frac{x+B}{2(x^2-1)(x-x_0)}, \quad x_0 = -\frac{A+mR^2(B^2+1)}{2mR^2B}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (3.3.1) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = T_1(x)y, \quad (3.3.2)$$

$$T_1(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_0} + \quad (3.3.3)$$

$$+ \frac{\alpha_3}{(x-x_0)^2} + \frac{\beta_4}{x+B} + \frac{\alpha_4}{(x+B)^2} + \frac{\beta_5}{x} + \frac{\alpha_5}{x^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = \frac{4B^2 + (5x_0 - 3)B + x_0 - 3}{16(x_0 - 1)(B + 1)}, \quad \beta_2 = -\frac{4B^2 + (5x_0 + 3)B - x_0 - 3}{16(x_0 + 1)(B - 1)},$$

$$\beta_3 = -\frac{2x_0B^2 + (3 - 2x_0^2)B - x_0^3}{4x_0(x_0 + B)(x_0 - 1)(x_0 + 1)}, \quad \beta_4 = \frac{7B^3 + 4x_0B^2 - 5B - 2x_0}{4B(x_0 + B)(B + 1)(B - 1)},$$

$$\beta_5 = -\frac{3B + 2x_0}{4x_0B}, \quad x_0 = -\frac{A + mR^2(B^2 + 1)}{2mR^2B}.$$

Разложение функции $T_1(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ в рассматриваемом частном случае имеет вид

$$T_1(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (3.3.2) приводит к следующему результату:

Теорема 3.3.3.1. При выполнении условия (3.1.7) уравнение (3.3.2) не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (3.3.2) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $T_1(x)$ имеет пять конечных полюсов второго порядка. В точке $x = \infty$ функция $T_1(x)$ также имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения

вида (1.2.1) для уравнения (3.3.2) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (3.3.2) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{T_1}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_1}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_1}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_0}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_1}]_{-B} = 0, \quad \alpha_{-B}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{-B}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{T_1}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = \frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{T_1}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $T_1(x)$ равно 5, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^6 = 64$ набора знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(x_0), s(-B), s(0)).$$

Для каждого из этих наборов вычислим по формуле (1.3.2) величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{x_0}^{s(x_0)} - \alpha_{-B}^{s(-B)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$\alpha = (\alpha_\infty^+, \alpha_1^-, \alpha_{-1}^-, \alpha_{x_0}^-, \alpha_{-B}^-, \alpha_0^-) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

для которого $d = 0$. Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, вычисляемая по формуле (1.3.3), для указанного набора значений α имеет вид

$$\theta = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-x_0)} - \frac{1}{2(x+B)} + \frac{1}{2x}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений α мы должны найти многочлен степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (1.3.4), которое после подстановки в него многочлена нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, примет вид

$$\frac{B(Bx + 1)}{2x(x + B)(x - x_0)(x^2 - 1)} = 0.$$

Очевидно, что последнее равенство не может выполняться тождественно при $B \neq 0$. Следовательно, уравнение (3.3.2) не имеет решений вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.3.2) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.3.2) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_0} = \{1, 2, 3\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}, \\ E_{-B} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_0}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_0}, E_{-B}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_0} - e_{-B} - e_0).$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_0}, E_{-B}$ и E_0 убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_0}, e_{-B}, e_0) = (3, 1, 1, 1, -2, 2),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-x_0} - \frac{2}{x+B} + \frac{2}{x} \right).$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него $P \equiv 1$ принимает вид

$$-\frac{B(Bx^2 + (2 - 2B^2)x - B)}{x^2(x + B)^2(x^2 - 1)(x - x_0)} = 0.$$

Легко видеть, что последнее равенство не выполняется тождественно при $B > 0$. Поэтому уравнение (3.3.2) не может иметь решения вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.3.2) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.3.2) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $T_1(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $T_1(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $T_1(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (3.3.3). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 1.2.2.1 также выполняются:

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sqrt{1 + 4\alpha_4} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1 + 4\alpha_5} = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=1}^5 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1 + 4\gamma} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = -\frac{3}{16}.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{-1} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{x_0} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{\infty} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{-B} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, & E_0 &= \{6\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_{\infty}, e_1, e_{-1}, e_{x_0}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_{\infty}, E_1, E_{-1}, E_{x_0}, E_{-B}, E_0$ и по формуле (1.3.24) найдём число d :

$$d = e_{\infty} - e_1 - e_{-1} - e_{x_0} - e_{-B} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_{\infty}, E_1, E_{-1}, E_{x_0}, E_{-B}, E_0$, убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = (e_{\infty}, e_1, e_{-1}, e_{x_0}, e_{-B}, e_0) = (9, 3, 3, 3, -6, 6),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.25) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-x_0} - \frac{6}{x+B} + \frac{6}{x}.$$

По формуле (1.3.26) составим многочлен

$$S = x(x-1)(x+1)(x-x_0)(x+B).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных соотношений (1.3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2T_1(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых $P_{12} = -P \equiv -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие тождества $P_{-1} = 0$). Из выполнения этого тождества необходимым образом получается, что либо $B = 0$, либо $x_0 = 0$. Ни одна из указанных возможностей не является физически реализуемой. Это означает, что у уравнения (3.3.2) не может существовать решения вида (1.2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае выполнения условий (3.1.7), уравнение (3.3.2) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

3.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ $A_3 = A_1 = m(a^2 - R^2)$

Будем предполагать, что моменты инерции тора удовлетворяют соотношению (3.1.9). Тогда уравнение (3.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x)\frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (3.4.1)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{2(x+B)}, \quad d_2(x) = \frac{1}{2(x^2-1)}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (3.4.1) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = T_2(x)y, \quad (3.4.2)$$

$$T_2(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x+B} + \frac{\alpha_3}{(x+B)^2} + \frac{\beta_4}{x} + \frac{\alpha_4}{x^2}, \quad (3.4.3)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = \frac{B+3}{16(B+1)}, \quad \beta_2 = -\frac{B-3}{16(B-1)}, \quad \beta_3 = -\frac{2B^2-1}{4B(B^2-1)}, \quad \beta_4 = \frac{1}{4B}.$$

Разложение функции $T_2(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ в рассматриваемом частном случае имеет вид

$$T_2(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (3.4.2) приводит к следующему результату:

Теорема 3.3.4.1. При выполнении условия (3.1.9) уравнение (3.4.2) не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (3.4.2) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $T_2(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка. В точке $x = \infty$ функция $T_2(x)$ также имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (3.4.2) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (3.4.2) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{T_2}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_2}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_2}]_{-B} = 0, \quad \alpha_{-B}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-B}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_2}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = \frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{T_2}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $T_2(x)$ равно 4, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^5 = 32$ набора знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(-B), s(0)).$$

Для каждого из этих наборов по формуле (1.3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{-B}^{s(-B)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако непосредственной проверкой можно установить, что максимальное значение, которое может принимать величина d – это значение $d = -1/2$. Следовательно, уравнение (3.4.2) не может иметь решения вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.4.2) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.4.2) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-B} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{\infty} = \{1, 2, 3\}, \\ E_0 = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_{\infty}, e_1, e_{-1}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_{\infty}, E_1, E_{-1}, E_{-B}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2}(e_{\infty} - e_1 - e_{-1} - e_{-B} - e_0).$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Однако непосредственной проверкой можно установить, что максимальное значение, которое может принимать величина d – это значение $d = -1$, не являющееся неотрицательным. Поэтому уравнение (3.4.2) не может иметь решения вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.4.2) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения

у уравнения (3.4.2) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $T_2(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $T_2(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $T_2(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (3.4.3). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 1.2.2.1 также выполняются:

$$\sqrt{1+4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sqrt{1+4\alpha_4} = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1+4\gamma} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = -\frac{3}{16}.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{-1} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{-B} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{\infty} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_0 &= \{6\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_{\infty}, e_1, e_{-1}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_{\infty}, E_1, E_{-1}, E_{-B}, E_0$ и, пользуясь формулой (1.3.24), найдём число d :

$$d = e_{\infty} - e_1 - e_{-1} - e_{-B} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако непосредственной проверкой можно установить, что максимальное значение, которое может принимать величина d – это значение $d = -6$. Поэтому уравнение (3.4.2) не может иметь решения вида (1.2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае выполнения условий (3.1.9), уравнение (3.4.2) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

3.5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ $A_1 = m(a^2 - R^2) \neq A_3$

Будем предполагать, что моменты инерции тора удовлетворяют соотношению (3.1.10). Тогда уравнение (3.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \tag{3.5.1}$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3(2x-x_0+B)}{2(x+B)(x-x_0)},$$

$$d_2(x) = \frac{4x^2 - (x_0+B)x - 2}{2x(x^2-1)(x-x_0)}, \quad x_0 = \frac{(A_3 + mR^2B^2 - mR^2)B}{A_3 + mR^2 - mR^2B^2}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (3.5.1) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = T_3(x)y, \quad (3.5.2)$$

$$T_3(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x+B} + \quad (3.5.3)$$

$$+ \frac{\alpha_3}{(x+B)^2} + \frac{\beta_4}{x-x_0} + \frac{\alpha_4}{(x-x_0)^2} + \frac{\beta_5}{x} + \frac{\alpha_5}{x^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{4},$$

$$\beta_1 = -\frac{4B^2 - (x_0-7)B - 3x_0 + 5}{16(B+1)(x_0-1)}, \quad \beta_2 = \frac{4B^2 - (x_0+7)B + 3x_0 + 5}{16(B-1)(x_0+1)},$$

$$\beta_3 = -\frac{7B^3 + 4x_0B^2 - 5B - 2x_0}{8B(B^2-1)(x_0+B)}, \quad \beta_4 = \frac{4x_0B^2 + (4x_0^2+2)B + 3x_0^3 - x_0}{8x_0(x_0^2-1)(x_0+B)},$$

$$\beta_5 = \frac{x_0+B}{4Bx_0}.$$

Как уже отмечалось, в рассматриваемом случае конечные полюса функции $T_3(x)$ совпадать не могут. Разложение функции $T_3(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ в данном случае имеет вид

$$T_3(x)|_{x=\infty} \approx \frac{5B^2 + 2x_0B - 3x_0^2 - 8}{16x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (3.5.2) приводит к следующему результату:

Теорема 3.3.5.1. При выполнении условий (3.1.10) уравнение (3.5.2) не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (3.5.2) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $T_3(x)$ имеет пять конечных полюсов второго порядка. В точке $x = \infty$ функция $T_3(x)$ имеет четвёртый порядок, то есть порядок выше второго. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые

условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (3.5.2) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (3.5.2) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{T_3}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_3}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_3}]_{-B} = 0, \quad \alpha_{-B}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-B}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_3}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_0}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_3}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = \frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{T_3}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $T_3(x)$ равно 5, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^6 = 64$ набора знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(x_0), s(-B), s(0)).$$

Для каждого из этих наборов по формуле (1.3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{x_0}^{s(x_0)} - \alpha_{-B}^{s(-B)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако непосредственной проверкой можно установить, что максимальное значение, которое может принимать величина d – это значение $d = -1/2$. Следовательно, уравнение (3.5.2) не может иметь решения вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.5.2) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.5.2) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-B} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_0} = \{1, 2, 3\},$$

$$E_0 = \{2\}, \quad E_\infty = \{0, 2, 4\}$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_0}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_0}, E_{-B}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_0} - e_{-B} - e_0).$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Однако непосредственной проверкой можно установить, что максимальное значение, которое может принимать величина d – это значение $d = -1$, не являющееся неотрицательным. Поэтому уравнение (3.5.2) не может иметь решения вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.5.2) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.5.2) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $T_3(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $T_3(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $T_3(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (3.5.3). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 1.2.2.1 также выполняются:

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \sqrt{1 + 4\alpha_5} = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=1}^5 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1 + 4\gamma} = 1 \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = 0.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E_{-1} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E_{-B} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E_{x_0} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E_0 = \{6\}, \quad E_\infty = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_0}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_0}, E_{-B}, E_0$ и найдём число d по формуле (1.3.24):

$$d = e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_0} - e_{-B} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако непосредственной проверкой можно установить, что максимальное значение, которое может принимать величина d – это значение $d = -6$. Поэтому уравнение (3.5.2) не может иметь решения вида (1.2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что при выполнении условий (3.1.10), уравнение (3.5.2) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

3.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

$$A_3 (A_1 + mR^2) = A_1 (A_1 + mR^2 - ma^2)$$

Будем предполагать, что моменты инерции тора удовлетворяют условиям (3.1.11). Тогда уравнение (3.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (3.6.1)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{x-x_0},$$

$$d_2(x) = \frac{(x+B)(2x^2 - (x_0+B)x - 1)}{x(x^2-1)(x-x_0)^2}, \quad x_0 = -\frac{A_1 + mR^2}{mR^2 B}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (3.6.1) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = T_4(x)y, \quad (3.6.2)$$

$$\begin{aligned} T_4(x) = & \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_0} + \frac{\alpha_3}{(x-x_0)^2} + \\ & + \frac{\beta_4}{x+B} + \frac{\alpha_4}{(x+B)^2} + \frac{\beta_5}{x} + \frac{\alpha_5}{x^2}, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_3 = \frac{4x_0 B^2 + 4B - x_0^3 + x_0}{4x_0(x_0^2 - 1)}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{4}.$$

$$\beta_1 = \frac{8B^3 + 8(x_0 + 1)B^2 + (5x_0^2 - 6x_0 + 9)B + x_0^2 - 6x_0 + 5}{16(x_0 - 1)^2(B + 1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{8B^3 + 8(x_0 - 1)B^2 + (5x_0^2 + 6x_0 + 9)B - x_0^2 - 6x_0 - 5}{16(x_0 + 1)^2(B - 1)},$$

$$\beta_3 = -\frac{4x_0^3B^3 + (6x_0^4 + 4x_0^2 - 2)B^2 - (2x_0^5 - 11x_0^3 + 5x_0)B - x_0^6 + x_0^4}{2x_0^2(x_0^2 - 1)^2(x_0 + B)},$$

$$\beta_4 = \frac{5B^3 + 2x_0B^2 - 4B - x_0}{2B(B^2 - 1)(x_0 + B)},$$

$$\beta_5 = -\frac{2B^2 + 3x_0B + x_0^2}{2Bx_0^2}.$$

Разложение функции $T_4(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ имеет вид

$$T_4(x)|_{x=\infty} \approx \frac{3B^2 + 2x_0B - x_0^2 - 2}{4x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Особенностью рассматриваемого частного случая является зависимость от параметров задачи одного из коэффициентов α_i разложения функции $T_4(x)$ в сумму простейших дробей. Коэффициент α_3 не имеет заданного числового значения, а определяется выражением

$$\alpha_3 = \frac{4x_0B^2 + 4B - x_0^3 + x_0}{4x_0(x_0^2 - 1)}.$$

Это приводит к тому, что постоянная d , вычисляемая в соответствии с алгоритмом Ковачича для поиска решения вида (1.2.1), (1.2.6) или (1.2.10) у дифференциального уравнения (3.6.2), может быть сколь угодно большой. Поэтому ограничимся здесь только рассмотрением случая $d = 0$. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (3.6.2) приводит к следующему результату:

Теорема 3.3.6.1. При выполнении условия (3.1.11) в предположении, что постоянная d (степень многочлена P , вычисляемого при поиске решений вида (1.2.1), (1.2.6) и (1.2.10) уравнения (3.6.2)) равна нулю, уравнение (3.6.2) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (3.6.2) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1.

Заметим, что функция $T_4(x)$ имеет пять конечных полюсов второго порядка. В точке $x = \infty$ функция $T_4(x)$ имеет четвёртый порядок, то есть порядок выше второго. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (3.6.2) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (3.6.2) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Введём обозначение

$$b_0 = 1 + 4\alpha_3.$$

Вычислим теперь следующие величины:

$$[\sqrt{T_4}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_4}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{T_4}]_{-B} = 0, \quad \alpha_{-B}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{-B}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{T_4}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = \frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{T_4}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b_0}, \quad \alpha_{x_0}^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b_0},$$

$$[\sqrt{T_4}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $T_4(x)$ равно 5, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^6 = 64$ набора знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(-B), s(0), s(x_0)).$$

Выберем знаки в наборах s таким образом, чтобы величина

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{-B}^{s(-B)} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_{x_0}^{s(x_0)},$$

определяемая формулой (1.3.2), была равной нулю при некотором значении b_0 . Ниже представлены все такие наборы знаков и соответствующие им зна-

чения b_0 :

$$s_1 = (-, +, +, +, +, -), \quad b_0 = 36; \quad s_{10} = (+, +, +, +, +, -), \quad b_0 = 64;$$

$$s_2 = (-, +, +, -, +, -), \quad b_0 = 4; \quad s_{11} = (+, +, +, -, +, -), \quad b_0 = 16;$$

$$s_3 = (-, +, -, +, +, -), \quad b_0 = 25; \quad s_{12} = (+, +, -, +, +, -), \quad b_0 = 49;$$

$$s_4 = (-, -, +, +, +, -), \quad b_0 = 25; \quad s_{13} = (+, -, +, +, +, -), \quad b_0 = 49;$$

$$s_5 = (-, -, -, +, +, -), \quad b_0 = 16; \quad s_{14} = (+, -, -, +, +, -), \quad b_0 = 36;$$

$$s_6 = (-, -, +, -, +, -), \quad b_0 = 1; \quad s_{15} = (+, -, +, -, +, -), \quad b_0 = 9;$$

$$s_7 = (-, +, -, -, +, -), \quad b_0 = 1; \quad s_{16} = (+, +, -, -, +, -), \quad b_0 = 9;$$

$$s_8 = (-, -, -, -, +, -), \quad b_0 = 0; \quad s_{17} = (+, -, -, -, +, -), \quad b_0 = 4.$$

$$s_9 = (-, -, -, -, +, +), \quad b_0 = 0;$$

Более подробно рассмотрим случай, когда выбран набор s_1 . Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Разрешим равенство

$$b_0 = \frac{4B(Bx_0 + 1)}{x_0(x_0^2 - 1)} = 36$$

относительно B . Учитывая, что $B > 1$, а $x_0 < -1$, получим

$$B = \frac{-1 - \sqrt{36x_0^4 - 36x_0^2 + 1}}{2x_0}. \quad (3.6.4)$$

Далее по формуле (1.3.3) составим функцию θ , используя значения α_c^\pm , соответствующие знакам, выбранным в наборе s_1 . Тогда функция θ будет иметь вид

$$\theta = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{3}{2(x+B)} + \frac{1}{2x} + \frac{1 - \sqrt{b_0}}{2(x-x_0)}.$$

Шаг 3. Многочлен степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.4), которое после исключения параметра B с помощью формулы (3.6.4) принимает следующий вид:

$$\frac{(18x_0^5 - 9x_0^3 - 7x_0^3x_*)x + 22x_0^2(x_0^2 - 1) + x_*(1 - 4x_0^2) + 1}{x(x^2 - 1)(x - x_0)(2x_0x - x_* - 1)x_0^2} = 0, \quad (3.6.5)$$

$$x_* = \sqrt{36x_0^4 - 36x_0^2 + 1}.$$

Для того, чтобы равенство (3.6.5) удовлетворялось тождественно, необходимо, чтобы для некоторого x_0 ($x_0 < -1$) одновременно выполнялись два условия:

$$18x_0^5 - 9x_0^3 - 7x_0^3\sqrt{36x_0^4 - 36x_0^2 + 1} = 0,$$

$$22x_0^2(x_0^2 - 1) + (1 - 4x_0^2)\sqrt{36x_0^4 - 36x_0^2 + 1} + 1 = 0.$$

Легко проверить, что не существует значения $x_0 < -1$, удовлетворяющего обоим написанным выше условиям. Следовательно, для набора знаков s_1 алгоритм не приводит к желаемому результату – нахождению решения вида (1.2.1) уравнения (3.6.2). Аналогично рассматриваются все другие наборы знаков, и ни для одного из этих наборов не удаётся найти решение вида (1.2.1) уравнения (3.6.2).

Теперь попытаемся найти у уравнения (3.6.2) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.6.2) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-B} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{2\},$$

$$E_{x_0} = \left\{ \left(2 + k\sqrt{b_0} \right) \cap \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 2 \right\}, \quad E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{-B}, e_0, e_{x_0})$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{-B}, E_0, E_{x_0}$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{-B} - e_0 - e_{x_0}).$$

Снова предположим, что $d = 0$. Выполнение данного шага алгоритма требует перебора значительного числа вариантов, поэтому приведем подробное исследование лишь для одного из них. Для других наборов исследование проводится аналогично. Пусть

$$s_1 = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{-B}, e_0, e_{x_0}) = (0, 1, 1, 2, 2, -6).$$

В этом случае имеем $b_0 = 16$. Отсюда получаем для B следующее выражение:

$$B = \frac{-1 - \sqrt{16x_0^4 - 16x_0^2 + 1}}{2x_0}.$$

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя элементы выбранного набора s_1 . Тогда функция θ будет иметь вид

$$\theta = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x+B} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x-x_0}.$$

Многочлен степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него $P \equiv 1$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{k_5x^5 + k_4x^4 + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0}{x_0^2x^2(x^2-1)(x-x_0)^3(2x_0x-x_*-1)^2} = 0, \quad (3.6.6)$$

$$k_0 = 96x_0^8 - (4x_* + 148)x_0^6 + (12x_* + 60)x_0^4 - (x_*^3 + 3x_* + 4)x_0^2,$$

$$k_1 = 256x_0^9 + 256x_0^7 - (60x_* + 780)x_0^5 - (2x_*^3 - 102x_* - 308)x_0^3 -$$

$$-(3x_*^3 + 17x_* + 20)x_0,$$

$$k_2 = 480x_0^8 + (24x_* - 1008)x_0^6 - (180x_* - 828)x_0^4 - (9x_*^3 - 45x_* + 348)x_0^2 +$$

$$+12x_*^3 + 12x_* + 24,$$

$$k_3 = -512x_0^7 + (120x_* + 512)x_0^5 - (140x_* - 100)x_0^3 - (5x_*^3 + 15x_* + 20)x_0,$$

$$k_4 = -152x_0^6 + (100x_* + 132)x_0^4,$$

$$k_5 = -72x_0^5 + (12x_* + 12)x_0^3,$$

$$x_* = \sqrt{16x_0^4 - 16x_0^2 + 1}.$$

Для того, чтобы равенство (3.6.6) выполнялось тождественно, необходимо выполнение условий $k_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, 5$. Однако, как несложно убедиться, соответствующая система уравнений относительно x_0 является несовместной.

Таким образом, доказано, что для данного набора s_1 элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{-B}, E_0, E_{x_0}$ дифференциальное уравнение (3.6.2) не имеет

лиувиллевых решений вида (1.2.6). Отметим, что аналогичное исследование было проведено и для всех других наборов s , при которых $d = 0$. Ни для одного из упомянутых наборов s не удаётся найти решения вида (1.2.6) дифференциального уравнения (3.6.2).

Наконец, попытаемся найти у уравнения (3.6.2) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (3.6.2) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $T_4(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $T_4(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $T_4(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (3.6.3). Следующие условия являются выполненными:

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1, 2), \quad \sqrt{1 + 4\alpha_4} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1 + 4\alpha_5} = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=1}^5 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1 + 4\gamma} = 1 \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = 0.$$

Также будем считать выполненным условие

$$\sqrt{1 + 4\alpha_3} = \sqrt{\frac{4B(Bx_0 + 1)}{x_0(x_0^2 - 1)}} \in \mathbb{Q},$$

так как в противном случае рассматриваемое дифференциальное уравнение (3.6.2) заведомо не имеет решений вида (1.2.10). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{-1} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{-B} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, & E_0 &= \{6\}, \\ E_{x_0} &= \left\{ \left(6 + k\sqrt{b_0} \right) \cap \mathbb{Z} \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm 6) \right\}, \\ E_\infty &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{-B}, e_0, e_{x_0})$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{-B}, E_0, E_{x_0}$ и найдём число d по формуле (1.3.24):

$$d = e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{-B} - e_0 - e_{x_0}.$$

Шаг 3. Снова предположим, что $d = 0$. Среди всех наборов s выделим те наборы, для которых $d = 0$. Исходя из количества элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{-B}, E_0, E_{x_0}$, введённых на первом шаге, несложно подсчитать, что даже если зафиксировать один из элементов множества E_{x_0} , то придётся рассмотреть $7 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 13 = 8281$ наборов чисел s , для которых $d = 0$. Поэтому не будем рассматривать каждый случай в отдельности, а проиллюстрируем алгоритм на типичном примере. Выберем следующий набор чисел s_1 , при котором $d = 0$:

$$s_1 = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{-B}, e_0, e_{x_0}) = (12, 3, 3, 0, 6, 0).$$

По формуле (1.3.25) составим функцию θ , используя набор чисел s_1 , найденный на предыдущем шаге. Функция θ примет вид:

$$\theta = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{6}{x}.$$

Следуя формуле (1.3.26), составим многочлен

$$S = x(x-1)(x+1)(x-x_0)(x+B),$$

причем выразим B через x_0 по формуле

$$B = \frac{-1 - \sqrt{36x_0^4 - 36x_0^2 + 1}}{2x_0}.$$

Далее требуется выполнение рекуррентных соотношений (1.3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2T_4(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых принято $P_{12} = -P = -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие тождества $P_{-1} = 0$). Эти коэффициенты содержат одну неизвестную – x_0 . Соответствующая система уравнений для определения x_0 является несовместной. Аналогично проверяются и другие наборы значений s . Можно сделать вывод, что уравнение (3.6.2) не имеет решения вида (1.2.10) в случае, когда $d = 0$. Теорема доказана. \square

Таким образом, проведённое исследование показало отсутствие лиувиллевых решений в задаче о качении динамически симметричного тора как в общем случае, так и в нескольких частных случаях, когда параметры задачи удовлетворяют дополнительным соотношениям.

ГЛАВА 4. ДВИЖЕНИЕ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения (Рис. 5). Будем считать, что параметр параболы, образующей параболоид, равен 2λ , а центр масс параболоида расположен в фокусе образующей параболы. Для такого параболоида высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta}. \quad (4.1.1)$$

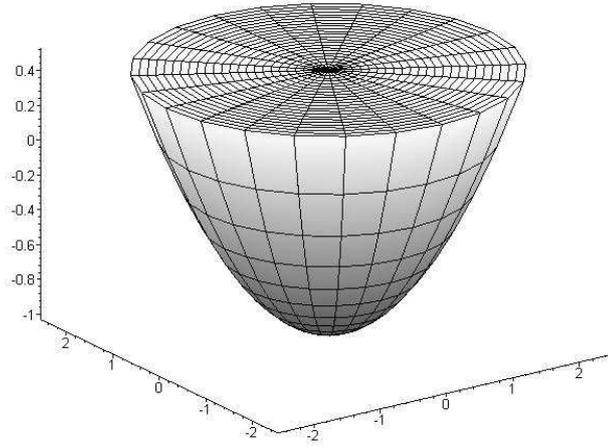


Рис. 5. Качение параболоида вращения по горизонтальной плоскости.

Пользуясь формулами (2.1.11), находим координаты ξ и ζ точки касания параболоида с опорной плоскостью:

$$\xi = -\frac{2\lambda \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = \frac{\xi^2}{4\lambda} - \lambda. \quad (4.1.2)$$

Система уравнений (2.1.29) принимает вид

$$\frac{dp}{d\theta} = - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{2A_3 m \lambda^2 \sin^3 \theta (1 - 2 \cos^2 \theta)}{\Delta \cos \theta} \right) p + \frac{A_3 ((A_3 - 4m\lambda^2) \cos^4 \theta + 8m\lambda^2 \cos^2 \theta - 2m\lambda^2)}{\Delta} r,$$

$$\frac{dr}{d\theta} = - \frac{4A_1 m \lambda^2 \sin^4 \theta}{\Delta} p - \frac{2m\lambda^2 \sin \theta \cos \theta (2A_1 + A_3 - 2A_3 \cos^2 \theta)}{\Delta} r,$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4m\lambda^2 (A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2 (A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3 m \lambda^2, \quad (4.1.3)$$

а уравнение (2.1.30) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (4.1.4)$$

$$b_1 = \frac{\cos^2 \theta - 4}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{6(A_3 - 2(A_3 - A_1) \cos^2 \theta) m \lambda^2 \sin \theta}{\Delta \cos \theta},$$

$$b_2 = \frac{2m\lambda^2(A_3 - 2A_1)(1 + \cos^2 \theta)}{\Delta}.$$

Заметим, что при выполнении условия

$$A_3 = 2A_1 \quad (4.1.5)$$

уравнение (4.1.4) допускает частное решение

$$r = r_0 = \text{const}.$$

Это обстоятельство было впервые отмечено в работе Х.М. Муштари [25].

В уравнении (4.1.4) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos^2 \theta = x$ и введем обозначение $B = m\lambda^2$. В результате данное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (4.1.6)$$

$$d_1(x) = \frac{5 - 3x}{2x(1 - x)} - \frac{3(A_3 - 2(A_3 - A_1)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(A_3 - 2A_1)B(x + 1)}{2x(1 - x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4(A_3 - A_1)B)x^2 - 4(A_3 - A_1)Bx + A_3 B.$$

В общем случае многочлен Δ , входящий в знаменатели коэффициентов d_1 и d_2 , имеет два корня, которые мы обозначим x_1 и x_2 . В явном виде они записываются следующим образом:

$$x_1 = \frac{2B(A_3 - A_1) - \sqrt{4A_1 B^2(A_1 - A_3) - A_1 A_3^2 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_3 - A_1)},$$

$$x_2 = \frac{2B(A_3 - A_1) + \sqrt{4A_1 B^2(A_1 - A_3) - A_1 A_3^2 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_3 - A_1)}.$$
(4.1.7)

Замена вида (1.1.2) приводит уравнение (4.1.6) к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi(x)y, \quad (4.1.8)$$

$$\Pi(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_0}{x} + \frac{\alpha_0}{x^2} + \frac{\beta_2}{x-x_1} + \frac{\alpha_2}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_2} + \frac{\alpha_3}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_0 = \frac{5}{16}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{3}{16},$$

$$\beta_0 = \frac{x_1 + x_2 + 2x_1x_2}{8x_1x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1 + 4x_2 - 3x_1x_2 - 5}{4(x_1-1)(x_2-1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{4x_1 + x_2 - 7x_1x_2 - 2x_1^2 + 4x_1^2x_2}{8x_1(x_1-x_2)(x_1-1)}, \quad \beta_3 = \frac{x_1 + 4x_2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2^2}{8x_2(x_1-x_2)(x_2-1)}.$$

Воспользуемся алгоритмом Ковачича для исследования вопроса о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (4.1.8).

4.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ

Легко видеть, что в общем случае функция $\Pi(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = x_1$ и $x = x_2$. Будем далее предполагать, что все эти полюсы различны. Разложение функции $\Pi(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ имеет вид

$$\Pi(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены. Попытаемся сначала найти у уравнения (4.1.8) решение вида (1.2.1). Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (4.1.8) приводит к следующему результату.

Теорема 4.4.2.1. В случае, когда все полюсы функции $\Pi(x)$ различны, уравнение (4.1.8) имеет решения вида (1.2.1) только при выполнении условия Муштари (4.1.5). \square

Доказательство. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решений вида (1.2.1) уравнения (4.1.8) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$\left[\sqrt{\Pi}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \frac{5}{4}, \quad \alpha_0^- = -\frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{\Pi}\right]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{\Pi}\right]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{\Pi} \right]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{\Pi} \right]_{\infty} = 0, \quad \alpha_{\infty}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{\infty}^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $\Pi(x)$ равно 4, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^5 = 32$ набора знаков

$$s = (s(\infty), s(0), s(1), s(x_1), s(x_2)).$$

Для каждого из этих наборов вычислим величину d по формуле (1.3.2):

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)}.$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что для трех наборов

$$p_1 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right),$$

$$p_2 = (\alpha_{\infty}^-, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right),$$

$$p_3 = (\alpha_{\infty}^-, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

получается $d = 0$, а еще для одного набора

$$p_4 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

получается $d = 1$.

Рассмотрим набор значений p_1 . Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, вычисленная по формуле (1.3.3), для указанного набора значений α имеет вид

$$\theta = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4(x-x_1)} + \frac{3}{4(x-x_2)}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений p_1 мы должны найти многочлен степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (1.3.4). Уравнение (1.3.4) после подстановки в него многочлена нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, примет вид

$$\frac{(2x_1x_2 - x_1 - x_2)(1+x)}{4x(x-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Данное равенство имеет место, если параметры x_1 и x_2 удовлетворяют условию

$$2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0. \quad (4.2.1)$$

Через исходные параметры условие (4.2.1) записывается следующим образом:

$$\frac{2m\lambda^2(2A_1 - A_3)}{A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1)} = 0.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что условие (4.2.1) эквивалентно условию Муштари (4.1.5).

Проверка оставшихся наборов p_2 , p_3 и p_4 приводит к условиям на параметры x_1 и x_2 , не являющиеся физически допустимыми. Тем самым установлено, что уравнение (4.1.8) допускает решения вида (1.2.1) только при выполнении условия Муштари. \square

Теперь попытаемся найти у уравнения (4.1.8) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (4.1.8) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (4.1.8) приводит к следующему результату.

Теорема 4.4.2.2. В случае, когда все полюсы функции $\Pi(x)$ различны, все решения уравнения (4.1.8) имеют вид (1.2.6), то есть являются лиувиллевыми. \square

Доказательство. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решений вида (1.2.6) уравнения (4.1.8) так, как он описан в пункте 1.3.3. нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{-1, 2, 5\},$$

$$E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_0, e_{x_1}, e_{x_2})$$

элементов множеств E_∞ , E_1 , E_0 , E_{x_1} , E_{x_2} , причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_1 - e_0 - e_{x_1} - e_{x_2}).$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Среди наборов элементов множеств E_∞ , E_1 , E_0 , E_{x_1} и E_{x_2} , для которых d – неотрицательное целое число, выберем набор

$$e = (e_\infty, e_1, e_0, e_{x_1}, e_{x_2}) = (3, -2, -1, 1, 1),$$

для которого $d = 2$.

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)}.$$

Полином степени $d = 2$

$$P = x^2 + k_1x + k_0$$

должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13). Из уравнения (1.3.13) после подстановки в него функции θ и полинома P находим, что

$$k_0 = \frac{x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}, \quad k_1 = -\frac{2x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2},$$

то есть многочлен P существует при любых значениях параметров x_1 , x_2 и имеет вид

$$P = x^2 - \frac{2x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}x + \frac{x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}.$$

Далее, следуя алгоритму, введем функцию φ

$$\begin{aligned} \varphi = \theta + \frac{P'}{P} &= \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x} + \\ &+ \frac{2(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x - 2x_1x_2}{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x^2 - 2x_1x_2x + x_1x_2} \end{aligned}$$

и найдем функцию ω , которая является решением квадратного уравнения (1.3.14).

В явном виде функция ω записывается следующим образом:

$$\omega = f(x) \pm ig(x),$$

$$f(x) = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4x} +$$

$$+ \frac{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x-x_1x_2}{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x^2-2x_1x_2x+x_1x_2},$$

$$g(x) = \frac{D(1-x)}{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x^2-2x_1x_2x+x_1x_2} \sqrt{\frac{x}{(x-x_1)(x-x_2)}},$$

$$D = \sqrt{x_1x_2(2x_1-1)(2x_2-1)(2x_1x_2-x_1-x_2)}.$$

Таким образом, в соответствии с алгоритмом, решение дифференциального уравнения (4.1.8) имеет вид

$$y(x) = \exp\left(\int f(x)dx\right) \left(c_1 \cos\left(\int g(x)dx\right) + c_2 \sin\left(\int g(x)dx\right)\right),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. \square

Получим теперь решение исходного уравнения (4.1.4). Сделаем обратную замену переменной

$$r(x) = y(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int d_1(x)dx\right),$$

где $d_1(x)$ – коэффициент при dr/dx в уравнении (4.1.6). В получившемся выражении для $r(x)$ вернемся к исходным параметрам m, λ, A_1 и A_3 , используя формулы (4.1.7) для определения x_1 и x_2 . Кроме того, положим $x = \cos^2 \theta$. Окончательно, решение уравнения (4.1.4) запишется в виде

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{K_1(\theta)}{K_2(\theta)}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)), \quad (4.2.2)$$

$$\Phi(\theta) = 2m\lambda^2 D \int_0^\theta \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{K_1(\varphi) \sqrt{K_2(\varphi)}}, \quad D = \sqrt{2A_1A_3(A_3+4m\lambda^2)(2A_1-A_3)},$$

$$K_1(\theta) = (A_1A_3 + 4A_1m\lambda^2) \cos^4 \theta - 2A_3m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3m\lambda^2,$$

$$K_2(\theta) = (A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2(A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3m\lambda^2.$$

Заметим, что формула (4.2.2) учитывает и частный случай, исследованный ранее в работе Х.М. Муштари [25]. Действительно, если положить

$A_3 = 2A_1$ в формуле (4.2.2), то она приведется к виду $r = r_0 = \text{const}$, т.е. будет определять частное решение, найденное Х.М. Муштари.

Пользуясь уравнениями (2.1.24) или (2.1.29) и решением (4.2.2), можно найти явное выражение для функции $p(\theta)$:

$$p(\theta) = -\frac{D \cos^2 \theta}{2A_1 \sin \theta \sqrt{K_1(\theta)}} (c_2 \cos \Phi(\theta) - c_1 \sin \Phi(\theta)) - \frac{A_3 \left((A_3 + 4m\lambda^2) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2 \cos^2 \theta + 2m\lambda^2 \right) \cos \theta}{\sqrt{K_1(\theta)K_2(\theta)} \sin \theta} \times (4.2.3) \\ \times (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)).$$

Таким образом, общее решение системы (2.1.24) в случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости параболоида вращения определяется формулами (4.2.2), (4.2.3). Отметим, что впервые данные формулы были получены в работе А.С. Кулешова [15] без применения алгоритма Ковачича.

Можно показать, что функция $\Phi(\theta)$ выражается через эллиптические интегралы, которые не упрощаются ни при каких соотношениях на моменты инерции, кроме случая Муштари (4.1.5). Таким образом, исследование движения параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости проходит одинаково для всех значений моментов инерции, не связанных соотношением (4.1.5). В следующем параграфе приведён качественный анализ движения параболоида в предположении, что он представляет собой однородный параболический сегмент с центром масс в фокусе образующей параболы.

4.3. ДВИЖЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

4.3.1. Анализ изменения угла θ . Рассмотрим качение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости однородного динамически симметричного параболического сегмента. Пусть центр масс сегмента находится в фокусе образующей его параболы с параметром 2λ . Плоскость, перпендикулярная оси симметрии сегмента, ограничивает его высоту, причём эта высота однозначно определяется расположением центра масс сегмента. Можно показать (см. Добавление в конце этой главы), что в системе координат $G\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс параболического сегмента уравнение плоскости, ограничивающей сегмент, имеет вид

$$\zeta = \frac{\lambda}{2}.$$

Экваториальный и осевой главные центральные моменты инерции данного сегмента будут равны соответственно (см. Добавление)

$$A_1 = \frac{9}{8}m\lambda^2, \quad A_3 = 2m\lambda^2. \quad (4.3.1)$$

Будем считать, что при качении по плоскости указанный сегмент опирается о плоскость своей параболической поверхностью. Тогда пределы изменения угла θ будут иметь вид

$$-\theta_* \leq \theta \leq \theta_*, \quad \theta_* = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}. \quad (4.3.2)$$

С учетом явных величин (4.3.1) моментов инерции A_1 и A_3 функции $r(\theta)$ и $p(\theta)$, определяемые формулами (4.2.2), (4.2.3), примут вид

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8}{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)),$$

$$p(\theta) = -\frac{4 \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8}} \left[\frac{\sqrt{3} \cos \theta}{3} (c_2 \cos \Phi(\theta) - c_1 \sin \Phi(\theta)) + \right.$$

$$\left. + \frac{4(3 \cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1)}{\sqrt{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)) \right],$$

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta \frac{24\sqrt{3} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(27 \cos^4 \varphi - 16 \cos^2 \varphi + 8) \sqrt{23 \cos^4 \varphi - 14 \cos^2 \varphi + 8}}. \quad (4.3.3)$$

Из интеграла энергии (2.1.23), который запишем в виде

$$A_1 p^2 + (A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)) q^2 + A_3 r^2 + m(p\zeta - r\xi)^2 + 2mgf(\theta) = c_0^2 = \text{const}, \quad (4.3.4)$$

с учётом явных величин (4.3.1) моментов инерции A_1 и A_3 получаем

$$\frac{m\lambda^2(8 + 9 \cos^4 \theta)}{8 \cos^4 \theta} q^2 = c_0^2 - \frac{2mg\lambda}{\cos \theta} -$$

$$-m\lambda^2 \left[\frac{9}{8} p^2 + 2r^2 + \left(\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} r + \frac{(1 - 2 \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} p \right)^2 \right].$$

Умножив это равенство на $\sin^2 \theta$ и учитывая уравнение (2.1.22), будем иметь

$$\frac{m\lambda^2 (9 + 8u^4)}{8u^3} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = F(u) = \frac{(u^2 - 1) (c_0^2 - 2mg\lambda u)}{u} - K_0, \quad (4.3.5)$$

где введено обозначение $u = 1/\cos \theta$, а функция K_0 определяется равенством

$$K_0 = \frac{m\lambda^2}{u} \left[\frac{9}{8} u^2 p_1^2 + 2(u^2 - 1)r^2 + (2(u^2 - 1)r + u(u^2 - 2)p_1)^2 \right],$$

$$p_1 = p \sin \theta.$$

Из условия (4.3.2) и из определения величины u следует, что

$$1 \leq u \leq \sqrt{\frac{5}{2}}. \quad (4.3.6)$$

Заметим, что левая часть уравнения (4.3.5) неотрицательна. Отсюда следует, что неравенство $F(u) \geq 0$ определяет область возможности движения U по переменной u . Поскольку в силу (4.3.6) при $u > \sqrt{5/2}$ движение невозможно, то получаем, что в действительном движении

$$F(u) \geq 0, \quad u \in U, \quad F\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \leq 0, \quad (4.3.7)$$

а U является некоторым подмножеством отрезка (4.3.6).

Если $c_1 = c_2 = 0$, то во всё время движения $p = r = 0$. Движение параболоида происходит так, что его ось симметрии $G\zeta$ находится в фиксированной вертикальной плоскости. Изменение со временем угла θ , составляемого осью $G\zeta$ с вертикалью, определяется уравнением (4.3.5), в котором следует положить $K_0 = 0$:

$$\frac{m\lambda^2}{8} (9 + 8u^4) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = u^2 (u^2 - 1) (c_0^2 - 2mg\lambda u).$$

Из условий (4.3.6), (4.3.7) вытекает, что в рассматриваемом частном случае движение параболического сегмента происходит в ограниченном диапазоне изменения постоянной интеграла энергии:

$$2mg\lambda \leq c_0^2 \leq \sqrt{10}mg\lambda.$$

Таким образом, при $c_0^2 < 2mg\lambda$ движение невозможно. Случай $c_0^2 = 2mg\lambda$ соответствует положению равновесия параболического сегмента. При этом $u = 1$ и центр масс сегмента занимает наинизшее положение. При

$$2mg\lambda < c_0^2 \leq \sqrt{10}mg\lambda$$

ось симметрии параболического сегмента совершает колебания в фиксированной вертикальной плоскости с амплитудой, не превосходящей значения θ_* , при этом следом точки касания на плоскости будет отрезок прямой.

Исследуем характер движения однородного параболического сегмента в общем случае. Докажем сначала одно утверждение, касающееся функции $F(u)$.

Утверждение 4.4.3.1. На отрезке (4.3.6) функция $F(u)$ является выпуклой вверх.

Доказательство. Преобразуем систему (4.1.3) с учетом явных выражений (4.3.1) моментов инерции A_1 и A_3 . Кроме того, сделаем в этой системе замену независимой переменной по формуле $1/\cos\theta = u$. В результате она примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{du} &= -\frac{16}{u^2(8u^4 - 14u^2 + 23)} \left((u^5 - 3u^3 + 2u)p_1 + (u^4 - 4u^2 + 1)r \right), \\ \frac{dr}{du} &= -\frac{2}{u(8u^4 - 14u^2 + 23)} \left(9u(u^2 - 1)p_1 + (17u^2 - 16)r \right).\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

Интеграл энергии (4.3.4) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{m\lambda^2 u^2 (9 + 8(u^2 - 2)^2)}{8(u^2 - 1)} p_1^2 + \frac{m\lambda^2 (9 + 8u^4)}{8} q^2 + 2m\lambda^2 (2u^2 - 1) r^2 + \\ &+ 4m\lambda^2 u (u^2 - 2) p_1 r + 2mg\lambda u = c_0^2.\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

Продифференцируем функцию $F(u)$ дважды в силу системы (4.3.8). Из полученного выражения исключим c_0^2 с помощью формулы (4.3.9). В результате получим следующее выражение для второй производной функции $F(u)$:

$$\begin{aligned}F''(u) &= q_0 + q_{11}r^2 + 2q_{12}p_1r + q_{22}p_1^2, \\ q_0 &= -\frac{4mg\lambda(u^2 + 1)}{u^2} - \frac{m\lambda^2(9 + 8u^4)}{4u^3}q^2, \\ q_{11} &= \frac{64m\lambda^2(u^2 + 1)(u^4 - 4u^2 + 1)}{u^3(8u^4 - 14u^2 + 23)}, \\ q_{12} &= \frac{4m\lambda^2(u^2 + 1)(8u^4 - 41u^2 + 32)}{u^2(8u^4 - 14u^2 + 23)},\end{aligned}$$

$$q_{22} = \frac{m\lambda^2 (64u^8 - 528u^6 + 624u^4 + 46u^2 - 495)}{4u(u^2 - 1)(8u^4 - 14u^2 + 23)}.$$

Можно показать, что

$$q_{11} < 0, \quad q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0$$

на отрезке (4.3.6). На Рис. 6 приведены графики функций

$$\frac{q_{11}}{m\lambda^2} \quad \text{и} \quad \frac{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}{m^2\lambda^4},$$

которые подтверждают этот вывод.

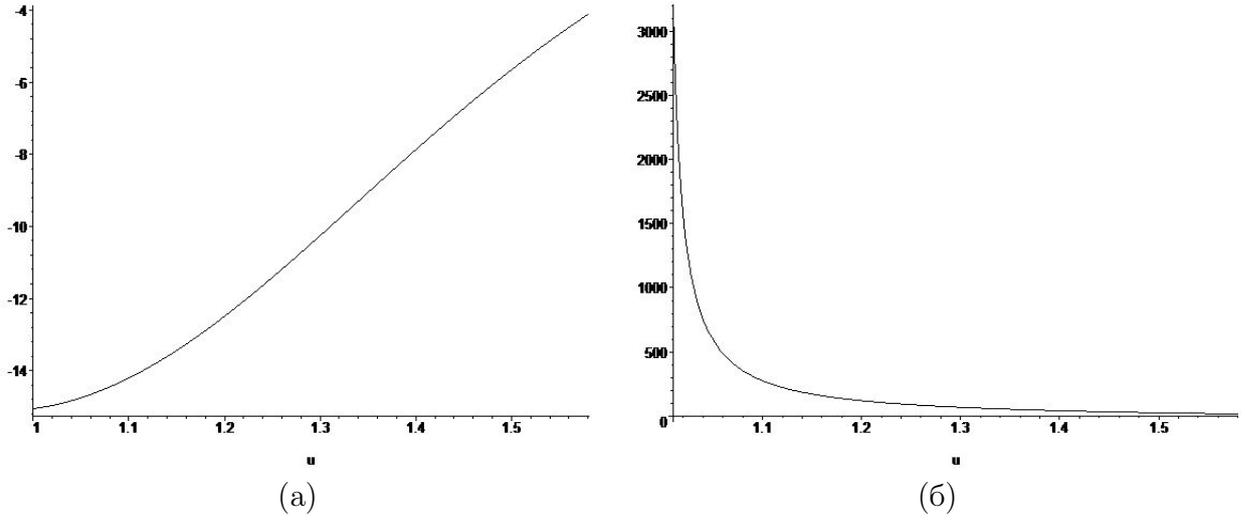


Рис. 6. Графики функций: (а) $\frac{q_{11}}{m\lambda^2}$; (б) $\frac{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}{m^2\lambda^4}$.

Следовательно, в силу критерия Сильвестра [3] квадратичная форма

$$Q(r, p_1) = q_{11}r^2 + 2q_{12}p_1r + q_{22}p_1^2$$

является отрицательно определенной при всех u , удовлетворяющих неравенствам (4.3.6). Очевидно, что $q_0 < 0$ на том же промежутке. Следовательно, $F''(u) < 0$, а это означает, что функция $F(u)$ является выпуклой вверх на рассматриваемом промежутке. \square

Заметим теперь, что

$$F(1) = -\frac{2m\lambda^2}{171}(24c_1 + \sqrt{51}c_2)^2 \leq 0. \quad (4.3.10)$$

Из неравенств (4.3.7), (4.3.10) и выпуклости вверх функции $F(u)$ вытекает, что данная функция имеет на отрезке (4.3.6) два нуля u_1 и u_2 , ограничивающих область возможности движения U . Таким образом, множество U

представляет собой отрезок $[u_1, u_2]$. Отсюда следует, что $u(t) = 1/\cos\theta(t)$ является периодической функцией времени и u изменяется между значениями u_1 и u_2 , то есть $u_1 \leq u \leq u_2$.

В силу (4.3.10) при $24c_1 + \sqrt{51}c_2 = 0$ имеем $F(1) = 0$. В противном случае $F(1) < 0$. Таким образом, возможны два типа графиков функции $F(u)$, отвечающие различным значениям функции при $u = 1$ (Рис. 7).

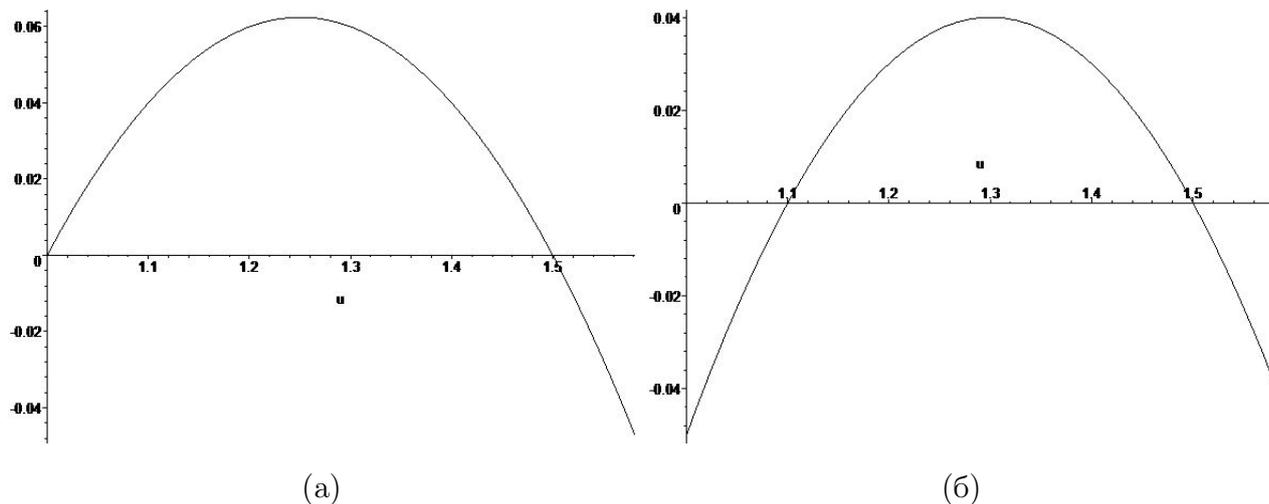


Рис. 7. Возможный вид графика функции $F(u)$: (а) $F(1) = 0$; (б) $F(1) < 0$.

Случаи $F(1) = 0$ и $F(1) < 0$ динамически различны. Если $F(1) = 0$, то точка $u = 1$ принадлежит множеству U (является граничной точкой u_1). Поскольку $u = 1/\cos\theta$, то значению $u = 1$ соответствует значение $\theta = 0$. Это означает, что в процессе движения параболический сегмент периодически проходит через положение, при котором его ось симметрии вертикальна. При таком движении угол θ отклонения от вертикали изменяется в симметричных пределах:

$$-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad \theta_0 = \arccos \frac{1}{u_2}.$$

Если $F(1) < 0$, то $u > 1$ и, следовательно, θ является знакоопределенной функцией на всем движении. Пределы изменения угла θ несимметричны:

$$-\theta_2 \leq \theta \leq -\theta_1 < 0 \quad \text{или} \quad 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \theta_i = \arccos \frac{1}{u_i}, \quad i = 1, 2,$$

а значит параболоид постоянно отклонен от вертикали и угол наклона изменяется периодически.

4.3.2. Случай $F(1) = 0$. Из (4.3.10) получаем, что

$$c_2 = -\frac{24}{\sqrt{51}}c_1. \quad (4.3.11)$$

Подставив в (4.3.3) выражение для c_2 из (4.3.11), получим

$$r = c_1 \sqrt{\frac{27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8}{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}} \left(\cos \Phi(\theta) - \frac{24}{\sqrt{51}} \sin \Phi(\theta) \right),$$

$$p = \frac{4c_1 \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8}} \left[\left(\frac{8}{\sqrt{17}} \cos \Phi(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \Phi(\theta) \right) \cos \theta - \frac{4(3 \cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1)}{\sqrt{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}} \left(\cos \Phi(\theta) - \frac{24}{\sqrt{51}} \sin \Phi(\theta) \right) \right]. \quad (4.3.12)$$

Теперь с учетом формул (4.3.12) проведем исследование оставшихся уравнений движения параболического сегмента. Первое из уравнений системы (2.1.21) и уравнение (2.1.22) запишутся в виде

$$\frac{dq}{dt} = \frac{8}{8 + 9 \cos^4 \theta} \left(\frac{g}{\lambda} \sin \theta \cos^2 \theta - \frac{\cos \theta}{8 \sin \theta} (9 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta - 8) p^2 + \right. \\ \left. + 2 \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) pr + \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} q^2 \right), \quad \frac{d\theta}{dt} = -q. \quad (4.3.13)$$

Используя (4.3.3), получим для функции $\Phi(\theta)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \frac{24\sqrt{3}q \sin^3 \theta \cos^2 \theta}{(27 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 8) \sqrt{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8}}. \quad (4.3.14)$$

К уравнениям (4.3.13), (4.3.14) добавим уравнения (2.1.25):

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - p \operatorname{ctg} \theta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p}{\sin \theta}. \quad (4.3.15)$$

Из (2.1.28), используя (2.1.25), можно получить еще два дифференциальных уравнения, описывающих изменение координат x и y точки касания M параболического сегмента с опорной плоскостью:

$$\frac{dx}{dt} = -2\lambda p \sin \psi - \frac{2\lambda \cos \psi}{\cos^3 \theta} q + \frac{2\lambda \sin \theta \sin \psi}{\cos \theta} r, \quad (4.3.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\lambda p \cos \psi - \frac{2\lambda \sin \psi}{\cos^3 \theta} q - \frac{2\lambda \sin \theta \cos \psi}{\cos \theta} r.$$

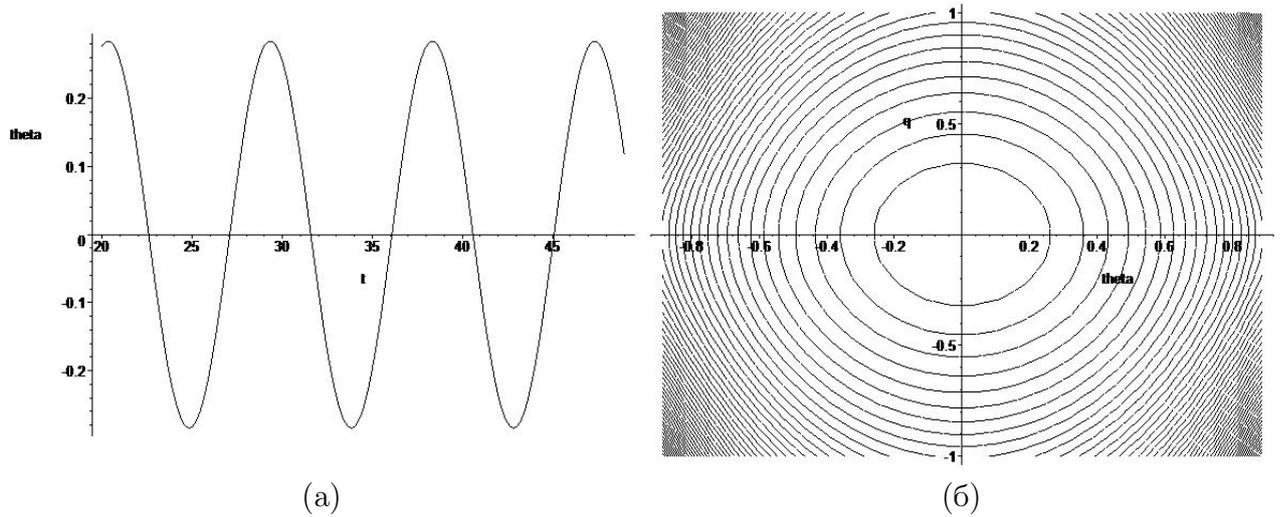


Рис. 8. (а) График функции $\theta(t)$ при $g = \lambda = 1$, $c_1 = 0.1$; (б) фазовый портрет на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$.

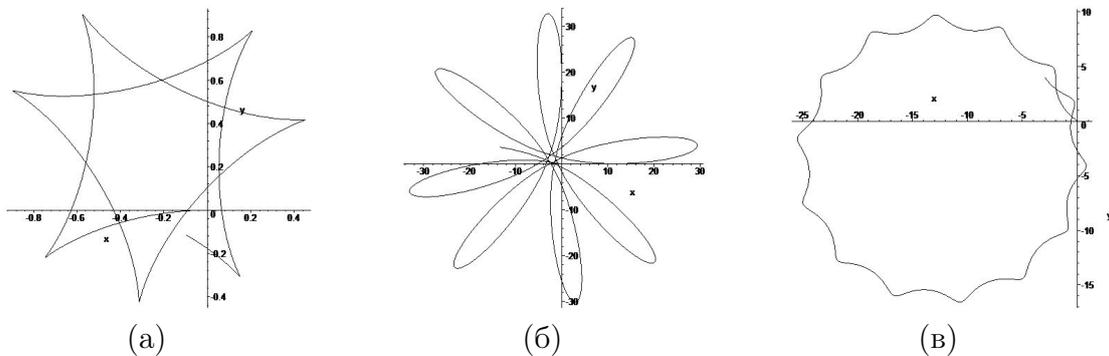


Рис. 9. След точки касания на опорной плоскости при (а) $c_1 = 0.3$, $\theta(0) = 0.1$, $q(0) = 0.2$, $\Phi(0) = 0$; (б) $c_1 = 0.1$, $\theta(0) = 0.8$, $q(0) = 1.2$, $\Phi(0) = \pi/4$; (в) $c_1 = 1$, $\theta(0) = 0.8$, $q(0) = 0.3$, $\Phi(0) = \pi$.

Подставив в уравнения (4.3.13), (4.3.15), (4.3.16) вместо p и r их выражения, определяемые формулами (4.3.12), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений (4.3.13) – (4.3.16) относительно неизвестных функций времени $q(t)$, $\Phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $x(t)$, $y(t)$. Таким образом, углы Эйлера θ , ψ , φ и координаты x , y точки M соприкосновения параболического сегмента и опорной плоскости как функции времени t определяются из системы (4.3.13) – (4.3.16). Указанная система дифференциальных уравнений была проинтегрирована численно методом Рунге – Кутты – Фельберга четвертого порядка. Отметим, что все особенности, возникающие в уравнениях системы при $\theta = 0$, являются устранимыми, т.е. правые части уравнений могут быть доопределены по непрерывности в точке $\theta = 0$. На Рис. 8 представлены зависимость $\theta(t)$ и соответствующий фазовый портрет на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$. На Рис. 9 показаны типичные траектории, которые точка контакта M описыва-

ет на опорной плоскости при различных значениях постоянной c_1 и заданных значениях параметров g и λ .

4.3.3. Случай $F(1) < 0$. Исключим из системы уравнений (4.3.13) – (4.3.16) уравнение (4.3.14), описывающее изменение функции $\Phi(t)$, и дополним ее уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{(9 \cos^6 \theta - 66 \cos^4 \theta + 56 \cos^2 \theta - 16) pq}{(23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8) \sin \theta \cos \theta} + \frac{16 (\cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1) qr}{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{18 \sin^4 \theta pq}{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8} - \frac{2 (16 \cos^2 \theta - 17) \sin \theta \cos \theta qr}{23 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 8},$$
(4.3.17)

которые можно получить из системы (4.1.3). Кроме того, чтобы найти зависимость координат ξ и ζ от времени, можно добавить к полученной системе еще два уравнения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\lambda q}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{2\lambda q \sin \theta}{\cos^3 \theta}.$$
(4.3.18)

Эти уравнения получаются из (4.1.2) дифференцированием по времени.

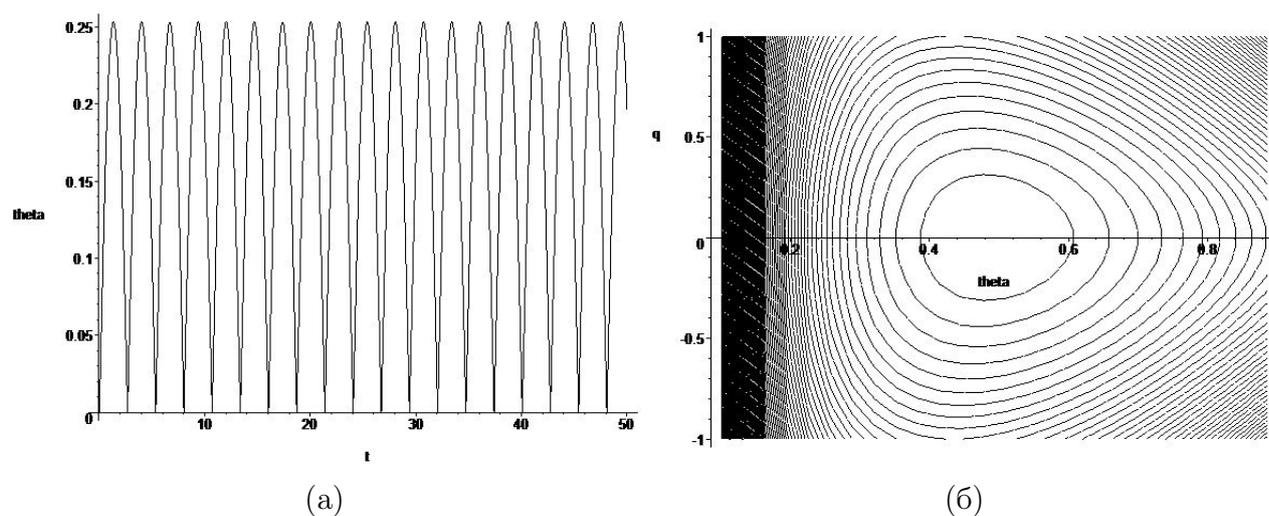


Рис. 10. (а) График функции $\theta(t)$ при $g = \lambda = 1$; (б) фазовый портрет на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$.

Таким образом, уравнения (4.3.13), (4.3.15) – (4.3.18) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $\xi(t)$, $\zeta(t)$. Задавая значения постоянных g и λ , а также начальные условия для всех указанных функций, можно численно проинтегрировать рассматриваемую систему. Для интегрирования был использован метод Рунге – Кутты – Фельберга четвертого порядка. На

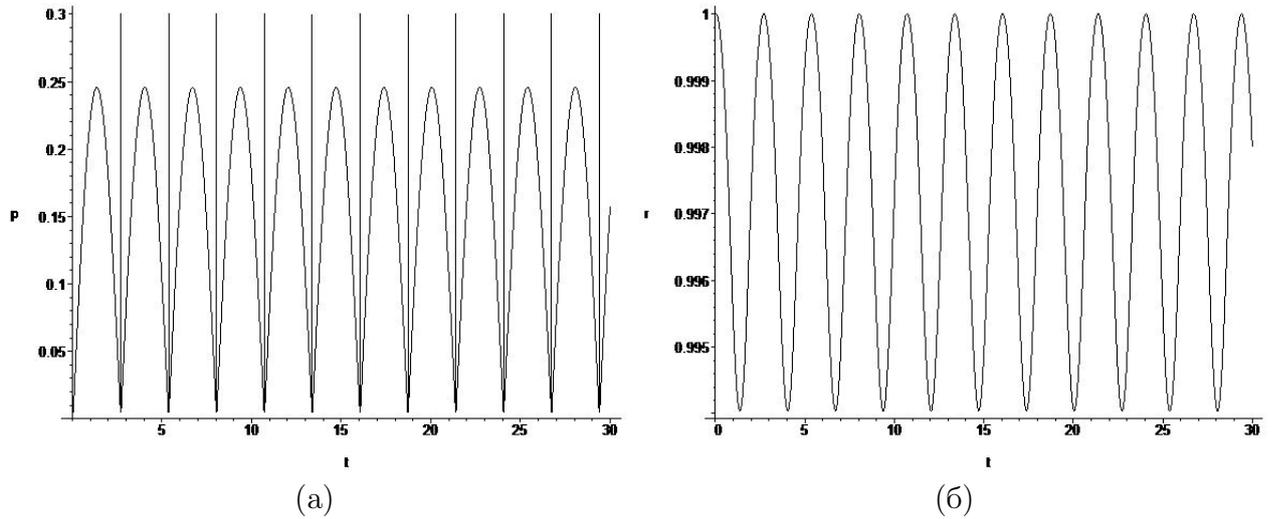


Рис. 11. Графики функций: (а) $p(t)$; (б) $r(t)$ при $g = \lambda = 1$.

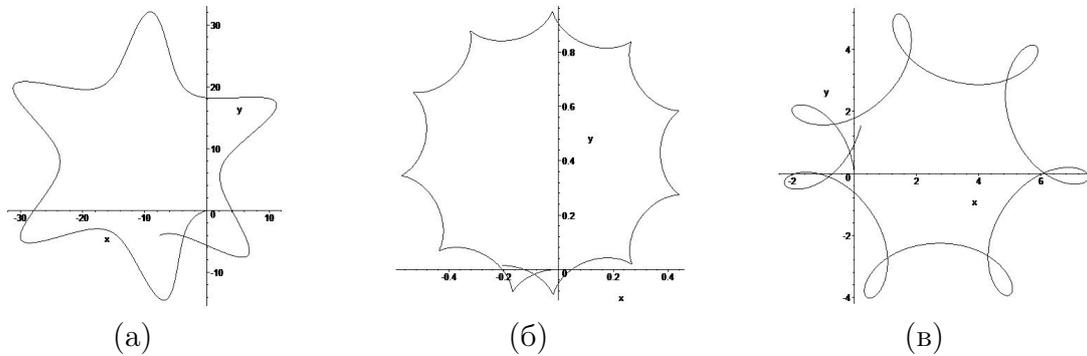


Рис. 12. След точки касания на опорной плоскости при (а) $\theta(0) = 0.8$, $p(0) = 0.15$, $q(0) = 1$, $r(0) = 1$; (б) $\theta(0) = 0.01$, $p(0) = 0.01$, $q(0) = 0.1$, $r(0) = 1$; (в) $\theta(0) = 0.2$, $p(0) = 1$, $q(0) = 0.1$, $r(0) = 0.4$.

Рис. 10 представлен график изменения во времени угла нутации $\theta(t)$ и фазовый портрет на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$. На Рис. 11 приведены графики компонент угловой скорости $p(t)$ и $r(t)$. Рис. 12 иллюстрирует характерный вид следа, который точка M контакта параболического сегмента с опорной плоскостью оставляет на этой плоскости.

Проведенный выше анализ позволяет сделать вывод, что следом точки касания M на поверхности параболического сегмента является кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочередно к двум параллелям параболоида. След точки касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, расположенную между двумя концентрическими окружностями, которых точка M поочередно касается при движении сегмента. Таким образом, движение параболического сегмента будет квазипериодическим. Заметим, что полученные выводы согласуются с результатами работ Н.К. Мощука [23, 24].

4.4. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПАРАБОЛОИДА И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Этот параграф посвящен исследованию существования и устойчивости стационарных движений [11] параболоида. Заметим, что из формулы (4.1.1) следует условие

$$f'(\theta)|_{\theta=0} = \frac{\lambda \sin \theta}{\cos^2 \theta} \Big|_{\theta=0} = 0,$$

то есть ось симметрии $G\zeta$ параболоида при отрицательных значениях ζ пересекает его поверхность по нормали к последней. В этом случае параболоид может двигаться так, что (см. [20])

$$p = 0, \quad r = \omega = \text{const}, \quad q = 0, \quad \theta = 0. \quad (4.4.1)$$

В этом движении параболоид вращается вокруг своей неподвижной вертикально расположенной оси симметрии с произвольной постоянной угловой скоростью ω . Условие устойчивости стационарного движения (4.4.1) имеет вид [20]

$$(A_3 + mf_0(f_0 + f_0''))^2 \omega^2 + 4mgf_0''(A_1 + mf_0^2) > 0, \quad (4.4.2)$$

где индексом 0 обозначены значения функции $f(\theta)$, определяемой равенством (4.1.1), и её второй производной при $\theta = 0$. В случае параболоида, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, имеем

$$f_0'' = f''(\theta)|_{\theta=0} = \frac{\lambda(1 + \sin^2 \theta)}{\cos^3 \theta} \Big|_{\theta=0} = \lambda > 0,$$

следовательно, в левой части неравенства (4.4.2) стоит положительное выражение, и решение (4.4.1) будет устойчиво при любом значении постоянной ω .

Параболоид может совершать также стационарные движения, при которых угол θ , составляемый осью симметрии параболоида с вертикалью, остается постоянным и отличным от нуля [20, 21]:

$$\theta = \theta_0 \neq 0, \quad q = 0, \quad p = p_0 \neq 0, \quad r = r_0, \quad (4.4.3)$$

если постоянные θ_0 , p_0 и r_0 удовлетворяют уравнению [20, 21]

$$a_{11}p_0^2 + a_{12}p_0r_0 - mgf_0' = 0, \quad (4.4.4)$$

$$a_{11} = \left(A_1 - \frac{m\zeta_0}{\cos \theta_0} f_0 \right) \text{ctg} \theta_0, \quad a_{12} = - \left(A_3 - \frac{m\xi_0}{\sin \theta_0} f_0 \right).$$

Здесь и далее индекс 0 обозначает вычисление соответствующей функции при $\theta = \theta_0$.

Рассматривая уравнение (4.4.4) как квадратное уравнение относительно p_0 и требуя вещественность его корней, получаем условие существования решения (4.4.3) в виде неравенства:

$$\left(A_3 - \frac{m\xi_0}{\sin \theta_0} f_0 \right)^2 r_0^2 + 4mgf_0' \left(A_1 - \frac{m\zeta_0}{\cos \theta_0} f_0 \right) \operatorname{ctg} \theta_0 \geq 0.$$

Решению (4.4.3) отвечает регулярная прецессия параболоида. Условие устойчивости решения (4.4.3) имеет вид [20, 21]

$$b_{11}p_0^2 + b_{12}p_0r_0 + b_{22}r_0^2 + mgf_0'' > 0, \quad (4.4.5)$$

$$b_{11} = \frac{(A_1 + m\zeta_0^2)(1 + 2\cos^2 \theta_0)}{\sin^2 \theta_0} + \frac{m\xi_0(\xi_0 \sin \theta_0 + 3\zeta_0 \cos \theta_0)}{\sin \theta_0} +$$

$$+ \frac{A_3 m \zeta_0 (\xi_0 + \zeta_0') \left((A_1 + m\zeta_0^2) \cos \theta_0 + m\xi_0 \zeta_0 \sin \theta_0 \right)}{(A_1 A_3 + A_1 m \xi_0^2 + A_3 m \zeta_0^2) \sin \theta_0},$$

$$b_{12} = - (3A_3 + 3m\xi_0^2 + m\xi_0' \zeta_0) \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} - \frac{m\xi_0 \zeta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)}{\sin^2 \theta_0} +$$

$$+ \frac{m\xi_0 (2A_3 + 2m\xi_0^2 + m\xi_0' \zeta_0)}{A_1 A_3 + A_1 m \xi_0^2 + A_3 m \zeta_0^2} \left(A_1 \xi_0 \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} - A_3 \zeta_0 \right) -$$

$$- \frac{A_3 m \zeta_0 \zeta_0'}{A_1 A_3 + A_1 m \xi_0^2 + A_3 m \zeta_0^2} \left(A_3 + m\xi_0^2 + \frac{m\xi_0 \zeta_0 \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right),$$

$$b_{22} = \left(A_3 + m\xi_0^2 + \frac{m\xi_0 \zeta_0 \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right) \frac{A_3 (A_3 + m\xi_0^2 + m\xi_0' \zeta_0)}{A_1 A_3 + A_1 m \xi_0^2 + A_3 m \zeta_0^2}.$$

Легко видеть, что коэффициенты b_{ij} , входящие в неравенство (4.4.5), являются довольно громоздкими. Можно показать, что для однородного параболического сегмента, моменты инерции которого определяются равенствами (4.3.1), а угол θ изменяется в пределах (4.3.2), коэффициенты b_{ij} в явном виде записываются следующим образом:

$$b_{11} = \frac{m\lambda^2 (126 \cos^{10} \theta_0 + 1267 \cos^8 \theta_0 - 430 \cos^6 \theta_0 - 432 \cos^4 \theta_0 + 400 \cos^2 \theta_0 - 64)}{8 \sin^2 \theta_0 \cos^4 \theta_0 (23 \cos^4 \theta_0 - 14 \cos^2 \theta_0 + 8)},$$

$$b_{12} = -\frac{2m\lambda^2 (1 + \cos^2 \theta_0) (5 \cos^6 \theta_0 + 104 \cos^4 \theta_0 - 74 \cos^2 \theta_0 + 16)}{\sin \theta_0 \cos^3 \theta_0 (23 \cos^4 \theta_0 - 14 \cos^2 \theta_0 + 8)},$$

$$b_{22} = -\frac{32m\lambda^2 (1 + \cos^2 \theta_0) (\cos^4 \theta_0 - 4 \cos^2 \theta_0 + 1)}{\cos^2 \theta_0 (23 \cos^4 \theta_0 - 14 \cos^2 \theta_0 + 8)}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad D = b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22} < 0. \quad (4.4.6)$$

Это означает, что квадратичная форма $b_{11}p_0^2 + b_{12}p_0r_0 + b_{22}r_0^2$ является положительно определённой при всех значениях θ_0 . Учитывая, что слагаемое mgf_0'' также является положительным, заключаем, что если для однородного параболического сегмента, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, существует решение вида (4.4.3), то оно является устойчивым. Иными словами, все регулярные прецессии однородного параболического сегмента являются устойчивыми.

На Рис. 13 представлены графики функций $b_{11}(\theta_0)/(m\lambda^2)$ и $D(\theta_0)/(m^2\lambda^4)$, подтверждающие справедливость неравенств (4.4.6).

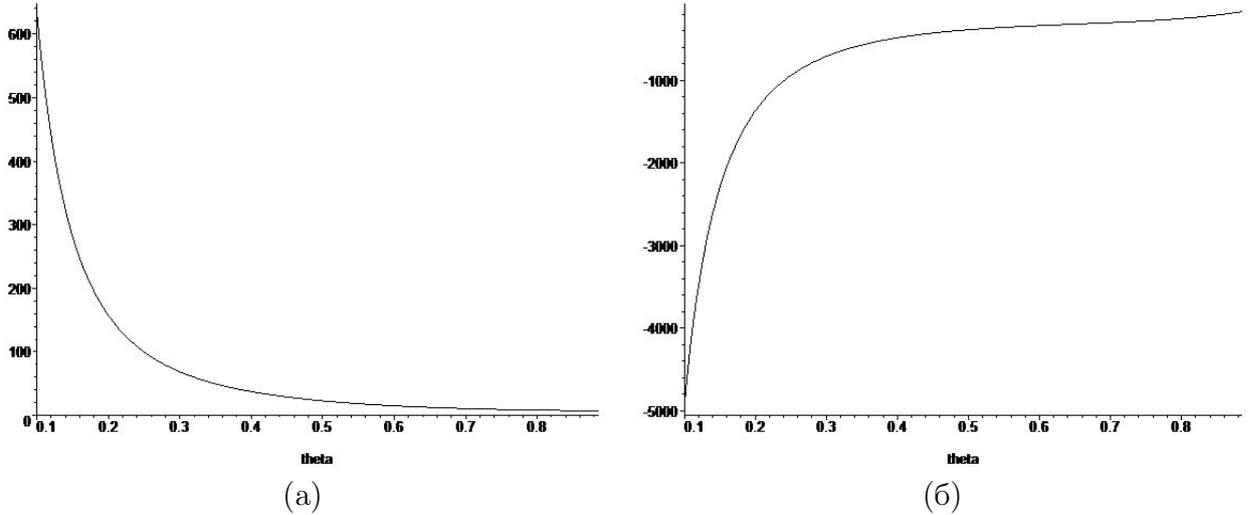


Рис. 13. Графики функций: (а) $b_{11}(\theta_0)/(m\lambda^2)$; (б) $D(\theta_0)/(m^2\lambda^4)$.

Существование явного вида (4.3.3) функций $p(\theta)$ и $r(\theta)$, найденных в задаче о движении однородного параболического сегмента, позволяет построить в этой задаче бифуркационные диаграммы Пуанкаре – Четаева [11]. Вместо постоянных c_1 и c_2 , входящих в решение (4.3.3), введем безразмерные постоянные

$$k_1 = c_1 \sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \quad k_2 = c_2 \sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

В результате функции, определяемые формулами (4.3.3), могут быть переписаны в виде

$$p(\theta, c_1, c_2) = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} p(\theta, k_1, k_2), \quad r(\theta, c_1, c_2) = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} r(\theta, k_1, k_2).$$

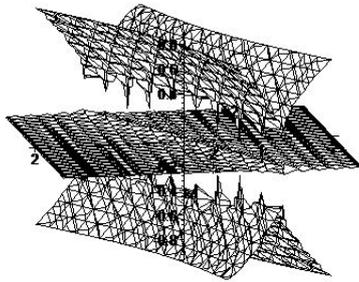
Подставляя явные формулы $p(\theta, c_1, c_2)$ и $r(\theta, c_1, c_2)$ в соотношение (4.4.4) и производя некоторые упрощения, приведём данное соотношение к виду

$$\frac{9 \cos^4 \theta_0 + 16 \cos^2 \theta_0 - 8}{\sin \theta_0} p^2(\theta_0, k_1, k_2) - \quad (4.4.7)$$

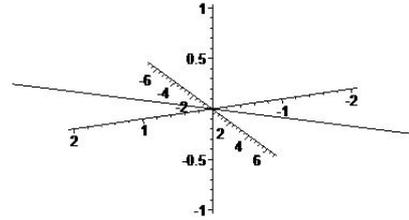
$$-16 \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0) p(\theta_0, k_1, k_2) r(\theta_0, k_1, k_2) - 8 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0.$$

С помощью программы символьных вычислений Maple 7 в пространстве переменных k_1, k_2, θ_0 была построена поверхность, задаваемая уравнением (4.4.7). Эта поверхность представлена на Рис. 14 (а). На Рис. 14 (б) представлено сечение данной поверхности плоскостью

$$k_2 = -\frac{24}{\sqrt{51}} k_1. \quad (4.4.8)$$



(а)



(б)

Рис. 14. (а) Диаграмма Пуанкаре – Четаева в пространстве (k_1, k_2, θ_0) ; (б) сечение диаграммы плоскостью $k_2 = -\frac{24}{\sqrt{51}} k_1$.

Видно, что в указанном сечении поверхности, задаваемой уравнением (4.4.7), лежит только прямая $\theta_0 = 0$. Это означает, что в случае, когда постоянные k_1 и k_2 удовлетворяют соотношению (4.4.8), у параболического сегмента не существует стационарных движений вида (4.4.3), а существуют стационарные движения только вида (4.4.1). Характер устойчивости этих движений не меняется при изменении постоянной k_1 , то есть они либо всегда

являются устойчивыми, либо всегда являются неустойчивыми. Выше нами было установлено, что перманентные вращения параболического сегмента являются устойчивыми. Таким образом, построенные бифуркационные диаграммы полностью подтверждают полученные выше выводы об устойчивости стационарных движений однородного параболического сегмента, движущегося без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости.

ДОБАВЛЕНИЕ

В этом Дополнении мы определяем моменты инерции однородного симметрического параболического сегмента, центр масс которого расположен в фокусе образующей его параболы. В системе координат $G\xi\eta\zeta$ с началом в фокусе образующей параболы параметрические уравнения поверхности параболоида имеют вид

$$\xi = -\frac{2\lambda \sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta}, \quad \eta = -\frac{2\lambda \sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \lambda, \quad (A.1.1)$$

откуда следует

$$\zeta = \frac{\xi^2 + \eta^2}{4\lambda} - \lambda. \quad (A.1.2)$$

В этих формулах через λ обозначено расстояние от фокуса образующей параболы до её вершины. Найдем теперь уравнение плоскости, перпендикулярной оси симметрии параболической поверхности (A.1.1) и такой, что эта плоскость отсекает от параболоида однородный сегмент, центр масс которого расположен в фокусе соответствующей параболы. Введем цилиндрические координаты

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \varphi, \quad z = \zeta.$$

В этих координатах уравнение (A.1.2) примет вид

$$z = \frac{r^2}{4\lambda} - \lambda. \quad (A.1.3)$$

Рассматриваемый нами параболический сегмент ограничен с одной стороны поверхностью (A.1.3), а с другой стороны – плоскостью

$$z = h,$$

причем поверхность (A.1.3) и плоскость пересекаются по окружности, радиус которой равен

$$r = \sqrt{4\lambda(h + \lambda)}.$$

Координата ζ_G центра масс параболического сегмента находится по формуле

$$m\zeta_G = \rho \iiint_V z r dr d\varphi dz,$$

где m – масса параболического сегмента, ρ – его плотность, постоянная в силу того, что он является однородным. Поскольку начало системы координат, в которой задана поверхность параболоида, выбрано в фокусе образующей

параболы и, по предположению, центр масс рассматриваемого параболического сегмента также лежит в фокусе образующей параболы, то мы должны получить $\zeta_G = 0$. С помощью этого уравнения находится искомое значение h . Итак, рассматриваемый нами интеграл имеет вид

$$m\zeta_G = \rho \int_0^{\sqrt{4\lambda(h+\lambda)}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{r^2}{4\lambda} - \lambda}^h z dz = \frac{2\pi\lambda\rho(h+\lambda)^2}{3} (2h - \lambda) = 0.$$

Значит, соответствующая плоскость задается уравнением

$$z = h = \frac{\lambda}{2}. \quad (\text{A.1.4})$$

Таким образом, симметричный однородный параболический сегмент, центр масс которого расположен в фокусе образующей его параболы, полностью определен: он ограничен поверхностью параболоида (A.1.3) и плоскостью (A.1.4).

При $h = \lambda/2$ имеем:

$$r = \sqrt{4\lambda(h+\lambda)} = \lambda\sqrt{6}.$$

Предполагая, что масса параболического сегмента равна m , вычислим его плотность ρ . Воспользуемся формулой

$$m = \rho \iiint_V r dr d\varphi dz$$

и вычислим интеграл, стоящий в правой части. Получим

$$\iiint_V r dr d\varphi dz = \int_0^{\lambda\sqrt{6}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{r^2}{4\lambda} - \lambda}^{\frac{\lambda}{2}} dz = \frac{9\pi\lambda^3}{2}.$$

В итоге

$$m = \frac{9\pi\lambda^3}{2}\rho,$$

откуда

$$\rho = \frac{2m}{9\pi\lambda^3}.$$

Перейдем, наконец, к основной задаче – вычислению моментов инерции однородного параболического сегмента. В силу того, что сегмент является

динамически симметричным, два его главных центральных момента инерции равны между собой. Иными словами,

$$A_1 = \rho \iiint_V (\eta^2 + \zeta^2) dV = \rho \iiint_V (\xi^2 + \zeta^2) dV = A_2.$$

Поэтому

$$2A_1 = \rho \iiint_V (\xi^2 + \eta^2 + 2\zeta^2) dV = \rho \iiint_V (\xi^2 + \eta^2) dV + 2\rho \iiint_V \zeta^2 dV.$$

Заметим, что

$$\rho \iiint_V (\xi^2 + \eta^2) dV = \rho \iiint_V r^2 dV = A_3 \quad -$$

осевой момент инерции. Учитывая это, находим

$$A_3 = \rho \int_0^{\lambda\sqrt{6}} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{r^2}{4\lambda} - \lambda}^{\frac{\lambda}{2}} dz = 9\pi\rho\lambda^5.$$

Подставляя найденное выше выражение для плотности ρ , получим окончательно

$$A_3 = 2m\lambda^2.$$

Далее находим

$$2\rho \iiint_V \zeta^2 dV = 2\rho \int_0^{\lambda\sqrt{6}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{r^2}{4\lambda} - \lambda}^{\frac{\lambda}{2}} z^2 dz = \frac{9}{8}\pi\rho\lambda^5.$$

Подставляя найденное выше выражение для плотности, получим

$$\frac{9}{8}\pi\rho\lambda^5 = \frac{m\lambda^2}{4}.$$

Поэтому

$$2A_1 = 2m\lambda^2 + \frac{m\lambda^2}{4} \quad \text{т.е.} \quad A_1 = \frac{9}{8}m\lambda^2.$$

Итак, моменты инерции однородного симметричного параболического сегмента, центр масс которого расположен в фокусе образующей его параболы, равны

$$A_1 = A_2 = \frac{9}{8}m\lambda^2, \quad A_3 = 2m\lambda^2.$$

ГЛАВА 5. ДВИЖЕНИЕ ВЕРЕТЕНООБРАЗНОГО ТЕЛА

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ И ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим задачу о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тела, поверхность которого образована вращением дуги параболы относительно оси, параллельной директрисе и проходящей через фокус параболы. Поверхность такого тела имеет два острия и напоминает по форме веретено, за что оно и получило свое название (Рис. 15). Задача о движении веретенообразного тела рассматривалась Х. М. Муштари [25], который дал полное решение соответствующей задачи при дополнительном ограничении на моменты инерции тела:

$$A_3 = \frac{2}{3}A_1. \quad (5.1.1)$$

Будем предполагать, что во всё время движения тело опирается о плоскость своей выпуклой поверхностью. Более общий случай движения данного тела, когда возможна его опора на остриё, исследовался в работе А.А. Зобовой [7].

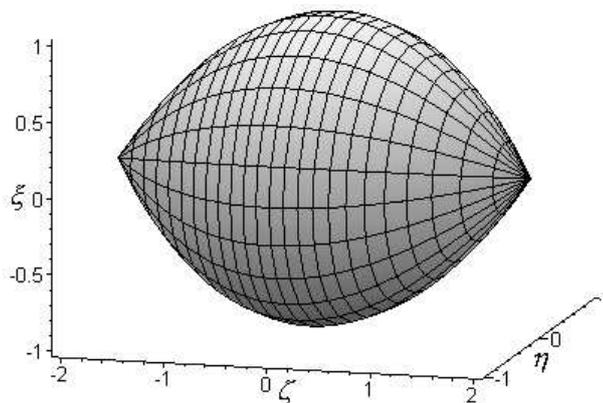


Рис. 15. Качение веретенообразного тела по горизонтальной плоскости.

Для рассматриваемого тела высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad \lambda = \text{const.}$$

Замечание 5.5.1.1. Для того, чтобы тело касалось плоскости своей выпуклой поверхностью, на угол θ должно быть наложено следующее ограничение:

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right).$$

Пользуясь формулами (2.1.11), находим координаты ξ и ζ точки касания тела с опорной плоскостью:

$$\xi = \frac{\lambda \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \zeta^2 = 4\lambda(\xi + \lambda).$$

Система уравнений (2.1.29) принимает вид

$$\frac{dp}{d\theta} = \left(\frac{2A_3 m \lambda^2 \sin^2 \theta (3 - 2 \sin^2 \theta)}{\Delta} - 1 \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p +$$

$$+ \frac{A_3 ((A_3 + 4m\lambda^2) \sin^4 \theta - 8m\lambda^2 \sin^2 \theta + 5m\lambda^2)}{\Delta} r,$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{A_1 m \lambda^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) (3 - 2 \sin^2 \theta)}{\Delta} p +$$

$$+ \frac{2m\lambda^2 \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) (A_1 - A_3 \sin^2 \theta)}{\Delta \sin \theta} r,$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4(A_1 - A_3)m\lambda^2) \sin^4 \theta - 4(A_1 - A_3)m\lambda^2 \sin^2 \theta + A_1 m \lambda^2,$$

а уравнение (2.1.30) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (5.1.2)$$

$$b_1 = \frac{(4 \sin^4 \theta - 24 \sin^2 \theta + 15) \cos \theta}{(1 - 2 \sin^2 \theta)(3 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta} - \frac{6(A_1 - 2(A_1 - A_3) \sin^2 \theta) m \lambda^2 \cos \theta}{\Delta \sin \theta},$$

$$b_2 = \frac{(3A_3 - 2A_1) m \lambda^2 (1 - 2 \sin^2 \theta)^2}{\Delta (3 - 2 \sin^2 \theta)}.$$

Если $3A_3 = 2A_1$, то уравнение (5.1.2) допускает решение (см. [25])

$$r = r_0 = \text{const.}$$

В уравнении (5.1.2) сделаем замену независимой переменной по формуле $\sin^2 \theta = x$ и введем обозначение $B = m\lambda^2$.

В результате уравнение (5.1.2) примет вид

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x) r = 0, \quad (5.1.3)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2 B}{4x(1-x)(3-2x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1 B.$$

При $A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0$ многочлен Δ , входящий в знаменатели коэффициентов d_1 и d_2 , имеет два корня, которые мы обозначим x_1 и x_2 . В явном виде они записываются следующим образом:

$$x_1 = \frac{2B(A_1 - A_3) - \sqrt{4A_3 B^2(A_3 - A_1) - A_1^2 A_3 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3)}, \quad (5.1.4)$$

$$x_2 = \frac{2B(A_1 - A_3) + \sqrt{4A_3 B^2(A_3 - A_1) - A_1^2 A_3 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3)}.$$

Замена вида (1.1.2) приводит уравнение (5.1.3) к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = S(x)y, \quad (5.1.5)$$

$$S(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{(x-\frac{1}{2})^2} + \quad (5.1.6)$$

$$+ \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{(x-\frac{3}{2})^2} + \frac{\beta_4}{x-x_1} + \frac{\alpha_4}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_5}{x-x_2} + \frac{\alpha_5}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4},$$

$$\beta_0 = \frac{3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2}{48x_1 x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1 x_2 - 9(x_1 + x_2) + 12}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)},$$

$$\beta_2 = \frac{3(x_1 + x_2 - 1)}{(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)}, \quad \beta_3 = \frac{15(x_1 + x_2) - 8x_1 x_2 - 27}{3(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)},$$

$$\beta_4 = -\frac{(8x_1^3 - 36x_1^2 + 51x_1 - 25)(4x_2 - 3)x_1 + 15(x_1 - 1)x_1 + 3(x_2 - x_1)}{16x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)(2x_1 - 3)(x_1 - x_2)},$$

$$\beta_5 = \frac{(8x_2^3 - 36x_2^2 + 51x_2 - 25)(4x_1 - 3)x_2 + 15(x_2 - 1)x_2 + 3(x_1 - x_2)}{16x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1)(2x_2 - 3)(x_1 - x_2)}.$$

Таким образом, функция $S(x)$ имеет шесть конечных полюсов в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 1/2$, $x = 3/2$, $x = x_1$ и $x = x_2$. В общем случае эти полюса не совпадают друг с другом. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных условиях на параметры задачи функция $S(x)$ имеет вид, отличный от того, что представлен выше. Перечислим далее все возможные случаи, когда структура функции $S(x)$ меняется.

1. При выполнении условия

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) = 0 \quad (5.1.7)$$

степень многочлена Δ меняется со второй на первую. Единственным корнем многочлена Δ в этом случае будет значение x_0 , равное

$$x_0 = \frac{A_1}{4(A_1 - A_3)} = -\frac{m\lambda^2}{A_3}.$$

Значение x_0 является отрицательным, а потому, очевидно, не может совпадать ни с одним из значений $x = 0$, $x = 1$, $x = 1/2$, $x = 3/2$.

2. При выполнении условий

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0, \quad B = \frac{9A_1 A_3}{4(3A_3 - 4A_1)} \quad (5.1.8)$$

будем иметь совпадение значений $x_1 = 3/2$. Легко показать, что другие значения $x = 0$, $x = 1$ и $x = 1/2$ не могут совпадать со значениями $x = x_1$ и $x = x_2$ ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи.

3. При выполнении условий

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0, \quad B = \frac{A_1^2}{4(A_3 - A_1)} \quad (5.1.9)$$

будем иметь совпадение значений $x_1 = x_2$, которые будут при этом равны

$$x_1 = x_2 = \frac{A_1}{2(A_1 - A_3)} < 0.$$

4. При выполнении условия (5.1.1) равен нулю коэффициент β_0 в разложении (5.1.6) функции $S(x)$ на простейшие дроби и, следовательно, в этом разложении отсутствует полюс первого порядка $x = 0$. В этом случае решения уравнения (5.1.5) выражаются через лиувиллевы функции, что следует из результатов работы Х. М. Муштари [25].

Таким образом, для полного исследования вопроса о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (5.1.5) необходимо изучение не только общего случая, когда функция $S(x)$ имеет вид (5.1.6), но и трёх частных случаев, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (5.1.7), (5.1.8) или (5.1.9).

5.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Предположим, что все полюсы функции $S(x)$ различны и коэффициент β_0 отличен от нуля, то есть функция $S(x)$ определяется формулой (5.1.6). В этом случае разложение функции $S(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$S(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (5.1.5) приводит к следующему результату:

Теорема 5.5.2.1. В случае, когда функция $S(x)$ определяется формулой (5.1.6), уравнение (5.1.5) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (5.1.5) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $S(x)$ имеет пять конечных полюсов второго порядка в точках $x = 1$, $x = 1/2$, $x = 3/2$, $x = x_1$ и $x = x_2$, а также полюс первого порядка в точке $x = 0$. В точке $x = \infty$ функция $S(x)$ имеет полюс второго порядка. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (5.1.5) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (5.1.5) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$\left[\sqrt{S}\right]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{\frac{1}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{\frac{3}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1,$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{\infty} = 0, \quad \alpha_{\infty}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{\infty}^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $S(x)$ равно 6, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^7 = 128$ наборов знаков

$$s = \left(s(\infty), s(1), s(x_1), s(x_2), s\left(\frac{1}{2}\right), s\left(\frac{3}{2}\right), s(0) \right).$$

Для каждого из этих наборов вычислим величину d по формуле (1.3.2):

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)} - \alpha_{\frac{1}{2}}^{s(\frac{1}{2})} - \alpha_{\frac{3}{2}}^{s(\frac{3}{2})} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$\alpha = \left(\alpha_{\infty}^+, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-, \alpha_{\frac{1}{2}}^-, \alpha_{\frac{3}{2}}^-, \alpha_0^- \right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right),$$

для которого $d = 0$. Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, вычисляемая по формуле (1.3.3), для указанного набора значений α имеет вид

$$\theta = \frac{1}{x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений α мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (1.3.4), которое после подстановки в него многочлена нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, примет вид

$$\frac{(4x_1x_2 - x_1 - x_2)(2x - 3)^2}{16x(x-1)(2x-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Отсюда $4x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0$. Возвращаясь к исходным параметрам, преобразуем последнее выражение к виду

$$\frac{4A_3B}{A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3)} = 0.$$

Очевидно, данное равенство не выполняется ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи. Следовательно, уравнение (5.1.5) не имеет решений вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.1.5) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.1.5) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\},$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_{\frac{3}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{4\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - e_1 - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0 \right).$$

В соответствии с алгоритмом величина d должна быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$ и E_∞ убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (3, 1, 1, 1, -2, -2, 4),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x-\frac{3}{2}}.$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него $P \equiv 1$ принимает вид

$$-\frac{3(4x_1x_2 - x_1 - x_2)(2x - 3)^2}{8x^2(2x - 1)^2(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)} = 0.$$

Отсюда, как и при поиске решений вида (1.2.1), следует равенство

$$4x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0.$$

Таким образом, у уравнения (5.1.5) нет физически допустимых решений вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.1.5) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.1.5) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $S(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $S(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $S(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (5.1.6). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 1.2.2.1 также выполняются:

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1; 4; 5), \quad \sqrt{1 + 4\alpha_j} = 2 \in \mathbb{Q} \quad (j = 2; 3),$$

$$\sum_{i=0}^5 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1 + 4\gamma} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = -\frac{3}{16}.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$\begin{aligned} E_\infty &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{x_1} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{x_2} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{\frac{1}{2}} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \\ E_{\frac{3}{2}} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \\ E_0 &= \{12\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$ и найдём число d по формуле (1.3.24):

$$d = e_\infty - e_1 - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1,$

$E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (9, 3, 3, 3, -6, -6, 12),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.25) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{12}{x} + \frac{3}{x-x_1} + \frac{3}{x-x_2} - \frac{6}{x-\frac{1}{2}} - \frac{6}{x-\frac{3}{2}} + \frac{3}{x-1}.$$

Следуя формуле (1.3.26), составим многочлен

$$S = x(x-1)(x-x_1)(x-x_2) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных соотношений (1.3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2S(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых $P_{12} = -P \equiv -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие условия $P_{-1} = 0$). Из данного соотношения необходимым образом вытекает, что $4x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 2 = 0$. Легко проверить невозможность выполнения этого условия при всех физически допустимых значениях параметров задачи.

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае, когда функция $S(x)$ определяется формулой (5.1.6), уравнение (5.1.5) не имеет физически допустимых ливуиллевых решений. Теорема доказана. \square

5.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ $A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3) = 0$

Предположим теперь, что параметры задачи связаны соотношением (5.1.7). В этом случае уравнение (5.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x)\frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (5.3.1)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(x-2x_0)}{2x(x-x_0)},$$

$$d_2(x) = -\frac{(4x_0-3)(1-2x)^2}{16x(1-x)(3-2x)(x-x_0)}, \quad x_0 = \frac{A_1}{4(A_1-A_3)} = -\frac{m\lambda^2}{A_3}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (5.3.1) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = S_1(x)y, \quad (5.3.2)$$

$$S_1(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{(x-\frac{3}{2})^2} +$$

$$+ \frac{\beta_4}{x-x_0} + \frac{\alpha_4}{(x-x_0)^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4},$$

$$\beta_0 = -\frac{4x_0-3}{48x_0}, \quad \beta_1 = \frac{4x_0-9}{16(x_0-1)}, \quad \beta_2 = \frac{3}{2(2x_0-1)}, \quad \beta_3 = -\frac{8x_0-15}{6(2x_0-3)},$$

$$\beta_4 = \frac{32x_0^4 - 144x_0^3 + 204x_0^2 - 100x_0 + 3}{16x_0(x_0-1)(2x_0-1)(2x_0-3)}, \quad x_0 = \frac{A_1}{4(A_1-A_3)}.$$

Разложение функции $S_1(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$S_1(x)|_{x=\infty} \approx \frac{4x_0-3}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Заметим, что из явного выражения для x_0 следует, что $x_0 < 0$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что никакие полюса функции $S_1(x)$ не могут совпадать, $\beta_0 \neq 0$ и разложение функции $S_1(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ не может иметь порядок выше второго.

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (5.3.2) приводит к следующему результату:

Теорема 5.5.3.1. Уравнение (5.3.2) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (5.3.2) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $S_1(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка, а также один полюс первого порядка. В точке $x = \infty$ функция $S_1(x)$

имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (5.3.2) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (5.3.2) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{S_1}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S_1}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_0}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S_1}]_{\frac{1}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{S_1}]_{\frac{3}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{S_1}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1,$$

$$[\sqrt{S_1}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{2x_0 - 0,5}}{2}.$$

Шаг 2. Поскольку $x_0 < 0$, то в выражении для α_∞^\pm под знаком радикала стоит отрицательная величина и, следовательно, число d , подсчитываемое по формуле (1.3.2), будет мнимым, а не действительным, как того требует алгоритм. Следовательно, уравнение (5.3.2) не имеет решений вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.3.2) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.3.2) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_0} = \{1, 2, 3\},$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_{\frac{3}{2}} = \{-2, 2, 6\},$$

$$E_0 = \{4\}, \quad E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_0}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_0}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - e_1 - e_{x_0} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0 \right).$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_0}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}$ и E_0 убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_0}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (2, 1, 1, -2, -2, 4),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-x_0)} - \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него $P \equiv 1$ принимает вид

$$\frac{3(4x_0 - 1)(2x - 3)^2}{8x^2(2x - 1)^2(x - 1)(x - x_0)} = 0.$$

Отсюда $4x_0 - 1 = 0$, что противоречит условию $x_0 < 0$. Поэтому уравнение (5.3.2) не может иметь решения вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.3.2) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.3.2) (см. Теорему 1.2.2.1). Непосредственной проверкой убеждаемся, что не все необходимые условия выполнены. В частности, число

$$\sqrt{1 + 4\gamma} = \sqrt{2x_0 - 0,5}$$

является чисто мнимым, поскольку $x_0 < 0$. Следовательно, это число не является действительным рациональным, каким должно быть в соответствии с алгоритмом. Таким образом, уравнение (5.3.2) не имеет решения вида (1.2.10).

Итак, уравнение (5.3.2) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

5.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ $B = \frac{9A_1A_3}{4(3A_3 - 4A_1)}$

Предположим, что $A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0$. Пусть уравнение

$$(A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1B = 0$$

имеет корень $x = 3/2$. Это означает совпадение полюса x_1 с полюсом $x = 3/2$ (см. (5.1.4)). Подставляя $x = 3/2$ в данное уравнение и выражая параметр B через другие параметры, получаем

$$B = \frac{9A_1A_3}{4(3A_3 - 4A_1)}. \quad (5.4.1)$$

Для того, чтобы равенство (5.4.1) имело физический смысл, требуется выполнение неравенства

$$3A_3 > 4A_1,$$

которое должно выполняться вместе с неравенством треугольника для моментов инерции

$$2A_1 \geq A_3.$$

В рассматриваемом случае уравнение (5.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x)\frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (5.4.2)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{27(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{9(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2}{4x(1-x)(3-2x)\Delta},$$

$$\Delta = 4(5A_1 - 6A_3)x^2 - 36(A_1 - A_3)x + 9A_1.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (5.4.2) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = S_2(x)y, \quad (5.4.3)$$

$$S_2(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{(x-\frac{3}{2})^2} +$$

$$+ \frac{\beta_4}{x-x_0} + \frac{\alpha_4}{(x-x_0)^2},$$

$$(5.4.4)$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{16},$$

$$\beta_0 = -\frac{2x_0 - 3}{48x_0}, \quad \beta_1 = -\frac{3(2x_0 + 1)}{16(x_0 - 1)}, \quad \beta_2 = \frac{3(2x_0 + 1)}{4(2x_0 - 1)}, \quad \beta_3 = -\frac{8x_0 - 15}{12(2x_0 - 3)},$$

$$\beta_4 = -\frac{3(8x_0^3 - 24x_0^2 + 20x_0 - 1)}{16x_0(x_0 - 1)(2x_0 - 1)(2x_0 - 3)}, \quad x_0 = \frac{3A_1}{2(5A_1 - 6A_3)}.$$

Разложение функции $S_2(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$S_2(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (5.4.3) приводит к следующему результату.

Теорема 5.5.4.1. Уравнение (5.4.3) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (5.4.3) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $S_2(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка, а также один полюс первого порядка. В точке $x = \infty$ функция $S_2(x)$ также имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (5.4.3) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (5.4.3) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{S_2}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S_2}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_0}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S_2}]_{\frac{1}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{S_2}]_{\frac{3}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^+ = \frac{5}{4}, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^- = -\frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S_2}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1,$$

$$[\sqrt{S_2}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $S(x)$ равно 5, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^6 = 64$ наборов знаков

$$s = \left(s(\infty), s(1), s(x_0), s\left(\frac{1}{2}\right), s\left(\frac{3}{2}\right), s(0) \right).$$

Для каждого из этих наборов вычислим величину d по формуле (1.3.2):

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{x_0}^{s(x_0)} - \alpha_{\frac{1}{2}}^{s\left(\frac{1}{2}\right)} - \alpha_{\frac{3}{2}}^{s\left(\frac{3}{2}\right)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$\alpha = \left(\alpha_\infty^+, \alpha_1^-, \alpha_{x_0}^-, \alpha_{\frac{1}{2}}^-, \alpha_{\frac{3}{2}}^-, \alpha_0^- \right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1 \right),$$

для которого $d = 0$. Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, вычисляемая по формуле (1.3.3), для указанного набора значений α имеет вид

$$\theta = \frac{1}{x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4x-6} + \frac{1}{4(x-x_0)}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений α мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (1.3.4), которое после подстановки в него многочлена нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, примет вид

$$\frac{(10x_0 - 3)(2x - 3)}{16x(x-1)(2x-1)(x-x_0)} = 0.$$

Отсюда $10x_0 - 3 = 0$. Используя явное выражение для x_0 , получаем $A_3 = 0$, что противоречит предположению о положительности моментов инерции. Следовательно, уравнение (5.4.3) не имеет физически реализуемых решений вида (1.2.1).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.4.3) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.4.3) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_0} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{\frac{1}{2}} = \{-2, 2, 6\},$$

$$E_{\frac{3}{2}} = \{-1, 2, 5\}, \quad E_0 = \{4\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_0}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_0}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - e_1 - e_{x_0} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0 \right).$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_1, E_{x_0}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$ и E_∞ убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_0}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (3, 1, 1, -2, -1, 4),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-x_0)} - \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него $P \equiv 1$ принимает вид

$$-\frac{3(10x_0 - 3)(2x - 3)}{8x^2(2x - 1)^2(x - 1)(x - x_0)} = 0.$$

Отсюда $10x_0 - 3 = 0$. Это равенство уже было рассмотрено выше и показывает, что у уравнения (5.4.3) нет физически допустимых решений вида (1.2.6).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.4.3) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.4.3) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $S_2(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $S_2(x)$ в ∞ выше 1. Разложение

функции $S_2(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (5.4.4). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 1.2.2.1 также выполняются:

$$\sqrt{1+4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1; 4), \quad \sqrt{1+4\alpha_2} = 2 \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{1+4\alpha_3} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=0}^4 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1+4\gamma} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = -\frac{3}{16}.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_{x_0} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ E_{\frac{1}{2}} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \\ E_{\frac{3}{2}} &= \{-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15\}, & E_0 &= \{12\}, \\ E_\infty &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_0}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_0}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$ и найдём число d по формуле (1.3.24):

$$d = e_\infty - e_1 - e_{x_0} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_0}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_0}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (9, 3, 3, -6, -3, 12),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (1.3.25) составим функцию θ , используя набор чисел e , найденный на предыдущем шаге. Получим

$$\theta = \frac{12}{x} + \frac{3}{x-x_0} - \frac{6}{x-\frac{1}{2}} - \frac{3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{3}{x-1}.$$

Следуя формуле (1.3.26), составим многочлен

$$S = x(x-1)(x-x_0) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных соотношений (1.3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12 - i)S' - S\theta)P_i - (12 - i)(i + 1)S^2S_2(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых $P_{12} = -P \equiv -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к полиному, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие тождества $P_{-1} = 0$). Из этого соотношения необходимым образом вытекает, что должно выполняться условие $10x_0 - 3 = 0$. Как было показано выше, это условие не выполняется ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи.

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае, когда функция $S_2(x)$ определяется формулой (5.4.4), уравнение (5.4.3) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. \square

5.5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ $B = \frac{A_1^2}{4(A_3 - A_1)}$

Предположим, что $A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0$ и $x_1 = x_2$. Из формул (5.1.4) следует, что совпадение полюсов происходит при

$$B = \frac{A_1^2}{4(A_3 - A_1)}. \quad (5.5.1)$$

Для того, чтобы равенство (5.5.1) имело физический смысл, требуется выполнение неравенства

$$A_3 > A_1.$$

В этом случае уравнение (5.1.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x)\frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (5.5.2)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} + \frac{3x_0}{x(x-x_0)},$$

$$d_2(x) = \frac{x_0(2x_0 - 3)(1 - 2x)^2}{8x(1-x)(3-2x)(x-x_0)^2}, \quad x_0 = \frac{A_1}{2(A_1 - A_3)} = -\frac{2m\lambda^2}{A_1}.$$

При помощи замены вида (1.1.2) уравнение (5.5.2) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = S_3(x)y, \quad (5.5.3)$$

$$S_3(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{(x-\frac{3}{2})^2} +$$

$$+ \frac{\beta_4}{x-x_0} + \frac{\alpha_4}{(x-x_0)^2}, \quad (5.5.4)$$

$$\alpha_1 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_4 = -\frac{4x_0^2 - 10x_0 + 7}{8(x_0 - 1)},$$

$$\beta_0 = -\frac{2x_0 - 3}{24x_0}, \quad \beta_1 = \frac{2x_0^2 - 9x_0 + 6}{8(x_0 - 1)^2}, \quad \beta_2 = \frac{3}{2x_0 - 1}, \quad \beta_3 = -\frac{4x_0 - 9}{3(2x_0 - 3)},$$

$$\beta_4 = \frac{16x_0^5 - 112x_0^4 + 260x_0^3 - 256x_0^2 + 94x_0 - 3}{8x_0(2x_0 - 1)(2x_0 - 3)(x_0 - 1)^2}, \quad x_0 = \frac{A_1}{2(A_1 - A_3)}.$$

Разложение функции $S_3(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$S_3(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Особенностью рассматриваемого частного случая является зависимость от параметров задачи коэффициента α_4 разложения функции $S_3(x)$ в сумму простейших дробей. Коэффициент α_4 не имеет заданного числового значения, а определяется выражением

$$\alpha_4 = -\frac{4x_0^2 - 10x_0 + 7}{8(x_0 - 1)}.$$

Это приводит к тому, что постоянная d , вычисляемая в соответствии с алгоритмом Ковачича для поиска решения вида (1.2.1), (1.2.6) или (1.2.10) дифференциального уравнения (5.5.3), может быть сколь угодно большой. Поэтому ограничимся здесь только рассмотрением случая $d = 0$. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (5.5.3) приводит к следующему результату:

Теорема 5.5.5.1. При выполнении условий (5.1.9) в предположении, что постоянная d (степень многочлена P , вычисляемого при поиске решений вида (1.2.1), (1.2.6) и (1.2.10) уравнения (5.5.3)) равна нулю, уравнение (5.5.3) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции. \square

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (5.5.3) решение вида (1.2.1), то есть решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 1.2.1.1. Заметим, что функция $S_3(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка, а также один полюс первого порядка. В точке $x = \infty$ функция $S_3(x)$ имеет второй порядок. Следовательно, указанные в Теореме 1.2.2.1 необходимые условия существования решения вида (1.2.1) для уравнения (5.5.3) являются выполненными. Будем теперь по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (1.2.1) уравнения (5.5.3) так, как он описан в пункте 1.3.1 нашей работы.

Шаг 1. Введём обозначение

$$b_0 = 1 + 4\alpha_4.$$

Вычислим теперь следующие величины:

$$[\sqrt{S_3}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S_3}]_{\frac{1}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{S_3}]_{\frac{3}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{S_3}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1,$$

$$[\sqrt{S_3}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b_0}, \quad \alpha_{x_0}^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b_0},$$

$$[\sqrt{S_3}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $S_3(x)$ равно 5, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^6 = 64$ набора знаков

$$s = \left(s(\infty), s(1), s\left(\frac{1}{2}\right), s\left(\frac{3}{2}\right), s(0), s(x_0) \right).$$

Выберем знаки в наборах s таким образом, чтобы величина

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{\frac{1}{2}}^{s(\frac{1}{2})} - \alpha_{\frac{3}{2}}^{s(\frac{3}{2})} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_{x_0}^{s(x_0)},$$

подсчитываемая по формуле (1.3.2), была равной нулю при некотором значении b_0 . Заметим, что поскольку $\alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1$, то набор, в котором в качестве

$s(0)$ выбран знак $+$, и набор, в котором в качестве $s(0)$ выбран знак $-$, будут одинаковыми при условии, что все остальные знаки в этих наборах совпадают друг с другом. Ниже представлены наборы s и соответствующие значения постоянной b_0 , для которых $d = 0$; при этом во всех перечисленных наборах в качестве $s(0)$ выбран знак $+$:

$$s_1 = (+, -, -, -, +, +), \quad b_0 = 0; \quad s_{10} = (+, +, +, -, +, -), \quad b_0 = 25;$$

$$s_2 = (+, -, -, -, +, -), \quad b_0 = 0; \quad s_{11} = (+, +, -, +, +, -), \quad b_0 = 25;$$

$$s_3 = (-, -, -, -, +, -), \quad b_0 = 1; \quad s_{12} = (-, +, +, -, +, -), \quad b_0 = 36;$$

$$s_4 = (+, +, -, -, +, -), \quad b_0 = 1; \quad s_{13} = (-, +, -, +, +, -), \quad b_0 = 36;$$

$$s_5 = (-, +, -, -, +, -), \quad b_0 = 4; \quad s_{14} = (+, -, +, +, +, -), \quad b_0 = 64;$$

$$s_6 = (+, -, +, -, +, -), \quad b_0 = 16; \quad s_{15} = (-, -, +, +, +, -), \quad b_0 = 81;$$

$$s_7 = (+, -, -, +, +, -), \quad b_0 = 16; \quad s_{16} = (+, +, +, +, +, -), \quad b_0 = 81;$$

$$s_8 = (-, -, -, +, +, -), \quad b_0 = 25; \quad s_{17} = (-, +, +, +, +, -), \quad b_0 = 100.$$

$$s_9 = (-, -, +, -, +, -), \quad b_0 = 25;$$

Аналогично, можно выписать ещё 17 наборов, в которых в качестве $s(0)$ выбран знак $-$. Рассмотрим теперь более подробно случай, когда выбран набор s_1 . Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично.

По формуле (1.3.3) составим функцию θ , используя значения α_c^\pm , соответствующие знакам, выбранным в наборе s_1 . Тогда функция θ будет иметь вид

$$\theta = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-x_0)}.$$

Шаг 3. Многочлен степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.4), которое после подстановки в него многочлена нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, принимает следующий вид:

$$\frac{x_0(2x_0-1)(2x-3)^2}{8x(x-1)(2x-1)(x-x_0)^2}.$$

Поскольку $x_0 \neq 0$ и $2x_0 - 1 \neq 0$, то последнее равенство не может удовлетворяться тождественно. Следовательно, для набора знаков s_1 алгоритм не

приводит к желаемому результату – нахождению решения вида (1.2.1) уравнения (5.5.3). Аналогично рассматриваются все другие наборы знаков, и ни для одного из этих наборов не удаётся найти решение вида (1.2.1) уравнения (5.5.3).

Теперь попытаемся найти у уравнения (5.5.3) решение вида (1.2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 1.2.1.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.5.3) являются выполненными (см. Теорему 1.2.2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 1.3.3 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{\frac{1}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_{\frac{3}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{4\},$$

$$E_{x_0} = \left\{ \left(2 + k\sqrt{b_0} \right) \cap \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 2 \right\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0, e_{x_0} \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0, E_{x_0}$, причём в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечётным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (1.3.11):

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - e_1 - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0 - e_{x_0} \right).$$

Снова предположим, что $d = 0$. Выполнение данного шага алгоритма требует перебора значительного числа вариантов, поэтому проведем подробное исследование лишь для одного из них. Для других наборов исследование проводится аналогично. Пусть

$$s_1 = \left(e_\infty, e_1, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0, e_{x_0} \right) = (3, 1, -2, -2, 4, 2).$$

Шаг 3. По формуле (1.3.12) составим функцию θ , используя элементы выбранного набора s_1 . Тогда функция θ будет иметь вид

$$\theta = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{2x-3} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x-x_0}.$$

Многочлен степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (1.3.13), которое после подстановки в него многочлена $P \equiv 1$ можно записать следующим образом:

$$-\frac{3x_0(2x_0-1)(2x-3)^2}{4x^2(x-x_0)^2(2x-1)^2(x-1)} = 0.$$

Отсюда $x_0 = 0$ или $2x_0 - 1 = 0$. Как уже было отмечено, ни одно из этих равенств не может быть справедливым.

Таким образом, доказано, что для данного набора s_1 элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0, E_{x_0}$ дифференциальное уравнение (5.5.3) не имеет ливиллевых решений вида (1.2.6). Отметим, что аналогичное исследование было проведено и для всех других наборов s , при которых $d = 0$. Ни для одного из упомянутых наборов s не удаётся найти решения вида (1.2.6) дифференциального уравнения (5.5.3).

Наконец, попытаемся найти у уравнения (5.5.3) решение вида (1.2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 1.2.1.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования такого решения у уравнения (5.5.3) (см. Теорему 1.2.2.1). Функция $S_3(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $S_3(x)$ в ∞ выше 1. Разложение функции $S_3(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (5.5.4). Следующие условия являются выполненными:

$$\sqrt{1 + 4\alpha_1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1 + 4\alpha_i} = 2 \in \mathbb{Q} \quad (i = 2; 3),$$

$$\sum_{i=0}^4 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1 + 4\gamma} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = -\frac{3}{16}.$$

Также будем считать выполненным условие

$$\sqrt{1 + 4\alpha_4} = \frac{3 - 2x_0}{\sqrt{2(1 - x_0)}} \in \mathbb{Q},$$

так как в противном случае рассматриваемое дифференциальное уравнение (5.5.3) заведомо не имеет решений вида (1.2.10). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 1.3.5 нашей работы.

Шаг 1. Определим следующие множества:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & E_0 &= \{12\}, \\ E_{\frac{1}{2}} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \\ E_{\frac{3}{2}} &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \\ E_{x_0} &= \left\{ \left(6 + k\sqrt{b_0} \right) \cap \mathbb{Z} \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm 6) \right\}, \\ E_\infty &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0, e_{x_0} \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0, E_{x_0}$ и найдём число d по формуле (1.3.24):

$$d = e_\infty - e_1 - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0 - e_{x_0}.$$

Шаг 3. Среди всех наборов s выделим те наборы, для которых $d = 0$. Исходя из количества элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0, E_{x_0}$, введённых на первом шаге, несложно подсчитать, что даже если зафиксировать один из элементов множества E_{x_0} , то придётся рассмотреть $7 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 13 = 8281$ наборов чисел s , для которых $d = 0$. Поэтому не будем рассматривать каждый случай в отдельности, а проиллюстрируем алгоритм на типичном примере. Выберем следующий набор чисел s_1 , при котором $d = 0$:

$$s_1 = \left(e_\infty, e_1, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0, e_{x_0} \right) = (9, 3, 0, 0, 12, -6).$$

По формуле (1.3.25) составим функцию θ , используя набор чисел s_1 , найденный на предыдущем шаге. Функция θ примет вид

$$\theta = \frac{3}{x-1} + \frac{12}{x} - \frac{6}{x-x_0}.$$

Следуя формуле (1.3.26), Составим многочлен

$$S = x(x-1) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) (x-x_0).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных соотношений (1.3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2S_3(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых принято $P_{12} = -P = -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие тождества $P_{-1} = 0$). Эти коэффициенты содержат одну неизвестную – x_0 . Соответствующая система уравнений для определения x_0 является несовместной. Аналогично проверяются и другие

наборы значений s . Можно сделать вывод, что уравнение (5.5.3) не имеет решения вида (1.2.10) в случае, когда $d = 0$. Теорема доказана. \square

Аналогичное исследование было проведено для случаев, когда постоянная d принимает значения 1, 2, 3 и 4. Во всех этих случаях было доказано отсутствие лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (5.5.3).

Таким образом, в задаче о качении веретенообразного тела по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости удалось найти лишь один случай, когда уравнения движения интегрируются в лиувиллевых функциях. Это случай, когда параметры задачи удовлетворяют условию Х. М. Муштари (5.1.1). По-видимому, это единственный случай, когда уравнение (5.1.5) имеет лиувиллевы решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные результаты диссертации.

1. С помощью алгоритма Ковачича проведено исследование линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о движении динамически симметричного тяжёлого твёрдого тела по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Для ряда наиболее характерных форм поверхности движущегося тела: круглого диска, круглого диска со смещённым центром масс, тора, параболоида и тела веретенообразной формы изучен вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего уравнения второго порядка, получающегося для каждого из рассматриваемых тел.
2. Применение алгоритма Ковачича в задачах о движении круглого диска и круглого диска со смещённым центром масс позволило доказать отсутствие лиувиллевых решений у уравнения второго порядка, получающегося для каждого из указанных тел при всех физически допустимых значениях параметров задачи. Тем самым, в частности, доказано, что гипергеометрические функции, представляющие решения в случаях круглого диска и круглого диска со смещённым центром масс [30, 34, 40, 56], не допускают упрощения до лиувиллевых функций ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи.
3. В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора с помощью алгоритма Ковачича доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка для почти всех физически допустимых значений параметров задачи.
4. В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения с помощью алгоритма Ковачича доказано, что при всех физически допустимых значениях параметров задачи все решения соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка являются лиувиллевыми. Получен явный вид этих решений. На основе найденных решений путем анализа квадратур проведено качественное исследование движения параболоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости. В частном случае качения по шероховатой плоскости однородного параболического сегмента представлены наиболее характерные траектории точки касания поверхности параболического сегмента с опорной плоскостью для

различных начальных условий. Описаны стационарные движения параболоида на абсолютно шероховатой плоскости (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что они являются устойчивыми. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

5. В задаче о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела с помощью алгоритма Ковачича доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка для почти всех физически допустимых значений параметров задачи, за исключением случая, когда параметры задачи удовлетворяют условию Х.М. Муштари [25].

Список литературы

- [1] *Бардин Б.С.* Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твёрдого тела в случае Бобылёва – Стеклова // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5. №. 4. С. 535–550.
- [2] *Бернулли И.* Избранные сочинения по механике. М.-Л.: Объединенное научно-техническое издательство. Главная редакция технико-теоретической литературы. 1937.
- [3] *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука. 1971.
- [4] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971.
- [5] *Даламбер Ж.* Динамика. М.-Л.: Гостехиздат. 1950.
- [6] *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа. 1970.
- [7] *Зобова А.А.* О сопряжении решений двух интегрируемых задач: качение тела с остриём по плоскости // *Автоматика и телемеханика*. 2007. Вып. 8. С. 156–162.
- [8] *Ивочкин М.Ю.* Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости // *Математический сборник*. 2008. Т. 199. Вып. 6. С. 85–104.
- [9] *Ивочкин М.Ю.* Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжёлого эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 75. Вып. 5. С. 858–863.
- [10] *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. М.: Изд-во иностр. лит. 1959.
- [11] *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998.
- [12] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы. 1958.
- [13] *Кулешов А.С.* Первые интегралы в задаче о качении тела вращения по шероховатой плоскости // *Доклады РАН*. 2003. Т. 391. № 3. С. 340–342.

- [14] *Кулешов А.С.* О первых интегралах уравнений движения тяжёлого тела вращения на шероховатой плоскости // *Механика твёрдого тела. Межведомственный сборник научных трудов.* Донецк: Украина. 2004. № 34. С. 72–80.
- [15] *Кулешов А.С.* Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // *Доклады РАН.* 2005. Т. 400. № 1. С. 46–48.
- [16] *Кулешов А.С.* О первых интегралах уравнений движения симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // *Прикладная математика и механика.* 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 40–45.
- [17] *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. I. М.-Л.: Гостехиздат. 1950.
- [18] *Лобас Л.Г.* Рівняння руху тора та малих коливань мотоцикла коло стаціонарного руху по площині // *Прикладна механіка.* 1962. Т. 8. Вып. 2.
- [19] *Лобас Л.Г.* Зведення до квадратур рівнянь руху тора по площині // *Прикладна механіка.* 1963. Т. 9. Вып. 4. С. 409–415.
- [20] *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука. 1992.
- [21] *Миндлин И.М., Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // *Прикладная математика и механика.* 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742–745.
- [22] *Мордухай – Болтовской Д. Д.* Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений. Варшава: Типография Варшавского учебного округа. 1910.
- [23] *Моцук Н.К.* О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона // *Прикладная математика и механика.* 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 223–229.
- [24] *Моцук Н.К.* Качественный анализ движения тяжёлого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости // *Прикладная математика и механика.* 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 203–210.
- [25] *Муштари Х.М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // *Математический сборник.* 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.

- [26] *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967.
- [27] *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М.: Наука. 1989.
- [28] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970.
- [29] *Хованский А.Г.* Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: Изд-во МЦНМО. 2008.
- [30] *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.
- [31] *Acosta – Humanez P., Blazquez – Sanz D.* Non – Integrability of some hamiltonian systems with rational potential // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2008. Vol. 10. No. 2–3. P. 265–293.
- [32] *Acosta – Humanez P.B., Alvarez – Ramirez M., Blazquez – Sanz D., Delgado J.* Non – Integrability criterium for normal variational equations around an integrable subsystem and an example: the Wilberforce Spring – Pendulum // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2013. Vol. 33. No. 3. P. 965–986.
- [33] *Acosta – Humanez P.B., Alvarez – Ramirez M., Delgado J.* Non – Integrability of Some Few Body Problems in Two Degrees of Freedom // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 2009. Vol. 8. Issue 2. P. 209–239.
- [34] *Appell P.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par une arête circulaire sur un plane horizontal; cas particulier du cerceau // Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1900. V. 14. P. 1–6.
- [35] *Baldassarri F., Dwork B.* On second order linear differential equations with algebraic solutions // American Journal of Mathematics. 1979. Vol. 101. P. 42–76.
- [36] *Baldassarri F.* On second order linear differential equations with algebraic solutions on algebraic curves // American Journal of Mathematics. 1980. Vol. 102. P. 517–535.

- [37] *Bardin B.S., Maciejewski A. J., Przybylska M.* Integrability of generalized Jacobi Problem // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10. P. 437–461.
- [38] *Bass H., Buium A., Cassidy P.J. (eds)* The selected works of Ellis Kolchin with commentary. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. 1999.
- [39] *Batista M.* Steady motion of a rigid disk of finite thickness on a horizontal plane // International Journal of Non - Linear Mechanics. 2006. Vol. 41. Issue 4. P. 605–621.
- [40] *Batista M.* Integrability of the Motion of a Rolling Disk of Finite Thickness on a Plane // International Journal of Non - Linear Mechanics. 2006. Vol. 41. Issues 6-7. P. 850–859.
- [41] *Batista M.* The Nearly Horizontally Rolling of a Thick Disk on a Rough Plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2008. Vol. 13. No. 4. P. 344–354.
- [42] *Combot T.* Non – integrability of the equal mass n – body problem with non – zero angular momentum // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2012. Vol. 114. P. 319–340.
- [43] *Combot T.* Non – integrability of a self – gravitating Riemann liquid ellipsoid // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18. P. 497–507.
- [44] *Duval A.* The Kovacic Algorithm with applications to special functions // Differential Equations and Computer Algebra. M. Singer (ed). London: Academic Press. 1991. P. 113–130.
- [45] *Duval A., Loday – Richaud M.* Kovacic’s algorithm and its application to some families of special functions // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 1992. Vol. 3. P. 211–246.
- [46] *Duval G., Maciejewski A. J.* Jordan obstruction to the integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potentials // Annales de l’Institut Fourier. 2009. T. 59. No. 7. P. 2839–2890.
- [47] *Euler J.A.* Recherches plus exactes sur l’effet des moulins á vent // Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin. 1758. Bd 12. S. 165–234.
- [48] *Euler L.* De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexilium methodus nova et facilis // Commentarii Academiae scientiarum imperiales Petropolitanae. 1734–1735 (1740). T. 7. P. 99–122.

- [49] *Fuchs L.* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1876. Bd. 81. Heft 2. S. 97–142.
- [50] *Fuchs L.* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen. Zweite Abhandlung // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1878. Bd. 85. Heft 1. S. 1–25.
- [51] *Gallop E. G.* On the Rise of a Spinning Top // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 19. Part 3. P. 356–373.
- [52] *Jordan C.* Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1877. Bd. 84. Heft 2-3. S. 89–215.
- [53] *Kolchin E.R.* Algebraic matrix groups and the Picard – Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations // Annals of Mathematics. 1948. Vol. 49. No. 1. P. 1–42.
- [54] *Kolchin E.R.* Galois theory of differential fields // American Journal of Mathematics. 1953. Vol. 75. P. 753–824.
- [55] *Kolchin E.R.* Differential Algebra and Algebraic Groups. New York – London: Academic Press. 1973. 446 p.
- [56] *Korteweg D.J.* Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problemes der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung, und ins besondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage // Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede Reeks. 1899. Deel. IV. S. 130–155.
- [57] *Korteweg D.* Extrait d’une lettre à M. Appell // Rendiconti del circolo mathematico di Palermo. 1900. Vol. 14. P. 7–8.
- [58] *Kovacic J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. V. 2. P. 3–43.
- [59] *Leine R.I.* Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion // Archive of Applied Mechanics. 2009. Vol. 79. P. 1063–1082.

- [60] *Lindelöf E.* Sur le mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal // Acta Societatis Scientiarum Fennicae. 1895. T. XX. № 10. P. 1–18.
- [61] *Liouville J.* Premier Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique // Journal de l'École Royale Polytechnique. 1833. T. XIV. Cahier 22. P. 124–148.
- [62] *Liouville J.* Second Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique // Journal de l'École Royale Polytechnique. 1833. T. XIV. Cahier 22. P. 149–193.
- [63] *Liouville J.* Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1833. Bd. 10. Heft 4. S. 347-359.
- [64] *Liouville J.* Mémoire sur les Transcendantes Elliptiques de première et de seconde espèce considérées comme fonctions de leur amplitude // Journal de l'École Royale Polytechnique. 1834. T. XIV. Cahier 23. P. 37–85.
- [65] *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1835. Bd. 13. Heft 2. S. 93-118.
- [66] *Liouville J.* Mémoire sur la classification des transcendentes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients // Journal de Mathématique pures et appliquées. 1837. T. 2. P. 56–105. 1838. T. 3. P. 523–547.
- [67] *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe d'Équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites // Journal de Mathématique pures et appliquées. 1839. T. 4. P. 423–456.
- [68] *Liouville J.* Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // Journal de Mathématique pures et appliquées. 1841. T. 6. P. 1–13.
- [69] *Lützen J.* Joseph Liouville, 1809–1882, Master of Pure and Applied Mathematics. New York. Springer-Verlag. 1990.
- [70] *Ma D., Liu C., Zhao Z., Zhang H.* Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc // Proceedings of the Royal Society A. 2014. Vol. 470.
- [71] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Non – integrability of the problem of a rigid satellite in gravitational and magnetic fields // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2003. Vol. 87. P. 317–351.

- [72] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Differential Galois approach to the non – integrability of the heavy top problem // *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.* 2005. Vol. 14. No. 1. P. 123–160.
- [73] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Non – integrability of the Generalized Two Fixed Centres Problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2004. Vol. 89. Issue 2. P. 145–164.
- [74] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Non – Integrability of the Suslov Problem // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2002. Vol. 7. No. 1. P. 73–80.
- [75] *Morales – Ruiz J. J., Simó C.* Picard – Vessiot Theory and Ziglin’s Theorem // *Journal of Differential Equations.* 1994. Vol. 107. P. 140–162.
- [76] *Morales – Ruiz J. J., Simó C.* Non – integrability criteria for hamiltonians in the case of Lamé normal variational equations // *Journal of Differential Equations.* 1996. Vol. 129. P. 111–135.
- [77] *Morales – Ruiz J. J.* Differential Galois Theory and Non – Integrability of Hamiltonian Systems. *Progress in Mathematics.* Vol. 179. Basel: Birkhäuser. 1999.
- [78] *Morales – Ruiz J. J., Ramis J. P.* Galoisian obstructions to integrability of hamiltonian systems I // *Methods and Applications of Analysis.* 2001. Vol. 8. P. 33–95.
- [79] *Morales – Ruiz J. J., Ramis J. P.* Galoisian obstructions to integrability of hamiltonian systems II // *Methods and Applications of Analysis.* 2001. Vol. 8. P. 97–112.
- [80] *Morales – Ruiz J. J., Ramis J. P.* Integrability of Dynamical Systems through Differential Galois theory: a practical guide // *Contemporary Mathematics.* 2010. Vol. 509. P. 143–220.
- [81] *Morales – Ruiz J. J.* Picard – Vessiot Theory and Integrability // *Journal of Geometry and Physics.* 2015. Vol. 87. P. 314–343.
- [82] *Pepin P. Th.* Sur les équations linéaires du second ordre // *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences.* 1876. T. 82. P. 1323–1326.
- [83] *Pepin P. Th.* Méthode pour obtenir les intégrales algebriques des équations différentielles linéaires du seconde ordre // *Atti dell’Accademia Pontificia de’Nuovi Lincei.* V. 34. P. 243–388.

- [84] *Picard E.* Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1887. T. 1. P. A1–A15.
- [85] *Picard E.* Traité d'Analyse. Paris: Gauthier – Villars. 1895.
- [86] *Ritt J.F.* Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods. New York. Columbia University Press. 1948.
- [87] *Singer M.F.* Liouvillian solutions of n th order homogeneous linear differential equations // American Journal of Mathematics. 1981. Vol. 103. P. 661–682.
- [88] *Singer M.F.* Solving Homogeneous Linear Differential Equations in Terms of Second Order Linear Differential Equations // American Journal of Mathematics. 1985. Vol. 107. P. 663–696.
- [89] *Stachowiak T., Szuminski W.* Non – integrability of restricted double pendula // Physics Letters A. 2015. Vol. 379. Issues 47–48. P. 3017–3024.
- [90] *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Linear Differential Equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 328. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag. 2003.
- [91] *Vessiot E.* Sur l'intégration des équations différentielles linéaires // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1892. Serie 3. T. 9. P. 197–280.
- [92] *Кулешов А.С., Добрынин Д.С., Черняков Г.А.* Исследование задачи о движении тяжёлого тела вращения по шероховатой плоскости методом Ковачича // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казанского университета. 2015. С. 2160–2161.
- [93] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2013. Вып. 4. С. 93–102.
- [94] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2014. Вып. 4. С. 624–631.

- [95] *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the XLI Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM – 2013)". Saint – Petersburg (Repino), July 1–6, 2013. SPb: Polytechnical University Publishing House. 2013. P. 310–320.
- [96] *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Motion of a dynamically symmetric paraboloid on a perfectly rough plane // Proceedings of the XLII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM – 2014)". Saint – Petersburg (Repino), June 30 – July 5, 2014. SPb: Polytechnical University Publishing House. 2014. P. 177–183.
- [97] *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Investigation of the Problem of Motion of a Heavy Dynamically Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic Algorithm // ENOC 2014 – Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference. Vienna: Institute of Mechanics and Mechatronics, Vienna University of Technology. 2014. P. 453–458.