Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.216.22

Калиниченко Артем Александрович

МЕРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДИФФУЗИЯМИ НА ГРУППАХ ТОКОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Смолянов Олег Георгиевич,**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Печень Александр Николаевич,**
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
отдела математической физики
Математического института им. В.А. Стеклова РАН,

Сакбаев Всеволод Жанович,
доктор физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
Московского физико-технического института.

Ведущая организация: **Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН**

Защита диссертации состоится 21 октября 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А) и на сайте механико-математического факультета: `http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi`.

Автореферат разослан ______________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор ВЛАСОВ Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Одно из главных направлений бесконечномерного анализа основывается на концепции дифференцируемых мер, активное изучение которых было впервые предпринято С. В. Фоминым[1], дальнейшее развитие этих идей представлено, в частности, в работах[2,3,4]. В случае гауссовских мер наибольшее распространение такой анализ получил в форме исчисления Маллявэна, изначально разработанного для доказательства условий Хёрмандера[5], а впоследствии нашедшего широкое применение в других областях математики[6,7]. Исчисление Маллявэна, по сути, представляет собой анализ на сепарабельном банаховом пространстве с определенной на нем гауссовской мерой, называемом абстрактным винеровским пространством. Анализ на нем существенно опирается на свойства этой меры, центральную роль здесь играет гильбертово пространство Камерона-Мартина всех векторов, сдвиги вдоль которых оставляют гауссовскую меру квази-инвариантной.

Долгое время считалось, что естественным касательным пространством к абстрактному винеровскому пространству является множество Камерона-Мартина, вдоль которого и определяется операция дифференцирования. Новый свет на этот вопрос пролил переход от плоского случая к многообразиям. А именно, рассмотрим множество $C([0,1],M)$ непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ на компактное риманово многообразие M размерности d. Распределение броуновского движения на M можно представить как образ стандартной меры Винера на $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ под действием измеримого отображения, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением[8,9]. Таким образом строится измеримый изоморфизм между абстрактным винеровским пространством $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ и множеством путей $C([0,1],M)$.

Аналог теоремы Камерона-Мартина для этого случая был впервые доказан в работе Б. К. Драйвера[10], где показывается, что векторные поля, получающиеся стохастическим параллельным переносом векторов Камерона-Мартина, порождают потоки, оставляющие распределение броуновского движения квази-инвариантным. Впоследствии оказалось, что множество таких векторных полей не замкнуто относительно взятия коммутатора. Кроме того, образы соответствующих

---

[1] *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Успехи математических наук. 1968. Т. 23:1, № 139. С. 221—222.

[2] *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск, 2008.

[3] *Далецкий Ю. Л.*, *Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

[4] *Авербух В. И.*, *Смолянов О. Г.*, *Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Труды Московского математического общества. 1971. Т. 24. С. 133—174.

[5] *Malliavin P.* Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators // Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto. Kinokuniya. 1978. Pp. 195–263.

[6] *Bell D. R.* The Malliavin Calculus. Dover, 2012.

[7] *Nualart D.* The Malliavin calculus and related topics. Vol. 1995. Springer, 2006.

[8] *Hsu E. P.* Stochastic analysis on manifolds. Vol. 38. American Mathematical Soc., 2002.

[9] *Malliavin P.* Stochastic analysis. Vol. 313. Springer, 1997.

[10] *Driver B. K.* A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold // Journal of Functional Analysis. 1992. Vol. 110, no. 2. Pp. 272–376.

потоков при переносе обратно на $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ не являются сдвигами, а представляются комбинацией предсказуемых поворотов и преобразований Гирсанова. Эти наблюдения привели к введению более широкого класса векторных полей, называемых *касательными процессами* (или "*согласованными векторными полями*"), которое привело к развитию дифференциальной геометрии на пространстве путей, существенно опирающейся на понятия теории вероятностей[11,12,13].

В случае, когда $M = G$ есть группа Ли, множество $C([0,1],G)$ также является группой и на нем присутствует естественный аналог сдвигов - умножение на фиксированный элемент. Полный ответ на вопрос о квази-инвариантности распределения броуновского движения относительно таких сдвигов был дан И. Шигекавой[14]. В частности, если на G введена би-инвариантная метрика, множество абсолютно-непрерывных путей с квадратично-интегрируемой производной является естественным аналогом пространства Камерона-Мартина в том смысле, что оно представляет собой в точности множество всех траекторий, умножение на которые оставляет меру квази-инвариантной. Такие сдвиги являются касательными процессами, но отличными от стохастических параллельных переносов векторов Камерона-Мартина. Аналогичные результаты были получены и для групп петель[15,16,17].

Изучение мер на некоторых более общих абстрактных винеровских многообразиях приводит к необходимости рассматривать диффузии со значениями в бесконечномерных группах. В частности, в настоящей работе нас интересуют группы $C(M,G)$ непрерывных отображений из риманова многообразия M в группу Ли G, называемые также *группами токов*. Наиболее распространенным примером здесь является группа петель $C(S^1,G)$, процессы со значениями в которой строились различными способами многими авторами[18,19,20,21]. Как правило, это были аналоги

[11] *Cruzeiro A.-B., Malliavin P.* Renormalized differential geometry on path space: structural equation, curvature // Journal of Functional Analysis. 1996. Vol. 139, no. 1. Pp. 119–181.

[12] *Cruzeiro A.-B., Malliavin P.* Frame bundle of Riemannian path space and Ricci tensor in adapted differential geometry // Journal of Functional Analysis. 2000. Vol. 177, no. 1. Pp. 219–253.

[13] *Li X.-M.* The stochastic differential equation approach to analysis on path space // New Trends in Stochastic Analysis and Related Topics: A Volume in Honour of Professor K. D. Elworthy. 2011. Vol. 12.

[14] *Shigekawa I.* Transformations of the Brownian motion on the Lie group // North-Holland Mathematical Library. 1984. Vol. 32. Pp. 409–422.

[15] *Driver B. K.* Integration by parts and quasi-invariance for heat kernel measures on loop groups // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 149, no. 2. Pp. 470–547.

[16] *Sadasue G.* Equivalence-singularity dichotomy for the Wiener measures on path groups and loop groups // Journal of Mathematics of Kyoto University. 1995. Vol. 35, no. 4. Pp. 653–662.

[17] *Malliavin M.-P., Malliavin P.* Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures // Journal of Functional Analysis. 1990. Vol. 93, no. 1. Pp. 207–237.

[18] *Inahama Y.* Convergence of finite dimensional distributions of heat kernel measures on loop groups // Journal of Functional Analysis. 2003. Vol. 198, no. 2. Pp. 311–340.

[19] *Norris J. R.* Twisted sheets // Journal of Functional Analysis. 1995. Vol. 132, no. 2. Pp. 273–334.

[20] *Epperson J. B., Lohrenz T.* Diffusions on finite-energy loop spaces // Soochow J. Math. 1994. Vol. 20, no. 1. Pp. 113–136.

[21] *Driver B. K., Röckner M.* Construction of diffusions on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds // Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1992. Vol. 315, no. 5. Pp. 603–608.

броуновского движения или процесса Орнштейна-Уленбека, также в работах[22,23] с помощью, соответственно, теории грубых путей и стохастического анализа на пространствах второго мартингального типа были построены диффузионные процессы, являющиеся решениями стохастических дифференциальных уравнений, коэффициенты которых задаются операторами Немыцкого. Тем не менее, диффузии общего типа до сих пор нигде не рассматривались. В главе 1 этот пробел заполняется и строятся диффузионные меры, порожденные операторами второго порядка с переменными коэффициентами, на пространстве путей произвольной группы токов.

С аналогом теоремы Камерона-Мартина в этой ситуации дело обстоит сложнее. Как было показано Г. Садасуе[24], даже в простейшем случае $M = [0,1]$ распределение броуновского движения со значениями в $C([0,1],G)$, рассматриваемое как мера на $C([0,1],C([0,1],G))$, не является квази-инвариантным относительно никаких нетривиальных сдвигов. С другой стороны, в некоторых случаях векторные поля, получающиеся параллельным стохастическим переносом, определить можно. В главе 3 введен аналог касательных процессов для пространства путей группы токов и построены порожденные ими потоки, оставляющие распределение броуновского движения квази-инвариантным. Пользуясь тем, что дифференциальное исчисление на абстрактных винеровских пространствах по существу зависит только от гильбертова пространства Камерона-Мартина, касательные процессы рассматриваются сначала с точки зрения изонормальных гауссовских процессов, независимо от выбора конкретного банахова пространства, как операторы дифференцирования, аналогичные производной по направлению в смысле Маллявэна.

До сих пор речь шла о преобразованиях пространства, согласованных с потоком σ-алгебр, порожденным броуновским движением. Но можно рассматривать и несогласованные трансформации, что, однако, требует дополнительных условий регулярности. В плоском случае эти вопросы подробно изложены, к примеру, в книгах[25,26], наиболее значительным результатом здесь является теорема Р. Рамера[27], утверждающая квази-инвариантность гауссовских мер относительно широкого класса нелинейных преобразований. Полученная им формула для производной Радона-Никодима допускает обобщение и на негауссовские меры, обладающие логарифмическими производными вдоль некоторого гильбертова подпространства[28,29]. В главе 4 аналогичный результат доказывается в случае

[22] *Inahama Y., Kawabi H.* Large deviations for heat kernel measures on loop spaces via rough paths // Journal of the London Mathematical Society. 2006. Vol. 73, no. 3. Pp. 797–816.

[23] *Brzeźniak Z., Carroll A.* Approximations of the Wong–Zakai type for stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces with applications to loop spaces // Séminaire de Probabilités XXXVII. Springer, 2003. Pp. 251–289.

[24] *Sadasue G.* A non quasi-invariance of the Brownian motion on loop groups // Osaka Journal of Mathematics. 2004. Vol. 41, no. 4. Pp. 949–960.

[25] *Üstünel A. S., Zakai M.* Transformation of measure on Wiener space. Springer, 2000.

[26] *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.

[27] *Ramer R.* On nonlinear transformations of Gaussian measures // Journal of Functional Analysis. 1974. Vol. 15, no. 2. Pp. 166–187.

[28] *Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v.* Change of measures and their logarithmic derivatives under smooth transformations // Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1995. Vol. 321, no. 1. Pp. 103–108.

[29] *Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v.* Differentiable Families of Measures // Journal of Functional Analysis. 1998. Vol. 118, no. 2. Pp. 454–476.

наличия антикоммутирующих координат и строятся потоки на суперпространствах, оставляющие рассматриваемую супермеру квази-инвариантной.

Как правило, броуновское движение на группе токов определяется как решение бесконечномерного стохастического уравнения, но существует и другой подход, использующий конечномерные приближения, построенные с помощью теоремы Чернова[30 31], являющейся обобщением известной формулы Троттера. В литературе приближения такого типа носят название "фейнмановских", так как представляются в виде предела кратных интегралов по конечномерным пространствам, аналогично тому, как был впервые определен знаменитый интеграл Фейнмана. Одним из преимуществ такого подхода является возможность рассматривать процессы с разрывными траекториями, для которых не работает процедура переноса с алгебры Ли, используемая для построения непрерывных диффузионных процессов. В главе 2 мы строим процессы Леви на пространстве Скорохода право-непрерывных путей со значениями в группе Ли G, имеющих левые пределы в каждой точке. Мы также рассматриваем частный случай броуновского листа на G и несколько иными методами строим к нему приближения на пространстве непрерывных отображений.

Цель работы. Применить метод конечномерных приближений для построения случайных процессов на группах токов. Построить процессы Леви на пространстве Скорохода право-непрерывных путей со значениями в группе Ли, имеющих левые пределы в каждой точке. Построить фейнмановские приближения к распределению броуновского листа на группе Ли. Получить аналог теоремы Рамера для супермер, дифференцируемых вдоль гильбертова подсуперпространства.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработан альтернативный метод построения диффузий на группе токов, допускающий обобщение на процессы с разрывными траекториями.

2. Построены двухпараметрические процессы Леви на компактной группе Ли, представляющие из себя процессы Леви на пространстве Скорохода.

3. Построены фейнмановские приближения к интегралам по распределению броуновского листа на компактной группе Ли.

4. Доказана квази-инвариантность супермер, обладающих логарифмической производной вдоль некоторого гильбертова подсуперпространства, относительно действия потоков диффеоморфизмов суперпространства и выведена явная формула для производной Радона-Никодима, аналогичная формуле Рамера.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа, дифференциальной геометрии и теории случайных процессов, а также ряд оригинальных конструкций.

---

[30] *Chernoff P. R.* Note on product formulas for operator semigroups // Journal of Functional Analysis. 1968. Vol. 2, no. 2. Pp. 238–242.

[31] *Smolyanov O. G.*, *Tokarev A. G.*, *Truman A.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // Journal of mathematical physics. 2002. Vol. 43, no. 10. Pp. 5161–5171.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории меры, функциональном анализе, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- семинаре «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, 2009–2016 гг., неоднократно.
- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», 2012 г., 2016 г.
- Международной научной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной столетию Б. М. Левитана, Москва, 2014 г.
- Международной научной конференции «Наука будущего», Санкт-Петербург, 2014 г.
- семинаре «Квантовая математическая физика» под руководством В. В. Козлова, И. В. Воловича, С. В. Козырева, А. С. Трушечкина, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2012 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, в том числе в 3 статьях [1–3], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы из 87 наименований. Общий объем диссертации составляет 102 страницы.

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящена построению диффузий на группе $C(M, G)$, называемой "группой токов", непрерывных отображений компактного риманова многообразия M в компактную группу Ли G.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли G, рассмотрим некоторый процесс x_t со значениями в пространстве $C(M, \mathfrak{g})$, на котором задана структура абстрактного винеровского пространства с гильбертовым подпространством Камерона-Мартина H. Нас интересуют диффузии, порожденные оператором вида

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_H \sigma(g)^* f''(g)\sigma(g) + (b(g), f'(g))_H, \tag{1}$$

где производная понимается в следующем смысле: отображение f из $C(M, G)$ в некоторое банахово пространство B является H-*дифференцируемым* в точке g, если для каждого $h \in H$ функция $t \mapsto f(g(\cdot)e^{th(\cdot)})$ дифференцируема по Фреше в точке $t = 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(ge^{th}) = f'(g)h,$$

где $f'(g) \in L(H, B)$. Вторая производная определяется как производная отображения $f' : C(M, G) \to L(H, B)$.

Идея построения заключается в следующем. Для каждой точки $z \in M$ рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в форме Стратоновича

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z)\partial_t x_t(z), \quad g_0(z) = \xi(z), z \in M, \tag{2}$$

на пространстве матриц, в которое, в силу компактности, может быть вложено G. Здесь ξ есть некоторая случайная величина на $C(M, G)$. При разумном выборе $x_t(z)$ с помощью теоремы Колмогорова показывается, что решение (2) обладает непрерывной по совокупности своих аргументов версией. Если при этом x_t может быть выражено через g_t как

$$x_t = \int_0^t \sigma(g_t)dW_t + \int_0^t b(g_t)dt,$$

где W_t есть броуновское движение на $C(M, \mathfrak{g})$, то уравнение (2) определяет искомую диффузию, порожденную оператором (1). Существование стохастического интеграла в этой формуле доказывается в **первом разделе**:

Теорема 1. *Пусть X – это замкнутое подпространство $C(M, \mathfrak{g})$, а H удовлетворяет условию*

$$\sup_{x \in H, |x|_H \leqslant 1} |x(z) - x(z')|_{\mathfrak{g}} \leqslant Cd(z, z')^{\gamma}, \quad \forall z, z' \in M, \tag{3}$$

для некоторого $\gamma > 0$. Выберем непрерывный $L(H)$-значный $\mathcal{F}_t$-предсказуемый процесс σ_t, для которого $E\sup_{s \leqslant T} \|\sigma_s\|_{L(H)} < \infty$ для любого $T > 0$. Тогда существует такой непрерывный X-значный процесс y_t, что для каждого $\phi \in X^*$ выполнено:

$$\langle \phi, y_t \rangle = \int_0^t (\sigma_s^* \phi, dW_s),$$

где интеграл определяется в смысле теории стохастического интегрирования на гильбертовых пространствах[32].

Во **втором разделе** мы доказываем возможность переноса X-значного семимартингала вида $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t b_s ds$, где второй интеграл понимается в смысле Бохнера, на группу токов $C(M, G)$ с помощью уравнения (2).

В **третьем разделе** мы исследуем систему стохастических уравнений

$$\begin{cases} x_t = \int_0^t \sigma(s, g_s)dW_s + \int_0^t b(s, g_s)ds, \\ \partial_t g_t(z) = g_t(z)\partial_t x_t(z), \quad g_0(z) = \xi(z), z \in M. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через Y минимальную замкнутую подгруппу $C(M, G)$, содержащую элементы вида $e^{x(\cdot)}$ для всех $x \in X$. Мы рассматриваем следующие условия на коэффициенты:

[32] *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge university press, 2014.

1. $\sigma : [0,\infty)\times Y \to L(H)$ непрерывно в топологии нормы и равномерно ограничено на любом компактном интервале.

2. $b : [0,\infty) \times Y \to H$ непрерывно в норме X и равномерно ограничено по норме H на каждом компактном интервале.

3. σ, b липшицевы в следующем смысле: для каждого $z \in M$ и $T > 0$, равномерно по $t \in [0,T]$ и $g \in Y$, выполнено:

$$|(\sigma(t,g) - \sigma(t,g'))^*\delta_z| \leqslant C\rho(g(z), g'(z)),$$
$$|(b(t,g) - b(t,g'), \delta_z)| \leqslant C\rho(g(z), g'(z)),$$

где константа C может зависеть от z и T. Здесь δ_z обозначает функционал $x \mapsto x(z)$ как элемент $X^* \subset H$.

Теорема 2. *Если σ, b удовлетворяют условиям 1,2, то уравнение* (4) *допускает слабое решение для любого начального распределения.*

Теорема 3. *Пусть коэффициенты σ, b удовлетворяют условиям 1-3, тогда уравнение* (4) *допускает единственное сильное решение для любого случайного элемента ξ на Y.*

С помощью решений уравнения (4) мы строим диффузию на Y и получаем главный результат первой главы:

Теорема 4. *Пусть σ, b удовлетворяют условиям 1-3. Обозначим через P^a распределение решения* (4) *для $\xi \equiv a$, тогда, если σ и β не зависят от t, семейство $\{P^a\}_{a\in Y}$ представляет собой единственную диффузию, порожденную оператором $\mathcal{L}$, определенным как в* (1).

Во **второй главе** исследуется альтернативный способ построения процессов на бесконечномерных группах Ли, использующий конечномерные приближения, построенные с помощью теоремы Чернова[33], являющейся обобщением известной формулы Троттера. В литературе приближения такого типа носят название "фейнмановских", так как представляются в виде предела кратных интегралов по конечномерным пространствам, аналогично тому, как был впервые определен знаменитый интеграл Фейнмана.

Одним из преимуществ такого подхода является возможность рассматривать процессы с разрывными траекториями, для которых не работает процедура переноса с алгебры Ли, используемая для построения непрерывных диффузионных процессов. В **первом разделе** мы строим процессы Леви на пространстве Скорохода $D([0,\infty), G)$ право-непрерывных путей со значениями в группе Ли G, имеющих левые пределы в каждой точке. Во **втором разделе** мы также рассматриваем частный случай броуновского листа на G и несколько иными методами строим к нему приближения на пространстве непрерывных отображений.

Наша конструкция основана на следующей идее. Пусть задан некоторый сопряженно-инвариантный процесс Леви g_t на G, порожденный оператором L. Рассмотрим семейство вероятностных мер $\{P(t,x,dy), t \geqslant 0, x \in G\}$ на G таких, что операторы $P(t)f(x) = \int_G f(y)P(t,x,dy)$ образуют сильно непрерывное семейство в $L(C(G))$, удовлетворяющее следующим условиям:

[33] *Chernoff P. R.* Note on product formulas for operator semigroups // Journal of Functional Analysis. 1968. Vol. 2, no. 2. Pp. 238–242.

1. Для всех $t > 0$ операторы $P(t)$ коммутируют с операторами левого и правого умножения, определяемыми как $L_h f(g) = f(hg)$ и $R_h f(g) = f(gh)$ для $f \in C(G)$.

2. Для всех f из некоторого ядра $D \subset D(L)$ оператора L существует предел
$$\lim_{t\to 0} \frac{P(t)f - f}{t} = Lf.$$

Рассмотрим разбиение $\mathcal{P} = \{0 = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n < \infty\}$ полуинтервала $[0, \infty)$, определим меру
$$\overline{\nu}^{\mathcal{P}}(dx) = P(t_1 - t_0, e, dx_{t_1}) \ldots P(t_n - t_{n-1}, x_{t_{n-1}}, dx_{t_n})$$
на пространстве $G^{\mathcal{P}} = \{(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}), x_{t_i} \in G\}$. Построив подходящим способом случайный процесс с траекториями в $D([0,\infty), G)$, распределение которого в точках разбиения $\mathcal{P}$ есть $\overline{\nu}^{\mathcal{P}}$, при малой мелкости разбиения мы получим приближение к распределению g_t. Аппроксимации такого типа изучались ранее для процессов на римановом многообразии[34].

Рассмотрим теперь двухпараметрический случай. Выберем некоторые разбиения $\mathcal{P}_1 = \{0 = s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_m < \infty\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0 = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n < \infty\}$, тогда $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ задает разбиение квадрата $[0,\infty) \times [0,\infty)$. По аналогии с предыдущим, естественно попытаться составить марковскую цепь с переходными вероятностями $P((s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}), x, dy)$, $i = 0, \ldots m, j = 0, \ldots n$. Однако, если G некоммутативна, начинает играть роль то, в каком порядке мы выбираем клетки $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$. Оказывается, что результат приближения будет существенно зависеть от выбранного порядка, который в настоящей работе определяется так, чтобы в непрерывном случае в пределе получился процесс, совпадающий с построенным в первой главе.

Рассмотрим переходную вероятность $\overline{\mathcal{L}}(s, x, dy)$ на $G^{\mathcal{P}_2}$, определенную как
$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{L}}(s, x, dy) = \\ &\quad = \int_G \ldots \int_G f(y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}) P(s \cdot (t_1 - t_0), x_{t_1}, dy_{t_1}) P(s \cdot (t_2 - t_1), x_{t_2} x_{t_1}^{-1} y_{t_1}, dy_{t_2}) \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots P(s \cdot (t_n - t_{n-1}), x_{t_n} x_{t_{n-1}}^{-1} y_{t_{n-1}}, dy_{t_n}).\end{aligned}$$
Используя ее как условное распределение столбцов друг относительно друга, определим меру $\overline{\mu}^{\mathcal{P}}$ на $G^{\mathcal{P}} = \{(x_{s_i,t_j})_{i,j}, x_{s_i,t_j} \in G\}$ как:
$$\overline{\mu}^{\mathcal{P}}(dx) = \prod_{i=1}^{m} \overline{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}^2}(s_i - s_{i-1}, (x_{s_{i-1},t_j})_j, d(x_{s_i,t_j})_j),$$
где $(x_{s_i,t_j})_j$ обозначает i-тый столбец как элемент $G^{\mathcal{P}_2}$.

Определим теперь вложение $I^{\mathcal{P}} : G^{\mathcal{P}} \mapsto E = D([0,\infty), D([0,\infty), G))$ как
$$I^{\mathcal{P}}(x)(s,t) = x_{s_i,t_j}, \quad (s,t) \in [s_i, s_{i+1}) \times [t_j, t_{j+1}).$$
Легко видеть, что $I^{\mathcal{P}}$ непрерывно и поэтому можно определить образ $\mu^{\mathcal{P}} = \overline{\mu}^{\mathcal{P}} \circ (I^{\mathcal{P}})^{-1}$ как меру на E. Следующая теорема есть основной результат первого раздела.

---

[34] *Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O.* Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds // Potential Analysis. 2007. Vol. 26, no. 1. Pp. 1–29.

Теорема 5. *Для каждого $s > 0$ пусть $\{g_s(t), t \geqslant 0\}$ – это начинающийся в единице процесс Леви на G, порожденный оператором $(sL, D(L))$. Рассмотрим семейство $R(s)$ операторов на пространстве $B_b(D([0,\infty), G))$ ограниченных борелевских функций с равномерной нормой, определенное как*

$$R(s)f(x) = Ef(x(\cdot)g_s(\cdot)).$$

Тогда семейство $\{R(s), s \geqslant 0\}$ образует марковскую полугруппу, порождающую $D([0,\infty), G)$-значный процесс Леви с распределением μ. Ее сужение на пространство $UC_b(D([0,\infty), G))$ всех ограниченных равномерно непрерывных функций $D([0,\infty), G) \to \mathbb{R}$ сильно право-непрерывно по t. Кроме того, для любой последовательности равномерных разбиений $\mathcal{P}^n$, мелкости которых стремятся к нулю, а крайние точки - к бесконечности, меры $\mu^{\mathcal{P}^n}$ слабо сходятся к μ при $n \to \infty$.

В случае броуновского листа нам нужны непрерывные приближения, поэтому вместо приведенного выше отображения $I^{\mathcal{P}}$ мы рассматриваем произвольную интерполяцию, строящую непрерывную траекторию по точкам разбиения $\mathcal{P}$ квадрата $[0,1]^2$, и с помощью нее получаем меру $\mu^{\mathcal{P}}$ на $C([0,1]^2, G)$.

Теорема 6. *Рассмотрим последовательность разбиений $\mathcal{P}^n$ квадрата $[0,1]^2$, мелкости которых стремятся к нулю. Тогда меры μ^{P^n} на $C([0,1]^2, G)$ слабо сходятся к распределению μ броуновского листа на G.*

В **третьей главе** исследуются свойства квази-инвариантности распределения броуновского движения на группе токов $C(M, G)$, то есть диффузионного процесса, порожденного бесконечномерным Лапласианом $\mathcal{L}f(g) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_H f''(g)$, где H – произвольное гильбертово пространство, являющееся пространством Камерона-Мартина некоторой гауссовской меры на $C(M, \mathfrak{g})$ и удовлетворяющее условию (3).

В **первом разделе** рассматривается абстрактная ситуация и вводится понятие касательного процесса в терминах изонормального гауссовского процесса, а во **втором разделе** мы показываем, что эти конструкции принимают естественный вид в контексте абстрактных винеровских пространств.

Рассмотрим некоторое сепарабельное банахово пространство X, на котором задана структура абстрактного винеровского пространства (X, H, i). Положим $\Omega := C([0,1], X)$, а через P обозначим распределение X-значного броуновского движения. Определим $j(k)(t) := \int_0^t (k_s, dW_s)$, где интеграл понимается в смысле стохастического интегрирования на гильбертовых пространствах[35] относительно цилиндрического броуновского движения W_t, получающегося продолжением процесса $\{w \mapsto \langle w_t, f\rangle, t \in [0,1], f \in X^*\}$ на все $f \in H$. Тогда $(\Omega, L^2[0,1] \otimes H, j)$ также представляет из себя абстрактное винеровское пространство. Далее будем отождествлять элементы H с их образами при вложении в X и полагать $H \subset X$. Такое же отождествление будем проводить для образов элементов K в Ω.

Для каждого $t \geqslant 0$ определим $\mathcal{F}_t$ как замыкание σ-алгебры, порожденных $\{W_s, s \leqslant t\}$. Рассмотрим $\mathcal{F}_t$-предсказуемые процессы U_t и c_t, со значениями, соответственно, в $L(H)$ и H. По умолчанию предполагаем, что на $L(H)$ введена борелевская σ-алгебра, соответствующая топологии нормы. Потребуем, чтобы U_t

[35] *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge university press, 2014.

почти наверное являлось изометрией, то есть $|U_t h|_H = |h|$ п.н. для каждых $h \in H, t \in [0,1]$, а $c_t(w)$ было существенно ограничено на $[0,1] \times \Omega$.

Рассмотрим преобразование $\widetilde{\Phi}_{U,c} : L^2([0,1], H) \mapsto L^2(\Omega, P)$ вида

$$\widetilde{\Phi}_{U,c}(k) := \int_0^1 (U_t k_t, dW_t) + \int_0^1 (k_t, c_t) dt.$$

Выберем некоторый ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty \subset \Omega^* \subset K$. Хорошо известно[36], что имеет место равенство

$$w = \sum_1^\infty \langle e_i, w \rangle e_i,$$

где ряд сходится в $C([0,1], X)$ почти наверное.

Теорема 7. *Ряд*

$$\Phi_{U,c}(w) := \sum_0^\infty \widetilde{\Phi}_{U,c}(e_i) e_i$$

сходится почти наверное в норме $C([0,1], X)$ и отображение $w \mapsto \Phi_{U,c}(w)$ переводит меру P в квази-инвариантную.

Обозначим через $\mathcal{AF}$ множество $\Phi_{U,c}$ для всех U и c, удовлетворяющих приведенным выше условиям. Отображение $\Phi_{U,c}$ можно неформально записать в виде

$$\Phi_{U,c}(w)_t = \int_0^t U_s^* dw_s + \int_0^t c_s ds.$$

Рассмотрим $\mathcal{F}_t$-предсказуемые процессы A_t и b_t, со значениями, соответственно, в $L(H)$ и H. Потребуем, чтобы A_t почти наверное были косо-симметричными, то есть $A_t + A_t^* = 0$ почти наверное. Кроме того, будем считать, что $A_t(w)$ и $b_t(w)$ существенно ограничены на $[0,1] \times \Omega$.

Определение 1. Определим отображение $\mathcal{A}_{A,b} : L^2([0,1], H) \mapsto L^2(W)$ как

$$\mathcal{A}_{A,b}(k) := \int_0^1 (A_t k_t, dW_t) + \int_0^1 (k_t, b_t)_H dt.$$

Будем называть $\mathcal{A}_{A,b}$ *касательным процессом* с параметрами (A, b). Множество касательных процессов для всех A, b, удовлетворяющих изложенным выше условиям, обозначим через $\mathcal{AV}$. В неформальной записи, такой процесс имеет вид

$$\mathcal{A}_{A,b}(w)_t = \int_0^t A_s^* dw_s + \int_0^t b_s ds.$$

Определим оператор $D_{A,b}$ дифференцирования вдоль касательного процесса $\mathcal{A}_{A,b}$ следующим образом. Обозначим через $\mathcal{FC}_0^\infty(\Omega)$ множество функций вида $F = f(W(k_1), \ldots, W(k_n))$, где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k_1, \ldots, k_n \in K$. Для такой $F \in \mathcal{FC}_0^\infty(\Omega)$ полагаем

$$D_{A,b} F := \sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i f(W(k_1), \ldots, W(k_n)) \mathcal{A}_{A,b}(k_i).$$

[36] *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. теорема 3.4.4.

Из следующей теоремы вытекает существование замыкания оператора $D_{A,b}$ в $L^2(\Omega.P)$, которое мы будем обозначать тем же символом, а его область определения – через $\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}$.

Теорема 8 (интегрирование по частям)**.** *Пусть $F, G \in \mathcal{FC}_0^\infty(\Omega)$, тогда имеет место формула интегрирования по частям:*

$$ED_{A,b}FG = -EFD_{A,b}G + EFG \int_0^1 (b_t, dW_t).$$

Следующая теорема дает достаточное условие существования потока, порожденного фиксированным касательным процессом.

Теорема 9. *Обозначим $X := L^2_{\lambda\otimes P}([0,1]\times\Omega, L(H))$, $Y := L^2_{\lambda\otimes P}([0,1]\times\Omega, H)$, где λ – это мера Лебега на $[0,1]$. Предположим, что для касательного процесса $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AV}$ являются липшицевыми отображения*

$$\begin{array}{ll} A: & X\times Y \to X, \quad (U_t, c_t) \mapsto A(\Phi_{U,c}(w)), \\ b: & X\times Y \to Y, \quad (U_t, c_t) \mapsto b(\Phi_{U,c}(w)), \end{array}$$

определенные на тех $\mathcal{F}_t$-предсказуемых парах процессов U_t, c_t, для которых $\Phi_{U,c} \in \mathcal{AF}$. Тогда существует поток $w \mapsto \Phi^\alpha(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. *Мера P квази-инвариантна относительно действия Φ^α, то есть P и $P\circ(\Phi^\alpha)^{-1}$ эквивалентны для всех α.*

2. *$\Phi^0(w) = w$ почти наверное.*

3. *$\Phi^\alpha \circ \Phi^\beta = \Phi^{\alpha+\beta}$ почти наверное для любых $\alpha, \beta \geqslant 0$.*

4. *Для каждой функции $F \in \mathcal{FC}_0^\infty(\Omega)$ композиция $F(\Phi^\alpha(w))$ обладает абсолютно непрерывной по α версией, для которой выполнено*

$$\frac{d}{d\alpha} F(\Phi^\alpha(w)) = D_{A,b}F(\Phi^\alpha(w)).$$

В **третьем разделе** мы переносим вышеизложенные результаты на группу токов с помощью уравнения (2). Предположим, что $X = C(M, \mathfrak{g})$, для $z \in M$ и $v \in \mathfrak{g}$ определим функционал $(\delta_z \otimes v)(f) := (f(z), v)_{\mathfrak{g}}$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AV}$, для каждого $z \in M$ рассмотрим $\mathfrak{g}$-значный семимартингал

$$\mathcal{A}_t(z) := \sum_j \mathcal{A}(I_{[0,t]} \otimes (\delta_z \otimes v_j))v_j,$$

где $\{v_j\}$ – это некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{g}$. Определим случайный процесс

$$J(\mathcal{A})_t(z) := Ad_{g_t(z)} \int_0^t Ad_{g_s^{-1}(z)} \partial\mathcal{A}_s(z).$$

где $Ad_g x := g^{-1}xg$. Элементы множества $\{J(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in \mathcal{AV}\}$ будем называть *касательными процессами* к пространству путей группы токов.

Рассмотрим пространство $\mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)$ случайных величин вида $F = f(g_{t_1}(z_1),\dots,g_{t_n}(z_n))$, где $f \in C^\infty(G^n)$. Пусть $\{k_t(z), z \in M, t \in [0,1]\}$ – некоторое семейство $\mathfrak{g}$-значных случайных величин. Будем обозначать:

$$(\nabla F, k) := \sum_{j=1}^n \frac{d}{ds}|_{s=0} f(g_{t_1}(z_1),\dots,g_{t_j}(z_j)e^{sk_{t_j}(z_j)},\dots,g_{t_n}(z_n)).$$

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AV}$, тогда $\mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G) \subset \mathbb{D}^{1,2}_{A,b}$ и для любого $F \in \mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)$ выполняется $D_{A,b}F = (\nabla F, J(\mathcal{A}_{A,b}))$, а также имеет место следующая формула интегрирования по частям:*

$$E(\nabla F, J(\mathcal{A}_{A,b})) = EF\int_0^1 (b_t, dW_t).$$

Решение уравнения (2) для $\xi \equiv e$ определяет измеримый изоморфизм $I : C([0,1], C(M,\mathfrak{g})) \to C([0,1], C(M,G))$. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{AV}$ – это некоторый касательный процесс, удовлетворяющий условиям теоремы 9, а Φ^α – порожденный им поток, тогда $\Psi^\alpha := I\circ\Phi^\alpha\circ I^{-1}$ определяет поток на Ω_G, удовлетворяющий условиям, аналогичным пунктам 1–4 теоремы 9.

В последней части главы мы рассматриваем случай группы петель, когда $M = S^1$ и $H = \{h :\ \text{п.в. } \exists \dot h, \int_{S^1} |\dot h(t)|^2_{\mathfrak{g}} dt < \infty, h(0) = 0\}$. Этот случай замечателен тем, что на H существует довольно развитая дифференциальная геометрия алгебры Ли[37], в частности, определена операция стохастического параллельного переноса, задаваемая процессом $U(t)$, принимающем значения во множестве изометрических операторов на H и обладающем сильно непрерывной версией[38].

Теорема 11. *Пусть $h(t)$ – абсолютно непрерывное отображение $[0,1] \to H$, для которого $\int_0^1 |\dot h(t)|^2_H dt < \infty$. Тогда найдется касательный процесс $\mathcal{A}$ такой, что $J(\mathcal{A})_t(z) = (U(t)h(t))(z) =: Uh_t(z)$ и существует порожденный им поток Ψ^α. Кроме того, имеет место следующая формула интегрирования по частям:*

$$E(\nabla F, Uh) = EF\int_0^1 (U(t)\dot h(t) + 1/2\,\mathrm{Ric}\,U(t)h(t), dW_t),$$

где Ric *обозначает тензор Риччи на H*[39].

В **четвертой главе** мы распространяем на случай супермер на суперпространстве результаты о квази-инвариантности негауссовских мер, дифференцируемых вдоль некоторого гильбертова подпространства, относительно нелинейных преобразований[40].

[37] *Driver B. K., Lohrenz T.* Logarithmic Sobolev inequalities for pinned loop groups // Journal of Functional Analysis. 1996. Vol. 140, no. 2. Pp. 381–448.

[38] *Driver B. K.* Integration by parts and quasi-invariance for heat kernel measures on loop groups // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 149, no. 2. Pp. 470–547.

[39] *Fang S., Franchi J.* De Rham–Hodge–Kodaira operator on loop groups // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 148, no. 2. Pp. 391–407.

[40] *Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v.* Change of measures and their logarithmic derivatives under smooth transformations // Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1995. Vol. 321, no. 1. Pp. 103–108.

В **первом разделе** вводятся основные определения, касающиеся суперпространств. Во **втором** определяется понятие супермеры и вводятся условия на рассматриваемые классы преобразований.

Рассмотрим суперпространство $E_\Lambda = (E_\Lambda)_0 \oplus (E_\Lambda)_1 = (E_0 \otimes \Lambda_0) \oplus (E_1 \otimes \Lambda_1)$ над коммутативной банаховой супералгеброй $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ с тривиальным аннулятором нечетной части. Потребуем также, чтобы E_1 было конечномерно. В дальнейшем будем писать $E_\Lambda \ni x = y + \theta$, $y \in (E_\Lambda)_0$, $\theta \in \Lambda_1^d = (E_\Lambda)_1$. Обозначим *сопряженный* к x элемент как $\overline{x} := y - \theta$.

Определим пространство многочленов $\mathcal{P} = \{\sum\limits_\alpha f_\alpha \theta^\alpha,\ \alpha$ – мультииндекс$\}$. *Супермерой* на суперпространстве E_Λ называется борелевская мера μ на E_0 со значениями в $\mathcal{P}$, а интеграл по ней от функции $f : E_0 \oplus (E_\Lambda)_1 \to \Lambda$ определяется как:

$$\int\limits_{E_\Lambda} f(x) d\mu = \int\limits_{\Lambda_1^d} \left(\int\limits_{E_0} f(y,\theta)\mu(dy)(\theta) \right) d\theta.$$

Здесь внешний интеграл – интеграл по антикоммутирующим переменным[41,42], а внутренний – билинейный интеграл[43] относительно билинейной формы умножения многочленов.

Через $S^n(E_\Lambda, F_\Lambda, G_\Lambda)$ будем обозначать пространство n раз непрерывно супердифференцируемых вдоль подсуперпространства F_Λ отображений $E_\Lambda \to G_\Lambda$. Рассмотрим гильбертово подсуперпространство H_Λ пространства E_Λ, которое может быть отождествлено с множеством последовательностей

$$l_2(\Lambda) := \left\{ x = (x_i^k), \sum_{i,k} \|x_i^k\|^2 < \infty, x_j^k \in \Lambda_k, k = 0,1 \right\}.$$

Элемент $x \in H_\Lambda$, у которого все компоненты кроме x_i^k равны нулю, будем обозначать как $x_i^k \otimes e_i^k$. Для супергомоморфизма $A : H_\Lambda \to H_\Lambda$ его суперслед обозначим как $\operatorname{Str} A$.

Фиксируем супермеру μ на суперпространстве E_Λ и выберем некоторое подпространство $\mathcal{H}$ множества всех векторных полей $k : E_\Lambda \to H_\Lambda$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $k(x) = k^0(y) + k^1(y,\theta)$, где $k^0 \in S^1((E_\Lambda)_0, (H_\Lambda)_0; (H_\Lambda)_0)$, $k^1 \in S^1(E_\Lambda, H_\Lambda; (H_\Lambda)_1) \cap S^\infty(E_\Lambda, (E_\Lambda)_1; (H_\Lambda)_1)$.
2. $\|k^1\|_\infty := \sup_{y \in (E_\Lambda)_0, i=1,\dots,d} \|k_i^1(y,\cdot)\|_{\mathcal{P}} < \infty$.
3. $\|k^0\|_\infty := \sup_{y \in (E_\Lambda)_0} \|k^0(y)\|_{H_\Lambda} < \infty$.
4. Суперслед $\operatorname{Str} k'(x)$ существует в смысле сходимости ряда в $L^1(E_\Lambda, \mu)$, где k' обозначает производную вдоль H_Λ.

[41] *Хренников А. Ю.* Суперанализ. Физматлит М., 2005.

[42] *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 60, № 2. С. 169—198.

[43] *Ma T.-W.* Banach-Hilbert spaces, vector measures and group representations. World Scientific, 2002.

Будем считать, что на $\mathcal{H}$ определена норма $\|k\|_{\mathcal{H}} := \|k^0\|_\infty + \|k^1\|_\infty$.

Определим также класс $\mathcal{F}$ потоков $\{F_t, t \in [0,1]\}$ диффеоморфизмов суперпространства, вместе со своими обратными отображениями допускающих разложения:

$$F_t(x) = F_t(y,\theta) = F(t,y,\theta) = y + \theta + h^0_t(y) + h^1_t(y,\theta),$$
$$F_t^{-1}(x) = F_t^{-1}(y,\theta) = F^{-1}(t,y,\theta) = y + \theta + k^0_t(y) + k^1_t(y,\theta)$$

и удовлетворяющих условиям:

1. F_t и F_t^{-1} непрерывно дифференцируемы по t.
2. $h^0_t, k^0_t, \partial_t h^0_t, \partial_t k^0_t \in S^1((E_\Lambda)_0, (H_\Lambda)_0, (H_\Lambda)_0)$ для всех t.
3. $h^1_t, k^1_t, \partial_t h^1_t, \partial_t k^1_t \in S^1(E_\Lambda, H_\Lambda, (H_\Lambda)_1) \cap S^\infty(E_\Lambda, (E_\Lambda)_1, (H_\Lambda)_1)$ для всех t.
4. $\partial_t F_t^{-1} \circ F_t \in \mathcal{H}$ для всех t.

Третий раздел посвящен доказательству основных результатов главы - формулы логарифмической производной образов меры относительно введенных в предыдущем разделе потоков диффеоморфизмов и их производной Радона-Никодима относительно исходной меры.

Говорим, что супермера μ обладает логарифмической производной β вдоль гильбертова подсуперпространства H_Λ, если для любой функции $\phi \in S^1(E_\Lambda, H_\Lambda; \Lambda)$, ограниченной в пространстве многочленов вместе со своими производными, выполнено:

$$\int \phi(x)' h \mu(dx) = -\int \phi(x)\beta(h,x)\mu(dx)$$

для всех $h \in H_\Lambda$. При этом будем считать, что отображение $h \mapsto \beta(h,x)$ почти всюду является гомоморфизмом и почти всюду $\beta(h^k_i \otimes e^k_i, x) = h^k_i \beta(e^k_i, x)$ для некоторых $\beta(e^k_i, x) \in \mathcal{P}$. Аналогичным образом определяется логарифмическая производная вдоль векторного поля.

Теорема 12. *Пусть μ имеет логарифмическую производную $\beta(h,x)$ вдоль H_Λ, для которой $k \to \sum_{i,j} k(\cdot)^j_i \beta(e^j_i, \cdot) =: \beta(k(\cdot), \cdot)$ представляет собой непрерывное отображение $\mathcal{H} \to L^1(E_\Lambda, \mu)$. Тогда для любого $k \in \mathcal{H}$ существует логарифмическая производная μ вдоль k, задаваемая формулой*

$$\beta_k(x) = \beta(\overline{k(x)}, x) + \operatorname{Str} k'(x).$$

Теорема 13. *Пусть μ имеет логарифмическую производную $\beta(h,x)$ вдоль H_Λ, для которой $k \to \sum_{i,j} k(\cdot)^j_i \beta(e^j_i, \cdot) =: \beta(k(\cdot), \cdot)$ представляет собой непрерывное отображение $\mathcal{H} \to L^1(E_\Lambda, \mu)$. Выберем некоторое $F \in \mathcal{F}$, тогда семейство $\{\mu_t = \mu F_t^{-1}\}$ слабо дифференцируемо и $\mu'_t = \rho_t \mu_t$, где*

$$\rho_t = \beta(\overline{\partial_t F_t^{-1}}, F_t^{-1}) + \operatorname{Str}(\partial_t F_t^{-1} \circ F_t)' \circ F_t^{-1}.$$

Теорема 14. *В дополнение к условиям предыдущей теоремы предположим также:*

1. *Λ обладает свойством Радона-Никодима.*

2. *Сужения* F_t *на* $E_0 \equiv \{1 \otimes v, v \in E_0\}$ *представляют собой гомеоморфизмы пространства* E_0.

3. μ_t *непрерывны по вариации на* $[0, 1]$.

4. $|\mu_0| + |\mu_1|$*-почти всюду* ρ_t *принимает четные значения и* $\int_0^1 \rho_t dt$ *существует в смысле интеграла Бохнера со значениями в* $\mathcal{P}$.

Тогда $\mu_1 = e^{\int_0^1 \rho_t dt} \cdot \mu$, *в частности –* μ *и* μ_1 *взаимно абсолютно непрерывны.*

Заключение.

В диссертации разработаны новые подходы к построению мер, порождаемых диффузиями на группах токов, и исследованы их свойства квази-инвариантности. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Разработан альтернативный метод построения диффузий на группе токов, допускающий обобщение на процессы с разрывными траекториями.

2. Построены двухпараметрические процессы Леви на компактной группе Ли, представляющие из себя процессы Леви на пространстве Скорохода.

3. Построены фейнмановские приближения к интегралам по распределению броуновского листа на компактной группе Ли.

4. Доказана квази-инвариантность супермер, обладающих логарифмической производной вдоль некоторого гильбертова подсуперпространства, относительно действия потоков диффеоморфизмов суперпространства и выведена явная формула для производной Радона-Никодима, аналогичная формуле Рамера.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору О. Г. Смолянову за постановку задач и полезные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Kalinichenko A. A.* Transformation of supermeasures and their logarithmic derivatives under the action of a flow of diffeomorphisms of the superspace // Russian Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 19, no. 4. Pp. 469–483

[2] *Kalinichenko A. A.* Feynman approximation to integrals with respect to Brownian sheet on Lie groups // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2015. Vol. 18, no. 1. 1550008. 15 pp.

[3] *Kalinichenko A. A.* Construction of Levi processes on path spaces of Lie groups // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2016. Vol. 19, no. 1. 1650002. 22 pp.

[4] *Калиниченко А. А.* Преобразования супермер // Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012». МГУ, 2012

[5] *Калиниченко А. А.* Формулы Фейнмана для броуновского листа со значениями в группе Ли // Сборник международной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной 100-летию Б. М. Левитана. МГУ, 2014. С. 76—77