Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.216.22

Калиниченко Артем Александрович

МЕРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДИФФУЗИЯМИ НА ГРУППАХ ТОКОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор О.Г. Смолянов.

Москва, 2016

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Одно из главных направлений бесконечномерного анализа основывается на концепции дифференцируемых мер, активное изучение которых было впервые предпринято С. В. Фоминым (см. [11]), дальнейшее развитие этих идей представлено, в частности, в работах [1; 4; 8]. В случае гауссовских мер наибольшее распространение такой анализ получил в форме исчисления Маллявэна, изначально разработанного для доказательства условий Хёрмандера (см. [65]), а впоследствии нашедшего широкое применение в других областях математики (см. [17; 70]). Исчисление Маллявэна, по сути, представляет собой анализ на сепарабельном банаховом пространстве с определенной на нем гауссовской мерой, называемом абстрактным винеровским пространством. Анализ на нем существенно опирается на свойства этой меры, центральную роль здесь играет гильбертово пространство Камерона-Мартина всех векторов, сдвиги вдоль которых оставляют гауссовскую меру квази-инвариантной. Подробное изложение связанных вопросов можно прочитать, например, в книгах [4; 70; 85].

Долгое время считалось, что естественным касательным пространством к абстрактному винеровскому пространству является множество Камерона-Мартина, вдоль которого и определяется операция дифференцирования. Новый свет на этот вопрос пролил переход от плоского случая к многообразиям. А именно, рассмотрим множество $C([0,1], M)$ непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ на компактное риманово многообразие M размерности d. Распределение броуновского движения на M можно представить как образ стандартной меры Винера на $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ под действием измеримого отображения, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением (см. [44; 64]). Таким образом строится измеримый изоморфизм между абстрактным винеровским пространством $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ и множеством путей $C([0,1], M)$.

Аналог теоремы Камерона-Мартина для этого случая был впервые доказан Б. К. Драйвером в работе [28], где было показано, что векторные поля, получающиеся стохастическим параллельным переносом векторов Камерона-Мартина, порождают потоки, оставляющие распределение броуновского движения квази-инвариантным. Впоследствии оказалось, что множество таких векторных полей не замкнуто относительно взятия коммутатора. Кроме того, образы соответствующих потоков при переносе обратно на $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ не являются сдвигами, а представляются комбинацией предсказуемых поворотов и преобразований Гирсанова. Эти наблюдения привели к введению более широкого класса векторных полей, называемых *касательными процессами* (или "*согласованными векторными полями*"), которое привело к развитию дифференциальной геометрии на пространстве путей, существенно опирающейся на понятия теории вероятностей (см. [24; 25; 59]).

В случае, когда $M = G$ есть группа Ли, множество $C([0,1], G)$ также является группой и на нем присутствует естественный аналог сдвигов - умножение на фиксированный элемент. Полный ответ на вопрос о квази-инвариантности распределения броуновского движения относительно таких сдвигов был дан И. Шигекавой в работе [79]. В частности, если на G введена би-инвариантная метрика, множество абсолютно-непрерывных путей с квадратично-интегрируемой производной является естественным аналогом пространства Камерона-Мартина в том смысле, что оно представляет собой в точности множество всех траекторий, умножение на которые оставляет меру квази-инвариантной. Такие сдвиги являются касательными процессами, но отличными от стохастических параллельных переносов векторов Камерона-Мартина. Аналогичные результаты были получены и для групп петель (см. [30; 63; 78]).

Изучение мер на некоторых более общих абстрактных винеровских многообразиях приводит к необходимости рассматривать диффузии со значениями в бесконечномерных группах. В частности, в настоящей работе нас интересуют группы $C(M, G)$ непрерывных отображений из риманова многообразия M в группу Ли G, называемые также *группами токов*. Наиболее распространенным примером здесь является группа петель $C(S^1, G)$, процессы со значениями в которой строились различными способами многими авторами (см., например, [30; 33; 35; 48; 58; 69; 76]). Как правило, это были аналоги броуновского движения или процесса Орнштейна-Уленбека, также в работах [49] и [20] с помощью, соответственно, теории грубых путей и стохастического анализа на пространствах второго мартингального типа были построены диффузионные процессы, являющиеся решениями стохастических дифференциальных уравнений, коэффициенты которых задаются операторами Немыцкого. Тем не менее, диффузии общего типа до сих пор нигде не рассматривались. В главе 1 этот пробел заполняется и строятся диффузионные меры, порожденные операторами второго порядка с переменными коэффициентами, на пространстве путей произвольной группы токов.

С аналогом теоремы Камерона-Мартина в этой ситуации дело обстоит сложнее. Как было показано в [77], даже в простейшем случае $M = [0,1]$ распределение броуновского движения со значениями в $C([0,1], G)$, рассматриваемое как мера на $C([0,1], C([0,1], G))$, не является квази-инвариантным относительно никаких нетривиальных сдвигов. С другой стороны, в некоторых случаях векторные поля, получающиеся параллельным стохастическим переносом, определить можно. В главе 3 введен аналог касательных процессов для пространства путей группы токов и построены порожденные ими потоки, оставляющие распределение броуновского движения квази-инвариантным. Пользуясь тем, что дифференциальное исчисление на абстрактных винеровских пространствах по существу зависит только от гильбертова пространства Камерона-Мартина, касательные процессы рассматриваются сначала с точки зрения изонормальных гауссовских процессов, независимо от выбора конкретного банахова пространства, как операторы дифференцирования, аналогичные производной по направлению в смысле Маллявэна.

До сих пор речь шла о преобразованиях пространства, согласованных с потоком σ-алгебр, порожденным броуновским движением. Но можно рассматривать и несогласованные трансформации, что, однако, требует дополнительных условий регулярности. В плоском случае эти вопросы подробно изложены, к примеру, в книгах

[3; 86], наиболее значительным результатом здесь является теорема Р. Рамера (см. [74]), утверждающая квази-инвариантность гауссовских мер относительно широкого класса нелинейных преобразований. Полученная им формула для производной Радона-Никодима допускает обобщение и на негауссовские меры, обладающие логарифмическими производными вдоль некоторого гильбертова подпространства (см. [81; 82]). В главе 4 аналогичный результат доказывается в случае наличия антикоммутирующих координат и строятся потоки на суперпространствах (см. [7; 12]), оставляющие рассматриваемую супермеру квази-инвариантной.

Как правило, броуновское движение на группе токов определяется как решение бесконечномерного стохастического уравнения, но существует и другой подход, использующий конечномерные приближения, построенные с помощью теоремы Чернова (см. [21; 80]), являющейся обобщением известной формулы Троттера. В литературе приближения такого типа носят название "фейнмановских", так как представляются в виде предела кратных интегралов по конечномерным пространствам, аналогично тому, как был впервые определен знаменитый интеграл Фейнмана. Одним из преимуществ такого подхода является возможность рассматривать процессы с разрывными траекториями, для которых не работает процедура переноса с алгебры Ли, используемая для построения непрерывных диффузионных процессов. В главе 2 мы строим процессы Леви на пространстве Скорохода право-непрерывных путей со значениями в группе Ли G, имеющих левые пределы в каждой точке. Мы также рассматриваем частный случай броуновского листа на G и несколько иными методами строим к нему приближения на пространстве непрерывных отображений.

Цель работы. Применить метод конечномерных приближений для построения случайных процессов на группах токов. Построить процессы Леви на пространстве Скорохода право-непрерывных путей со значениями в группе Ли, имеющих левые пределы в каждой точке. Построить фейнмановские приближения к распределению броуновского листа на группе Ли. Получить аналог теоремы Рамера для супермер, дифференцируемых вдоль гильбертова подсуперпространства.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработан альтернативный метод построения диффузий на группе токов, допускающий обобщение на процессы с разрывными траекториями.

2. Построены двухпараметрические процессы Леви на компактной группе Ли, представляющие из себя процессы Леви на пространстве Скорохода.

3. Построены фейнмановские приближения к интегралам по распределению броуновского листа на компактной группе Ли.

4. Доказана квази-инвариантность супермер, обладающих логарифмической производной вдоль некоторого гильбертова подсуперпространства, относительно действия потоков диффеоморфизмов суперпространства и выведена явная формула для производной Радона-Никодима, аналогичная формуле Рамера.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа, дифференциальной геометрии и теории случайных процессов, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории меры, функциональном анализе, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- семинаре «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, 2009–2016 гг., неоднократно.
- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», 2012 г., 2016 г.
- Международной научной конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященной столетию Б. М. Левитана, Москва, 2014 г.
- Международной научной конференции «Наука будущего», Санкт-Петербург, 2014 г.
- семинаре «Квантовая математическая физика» под руководством В. В. Козлова, И. В. Воловича, С. В. Козырева, А. С. Трушечкина, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2012 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора [9; 10; 50—52], в том числе в 3 статьях [50—52], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы из 87 наименований. Общий объем диссертации составляет 102 страницы.

Глава 1

Диффузионные меры на группах токов

Хорошо известно (см., например, [79]), что броуновское движение на компактной группе Ли G с би-инвариантной метрикой может быть построено как решение стохастического дифференциального уравнения в форме Стратоновича

$$\partial_t g_t = \sum\nolimits_i \tilde{v}_i \partial_t b_t^i, \quad g_0 = e,$$

где b_t – это броуновское движение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, а $\tilde{v}_i$ обозначают левоинвариантные векторные поля, образующие ортонормированный базис $\mathfrak{g}$. В силу компактности G может быть вложена в группу матриц, а $\mathfrak{g}$ реализована как матричная подалгебра, соответствующая касательному пространству в единице $e \in G$. Выберем ортонормированный базис $\{v_i\}$ в $\mathfrak{g}$, тогда в матричной записи $\tilde{v}_i(g) = gv_i$ и стохастическое уравнение принимает вид:

$$\partial_t g_t = \sum\nolimits_i g_t v_i \partial_t (b_t, v_i)_{\mathfrak{g}} = g_t \partial_t b_t, \quad g_0 = e. \tag{1.1}$$

Распределение броуновского движения b_t определяет меру Винера на пространстве путей $P(\mathfrak{g}) := \{x \in C([0,1], \mathfrak{g}), x(0) = 0\}$, тогда решение уравнения (1.1), как функция от траектории b_t, задает измеримый изоморфизм $P(\mathfrak{g}) \to P(G) = \{x \in C([0,1], G), x(0) = e\}$, переводящий меру Винера в распределение броуновского движения на G и задающий таким образом на $P(G)$ структуру бесконечномерного многообразия с единственной картой $P(\mathfrak{g})$ (см. [63]).

Вместе с пространством Камерона-Мартина $H(\mathfrak{g}) := \{h \in P(\mathfrak{g}) : \exists h'(t), \int_0^1 |h'(t)|_{\mathfrak{g}}^2 dt < \infty)$ путей конечной энергии $P(\mathfrak{g})$ представляет собой абстрактное винеровское пространство. Соответственно, возникает вопрос о том, сохраняется ли эта структура при переходе на $P(G)$. Оказывается, что в данном случае ответ положительный и аналогом пространства Камерона-Мартина является подгруппа $H(G) := \{k \in P(G) : \int_0^t k(s)^{-1} k'(s) ds \in H(\mathfrak{g})\}$, обладающая тем свойством, что распределение броуновского движения квази-инвариантно относительно левых и правых сдвигов на элементы из $H(G)$ (см. [79]).

Бесконечномерные группы такого типа носят название *абстрактных винеровских групп* (см. [72]), другими распространенными примерами являются группа петель $L(G) := \{x \in C([0,1], G), x(0) = x(1) = e\}$ с соответствующей подгруппой Камерона-Мартина $H_0(G) = \{k \in H(G), k(1) = e\}$ (см. [29; 30; 63]) и группа $C(M, G)$ непрерывных отображений компактного риманова многообразия M в G, роль алгебры Ли для которой играет пространство $H_s = \{h : M \to \mathfrak{g}, \int_M (\Delta_M^{s/2} h(x), \Delta_M^{s/2} h(x))_{\mathfrak{g}} Vol(dx) < \infty\}$ для $s > dim M/2$, где Δ_M обозначает оператор Лапласа-Бельтрами на M (см. [48; 72]). В последних двух случаях многообразие уже не является изоморфным плоскому пространству и для изучения мер на нем требуются дополнительные конструкции.

Один из возможных приемов, применяемый, в основном, для групп петель, состоит в том, чтобы тем или иным способом спроектировать пространство путей $P(G)$ на подмножество $\{g(1) = e\}$ путей с фиксированным конечным значением (см. [40; 63; 78]). Другой подход, рассматриваемый в настоящей работе, заключается в том, чтобы построить случайный процесс на соответствующей группе токов $C(M, G)$ и рассмотреть его распределение в фиксированный момент времени. Такое построение можно проделать, выбрав некоторое бесконечномерное броуновское движение W_t на $C(M, \mathfrak{g})$ и рассмотрев (бесконечную) систему стохастических дифференциальных уравнений, аналогичных (1.1):

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z) \partial_t W_t(z), \quad g_0(z) = e, z \in M. \tag{1.2}$$

Для случаев $M = [0, 1]$ и $M = S^1$ такие уравнения изучались, в частности, в работах [29; 30; 40] для стандартных групп путей и петель, а в [48] – для пространств Камерона-Мартина H_s, определенных выше. Случай произвольного многообразия рассматривался в [58]. Когда G – это не обязательно группа, а произвольное риманово многообразие, похожие конструкции исследовались в работах [20; 35; 49; 57]. В этом случае, вместо уравнения (1.1), процесс строится с помощью вложения G в объемлющее евклидово пространство.

Построенный в (1.2) процесс можно называть броуновским движением на группе токов $C(M, G)$, его производящий оператор имеет вид

$$\mathcal{L} f(g(\cdot)) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} f''(g(\cdot)),$$

где дифференцирование на группе отображений понимается в смысле производных $(f'(g), h) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(g(\cdot) e^{th(\cdot)})$ по направлениям из пространства Камерона-Мартина H. В большинстве работ на эту тему рассматривается только случай броуновского движения, также в статьях [20; 49] с помощью, соответственно, теории грубых путей и стохастического анализа на пространствах второго мартингального типа были построены диффузионные процессы на группах петель, являющиеся решениями стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z) a(g_t(z)) \partial_t W_t(z) + g_t(z) b(g_t(z)) dt,$$

где A и b принимают значения, соответственно, в $L(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{g}$. В настоящий главе мы строим диффузии общего вида, порожденные операторами

$$\mathcal{L}_t f = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma(t, g)^* f''(g) \sigma(t, g) + (b(t, g), f'(g))_H, \tag{1.3}$$

где $\sigma : [0, \infty) \times C(M, G) \to L(H)$, $b : [0, \infty) \times C(M, G) \to H$. Здесь выбор пространства H, являющегося пространством Камерона-Мартина для соответствующего броуновского движения на $C(M, \mathfrak{g})$, по сути, задает метрику на $C(M, G)$.

Главная трудность в построение такого рода процессов состоит в необходимости работать в контексте бесконечномерного стохастического анализа, который во многом опирается на геометрию пространства. Наиболее простой ситуация выглядит для гильбертовых пространств, стохастический анализ на которых очень хорошо развит (см., например, [26]) и во многом повторяет конечномерный случай, но для произвольных банаховых пространств ситуация намного хуже. Как правило, проблемы возникают при попытке оценить L^2-норму суммы простых приращений вида $\sigma_s(W_t - W_s)$, приближающих стохастический интеграл $\int_0^t \sigma_s dW_s$, где σ_t принимает значения в некотором множестве операторов.

Подходы к этой проблеме можно условно разделить на два направления: в одном из них требуется, чтобы наше банахово пространства было в некотором смысле похоже на гильбертово (см. обзорную статью [67]), в другом - чтобы интегрируемый процесс σ_s обладал свойствами оператора Гильберта-Шмидта (см. [56; 66; 68; 71]). Наше пространство $C(M, \mathfrak{g})$ на гильбертово не очень похоже, но, пользуясь гельдеровостью почти всюду траекторий броуновского движения, вместо него можно было бы рассмотреть какое-нибудь пространство Соболева-Слободецкого, имеющее второй мартингальный тип и поэтому допускающее развитую теорию стохастического интегрирования (см. [2; 67]). Именно таким образом в работе [20] были построены менее общие диффузии на группе петель, уже упоминавшиеся выше. В настоящей работе, однако, выбран второй подход.

Мы работаем в контексте абстрактного винеровского пространства (X, H, i), где $X \subset C(M, \mathfrak{g})$. Используя специфику множества непрерывных функций, мы определяем стохастический интеграл от $L(H)$-значных процессов и рассматриваем систему уравнений

$$\begin{cases} x_t = \int_0^t \sigma(s, g_s) dW_s + \int_0^t b(s, g_s) ds, & \\ \partial_t g_t(z) = g_t(z) \partial_t x_t(z), & z \in M. \end{cases}$$

где σ принимает значения в $L(H)$. Для ее решений выполняется мартингальная задача

$$M_f := f(g_t) - f(g_0) - \int_0^t \mathcal{L}_s f ds \text{ – это } \sigma(g_s, s \leqslant t)\text{-мартингал}. \tag{1.4}$$

Мы доказываем существование решений для ограниченных непрерывных коэффициентов и единственность в случае, когда коэффициенты липшицевы. Если также σ и b не зависят от времени, то эта система задает диффузионный процесс на $C(M, G)$, порожденный оператором $\mathcal{L} = \mathcal{L}_t$.

Выбор такого подхода к проблеме мотивирован тем, что мы хотим, чтобы оператор $\mathcal{L}_t$ вида (1.3) был корректно определен для H-дифференцируемых функций на $C(M, G)$, для которых оператор $f'' \in L(H)$, а значит, σ также должно принимать значения в $L(H)$. В теории же стохастического интегрирования на пространствах второго мартингального типа как правило рассматриваются дифференцируемые по Фреше функций, которые составляют не очень большое множество на бесконечномерных пространствах. С другой стороны, как следует из результатов [39], на абстрактном винеровском пространстве H-дифференцируемые функции с ядерной второй производной плотны во множестве равномерно непрерывных функций.

Доказывая существование и единственность решений мартингальной задачи (1.4), мы определяем ее для гладких цилиндрических функций, которые, конечно, дифференцируемы по Фреше, но в предложении 1.3.4 мы доказываем, что если решение существует, то мартингальная задача выполняется для более широкого класса дважды H-дифференцируемых функций, имеющих ядерную вторую производную.

Глава организована следующим образом. В разделе 1 мы вводим основные определения и доказываем существование стохастического интеграла на пространстве непрерывных отображений. Здесь же мы приводим доказательства некоторых технических лемм, которые понадобятся в дальнейшем. Раздел 2 посвящен построению процессов на группе токов, получающихся переносом бесконечномерных семимартингалов на ее алгебре Ли, и доказательству их свойств. В разделе 3 мы доказываем главный результат главы – существование и единственность решений мартингальной задачи (1.4) и ее корректность для более общего класса функций.

1.1 Стохастическое интегрирование в бесконечномерных пространствах

1.1.1 Стохастический интеграл в гильбертовом пространстве

Предположим, что у нас есть сепарабельное гильбертово пространство K, будем обозначать скалярное произведение в нем через $(\cdot,\cdot)_K$, а соответствующую норму как $|\cdot|_K$.

Определение 1.1.1. Стохастический процесс $W = \{W(k), k \in K\}$ на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ будем называть *изонормальным гауссовским процессом*, если все $W(k)$ – гауссовские и $\mathbb{E}W(k)W(g) = (k,g)_K$ для любых $k, g \in K$.

В данной работе нас будут в основном интересовать пространства вида $K = L^2[0,1]\otimes H$, где H – другое сепарабельное гильбертово пространство, а тензорное произведение подразумевается замкнутым относительно гильбертовой нормы. Их также можно рассматривать как множества $L^2([0,1],H)$ измеримых по Лебегу H-значных функций f, для которых $\int_0^1 |f(t)|_H^2 dt < \infty$. Пусть W – изонормальный гауссовский процесс на K, обозначим $(W_t, h) := W(I_{[0,t]} \otimes h)$, для $h \in H$, $t \in [0,1]$. В литературе этот процесс также называется *цилиндрическим броуновским движением*, с чем и связаны такие обозначения. По цилиндрическому броуновскому движению можно построить стохастический интеграл. Здесь мы напомним его определение и некоторые свойства, все доказательства можно прочитать, например, в [26, глава 4] или [73, глава 2].

Выберем право-непрерывный поток полных σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, относительно которого (W_t, h) являются мартингалами для всех $h \in H$. Заметим, что такой поток всегда существует. Например, можно взять в качестве $\mathcal{F}_t$ пополнение минимальной σ-алгебры, порожденной случайными величинами $W(I_{[0,t]} \otimes h)$, $h \in H$.

Пусть H_1 – сепарабельное гильбертово пространство, R_s – $\mathcal{F}_t$-предсказуемый процесс со значениями в пространстве $HS(H,H_1)$ операторов Гильберта-Шмидта с соответствующей нормой $\|\cdot\|_{HS}$. Предположим также, что $\mathbb{E}\int_0^1 \|R_s\|_{HS}^2 ds < \infty$. В силу [26, предложение 4.22] R_t представим в виде предела в $L^2([0,1]\times\Omega)\otimes HS(H,H_1)$ процессов вида

$$R_t^n := \sum\nolimits_{i,j,k=1}^{N} f_{i,j,k} I_{[t_i,t_{i+1}]}(t) \otimes e_j \otimes e_k,$$

для некоторого ортонормированного базиса $\{e_j \otimes e_k\}$ в $HS(H,H_1) = H \otimes H_1$, $\mathcal{F}_{t_i}^W$-измеримых и квадратично интегрируемых случайных величин $f_{i,j,k}$ и разбиения $0 < t_1 < \ldots < t_n = t$.

Тогда интеграл
$$(R\cdot W)_t := \int_0^t R_s dW_s,$$
определяется как предел в $L^2(\Omega)\otimes H_1$ выражений вида
$$(R^n\cdot W)_t := \sum\nolimits_{i,j,k=1}^{N} f_{i,j,k} W(I_{[t_i,t_{i+1}]}\otimes e_j)e_k.$$
Построенный процесс удовлетворяет следующим свойствам:

1. $R\cdot W$ обладает непрерывной модификацией. Далее мы везде будем считать, что его траектории почти всюду непрерывны.

2. $(R\cdot W)_t$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом.

3. Для R, R', удовлетворяющих вышеизложенным условиям,
$$\mathbb{E}((R\cdot W)_t,(R'\cdot W)_t)_{H_1} = \mathbb{E}\int_0^1 \mathrm{Tr}(R_s^* R_s')ds,$$

4. отображение $R\mapsto R\cdot W$ линейно по R.

5. Для $p>1$
$$\mathbb{E}\max\{|(R\cdot W)_s|^p_{H_1}, s\in[0,t]\} \lesssim \mathbb{E}(\int_0^t \|R_s\|^2_{HS}ds)^{p/2}.$$

Для уточнения смысла символа '$\lesssim$' в настоящей работе мы отсылаем читателя к списку обозначений. В случае $H_1=\mathbb{R}$, $HS(H,\mathbb{R})$ можно отождествить с H и записать соответствующий интеграл в виде
$$\int_0^t (a_s, dW_s),$$
где a_t – это H-значный $\mathcal{F}_t$-предсказуемый случайный процесс, для которого $\mathbb{E}\int_0^1 |a_t|^2_H dt < \infty$. Этот интеграл представляет из себя мартингал с квадратичной вариацией $[\int_0^{\cdot}(a_s, dW_s)]_t = \int_0^t |a_s|^2_H dt$.

1.1.2 Абстрактные винеровские пространства

Рассмотрим некоторое сепарабельное банахово пространство X и гильбертово пространство H, инъективно вложенное в него с помощью отображения $i: H\hookrightarrow X$, такое, что существует гауссовская мера μ на X с ковариацией
$$\int_X \langle f,x\rangle\langle g,x\rangle\mu(dx) = (f,g)_H. \tag{1.5}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает дуальную форму на $X^*\times X$, $f,g\in X^*\overset{i^*}{\hookrightarrow} H^*\simeq H$. Здесь и далее мы отождествляем элементы X^* с их образами при таком вложении в H и также считаем $H\subset X$. Тройка (X,H,i) называется *абстрактным винеровским пространством.*

Абстрактным винеровским пространством является также тройка $(C([0,1],X), L^2([0,1],H), j)$, где j задается как $j(k)_t = \int_0^t k_s ds$. Обозначим соответствующую гауссовскую меру через P. Процесс W_t, траектории которого имеют распределение P, будем называть *X-значным броуновским движением.* Положим $\Omega := C([0,1],X)$ и определим $\mathcal{F}$ как пополнение относительно P борелевской σ-алгебры на Ω. Определим $W(k) = \langle k, W\rangle$, $k \in \Omega^*$. Из равенства (1.5) следует, что это отображение продолжается до изометрии $H \to L^2(\Omega, P)$, то есть до изонормального гауссовского процесса, который мы также будем обозначать через W.

Замечание 1.1.1. По теореме Банаха-Мазура, X можно изометрически вложить в пространство $C([0,1],\mathbb{R})$. Поэтому $C([0,1],X)$ вкладывается в $C([0,1],C([0,1],\mathbb{R})) = C([0,1]^2,\mathbb{R})$, а значит, является сепарабельным и борелевская σ-алгебра порождается цилиндрическими множествами. Кроме того, существует счетное семейство функционалов из X^* разделяющих точки – достаточно рассмотреть значения элементов из $X \subset C([0,1],\mathbb{R})$ в рациональных точках $[0,1]$.

Выберем право-непрерывный поток полных σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ так, чтобы W_t было $\mathcal{F}_t$-мартингалом, в этом случае говорим, что W_t есть *X-значное $\mathcal{F}_t$-броуновское движение.* Для H-значного $\mathcal{F}_t$-предсказуемого процесса b_t определим

$$|||b|||_t^2 := \mathbb{E}\int_0^t |b_s|_H^2 ds.$$

Рассмотрим $\mathcal{F}_t$-предсказуемый $L(H)$-значный процесс σ_t, для которого $|||\sigma^* z|||_t^2 < \infty$ для всех $t > 0$, $z \in X^*$.

Определение 1.1.2. Называем предсказуемый X-значный процесс x_t *слабым стохастическим интегралом* и обозначаем $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$, если

$$\langle z, x_t\rangle = \int_0^t (\sigma_s^* z, dW_s)$$

почти всюду, для каждого $z \in X^*$. В случае, когда такой процесс существует, мы называем σ_t *интегрируемым.*

В общем случае такой интеграл не обязан существовать, но в следующем разделе мы докажем интегрируемость широкого класса $L(H)$-значных процессов, когда X – это пространство непрерывных отображений.

1.1.3 Случай $X \subset C(M,\mathbb{R}^d)$

Пусть M – это компактное связное Риманово многообразие (возможно, с границей), через $d(\cdot,\cdot)$ обозначим соответствующее риманово расстояние на M. Рассмотрим пространство $C(M,\mathbb{R}^n)$ непрерывных отображений $M \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что для некоторого замкнутого подпространства $X \subset C(M,\mathbb{R}^n)$ определена структура (X,H,i) абстрактного винеровского пространства. Далее отождествляем элементы X^* с их образами в $H = H^*$, а вектора из H – с их образами в X.

Каждому $z \in M$ соответствует векторно-значный функционал $\delta_z(x) := x(z)$, для $h \in H$ будем также писать $(\delta_z, h) := h(z)$. Для $z \in M$ и $v \in \mathbb{R}^n$ определим функционал $\delta_z \otimes v$ через

$$(\delta_z \otimes v)(x) := (v, x(z))_{\mathbb{R}^n}.$$

Выберем ортонормированный базис $\{v_j\}$ в $\mathbb{R}^n$. Слабый стохастический интеграл от σ_s можно тогда рассматривать как набор $\mathbb{R}^n$-значных процессов, определив $\int_0^t \langle \sigma_s^* \delta_z, dW_s \rangle := \sum_i \int_0^t (\sigma_s^*(\delta_z \otimes v_i), dW_s) v_i$.

Положим $\widetilde{M} := \mathrm{span}\{\delta_z, z \in M\}$ в пространстве векторно-значных функционалов и определим $\delta_z \otimes v_i$ по линейности для всех $\phi \in \widetilde{M}$ как: $(s\delta_z + t\delta_z') \otimes v_i := s\delta_z \otimes v_i + t\delta_z' \otimes v_i \in X^*$. Тогда для $\phi \in \widetilde{M}$ обозначим:

$$
\begin{aligned}
&|\phi| := \max_i\{|\phi \otimes v_i|_H\}, \\
&|(\phi, h)| := \max_i\{|(h, \phi \otimes v_i)|\}, \\
&|\sigma\phi| := \max_i\{|\sigma(\phi \otimes v_i)|\},
\end{aligned}
$$

где $h \in H, \sigma \in L(H)$. В этой главе будем предполагать, что для некоторого $\gamma > 0$ пространство H удовлетворяет следующему условию

$$
|\delta_z \otimes v - \delta_{z'} \otimes v|_H \leqslant const \cdot |v|_{\mathbb{R}^n} d(z, z')^\gamma \tag{1.6}
$$

для всех $z, z' \in M$. Заметим, что тогда $|\delta_z - \delta_{z'}| \lesssim d(z, z')^\gamma$.

Замечание 1.1.2. Причина, по которой мы рассматриваем подпространство X вместо всего $C(M, \mathbb{R}^n)$, заключается в том, что в дальнейшем нам потребуется работать с определенными классами функций на X, и неестественно требовать, чтобы они были определены на всем $C(M, \mathbb{R}^n)$, когда рассматриваемые процессы на самом деле живут только на замыкании H.

Нашим главным инструментом в этом разделе будет знаменитая теорема Прохорова, с помощью нее мы докажем существование стохастического интеграла на X, представив его в виде слабого предела интегралов от простых процессов. Следующий результат хорошо известен, но автору не удалось найти его в необходимой общности, так что мы приведем здесь полное доказательство. Напомним, что семейство ξ_β на метрическом пространстве S называется *плотным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset S$, что $\sup_\beta P(\xi_\beta \in K) > 1 - \varepsilon$.

Лемма 1.1.1. *Пусть (S, ρ) – это сепарабельное метрическое пространство. Рассмотрим семейство случайных элементов ξ_β со значениями в S^M, оснащенном σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами. Предположим, что выполнено любое из следующих условий:*

1. *S обладает свойством Гейне-Бореля (каждое ограниченное множество относительно компактно) и для некоторой фиксированной точки $m \in M$ семейство $\{\xi_\beta(m)\}$ плотно.*

2. *Семейство $\{\xi_\beta(m)\}$ плотно для каждого m из некоторого плотного подмножества $D \subset M$.*

Для некоторых $a, c, C > 0$ пусть также выполняется

$$
\sup_\beta \mathbb{E}\rho(\xi_\beta(z), \xi_\beta(z'))^a \leqslant C d(z, z')^{N+b} \tag{1.7}
$$

для всех $z, z' \in M$, где N – это размерность M. Тогда каждое ξ_β обладает версией, почти всюду гельдеровой с показателем $c \in (0, b/a)$, и $\{\xi_\beta\}$ плотно как семейство $C(M, S)$-значных случайных элементов.

Доказательство. предположим сначала, что $M = [0,1]^N$. Тогда, по стандартной теореме Колмогорова (см. [53, теорема 3.23]), все ξ_β обладают c-гельдеровой версией для любого $c \in (0, b/a)$. Фиксируем $n > 0$ и определим

$$D_j := \{(k_1, \ldots, k_N)2^{-j}; k_1, \ldots, k_N \in \{1, \ldots, 2^j\}\}.$$

Пусть также

$$\eta_j(\beta) := \max\{\rho(\xi_\beta(z), \xi_\beta(z')), |z - z'| = 2^{-j}\}$$

и обозначим

$$w(x, \delta) := \sup\{\rho(x(z), x(z')), d(z, z') \leqslant \delta\}.$$

Так как

$$|\{(z, z') \in D_j \times D_j; |z - z'| = 2^{-j}\}| \leqslant N 2^{Nj},$$

из (1.7) и неравенства Минковского (см. [53, лемма 1.29]) следует, что

$$[\mathbb{E} w(\xi_\beta, 2^{-m})^a]^{\frac{a\wedge 1}{a}} \leqslant \sum_m^\infty [\mathbb{E}\eta_j(\beta)^a]^{\frac{a\wedge 1}{a}} \lesssim \sum_m^\infty [2^{jN} 2^{-j(N+b)}]^{\frac{a\wedge 1}{a}} \lesssim$$

$$\lesssim \sum_m^\infty 2^{-jb/(a\vee 1)} \lesssim 2^{-mb/(a\vee 1)},$$

Определим множество

$$F_\varepsilon := \bigcap_m \{x \in S^M : w(x, 2^{-m}) \leqslant \varepsilon^{-1} 2^{-mc}\}$$

для $c \in (0, b/a)$, тогда из неравенства Чебышева легко получается, что $\sup_\beta P(\xi_\beta \notin F_\varepsilon) \lesssim \varepsilon$.

Рассмотрим теперь произвольное M. Так как оно компактно, его можно покрыть конечным числом замкнутых множеств C_j, диффеоморфных единичному кубу. Кроме того, в каждом таком кубе риманово расстояние эквивалентно евклидову. Для каждого j функции $x \in S^M$ можно рассматривать как элементы $S^{C_j} = S^{[0,1]^N}$, тогда, в силу эквивалентности метрик, выполняется неравенство (1.7). Следуя предыдущему рассуждению, можно построить равностепенно непрерывные на C_j множества F_ε^j такие, что $\sup_\beta P(\xi_\beta|_{C_j} \notin F_\varepsilon^j) \lesssim \varepsilon$. Тогда $\sup_\beta P(\xi_\beta \notin \cap_j F_\varepsilon^j) \lesssim \varepsilon$ и ξ_β обладают c-гельдеровыми версиями на каждом C_j, а значит, и на M.

Пусть выполнено условие 1. Выберем компакт $G_\varepsilon \subset S$ такой, что $\sup_\beta P(\xi_\beta(m) \notin G_\varepsilon) \lesssim \varepsilon$. Используя свойство Гейне-Бореля, связность и компактность M, а также тот факт, что $\cap_j F_\varepsilon^j$ составлено из равностепенно непрерывных функций, получаем из теоремы Арцела-Асколи ([54, гл. 7, т. 18]), что $K_\varepsilon := \cap_j F_\varepsilon^j \cap \{x(m) \in G_\varepsilon\}$ компактно. Тогда из неравенства $\sup_\beta P(\xi_\beta \notin K_\varepsilon) \lesssim \varepsilon$ следует плотность $\{\xi_\beta\}$.

Предположим теперь, что выполняется условие 2. Так как $F_\varepsilon = \cap_j F_\varepsilon^j$ равностепенно непрерывно, можно выбрать такое δ, что $\rho(x(z), x(z')) < \varepsilon$, когда $d(z, z') < \delta$ и $x \in F_\varepsilon$. Выберем конечную δ-сеть $\{z_i\} \subset D$ для M, тогда существует компакт $G_\varepsilon \subset S$ такой, что $\sup_\beta P(\xi_\beta \notin E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, где $E_\varepsilon = \cap_j \{x(z_j) \in G_\varepsilon\}$. Возьмем конечную ε-сеть $\{g_k\}$ для G_ε, тогда для каждого $z \in M$, ближайшего к нему z_i и ближайшей к $x(z_i)$ точки g_k выполняется

$$\rho(x(z), g_k) \leqslant \rho(x(z), x(z_i)) + \rho(x(z_i), g_k) < 2\varepsilon,$$

если $x \in E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$. Следовательно, функции из $K_\varepsilon = E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$ принимают значения в компакте. Так как, кроме того, K_ε равностепенно непрерывно, из теоремы Арцела-Асколи (см. [54, гл. 7, т. 18]) следует, что оно компактно. □

Лемма 1.1.2. *Пусть (S, ρ) – это сепарабельное метрическое пространство. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$ случайных элементов со значениями в $C(M, S)$, для которых выполняется уравнение (1.7) и для всех n почти всюду $\xi_n \in X$ для некоторого замкнутого подмножества $X \subset C(M, S)$. Пусть D – это плотное множество в M. Предположим, что существует случайный элемент $\tilde{\xi}$ на D^M такой, что все конечно-мерные распределения $\xi_n|_D$ слабо сходятся к соответствующим распределениям $\tilde{\xi}$. Тогда на том же вероятностном пространстве найдется X-значный случайный элемент ξ, для которого почти всюду $\xi(m) = \tilde{\xi}(m)$ для всех $m \in D$ и ξ_n сходится к ξ по распределению.*

Доказательство. Вначале заметим, что в силу теоремы Прохорова (см. [53, теорема 16.3]) сходимость конечномерных распределений влечет плотность семейства $\xi_n(m)$ для каждого $m \in D$. Поэтому ξ_n удовлетворяют условиям леммы 1.1.1 и является плотным семейством, а значит, их распределения μ_n компактны в топологии слабой сходимости. Следовательно, любая подпоследовательность $\{\mu_n\}$ содержит некоторую слабо сходящуюся подпоследовательность. Так как по своим конечномерным распределениям любая предельная точка для $\{\xi_n\}$ должна совпадать с $\tilde{\xi}$ на D, она единственна и (1.7) выполняется для $\tilde{\xi}$, из чего следует существование у нее гельдеровой на D версии. Ее можно продолжить по непрерывности до $C(M, S)$-значного случайного элемента ξ. Следовательно, $\{\mu_n\}$ компактно с ровно одной предельной точкой, совпадающей по распределению с ξ, поэтому ξ_n сходится по распределению к ξ. Кроме того, по теореме Александрова о слабой сходимости, $P(\xi \in X) \geqslant \limsup P(\xi_n \in X) = 1$, так что ξ может быть выбрана принимающей значения в X. □

Теперь мы докажем, что слабый стохастический интеграл существует для непрерывных ограниченных σ_t.

Теорема 1.1.3. *Пусть σ_t – это непрерывный $L(H)$-значный $\mathcal{F}_t$-предсказуемый процесс, для которого $\mathbb{E}\sup_{s \leqslant T} |\sigma_s|_{L(H)} < \infty$ для любого $T > 0$. Тогда слабый интеграл $\int_0^t \sigma_s dW_s$ существует и представляет собой непрерывный X-значный случайный процесс.*

Доказательство. Для удобства, докажем утверждение для $X \subset C(M, \mathbb{R})$. В общем случае рассуждение аналогично. Введем на $E := \mathbb{R}^{[0,\infty)\times M}$ цилиндрическую σ-алгебру и рассмотрим случайный элемент x на E, определенный как

$$x_t(z) := \int_0^t \langle \sigma_s^* \delta_z, dW_s \rangle.$$

Выберем ортонормированный базис $\{e_j\}$ пространства H и обозначим через P_n ортогональную проекцию на первые n векторов. Рассмотри разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ полупрямой $[0, \infty)$, для которого $\max\{|t_i - t_{i-1}|\} < 1/n$, и определим

$$x_t^n := \sigma_{t_0} P_n (W_{t_1 \wedge t} - W_{t_0 \wedge t}) + \ldots + \sigma_{t_{k-1}} P_n (W_{t_k \wedge t} - W_{t_{k-1} \wedge t}) + \ldots ,$$

где $P_nW_t := \sum_1^n W(I_{[0,t]}\otimes e_i)e_i$. Несложно видеть, что $x_t^n = \int_0^t \sigma_s^n P_n dW_s$, где $\sigma_t^n = \sum_i I_{[t_i,t_{i+1})}\sigma_{t_i}$. Тогда для каждого $z \in M$ из свойств стохастического интеграла следует, что

$$\mathbb{E}(\langle\delta_z, x_t^n\rangle - \langle\delta_z, x_t\rangle)^2 = \mathbb{E}[\int_0^t ((\sigma_s^n P_n - \sigma_s)^*\delta_z, dW_s)]^2 = \mathbb{E}\int_0^t |(\sigma_s^n P_n - \sigma_s)^*\delta_z|^2 ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbb{E}\int_0^t |(\sigma_s^n - \sigma_s)|^2_{L(H)} ds + 2\mathbb{E}\int_0^t |(P_n - I)\sigma_s^*\delta_z|^2 ds.$$

По теореме Лебега, это выражение стремится к нулю, что означает, в частности, что x^n сходится в смысле конечномерных распределений к x. Из неравенства Буркхольдера получаем:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|x_t^n(z) - x_{t'}^n(z')|^p \lesssim \mathbb{E}|x_t^n(z) - x_t^n(z')|^p + \mathbb{E}|x_t^n(z') - x_{t'}^n(z')|^p = \\
&= \mathbb{E}|\langle x_t^n, \delta_z - \delta_{z'}\rangle|^p + \mathbb{E}|x_t^n(z') - x_{t'}^n(z')|^p \lesssim \\
&\lesssim \mathbb{E}(\int_0^t |\sigma_s^{n*}(\delta_z - \delta_{z'})|^2)^{p/2} ds + \mathbb{E}(\int_t^{t'} |\sigma_s^{n*}\delta_{z'}|^2)^{p/2} ds \lesssim \\
&\qquad\qquad \lesssim \mathbb{E}\sup_{s\leqslant T}|\sigma_s|^p_{L(H)}[d(z,z')^{\gamma p} + |t-t'|^{p/2}] \lesssim [|t-t'| + d(z,z')]^{N+1}
\end{aligned}$$

для $T > 0$ и достаточно большого p. По лемме 1.1.2, у x_t имеется непрерывная версия на $[0,T]$ и $x \in C([0,T],X)$ почти наверное. Так как непрерывная версия однозначно определяется своими конечномерными распределениями, получаем непрерывный процесс на всей полупрямой, определяя его на $[0,T_n]$, $T_n \to \infty$. Так как семейство функционалов $\overline{M} := \{\delta_z \otimes v_j, z \in M, 1 \leqslant j \leqslant n\} \subset X^* \subset H$ разделяет точки, оно тотально в H, поэтому $\langle Y_t, \phi\rangle$ для $\phi \in X^*$ может быть приближено в H, а значит, и $*$-слабо в X^*, некоторой последовательностью $\{\phi_n\} \subset \mathrm{span}(\overline{M})$ и

$$\langle Y_t, \phi\rangle = \text{п.в.-}\lim\langle Y_t, \phi_n\rangle = L^2\text{-}\lim\int_0^t \langle\sigma_s^*\phi_n, dW_s\rangle = \int_0^t \langle\sigma_s^*\phi, dW_s\rangle,$$

что завершает доказательство. □

Обозначим $\overline{M} := \{\delta_z \otimes v_j, z \in M, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и пусть σ_s как и в теореме 1.1.3. $\mathcal{F}_t$-согласованный $\mathbb{R}^{\overline{M}}$-значный процесс x_t назовем *слабым мартингалом* с ковариацией $\int_0^t \sigma_s\sigma_s^* ds$, если для каждого $\phi \in \overline{M}$ процесс $x_t(\phi)$ является вещественно-значным мартингалом и

$$[x(\phi), x(\phi')]_t = \int_0^t (\sigma_s^*\phi, \sigma_s^*\phi')_H ds$$

для всех $\phi, \phi' \in \overline{M}$. Следующее предложение есть следствие доказанного Ондреятом в [71] обобщения теоремы о представлении мартингалов.

Предложение 1.1.4. *Для любого слабого мартингала x с ковариацией $\int_0^t \sigma_s\sigma_s^* ds$ можно построить такое расширение нашего вероятностного пространства, что на нем существует цилиндрическое броуновское движение W_t, для которого $\langle\phi, x_t\rangle = \int_0^t(\sigma_s^*\phi, dW_s)$ почти наверное для всех $\phi \in \overline{M}$.*

Доказательство. Расширим наше вероятностное пространство так, чтобы на нем можно было определить счетный набор одномерных броуновских движений, независимых от чего-либо в изначальном пространстве и друг от друга. Обозначим $D := \mathrm{span}(\overline{M})$ и продолжим $x_t(\phi)$ по линейности на все $\phi \in D$. Так как D разделяет точки X, выполняются условия теоремы [71, теорема 3.1], по которой существует такое цилиндрическое броуновское движение W_t, что $x_t(\phi) = \int_0^t (\sigma_s^* \phi, dW_s)$ для всех $\phi \in D$. □

1.2 Перенос процессов на группу токов

1.2.1 Конечномерный случай

Пусть дано полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, на котором введен право-непрерывный поток $\mathcal{F}_t$ полных σ-алгебр. Рассмотрим компактную группу Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим расстояние, порожденное би-инвариантной метрикой на G, через $\rho(\cdot,\cdot)$. В силу компактности можно считать, что G – это матричная группа, а $\mathfrak{g}$ – ее касательное пространство в единице e. Выберем некоторый $\mathfrak{g}$-значный $\mathcal{F}_t$-семимартингал x_t и $\mathcal{F}_0$-измеримую G-значную случайную величину ξ. Рассмотрим стохастическое уравнение в форме Стратоновича на пространстве матриц:

$$\partial_t g_t = g_t \cdot \partial_t x_t, \quad g_0 = \xi. \tag{1.8}$$

Коэффициенты этого уравнения липшицевы и имеют линейный рост, поэтому решение существует и единственно на всей прямой (см. [44, предложение 1.1.11, теорема 1.1.9]). Фиксируем ортонормированный базис $\{v_j\}$ алгебры $\mathfrak{g}$, тогда можно переписать (1.8) в виде

$$\partial_t g_t = \sum g_t v_j \partial_t (x_t, v_j)_{\mathfrak{g}}, \quad g_0 = \xi.$$

Так как gv_j есть лево-инвариантное векторное поле в точке g, то из стандартной теории стохастических уравнений на многообразиях (см. [44, предложение 1.2.8]) следует, что решение принимает значения в G. Обозначим это решение как $I(x,\xi) := g$ и заметим, что в силу единственности $I(x,\xi) = \xi I(x,e)$.

Через $[x,y]_t = ([x_i,y_j]_t)_{ij}$ обозначим матрицу ковариаций $\mathfrak{g}$-значных семимартингалов x_t, y_t, а через $|[x,y]_t|$ какую-нибудь ее матричную норму. Для векторно-значного процесса a_t ограниченной вариации определим $|a|_t := \sum_i |a_i|_t$, где $|a_i|_t$ есть вариации его компонентов.

Лемма 1.2.1. *Рассмотрим $\mathfrak{g}$-значные непрерывные семимартингалы $x_t = m_t + a_t$ и $y = n_t + b_t$, где m_t, n_t и a_t, b_t являются, соответственно, мартингалами и процессами ограниченной вариации. Положим $g = I(x,\xi)$, $f = I(y,\xi)$, тогда на любом фиксированном интервале $[0,T]$ для $p \geqslant 1$ выполняется:*

1. $\mathbb{E}\sup_{s\leqslant t} \rho(g_s, f_s)^p \leqslant C_1\{\mathbb{E}[(|[n]|_t^{p/2}+1)|[m-n]_t|^{p/2}] + \mathbb{E}|[a-b]|_t^p + \mathbb{E}|[m-n]_t|^p\}$.
2. $\mathbb{E}\rho(g_s, g_t)^p \lesssim C_2\{\mathbb{E}([m]_t - [m]_s)^{p/2} + \mathbb{E}|a|_t^p + \mathbb{E}([m]_t - [m]_s)^p\}$.

Здесь константы C_1, C_2 зависят от p, T и выбора матричной нормы.

Доказательство. Легко проверяется, что $\partial_t f_t^{-1} = -\partial_t y_t \cdot f_t^{-1}$, следовательно,

$$\partial_t(g_t f_t^{-1}) = g_t\partial_t x_t f_t^{-1} - g_t\partial_t y_t f_t^{-1} = g_t f_t^{-1} f_t(\partial_t x_t - \partial_t y_t) f_t^{-1}.$$

Так как функция расстояния $g \to \rho(e, g)$ совпадает с евклидовой нормой в некоторой координатной окрестности единицы, можно выбрать гладкие функции $R_i \in C^\infty(G)$ такие, что $R_i(e) = 0$ и $\rho(e, g) \leqslant \sum_i |R_i(g)|$ для всех $g \in G$. Обозначим через $\tilde{v}_j$ левоинвариантные векторные поля, соответствующие элементам v_j ортонормированного базиса $\mathfrak{g}$, тогда по формуле Ито находим:

$$\begin{aligned} R_i(g_t f_t^{-1}) = &\sum\nolimits_j \tilde{v}_j R_i(Ad(f_t)d(x_t - y_t), v_j)_{\mathfrak{g}} + \\ &+ 1/2 \sum\nolimits_{l,k,j} \tilde{v}_k \tilde{v}_j R_i(Ad(f_t)v_l, v_j)_{\mathfrak{g}}(Ad(f_t)v_k, v_j)_{\mathfrak{g}}(d[x-y]_t)_{lk} + \\ &+ 1/2 \sum\nolimits_{l,k,j} \tilde{v}_j R_i(\tilde{v}_k Ad(f_t)v_l, v_j)_{\mathfrak{g}} d[y_k, x_l - y_l]_t. \end{aligned}$$

Так как G компактно, все функции R_i и Ad равномерно ограничены со всеми своими производными. Кроме того, функционалы $z \otimes v_j$ равномерно ограничены в X^*, а значит, и в H, поэтому из неравенства Буркхольдера получаем:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\sup\nolimits_{s\leqslant t}\rho(g_s, f_s)^p = \mathbb{E}\sup\nolimits_{s\leqslant t}\rho(g_s f_s^{-1}, e)^p \lesssim \sum\nolimits_i \mathbb{E}\sup\nolimits_{s\leqslant t}|R_i(g_s f_s^{-1})|^p \lesssim \\ &\lesssim \mathbb{E}|[m-n]_t|^{p/2} + \mathbb{E}|[a-b]|_t^p + \mathbb{E}|[m-n]_t|^p + \mathbb{E}|[n, n-m]|_t^p \lesssim \\ &\lesssim \mathbb{E}|[m-n]_t|^{p/2} + \mathbb{E}|[a-b]|_t^p + \mathbb{E}|[m-n]_t|^p + \mathbb{E}|[n]|_t^{p/2}|[n-m]_t|^{p/2} \lesssim \\ &\lesssim \mathbb{E}[(|[n]|_t^{p/2}+1)|[m-n]_t|^{p/2}] + \mathbb{E}|[a-b]|_t^p + \mathbb{E}|[m-n]_t|^p, \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение. Второе вытекает из первого, если взять $y_u := x_s$, $x_u := x_{s+u}$ и $\xi := g_s$. □

1.2.2 Общий случай

Для некоторого связного компактного риманова многообразия M (возможно, с краем) рассмотрим группу $C(M, G)$ непрерывных отображений $M \to G$, называемую здесь группой токов. Роль ее "алгебры Ли" играет пространство $C(M, \mathfrak{g})$. Предположим, что на замкнутом подпространстве $X \subset C(M, \mathfrak{g})$ задана структура абстрактного винеровского пространства (X, H, i). Обозначим соответствующее X-значное броуновское движение через W_t, а его распределение на $\Omega := C([0, \infty), X)$ через P.

Рассмотрим также группу Y, определенную как минимальная замкнутая подгруппа $C(M, G)$ по отношению к метрике $\rho_\infty(g, f) := \sup_{z\in M}\rho(g(z), f(z))$, содержащая множество $\{e^{h(\cdot)}, h \in H\}$.

Выберем непрерывные предсказуемые процессы σ_t и b_t со значениями, соответственно, в $L(H)$ и H, существенно ограниченные равномерно на каждом интервале $[0, T]$. Определим

$$x_t := \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t b_s ds,$$

где первое слагаемое корректно определено в силу теоремы 1.1.3, а второе есть определенный почти всюду интеграл Бохнера. В обозначениях введенных в начале раздела 1.1.3,

$$x_t(z) = \int_0^t (\sigma_s^* \delta_z, dW_s) + \int_0^t (b_s, \delta_z) ds$$

представляет из себя непрерывный $\mathfrak{g}$-значный семимартингал для каждого $z \in M$.

Лемма 1.2.2. *Пусть*

$$\begin{aligned} x_t &:= \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t b_s ds, \\ x'_t &:= \int_0^t \sigma'_s dW_s + \int_0^t b'_s ds, \end{aligned}$$

где σ, σ', b, b' удовлетворяют вышеприведенным условиям. Для некоторой $\mathcal{F}_0$-измеримой $C(M,G)$-значной случайной величины $\xi(z)$ положим $g(z) := I(x(z), \xi(z))$, $g'(z) := I(x'(z), \xi(z))$ для каждого $z \in M$. Фиксируем $T > 0$, тогда для всех $s, t \leqslant T$, $z, z' \in M$

1. $\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} |x_s(z) - x'_s(z')|^p \lesssim d(z,z')^{\gamma p} + \mathbb{E} \int_0^t |(\sigma_s - \sigma'_s)^* \delta_z|^p ds,$
2. $\mathbb{E}|x_t(z) - x_s(z)|^p \lesssim |s-t|^{p/2},$
3. $\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} \rho(g_s(z), g'_s(z'))^p \lesssim d(z,z')^{\gamma p} + \mathbb{E} \int_0^t |(\sigma_s - \sigma'_s)^* \delta_z|^p ds + \mathbb{E} \int_0^t |(b_s - b'_s, \delta_z)|^p_{\mathfrak{g}} ds,$
4. $\mathbb{E}\rho(g_s(z), g_t(z))^p \lesssim |s-t|^{p/2}.$

Доказательство. Из свойств стохастического интеграла получаем:

$$[\langle x_t - x'_t, \delta_z \rangle_i, \langle x_t - x'_t, \delta_z \rangle_j]_t = \int_0^t ((\sigma_s - \sigma'_s)\delta_z \otimes v_i, (\sigma_s - \sigma'_s)\delta_z \otimes v_j)_H ds,$$

$$[\langle x_t, \delta_z - \delta_{z'} \rangle_i, \langle x_t, \delta_z - \delta_{z'} \rangle_j]_t = \int_0^t (\sigma_s(\delta_z \otimes v_i - \delta_{z'} \otimes v_i), \sigma_s(\delta_z \otimes v_j - \delta_{z'} \otimes v_j))_H ds.$$

Учитывая ограниченностью коэффициентов, пункт 1 теперь вытекает из неравенства Буркхольдера и условия (1.6) на H. Так как $\delta_z, \delta_{z'}, t$ также равномерно ограничены, степени '$2p$' в лемме 1.2.1 можно заменить на 'p' с точностью до умножения на константу. Тогда пункт 3 вытекает из леммы 1.2.1 и пункта 1. Полагая $x'_t := x_{t \wedge s}$, $z = z'$ при $s < t$ с помощью тех же рассуждений получаем оценки 2 и 4. □

Теорема 1.2.3. *Пусть ξ – это Y-значная случайная величина, σ_t, b_t удовлетворяют тем же условиям, что и раньше,*

$$x_t(z) = \int_0^t (\sigma_s^* \delta_z, dW_s) + \int_0^t (b_s, \delta_z) ds.$$

Тогда существует единственный (потраекторно) Y-значный непрерывный процесс g_t такой, что $g_t(z) = I(x(z), \xi(z))_t$ для всех $z \in M$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. Определим g как случайный элемент в $G^{[0,\infty) \times M}$ через $g_t(z) := I(x(z), \xi(z))_t$. Фиксируем $T > 0$, тогда, в силу леммы 1.2.2, имеем для $z, z' \in M$ неравенство

$$\mathbb{E}\rho(g_t(z), g_t(z'))^p \lesssim d(z,z')^{\gamma p},$$

а также

$$\mathbb{E}\rho(g_s(z), g_t(z))^p \lesssim |t-s|^{p/2}.$$

При достаточно большом p применима лемма 1.1.1 и получаем, что у g найдется версия с значениями в $C([0,T] \times M, G)$. Так как любые два непрерывных процесса, совпадающие почти наверное поточечно, совпадают и потраекторно, мы получаем непрерывный процесс на всей полупрямой, определив его на каждом $[0, T_n]$, $T_n \to \infty$. По тем же соображениям, так как $I(x(z), \xi(z))$ определен однозначно для каждого z, любые два процесса, подходящие под утверждение теоремы совпадают потраекторно (с точностью до почти всюду). Остается показать, что g_t принимает значения в Y – этот факт доказывается в лемме 1.2.4 ниже. □

Определение 1.2.1. Построенный выше процесс g называем *переносом* x на G и пишем $g := \mathcal{I}(x, \xi)$. В случае, когда x_t – это X-значное броуновское движение, процесс g_t будем называть *броуновским движением* на Y.

1.2.3 Приближения Вонга-Закая

В этом разделе мы построим приближения типа Вонга-Закая (см., например, [55] и ссылки внутри) к $\mathcal{I}(g, \xi)$. Сначала заметим, что (1.8) может быть переписано как

$$g_t = \phi(g_t) \cdot \partial_t x_t, \quad g_0 = \xi$$

для некоторой гладкой матрично-значной функции ϕ с компактным носителем, определенной на пространстве матриц, куда вложена группа G, и для которой $\phi(g) \equiv g$ в некоторой окрестности множества G. Если $\xi \in G$, то решение совпадает с решением (1.8), но теперь коэффициенты формально являются ограниченными. Рассмотрим последовательность разбиений $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n < \ldots\}$ таких, что каждое π_{n+1} содержится в π_n и их мелкость стремится к нулю по мере увеличения n. Для непрерывного $\mathfrak{g}$-значного семимартингала x_t определим итеративно

$$x_t^n := x_{t_k}^n + \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k), \quad \text{при } t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Из известных результатов о приближениях Вонга-Закая (см. [55, теорема 1]) следует, что решения $\tilde{g}_t^n$ детерминированных дифференциальных уравнений

$$d\tilde{g}_t^n = \phi(\tilde{g}_t^n) \cdot dx_t^n, \quad \tilde{g}_0 = \xi$$

стремятся к g_t по вероятности, равномерно на ограниченных интервалах. В нашем случае, эти решения могут быть явно выписаны:

$$\tilde{g}_t^n = \xi e^{x_{t_1} - x_{t_0}} \cdot e^{x_{t_1} - x_{t_0}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(x_{t_{k+1}} - x_{t_k})}, \quad \text{при } t \in (t_k, t_{k+1}].$$

В частности, отсюда видно, что они принимают значения в G, если только $\xi \in G$. Однако такие приближение не очень хорошо подходят для наших методов слабой сходимости. Поэтому вместо них мы рассмотрим несколько иные приближения, которые иногда используют для доказательства сходимости стандартных (см. [29])):

$$g_t^n = \xi e^{x_{t_1} - x_{t_0}} \cdot e^{x_{t_2} - x_{t_1}} \cdot \ldots \cdot e^{x_t - x_{t_k}}, \quad \text{для } t \in (t_k, t_{k+1}].$$

В отличие от $\tilde{g}_t^n$, процессы g_t^n являются $\mathcal{F}_t$-согласованными. Их дифференциалы Ито были явно вычислены в [29, раздел А.4]:

$$dg_t^n = g_t^n(\Lambda_{x_t - x_{t\_}} dx_t + 1/2\Gamma_{x_t - x_{t\_}}(dx_t, dx_t)),$$

где t_- обозначает ближайшую к t точку $t_k \in \pi_n$ и

$$\Lambda_B A := \int_0^1 e^{-\tau ad_B} A d\tau,$$
$$\Gamma_B(A,A) := (\Lambda_B A)^2 - \int_0^1 \int_0^1 [e^{-s\tau ad_B} A, e^{-\tau ad_B} A] d\tau ds.$$

Так как $e^{adB} A = Ad(e^B)A$ и G компактно, все экспоненты в этих формулах равномерно ограничены, независимо от B, так что Λ и Γ представляют собой многочлены от A, соответственно, первого и второго порядка с ограниченными коэффициентами. Пользуясь этими соображениями, можно доказать следующее утверждение:

Лемма 1.2.4. *Пусть $g = \mathcal{I}(x,\xi)$ для X-значного процесса x_t и $\mathcal{F}_0$-измеримой Y-значной случайной величины ξ, тогда приближения $g_t^n(z)$, определенные как*

$$g_t^n(z) := \xi(z) e^{x_{t_1}(z) - x_{t_0}(z)} \cdot e^{x_{t_2}(z) - x_{t_1}(z)} \cdot \ldots \cdot e^{x_t(z) - x_{t_k}(z)}, \ \textit{for } t \in (t_k, t_{k+1}], \tag{1.9}$$

слабо сходятся к g на $C([0,T]\times M, G)$, для любого $T > 0$. В частности, траектории g_t почти наверное лежат в Y.

Доказательство. Для $z \in M$ положим:

$$y_t^n(z) := dm_t^n(z) + da_t^n(z) := \Lambda_{x_t(z) - x_{t_-}(z)} dx_t(z) + 1/2\Gamma_{x_t(z) - x_{t_-}(z)}(dx_t(z), dx_t(z)),$$

тогда, в силу ограниченности Γ и Λ (равномерно по всем параметрам и n) как многочленов от $dx_t(z)$, получаем:

$$|[m^n(z)]_t| \lesssim |[x(z)]_t|,$$
$$|a^n(z)|_t \lesssim |[x(z)]_t| + \int_0^t |(b_s, \delta_z)| ds.$$

Используя леммы 1.2.1 и 1.2.2, находим:

$$\mathbb{E}\rho(g_t^n(z), g_t^n(z'))^p \lesssim d(z,z')^{\gamma p},$$
$$\mathbb{E}\rho(g_s^n(z), g_t^n(z))^p \lesssim |t-s|^{p/2},$$

для $s,t \leqslant T$ при фиксированном $T > 0$. Заметим, что для $t \in \pi_k$, $k \leqslant n$, величина g_t^n совпадает с соответствующим значением приближения Вонга-Закая:

$$\tilde{g}_t^n(z) = \xi(z) e^{x_{t_1}(z) - x_{t_0}(z)} \cdot e^{x_{t_1}(z) - x_{t_0}(z)} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}(x_{t_{k+1}}(z) - x_{t_k}(z))}, \ \ t \in (t_k, t_{k+1}].$$

Так как последнее, в силу [55, теорема 1], сходится по вероятности к $g_t(z)$ для любых фиксированных t и z, конечномерные распределения g^n сходятся для точек из плотного множества $\cup_n \pi_n \times M \subset [0,\infty)\times M$. Так как Y – группа и содержит $\{e^{x(\cdot)}, x \in X\}$, все g^n принимают значения в Y. Следовательно, по лемме 1.1.2, на каждом отрезке g^n сходится слабо к g и $g \in C([0,T], Y)$ почти всюду. $\square$

Теперь мы докажем такой же результат для самих приближений Вонга-Закая.

Лемма 1.2.5. *В условиях леммы 1.2.4 процессы $\tilde{g}^n_t(z)$, определенные как*

$$\tilde{g}^n_t(z) := \xi(z)e^{x_{t_1}(z)-x_{t_0}(z)} \cdot \ldots \cdot e^{(x_{t_{k+1}}(z)-x_{t_k}(z))\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}},\ t \in (t_k, t_{k+1}],$$

сходятся к g по распределению на $C([0,T] \times M, G)$ для каждого $T > 0$.

Доказательство. Определим g^n как (1.9), тогда, в силу би-инвариантности метрики G,

$$\sup_{t \leqslant T, z \in M} \rho(g^n(z), \tilde{g}^n(z)) \leqslant \sup_{t \leqslant T, z \in M} \rho(e^{(x_{t_{k+1}}(z)-x_{t_k}(z))\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}}, e^{x_t(z)-x_{t_k}(z)}) \lesssim$$
$$\lesssim \sup_{s,t \leqslant T, |s-t| < mesh(\pi_n), z \in M} |x_s(z) - x_t(z)|_{\mathfrak{g}} \to 0$$

почти всюду, при $n \to \infty$. Таким образом, для каждой равномерно непрерывной ограниченной $f : C([0,T] \times M, G) \to \mathbb{R}$, получаем:

$$\lim_n \mathbb{E} f(\tilde{g}^n) = \lim_n \mathbb{E}(f(\tilde{g}^n) - f(g^n)) + \lim_n \mathbb{E} f(g^n) = \mathbb{E} f(g),$$

в силу теоремы Лебега и предыдущей леммы. □

1.3 Построение диффузий

1.3.1 Решения стохастического дифференциального уравнения

В этом разделе мы будем работать со следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_t = \int_0^t \sigma(s, g_s) dW_s + \int_0^t b(s, g_s) ds, \\ g = \mathcal{I}(x, \xi). \end{cases} \tag{1.10}$$

Определение 1.3.1. Говорим, что уравнение (1.10) допускает *сильное решение*, если для заданного полного вероятностного пространства $(\Omega, P, \mathcal{F})$, право-непрерывного потока полных σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_0$-измеримой Y-значной случайной величины ξ и цилиндрического $\mathcal{F}_t$-броуновского движения W_t существует Y-значный процесс g_t, удовлетворяющий (1.10). Это, в частности, подразумевает интегрируемость $\sigma(t, g_t)$ и $b(t, g_t)$. Говорим, что (1.10) допускает *слабое решение*, если для заданной меры μ_0 на Y существует все вышеперечисленные объекты, причем распределение ξ есть μ_0. *Единственность* сильного решения подразумевается в смысле совпадения почти всюду как случайных элементов в $C([0, \infty), Y)$.

Далее будем считать, что нам дано фиксированное полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, право-непрерывный поток полных σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ на нем и X-значное $\mathcal{F}_t$-броуновское движение W_t. Рассмотрим следующие условия на коэффициенты.

1. $\sigma : [0, \infty) \times Y \to L(H)$ непрерывно в топологии нормы и равномерно ограничено на любом компактном интервале.

2. $b : [0, \infty) \times Y \to H$ непрерывно по норме X и равномерно ограничено по норме H на каждом компактном интервале.

3. σ, b липшицевы в следующем смысле: для каждого $z \in M$ и $T > 0$, равномерно по $t \in [0, T]$ и $g \in Y$ выполнено:

$$\begin{aligned} &|(\sigma(t, g) - \sigma(t, g'))^* \delta_z| \leqslant C\rho(g(z), g'(z)), \\ &|(b(t, g), \delta_z) - (b(t, g'), \delta_z)| \leqslant C\rho(g(z), g'(z)), \end{aligned}$$

   где константа C может зависеть от z и T.

Замечание 1.3.1. Такое "поточечное" условие липшицевости связано с нашим способом построения процессов - сначала в отдельных точках, а потом склеивая их вместе в непрерывную версию. Наиболее естественными примерами коэффициентов, удовлетворяющих третьему условию, являются отображения вида $(\sigma(g)h)(z) = f_\sigma(g(z))h(z)$ и $b(g)(z) = f_b(g(z))$, где f_σ, f_b – некоторые достаточно хорошие функции $G \to L(\mathfrak{g})$ и $G \to \mathfrak{g}$ соответственно. Заметим также, что равномерная ограниченность – гораздо менее ограничительное условие, чем может показаться, потому что группа компактна, а значит, например, все многочлены от матричных коэффициентов автоматически будут ограниченными, как и операторы умножения на них.

В дальнейшем мы покажем, что при выполнении 1-2 уравнение (1.10) допускает слабое решение, а если выполнено также 3, то существует единственное сильное решение.

Теорема 1.3.1. *Пусть коэффициенты σ, b удовлетворяют условиям 1-3, тогда уравнение* (1.10) *допускает единственное сильное решение для любого случайного элемента ξ на Y.*

Доказательство. Мы будем использовать стандартный метод итераций Пикара. Определим рекуррентно

$$\begin{cases} x_t^{n+1} := \int_0^t \sigma(s, g_s^n) dW_s + \int_0^t b(s, g_s^n) ds, \\ g^{n+1} := \mathcal{I}(x^{n+1}, \xi), \\ g^0 := \xi, \ x^0 := 0. \end{cases}$$

Выберем $T > 0$, для $z, z' \in M$ из свойств стохастического интеграла получаем:

$$[\langle x^n, \delta_z \rangle_i, \langle x^n, \delta_{z'} \rangle_j]_t = \int_0^1 (\sigma(s, g_s^{n-1})^* (\delta_z \otimes v_i), \sigma(s, g_s^{n-1})^* (\delta_{z'} \otimes v_j))_H ds.$$

Фиксируем сначала некоторый $z \in M$. Имеем:

$$[\langle x^n, \delta_z \rangle_i - \langle x^m, \delta_z \rangle_i]_t = \int_0^t |(\sigma(s, g_s^{n-1})^* - \sigma(s, g_s^{m-1}))^* (\delta_z \otimes v_i)|^2 ds \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^t \rho(g_s^{n-1}(z), g_s^{m-1}(z))^2 ds. \quad (1.11)$$

Выпишем аналогичную оценку для (b, δ_z):

$$\mathbb{E} \int_0^t |(b(s, g_s^{n-1}) - b(s, g_s^{m-1}), \delta_z)|_{\mathfrak{g}}^2 ds \lesssim \mathbb{E} \int_0^t \rho(g_s^{n-1}(z), g_s^{m-1}(z))^2 ds. \quad (1.12)$$

Тогда из леммы 1.2.2 следует

$$\mathbb{E}(\max_{t\leqslant T}\rho(g^n_t(z),g^{n-1}_t(z)))^2\leqslant C\cdot\mathbb{E}\int_0^T\rho(g^{n-1}_t(z),g^{n-2}_t(z))^2dt.$$

Повторно применяя это неравенство и используя ограниченность коэффициентов и компактность G, получаем:

$$\mathbb{E}(\max_{t\leqslant T}\rho(g^n_t(z),g^{n-1}_t(z)))^2\lesssim\frac{C^n}{n!},$$

следовательно

$$P(\max_{t\leqslant T}\rho(g^n_t(z),g^{n-1}_t(z))>1/2^n)\lesssim\frac{(4C)^n}{n!}.$$

В силу леммы Бореля-Кантелли на множестве полной меры имеет место $\max_{t\leqslant T}\rho(g^n_t(z),g^{n-1}_t(z))\leqslant 1/2^n$ для достаточно больших n. Таким образом, $g^n_t(z)$ почти наверное сходится к некоторому процессу $g_t(z)$, равномерно по $t\leqslant T$.

Определим таким образом $g_t(z)$ для каждого z, тогда получим $G^{[0,T]\times M}$-значный случайный элемент. В силу леммы 1.2.2

$$\mathbb{E}\rho(g^n_t(z),g^n_t(z'))^p\lesssim d(z,z')^{\gamma p},$$
$$\mathbb{E}\rho(g^n_s(z),g^n_t(z))^p\lesssim|s-t|^{p/2},$$

равномерно по n, поэтому, по лемме 1.1.2, у g есть непрерывная версия со значениями в $C([0,T],Y)$. Используя те же рассуждения, что и в теореме 1.2.3, продолжаем процесс g_t на всю прямую.

Определим

$$x_t:=\int_0^t\sigma(s,g_s)dW_s+\int_0^t b(s,g_s)ds$$

и положим $\tilde g(z):=I(x(z),\xi(z))$. Тогда, по лемме 1.2.2, получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{t\leqslant T}\rho(g_t(z),\tilde g_t(z))^2\leqslant\limsup_{n\to\infty}\{\mathbb{E}\max_{t\leqslant T}\rho(g^n_t(z),\tilde g_t(z))^2\}\lesssim\\ \lesssim\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T|(\sigma(t,g^n_t)-\sigma(t,g_t))^*\delta_z|^2dt+\\ +\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T|(b(t,g^n_t)-b(t,g_t),\delta_z)|^2dt\lesssim\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\rho(g^n_t(z),g_t(z))^2=0.\end{aligned}$$

Таким образом, $g(z)=I(x(z),\xi(z))$ для любого $z\in M$.

Пусть существуют два решения g,g', тогда для каждых $z\in M$, $t\in[0,T]$, по лемме 1.2.2 получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\rho(g_t(z),g'_t(z))^2\lesssim\mathbb{E}\int_0^T|(\sigma(s,g_s)^*-\sigma(s,g'_s)^*\delta_z|^2ds+\\ +\mathbb{E}\int_0^T|(b(s,g_s)-b(s,g'_s),\delta_z)|^2_{\mathfrak{g}}ds\lesssim\mathbb{E}\int_0^T\rho(g_s(z),g'_s(z))^2ds.\end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини и лемму Гронуолла, получаем, что g и g' совпадают почти наверное в каждой точке, а значит, в силу непрерывности, и потраекторно. □

1.3.2 Мартингальная задача

Введем сначала понятие H-дифференцируемости на $Y \subset C(M, G)$ как более слабый аналог дифференцируемости по Гроссу в абстрактных винеровских пространствах (см. [39]), а именно, мы рассмотрим производную Гато по направлениям из H.

Пусть B – это некоторое банахово пространство. Говорим, что отображение $f : Y \to B$ является *H-дифференцируемым* в точке g, если для каждого $h \in H$ функция $t \mapsto f(g(\cdot)e^{th(\cdot)})$ дифференцируема в обычном смысле в точке $t = 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} f(ge^{th}) = f'(g)h,$$

где $f'(g) \in L(H, B)$. Определим следующий класс функций:

Определение 1.3.2. Через $\mathcal{FT}$ будем обозначать пространство всех ограниченных, дважды H-дифференцируемых функций $f : Y \to \mathbb{R}$ таких, что $f' : Y \to H$ непрерывна и равномерно ограничена, вторая производная $f''(g)$ непрерывна и ограниченна в норме пространства ядерных операторов. Кроме того, для любых $x, y \in H$ отображение $g \mapsto (f''(g)x, y)_H$ является гельдеровым.

Определим еще один класс функций - пространство $\mathcal{FC}^\infty$ цилиндрических отображений вида $F(g) = f(g(z_1), \dots, g(z_n))$, где $f \in C^\infty(G^n)$. Заметим, что $\mathcal{FC}^\infty \subset \mathcal{FT}$. Это можно проверить, записав:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} F''(g) &= \sum_m (f''(g)e_m, e_m) = \sum_{m,i,j,k,l} (e_m(z_i), v_k)_{\mathfrak{g}} (e_m(z_j), v_l)_{\mathfrak{g}} \partial^k_{z_i} \partial^l_{z_j} f = \\
&= \sum_{m,i,j,k,l} (e_m, \delta_{z_i} \otimes v_k)_H (e_m, \delta_{z_j} \otimes v_l)_H \partial^k_{z_i} \partial^l_{z_j} f = \sum_{i,j,k,l} (\delta_{z_i} \otimes v_k, \delta_{z_j} \otimes v_l)_H \partial^k_{z_i} \partial^l_{z_j} f,
\end{aligned}$$

где $\{v_j\}$ и $\{e_i\}$ – это ортонормированные базисы, соответственно, $\mathfrak{g}$ и H, а ∂^k_z обозначает дифференцирование вдоль лево-инвариантного векторного поля $\tilde{v}_k$, соответствующего вектору v_k, примененное к переменной $g(z)$.

Сформулируем теперь мартингальную задачу. Рассмотрим σ, b, удовлетворяющие 1,2 (не обязательно 3), обозначим $A := \sigma\sigma*$ и определим $\mathcal{L}_t$ как оператор на $\mathcal{FT}$ через:

$$\mathcal{L}_t f(g) := \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(t, g) f''(g) + (f'(g), b(t, g))_H. \tag{1.13}$$

Говорим, что Y-значный процесс g_t решает мартингальную задачу для $\mathcal{L}_t$ с начальным распределением μ_0, если распределение g_0 есть μ_0 и для каждого $f \in \mathcal{FC}^\infty$ процесс

$$M^f_t := f(g_t) - f(g_0) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(g_s) ds. \tag{1.14}$$

является $\sigma(g_s, s \leqslant t)$-мартингалом.

Тем же способом, каким мы считали $\operatorname{Tr} F''$, можно показать, что для $f \in \mathcal{FC}^\infty$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t f &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma^* f''(g) \sigma + (f'(g), b(t, g))_H = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,i,j,k,l} (\sigma e_m, \delta_{z_i} \otimes v_k)_H (\sigma e_m, \delta_{z_j} \otimes v_l)_H \partial^k_{z_i} \partial^l_{z_j} f + \sum_{i,k} (b, \delta_{z_i} \otimes v_k)_H \partial^k_{z_i} f = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} (\sigma^* \delta_{z_i} \otimes v_k, \sigma^* \delta_{z_j} \otimes v_l)_H \partial^k_{z_i} \partial^l_{z_j} f + \sum_{i,k} (b, \delta_{z_i} \otimes v_k)_H \partial^k_{z_i} f.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Таким образом, это действительно производящий оператор для процесса, удовлетворяющего уравнению (1.10). Позже будет показано (теорема 1.3.4), что в нашем случае (1.14) выполняется для всех $f \in \mathcal{FT}$, но пока более удобно определить мартингальную задачу для $\mathcal{FC}^\infty$, так как единственность, а также некоторые другие леммы, будут доказаны в этом контексте.

В следующей лемме показывается, что Y-значный процесс может быть перенесен обратно на алгебру Ли, то есть определена операция, обратная к введенной в теореме 1.2.3.

Лемма 1.3.2. *Пусть σ, b удовлетворяют 1,2. Предположим, что g_t решает* (1.14) *с начальным распределением μ_0 для $\mathcal{L}_t$, определенного в* (1.13). *Тогда на некотором расширении нашего вероятностного пространства g_t удовлетворяет* (1.10) *для некоторого X-значного броуновского движения W_t.*

Доказательство. Определим в пространстве матриц процесс

$$x_t(z) := \int_0^t g_s(z)^{-1} \partial_s g_s(z),$$

Обозначим через $Q(g)$ ортогональную проекцию из евклидова пространства матриц $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, в котором содержится G, на касательное пространство к G в точке g. Тогда несложно проверить, что $Q := g^{-1}Q(g)g$ является проекцией (не обязательно ортогональной) на алгебру Ли $\mathfrak{g}$, реализованную как касательное пространство к G в точке e. В силу леммы [44, лемма 2.3.3] можно записать

$$\partial_t x_t(z) = g_t(z)^{-1}\partial_t g_t(z) = g_t(z)^{-1}Q(g_t)\partial_t g_t(z) = Q g_t(z)^{-1}\partial_t g_t(z),$$

поэтому x_t принимает значения в $\mathfrak{g}$.

Фиксируем $z \in M$. Для простоты обозначений, в дальнейшем мы часто будем опускать эту переменную. Выберем ортонормированный базис $\{v_j\}$ в $\mathfrak{g}$. Для гладкой функции $f : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, ее производная относительно лево-инвариантного векторного поля $\tilde{v}_k = g v_k$ может быть записана как

$$\tilde{v}_k f = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(g e^{t v_k}) = (Df, g v_k) = (Df, \tilde{v}_k),$$

где Df обозначает дифференциал f в $\mathbb{R}^{n^2}$. Аналогично, $\tilde{v}_i \tilde{v}_j f = (D^2 f \tilde{v}_i, \tilde{v}_j) + (Df, g v_i v_j)$. Учитывая эти соображения, из (1.14) и (1.15) получаем:

$$df(g_t) = \text{мартингал} + (Df, g_t b(t, g_t))dt + 1/2 \sum\nolimits_{i,j} (Df, g v_i v_j)(\sigma^* \delta_z \otimes v_i, \sigma^* \delta_z \otimes v_j)_H dt +$$
$$+ 1/2 \sum\nolimits_{i,j} (D^2 f \tilde{v}_i, \tilde{v}_j)(\sigma^* \delta_z \otimes v_i, \sigma^* \delta_z \otimes v_j)_H dt.$$

С другой стороны, по формуле Ито,

$$df(g_t) = (Df, dg_t) + 1/2(D^2 f dg_t, dg_t).$$

Выберем ортонормированный базис $\{e_i\}$ в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$. Беря в качестве f координатные функции, находим:

$$dg_t = \text{мартингал} + g_t b(t, g_t)dt + 1/2 \sum_{i,j} g v_i v_j (\sigma^* \delta_z \otimes v_i, \sigma^* \delta_z \otimes v_j)_H dt. \tag{1.16}$$

Теперь, выбирая $f = (e_i, g)(e_j, g)$, получаем также:

$$d[(g, e_k), (g, e_l)]_t = \sum\nolimits_{i,j} (e_k, \tilde{v}_i)(e_l, \tilde{v}_j)(\sigma^* \delta_z \otimes v_i, \sigma^* \delta_z \otimes v_j)_H.$$

Заметим, что

$$0 = d(g_t^{-1} g_t) = \partial_t g_t^{-1} g_t + g_t^{-1} \partial_t g_t.$$

Обозначая через g_{kl} матричные координаты и опуская индекс t, пишем:

$$\begin{aligned}(dg^{-1}dg)_{kl} = -(g^{-1}dgg^{-1}dg)_{kl} = \\ = -\sum g^{-1}_{ku}(\tilde{v}_i, e_{uv}) g^{-1}_{vw}(\tilde{v}_j, e_{wl})(\sigma^*\delta_z \otimes v_i, \sigma^*\delta_z \otimes v_j)dt = \\ = -\sum g^{-1}_{ku} g_{up}(v_i)_{pv} g^{-1}_{vw} g_{wq}(v_j)_{ql}(\sigma^*\delta_z \otimes v_i, \sigma^*\delta_z \otimes v_j)dt = \\ = -\sum (v_i v_j)_{kl}(\sigma^*\delta_z \otimes v_i, \sigma^*\delta_z \otimes v_j)dt.\end{aligned}$$

Используя это выражение и (1.16), вычисляем:

$$dx_t = g_t^{-1} dg_t + 1/2 dg_t^{-1} dg_t = \text{мартингал} + b dt.$$

Наконец, выбирая $z, z' \in M$, получаем:

$$\begin{aligned}[(x(z), v_u), (x(z'), v_w)]_t = \\ = [(g(z)^{-1}dg(z), v_u), (g(z')^{-1}dg(z'), v_w)]_t = \\ = \sum (g_t(z)^{-1}e_k, v_u)(g_t(z)v_i, e_k)(g_t(z')^{-1}e_l, v_w)(g_t(z')v_j, e_l)(\sigma^*\delta_z \otimes v_i, \sigma^*\delta_{z'} \otimes v_j)_H dt = \\ = \sum (v_i, v_u)(v_j, v_w)(\sigma^*\delta_z \otimes v_i, \sigma^*\delta_{z'} \otimes v_j)_H dt = \\ = (\sigma^*\delta_z \otimes v_u, \sigma^*\delta_{z'} \otimes v_w)_H dt.\end{aligned}$$

Обозначим через $m_t(z)$ мартингальную часть семимартингала $x_t(z)$. В силу предложения 1.1.4 на расширении нашего вероятностного пространства найдется X-значное броуновское движение W_t, для которого $m_t(z) = \int_0^t (\sigma(s, g_s)^* \delta_z, dW_s)$ для всех z. Тогда почти наверное

$$x_t = \int_0^t \sigma(s, g_s) dW_s + \int_0^t b(s, g_s) ds$$

и легко видеть, что $g = \mathcal{I}(x, \xi)$. □

Теорема 1.3.3. *Если σ, b удовлетворяют условиям 1,2, то уравнение* (1.10) *допускает слабое решение для любого начального распределения μ_0.*

Доказательство. Выберем некоторое вероятностное пространство, на котором задано X-значное броуновское движение W_t и независимая от него случайная величина ξ с распределением μ_0. Выберем последовательность разбиений $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_k^n < \ldots\}$, мелкости которых стремятся к нулю. Определим итеративно

$$x_t^n := x_{t_i}^n + \int_{t_i}^t \sigma(t_i, g_{t_i}^n) dW_s + \int_{t_i}^t b(t_i, g_{t_i}^n) ds, \quad t \in (t_i, t_{i+1}],$$

где g_t^n на $t \in (t_i, t_{i+1}]$ определено как перенос $x_{t_i+s}^n$ с начальным значением $g_{t_i}^n$. Положим $g_0^n := \xi$, $x_0^n := 0$. Обозначим $\sigma^n(g) := \sum_i I_{[t_i, t_{i+1})}(t) \sigma(t_i, g_{t_i})$, $b^n(g) :=$

$\sum_i I_{[t_i,t_{i+1})}(t)b(t_i, g_{t_i})$, тогда легко видеть, что g^n, x^n решают (1.10) с коэффициентами σ^n, b^n. Обозначим соответствующий оператор через $\mathcal{L}^n$, тогда g^n также решает мартингальную задачу (1.14). По лемме 1.2.2 имеем:

$$\mathbb{E}\rho(g_t^n(z), g_t^n(z'))^p \lesssim d(z,z')^{\gamma p},$$
$$\mathbb{E}\rho(g_s^n(z), g_t^n(z))^p \lesssim |s-t|^{p/2}.$$

Из леммы 1.1.1 следует, что последовательность $\{g^n\}$ плотна на каждом интервале $[0,T]$. Следовательно, она сходится по распределению вдоль некоторой подпоследовательности $\{g^{n_k}\}$ к $C(M,G)$-значному процессу g_t, определенному на каждом интервале, а значит, в силу непрерывности, и на всей полупрямой. По теореме Александрова о слабой сходимости, $P(g\in C([0,T],Y)) \geqslant \limsup P(g^{n_k}\in C([0,T],Y)) = 1$ и g_t принимает значения в Y. Из теоремы [53, теорема 4.30] следует, что на некотором другом вероятностном пространстве соответствующие случайные элементы g^{n_k} сходятся почти всюду к g. Выберем $\mathcal{B}(C[0,s],Y)$-измеримую непрерывную ограниченную функцию $R: C([0,\infty),Y)\to\mathbb{R}$ и $f\in\mathcal{FC}^\infty$, тогда на этом вероятностном пространстве

$$\mathbb{E}R(g)(f(g_t)-f(g_s)-\int_s^t \mathcal{L}_s f(s,g_s)ds) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}R(g^{n_k})(f(g_t^{n_k})-f(g_s^{n_k})-\int_s^t \mathcal{L}_s^n f(s,g_s^{n_k})ds) = 0,$$

по теореме Лебега. Таким образом, g решает (1.14) для $\mathcal{L}_t$, а следовательно, по лемме 1.3.2, оно решает (1.10) на расширенном вероятностном пространстве. □

Теперь мы докажем, что мартингальная задача (1.14) выполняется для более общего класса функций $\mathcal{FT}$.

Предложение 1.3.4. *Пусть σ, b удовлетворяют условиям 1,2. Предположим, что g_t – это Y-значное решение соответствующей мартингальной задачи, тогда соотношение* (1.14) *выполнено для всех $f\in\mathcal{FT}$.*

Доказательство. В силу леммы 1.3.2 можно выбрать вероятностное пространство, на котором $g=\mathcal{I}(x,\xi)$ и $x_t=\int_0^t\sigma(s,g_s)dW_s+\int_0^t b(s,g_s)ds$ для некоторого X-значного броуновского движения W_t.

Фиксируем $T>0$. Выберем ортонормированный базис $\{e_i\}\subset X^*$ пространства H и определим $P_n x := \sum_1^n\langle e_i, x\rangle e_i$. Легко видеть, что сужение этих операторов на H являются ортогональными проекторами. Положим $x^n := P_n x$ и $g^n := \mathcal{I}(x^n,\xi)$. В этом случае $x_t^n=\int_0^t P_n\sigma(s,g_s)dW_s+\int_0^t P_n b(s,g_s)ds$. По лемме 1.2.2 имеем:

$$\mathbb{E}\rho(g_t^n(z), g_t(z))^2 \lesssim \mathbb{E}\int_0^t |\sigma^*(I-P_n)\delta_z|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^t |((I-P_n)b,\delta_z)|_{\mathfrak{g}}^2 ds,$$

для всех $z\in M$, $t\leqslant T$, что стремится к нулю по теореме Лебега. В силу той же леммы

$$\mathbb{E}\rho(g_t^n(z), g_t^n(z'))^p \lesssim d(z,z')^{\gamma p},$$
$$\mathbb{E}\rho(g_s^n(z), g_t^n(z))^p \lesssim |s-t|^{p/2}.$$

Следовательно, по лемме 1.1.2, последовательность g^n сходится по распределению к g на $C([0,T],Y)$.

Построим теперь для каждого g^n приближения Вонга-Закая $g^{k,n}$, сходящиеся по распределению к g^n по лемме 1.2.5. Всегда можно считать, что T и некоторое фиксированное $\tau < T$ являются одними из точек разбиения.

Из доказательства леммы 1.2.4 видно, что $g^{n,k}(z)$ сходятся к $g^n(z)$ по вероятности для каждого z, следовательно, последовательность $\{(W,g,g^n,g^{k,n}), k \geqslant 1\}$ является плотной и стремится в смысле конечномерных распределений к (W,g,g^n,g^n). Тогда она сходится по распределению, а значит, в силу теоремы [53, теорема 4.30], случайные величины $(W,g,g^n,g^{k,n})$ могут быть представлены на некотором другом вероятностном пространстве так, чтобы $g^{k,n} \to g^n$ почти всюду.

Выберем ограниченную непрерывную $\mathcal{B}(C([0,\tau],Y))$-измеримую функцию R и $f \in \mathcal{FT}$. Тогда имеем:

$$\mathbb{E}R(g)(f(g_T) - f(g_\tau)) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}R(g^{n,k})(f(g^{n,k}_T) - f(g^{n,k}_\tau)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}R(g^{n,k})(f(g^{n,k}_\tau e^{x^n_{t_l}-x^n_\tau}\cdot\ldots\cdot e^{x^n_T - x^n_{t_k}}) - f(g^{n,k}_\tau)).$$

Последнее выражение можно представить в виде суммы разностей вида $\mathbb{E}R(g^{n,k})(f(qe^{x^n_v(z)-x^n_u(z)} - f(q))$, где $q = g^{n,k}_{t_i}$, $u = t_i$, $v = t_{i+1}$ для некоторого i. Так как x^n_t принимают значения в X^*, мы можем записать по формуле Тейлора:

$$f(qe^{x^n_v - x^n_u}) - f(q) = (f'(q), x^n_v - x^n_u) +$$
$$+ 1/2(f''(q)(x^n_v - x^n_u), x^n_v - x^n_u) + 1/2([f''(qe^{\eta(x^n_v - x^n_u)}) - f''(q)](x^n_v - x^n_u), x^n_v - x^n_u),$$

для некоторого $\eta \leqslant 1$. Тогда получаем сумму

$$\sum_i \mathbb{E}R(g^{n,k})\Big[(f'(g^{n,k}_{t_i}), x^n_{t_{i+1}} - x^n_{t_i}) + 1/2(f''(g^{n,k}_{t_i})(x^n_{t_{i+1}} - x^n_{t_i}), x^n_{t_{i+1}} - x^n_{t_i}) +$$
$$+ 1/2([f''(g^{n,k}_{t_i}e^{\eta_i(x^n_{t_{i+1}} - x^n_{t_i})}) - f''(g^{n,k}_{t_i})](x^n_{t_{i+1}} - x^n_{t_i}), x^n_{t_{i+1}} - x^n_{t_i})\Big].$$

Мы будем по-очереди разбираться с каждым из этих слагаемых.

1. Выпишем сначала

$$\mathbb{E}R\cdot(f'(q), x^n_v - x^n_u) = \sum\nolimits_j \mathbb{E}R\cdot(f'(q), e_j)\{\int_u^v (\sigma^* P_n e_j, dW_s) + \int_u^v (P_n b, e_j)ds\}$$

и заметим, что приведенные суммы конечны. Первое слагаемое является мартингалом, так как $R(g^{n,k})$ и $f'(q)$ оба $\sigma(W_r, r \leqslant u)$-измеримы, а значит, математическое ожидание от него равняется нулю. Вычисляя вторую сумму, получаем

$$\mathbb{E}R\int_\tau^T (P_n b, \tilde{f}'_s)ds,$$

где $\tilde{f}'_t = f'(g^{n,k}_{t_-})$, t_- обозначает ближайшую к t слева точку t_k разбиения.

Отображения $g^{n,k}$ сходятся почти наверное в равномерной метрике пространства $C([0,T]\times M, G)$, а следовательно,$g^{n,k}_{t_-}$ сходятся к g^n_t в $C(M,G)$. Так как f' непрерывна, по теореме Лебега получаем:

$$\mathbb{E}\int_\tau^T (P_n b, R\tilde{f}'_s)ds \to \mathbb{E}\int_\tau^T (P_n b, Rf'(g^n_s))ds.$$

при $k \to \infty$.

2. Второе слагаемое разбивается на четыре части. Сначала рассмотрим

$$\mathbb{E}R(f''(q)\int_u^v P_n\sigma dW_s, \int_u^v P_n\sigma dW_s) =$$
$$= \sum\nolimits_{i,j} \mathbb{E}R(f''(q)e_i, e_j)\int_u^v (\sigma^* P_n e_i, dW_s)\int_u^v (\sigma^* P_n e_j, dW_s) =$$
$$= \sum\nolimits_{i,j} \mathbb{E}R(f''(q)e_i, e_j)\int_u^v (\sigma^* P_n e_i, \sigma^* P_n e_j)_H ds =$$
$$= \mathbb{E}R\int_u^v \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^* P_n f''(q) P_n) ds.$$

Вследствие тех же рассуждений, как и в предыдущем случае, так как f'' непрерывна и равномерно ограничена в норме $\|\cdot\|_1$ пространства ядерных операторов, сумма разностей сходится к

$$\mathbb{E}R\int_\tau^T \mathrm{Tr}(\sigma\sigma^* P_n f''(g_s^n) P_n) ds. \tag{1.17}$$

Так как все нормы на конечномерном пространстве (в частности, на образе P_n) эквивалентны, получаем:

$$\mathbb{E}|R(f''(q)\int_u^v P_n\sigma dW_s, \int_u^v P_n b ds)| \lesssim (v-u)\sup_{g\in Y}\|f''(g)\|_1 \left[\mathbb{E}|\int_u^v P_n\sigma dW_s|_H^2\right]^{1/2}$$
$$= (v-u)\sup_{g\in Y}\|f''(g)\|_1 \left[\sum\nolimits_i \mathbb{E}(\int_u^v (\sigma^* P_n e_i, dW_s))^2\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (v-u)\sup_{g\in Y}\|f''(g)\|_1 \left[n\mathbb{E}\int_u^v |\sigma^* P_n|_{L(H)}^2 ds\right]^{1/2} \lesssim \sqrt{n}(v-u)^{3/2}\sup_{g\in Y}\|f''(g)\|_1.$$

Складывая такие выражения для интервалов $[t_i, t_{i+1}]$, получаем оценку, стремящуюся к нулю при $\max\{t_{i+1}-t_i\}\to 0$. В силу аналогичных рассуждений, примененных к оставшимся двум слагаемым, рассматриваемая в этом пункте сумма разностей сходится к (1.17).

3. Последнее слагаемое также можно разбить на четыре группы. Последние три стремятся к нулю по соображениям, аналогичным приведенным в предыдущем пункте. Рассмотрим первую. Пользуясь слабой гельдеровостью f'', выберем $\lambda > 0$, для которого $(f''e_i, e_j)$, $i, j \leqslant n$ гельдеровы с показателем λ. Тогда $P_n f'' P_n$ будет λ-гельдерова в любой норме, в частности, в операторной. Используя неравенство Буркхольдера,

получаем:

$$\mathbb{E}|R([f''(qe^{\eta(x_u^n-x_v^n)})-f''(q)]\int_u^v P_n\sigma dW_s,\int_u^v P_n\sigma dW_s)|\lesssim$$
$$\lesssim \mathbb{E}|P_n(f''(q)-f''(qe^{\eta(x_u^n-x_v^n)}))P_n|_{L(H)}|\int_u^v P_n\sigma dW_s|_H^2\lesssim$$
$$\lesssim \mathbb{E}|\int_u^v P_n\sigma dW_s|_H^{2+\lambda}+\mathbb{E}|\int_u^v P_n\sigma dW_s|_H^2|\int_u^v bds|_{\mathfrak{g}}^\lambda\lesssim$$
$$\lesssim \sum_i \mathbb{E}(\int_u^v(\sigma^*P_ne_i,dW_s))^{2+\lambda}+\sum_i\mathbb{E}(\int_u^v(\sigma^*P_ne_i,dW_s))^2|u-v|^\lambda\lesssim$$
$$\lesssim n\mathbb{E}(\int_u^v|\sigma^*P_n|_{L(H)}^2ds)^{1+\lambda/2}+n\mathbb{E}(\int_u^v|\sigma^*P_n|_{L(H)}^2ds)|u-v|^\lambda\lesssim$$
$$\lesssim n|u-v|^{1+\lambda/2}.$$

Суммируя эти выражения для всех интервалов $[t_i,t_{i+1}]$, находим, что эти интегралы стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Собирая полученные результаты, получаем:

$$\mathbb{E}R(g)(f(g_T)-f(g_\tau))=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}R(g^n)\Bigg[\int_\tau^T(f'(g_s^n),P_nb(s,g_s))ds+$$
$$+\int_\tau^T\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma(s,g_s)\sigma(s,g_s)^*P_nf''(g_s^n)P_n)ds\Bigg].$$

На некотором другом вероятностном пространстве $g^n\to g$ почти наверное. Тогда на нем

$$\operatorname{Tr}(\sigma(t,g_t)\sigma(t,g_t)^*P_nf''(g_t^n)P_n)-\operatorname{Tr}(\sigma(t,g_t)\sigma(t,g_t)^*P_nf''(g_t)P_n)$$

стремится к нулю почти всюду при $n\to\infty$ для каждого $t\leqslant T$. С другой стороны, так как $P_nf''(g_t)P_n$ сходятся в норме пространства ядерных операторов к $f''(g_t)$ (см. [87, предложение 2.1]), получаем:

$$\operatorname{Tr}(\sigma(t,g_t)\sigma(t,g_t)^*P_nf''(g_t)P_n)\to\operatorname{Tr}(\sigma(t,g_t)\sigma(s,g_t)^*f''(g_t)).$$

Так как $(f'(g_t^n),P_nb(t,g_t))\to(f'(g_t),b(t,g_t))$ и все ограничено, в силу теоремы Лебега имеем:

$$\mathbb{E}R(g)(f(g_T)-f(g_\tau))=\mathbb{E}R(g)\Bigg[\int_\tau^T(f'(g_t),b(t,g_t))dt+$$
$$+\int_\tau^T\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma(t,g_t)\sigma(t,g_t)^*f''(g_t)P)dt\Bigg]=\mathbb{E}R(g)\int_\tau^T\mathcal{L}_tfdt,$$

что завершает доказательство. □

Рассмотрим пространство $\mathcal{U}=C([0,\infty),Y)$, оснащенное борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{U})$, порожденной топологией равномерной сходимости на компактных интервалах. Определим поток $\mathcal{F}_t:=\sigma(\{g|_{[0,t]}\in A\}\mid A\in\mathcal{B}(C([0,t],Y)))$. Говорим, что семейство $\{P^a,a\in Y\}$ вероятностных мер является *диффузией*, порожденной оператором $\mathcal{L}$ на $\mathcal{FC}^\infty$, если выполнены следующие условия:

1. $P^a(g_0 = a) = 1$.

2. На вероятностном пространстве $(\mathcal{U}, \mathcal{B}(\mathcal{U}), P^a)$ координатный процесс $g(t)$ является решением мартингальной задачи (1.14) для оператора $\mathcal{L}_t \equiv \mathcal{L}$ с начальным распределением, сосредоточенным в точке a.

3. Для каждого $A \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ функция $a \mapsto P^a(A)$ является борелевской и для любых $s \geqslant 0$, $a \in Y$, ограниченной непрерывной $f \in C(Y)$ и $\mathcal{F}_t$-момента остановки τ выполнено:
$$P^a(f(g_{\tau+s}) \,|\, \mathcal{F}_\tau) = P^{g_\tau}(f(g_s)),$$
где $\mathcal{F}_\tau := \sigma(A \in \mathcal{B}(\mathcal{U}) : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t)$, а $P^a(\cdot \,|\, \mathcal{F}_\tau)$ обозначает условную вероятность по отношению к σ-алгебре $\mathcal{F}_\tau$.

В следующей теореме мы собираем вместе главные результаты этой главы.

Теорема 1.3.5. *Пусть σ, b удовлетворяют условиям 1,2, тогда для любого начального распределения μ_0 стохастическое дифференциальное уравнение* (1.10) *допускает слабое решение, которое также является решением мартингальной задачи* (1.14)*, выполняющейся для всех $f \in \mathcal{FT}$. Если, кроме того, выполнено условие 3 (коэффициенты липшицевы), решение мартингальной задачи единственно и может быть реализовано как сильное решение* (1.10)*. Обозначим через P^a распределение решения* (1.14) *с начальным распределением, сосредоточенным в точке a, тогда, если σ и β не зависят от t, семейство $\{P^a\}_{a \in Y}$ представляет собой единственную диффузию, порожденную $\mathcal{L} := \mathcal{L}_t$.*

Доказательство. Если выполнены 1 и 2, то стохастическое уравнение (1.10) допускает слабое решение в силу теоремы 1.3.3. Тогда, используя уравнение (1.15) и формулу Ито, получаем, что оно решает также соответствующую мартингальную задачу.

В случае, когда выполнено условие 3, решение задачи (1.14) может быть представлено как сильное решение (1.10) в силу леммы 1.3.2. Так как сильное решение единственно, оно совпадает с процессом, построенным в доказательстве теоремы 1.3.1, следовательно,его распределение однозначно определяется начальными данными.

Предположим, что $\mathcal{L}_t \equiv \mathcal{L}$ не зависит от t. По доказанному выше, решение мартингальной задачи (1.14) единственно по распределению, поэтому P^a является единственным семейством вероятностных мер, удовлетворяющих условиям 1,2 определения диффузии. Из теоремы [5, теорема 5.1] вытекает, что семейство $\{P^a\}$ является строго марковским, то есть удовлетворяет условию 3 и, таким образом, является (единственной) диффузией, порожденной $\mathcal{L}$. $\square$

Глава 2

Метод фейнмановских приближений

В первой главе мы определили броуновское движение на группе токов как решение бесконечной системы стохастических дифференциальных уравнений (1.2), но существует и другой подход, использующий конечномерные приближения, построенные с помощью теоремы Чернова (см. [21]), являющейся обобщением известной формулы Троттера. В работах [83; 84] таким образом приближаются случайные процессы на конечномерных многообразиях, в этой главе мы исследуем возможность обобщения подобных конструкций на бесконечномерный случай. В литературе приближения такого типа носят название "фейнмановских", так как представляются в виде предела кратных интегралов по конечномерным пространствам, аналогично тому, как был впервые определен знаменитый интеграл Фейнмана.

Одним из преимуществ такого подхода является возможность рассматривать процессы с разрывными траекториями, для которых не работает процедура переноса с алгебры Ли, используемая в предыдущей главе. В частности, в этой главе мы рассматриваем процессы Леви на пространстве Скорохода $D(\mathbb{R}_+, G)$ право-непрерывных путей, имеющих левые пределы в каждой точке. Процессы Леви на конечномерных группах изучались в работах многих авторов (см, например, [15; 41; 60]), а их полная классификация была дана Г.А. Хантом в статье [47]. Также в последнее время активно развивается теория бесконечномерных процессов Леви на банаховых пространствах (см. [13; 14; 16; 75]). В нашей работе мы строим процессы Леви на бесконечномерных многообразиях $D(\mathbb{R}_+, G)$, которые можно рассматривать как двухпараметрические процессы на G.

Пусть задан оператор L на $C(G)$, являющийся производящим оператором некоторого сопряженно-инвариантного процесса Леви. Рассмотрим семейство процессов Леви $x_s(\cdot)$ с производящими операторами sL. Мы хотим доказать, что у полученного двухпараметрического процесса существует версия с траекториями в $D(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{R}_+, G))$, представляющая из себя $D(\mathbb{R}_+, G)$-значный процесс Леви по первому аргументу. Для решения этой задачи мы используем метод фейнмановских аппроксимаций, который, помимо доказательства существования, также предоставляет формулы для приближения интегралов по распределению полученного процесса с помощью кратных интегралов по конечномерным пространствам.

Идея наших построений заключается в следующем. Выбрав некоторую последовательность разбиений $\mathcal{P}^n$ квадрата $[0, \infty)^2$, для каждого из них мы строим процессы, определяющиеся своими значениями в узлах этих разбиений. При этом распределение значений в этих точках задается с помощью переходных вероятностей $P(t, x, dy)$, определяемых формулой

$$P(t)f(x) = \int_G f(y)P(t,x,dy)$$

для некоторого семейства операторов $\{P(t), t \geqslant 0\}$, асимптотически близкого при малых t к полугруппе e^{tL}.

В случае однопараметрического процесса на римановом многообразии, рассматриваемого в работах [83; 84], приближающее распределение получается из $P(t)$ аналогично формулам для конечномерных распределений винеровского процесса: каждая следующая точка $x_{t_{j+1}}$ имеет условную вероятность $P(t_{j+1} - t_j, x_{t_j}, dx_{t_{j+1}})$ относительно x_{t_j}. Однако в случае двухпараметрического процесса точки разбиения нельзя так просто "расставить в линию" и возникает проблема упорядочивания клеток $[s_i, s_{i+1}] \times [t_i, t_{i+1}]$ с точки зрения их условных вероятностей друг относительно друга. Оказывается, что результат будет зависеть от выбора такого упорядочивания, в частности, полученный процесс на некоммутативной группе Ли, вообще говоря, не будет симметричным по своим аргументам. В нашей работе мы выбираем порядок так, чтобы в непрерывном случае в пределе получался процесс, совпадающий с решением уравнения (1.2).

Глава организована следующим образом. В первом разделе мы проводим построение наших приближений и строим процессы Леви на пространстве Скорохода $D(\mathbb{R}_+, G)$. Во втором разделе рассматривается частный случай броуновского движения на пространстве непрерывных путей $C([0,1], G)$, также называемого "броуновским листом" на G. Мы строим непрерывные приближения к этому процессу, пользуясь несколько иными методами, чем в первом разделе, опирающимися на известные формулы для асимптотики ядра теплопроводности и непрерывность траекторий.

2.1 Построение двухпараметрических процессов Леви на группе Ли

2.1.1 Основные конструкции

Рассмотрим польское пространство S с метрикой ρ, обозначим через $D(\mathbb{R}_+, S)$ пространство cádlág отображений $\mathbb{R}_+ = [0, \infty) \mapsto S$, то есть право-непрерывных и имеющих конечные левые пределы в каждой точке. На нем может быть введена топология Скорохода, порождаемая метрикой d, определяемой следующим образом (см. [36]). Пусть Λ – это множество всех непрерывных строго возрастающих функций $\lambda : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, для которых $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, а также выполнено:

$$\gamma(\lambda) = \sup_{s<t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| < \infty.$$

Для $x, y \in D(\mathbb{R}_+, S)$ определим:

$$d(x,y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int\limits_0^\infty e^{-u} d_u(x,y,\lambda) du \right], \tag{2.1}$$

где

$$d_u(x, y, \lambda) = \sup_{t \geqslant 0} (\rho(x(t \wedge u), y(\lambda(t) \wedge u)) \wedge 1).$$

С этой метрикой пространство $(D(\mathbb{R}_+, S), d)$ является полным и сепарабельным, если таковым было S (см. [36, гл. 3, теорема 5.6]).

Пусть G – это сепарабельное метрическое пространство со структурой группы такое, что групповое произведение и взятие обратного элемента измеримы по Борелю. Марковский процесс g_t, траектории которого лежат в $D(\mathbb{R}_+, G)$, называется (левым) *процессом Леви*, если его правые приращения независимы и стационарны, то есть для всех $0 \leqslant s \leqslant t$ случайная величина $g_s^{-1} g_t$ совпадает по распределению с $g_0^{-1} g_{t-s}$ и независима от $\sigma(g_u, u \leqslant s)$. Рассмотрим полугруппу операторов

$$(R(t)f)(g) = \mathbb{E} f(g g_t),$$

определенных на пространстве $C_0(G)$ убывающих на бесконечности непрерывных функций $G \to \mathbb{R}$, на котором введена равномерная норма. В случае, когда G локально компактна, операторы $R(t)$ образуют сильно непрерывную полугруппу (см. [60]), ее генератор называется производящим оператором процесса Леви g_t. Процесс Леви $g(t)$ называется *сопряженно-инвариантным*, если $h^{-1} g(\cdot) h$ совпадает по распределению с $g(\cdot)$ для каждого $h \in G$.

Фиксируем компактную связную группу Ли G, на которой задана биинвариантная метрика $\rho(\cdot, \cdot)$, и начинающийся в единице e сопряженно-инвариантный процесс Леви $g(t)$ на G с производящим оператором $(L, D(L))$. Далее мы будем произвольным образом писать параметры процессов либо внизу, либо в круглых скобках, например, отождествляем g_t и $g(t)$.

Замечание 2.1.1. Условие инвариантности относительно сопряжения естественным образом возникает при попытке построить двухпараметрический процесс. Предположим, что мы построили процесс Леви $g_s(\cdot)$ такой, что для каждого фиксированного s процесс $\{g_s(t), t \geqslant 0\}$ есть процесс Леви на G, порожденный оператором $(sL, D(L))$. Тогда для независимых копий g_{s_1} и g_{s_2} должно выполнятся $g_{s_1} g_{s_2} \overset{d}{=} g_{s_1+s_2}$. Пусть $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}_+$, тогда

$$(g_{s_1} g_{s_2})(t_1)^{-1} (g_{s_1} g_{s_2})(t_2) = g_{s_2}(t_1)^{-1} g_{s_1}(t_1)^{-1} g_{s_1}(t_2) g_{s_2}(t_2) \overset{d}{=} \\ \overset{d}{=} g_{s_2}(t_1)^{-1} g_{s_1}(t_2 - t_1) g_{s_2}(t_2) = (g_{s_2}(t_1)^{-1} g_{s_1}(t_2 - t_1) g_{s_2}(t_1)) g_{s_2}(t_1)^{-1} g_{s_2}(t_2).$$

Случайная величина $g_{s_2}(t_1)^{-1} g_{s_2}(t_2)$ независима от $g_{s_2}(t_1)$ и совпадает по распределению с $g_{s_2}(t_2 - t_1)$, поэтому, чтобы все выражение имело распределение $(g_{s_1} g_{s_2})(t_2 - t_1)$, естественно ожидать, что $(g_{s_2}(t_1)^{-1} g_{s_1}(t_2 - t_1) g_{s_2}(t_1))$ будет иметь распределение $g_{s_1}(t_2 - t_1)$, что требует инвариантности относительно сопряжения.

Рассмотрим разбиение $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_N < \infty\}$ полуинтервала $[0, \infty)$. Называем его *равномерным*, если все приращения $t_k - t_{k-1}$ равны между собой. Обозначим *мелкость* разбиения $\mathcal{P}$ через $|\mathcal{P}| = \max_j (t_j - t_{j-1})$. Говорим, что последовательность разбиений $\mathcal{P}^n = \{0 = t_0^n < \ldots < t_N^n < \infty\}$ *стремится к нулю* и пишем '$\mathcal{P}^n \to 0$', если

$$\begin{cases} |\mathcal{P}^n| \to 0, & n \to \infty, \\ t_N^n \to \infty, & n \to \infty. \end{cases}$$

Для разбиений $\mathcal{P}_1 = \{0 = s_0 < \ldots < s_M < \infty\}$ и $\mathcal{P}_2 = \{0 = t_0 < \ldots < t_N < \infty\}$ определим разбиение $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(s_i, t_j), 0 \leqslant i \leqslant M, 0 \leqslant j \leqslant N\}$ и обозначим $|\mathcal{P}| := |\mathcal{P}_1||\mathcal{P}_2|$. Говорим, что последовательность разбиений $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}_1^n \times \mathcal{P}_2^n$ *стремится к нулю* ('$\mathcal{P}^n \to 0$'), если $\mathcal{P}_1^n \to 0$ и $\mathcal{P}_2^n \to 0$. Называем $\mathcal{P}$ *равномерным*, когда таковы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ (не обязательно с одинаковой мелкостью). Обозначим:

$$
\begin{aligned}
G^{\mathcal{P}_1} &= \{(g_{s_1}, \ldots, g_{s_M}),\, g_{s_i} \in G,\, 1 \leqslant i \leqslant M\},\\
G^{\mathcal{P}_2} &= \{(g_{t_1}, \ldots, g_{t_N}),\, g_{t_j} \in G,\, 1 \leqslant j \leqslant N\},\\
G^{\mathcal{P}} &= \{(g_{s_i,t_j})_{i,j} \in G^{MN}\} = \{(g(s_i,t_j))_{i,j} \in G^{MN}\}.
\end{aligned}
$$

Для удобства положим $g_{0,t_j} = g_{s_i,0} = g_0 = e$. На этих пространствах можно естественным образом ввести групповые структуры. Символом e мы всегда будем обозначать единицу соответствующей группы, когда понятно о какой группе идет речь.

Сначала мы определим приближающие меры на $G^{\mathcal{P}}$, затем рассмотрим их образы на $E := D(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{R}_+, G))$. Мы могли бы построить их, используя e^{tL} как переходную полугруппу, но мы также хотим получить формулы для более общих конечно-мерных приближений. Рассмотрим семейство $\{P(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$ ограниченных линейных операторов на $C(G)$, удовлетворяющих:

1. $\|P(t)\| \leqslant 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

2. $P(t)f \geq 0$ и $P(t)1 \equiv 1$ для $f \geq 0$.

3. $P(t)R_h f = R_h P(t) f$ и $P(t)L_h f = L_h P(t) f$ для $f \in C(G)$, $h \in G$.

4. Отображение $[0, \infty) \ni t \mapsto P(t) \in L(C(G))$ непрерывно в топологии сильной сходимости.

5. Для всех f из некоторого ядра $D \subset D(L)$ оператора L существует предел
$$\lim_{t \to 0} \frac{P(t)f - f}{t} = Lf.$$

Здесь R_h и L_h обозначают, соответственно, операторы правого и левого умножения, то есть:
$$R_h f(g) = f(gh), \quad L_h f(g) = f(hg).$$

Последние два условия необходимы для применения теоремы Чернова, а условия 1–3 нужны для того, чтобы приближающий процесс обладал свойствами процесса Леви. Однако, если некоторое другое семейство операторов $\{Q(t), t \geqslant 0\}$ асимптотически близко к $P(t)$ при малых t в том смысле, что $\|Q(t) - P(t)\| = o(t)$, то его можно взять вместо $\{P(t), t \geqslant 0\}$ (см. следствие 2.1.13). Заметим также, что $P(t) = e^{tL}$ удовлетворяет этим свойствам, что, в силу теоремы 2.1.12, означает существование соответствующего двухпараметрического процесса на G, который при этом не зависит от выбора $\{P(t), t \geqslant 0\}$.

Для $\overline{x} \in G^{\mathcal{P}}$ обозначим через $(\overline{x}_{s_i,t_j})_j$ i-тый столбец как элемент $G^{\mathcal{P}_2}$. Пусть $f \in C(G^{\mathcal{P}})$, определим

$$\int_{G^{\mathcal{P}}} f d\overline{\mu}^{\mathcal{P}} = \int_{G^{\mathcal{P}_2}} \cdots \int_{G^{\mathcal{P}_2}} f((\overline{x}_{s_1,t_j})_j, \ldots, (\overline{x}_{s_M,t_j})_j) \prod_i \overline{\mu}^{\mathcal{P}_2}(s_i - s_{i-1}, (\overline{x}_{s_{i-1},t_j})_j, d(\overline{x}_{s_i,t_j})_j), \tag{2.2}$$

где для $g \in C(G^{\mathcal{P}_2})$ и $y \in G^{\mathcal{P}_2}$

$$\int_{G^{\mathcal{P}_2}} g(x)\overline{\mu}^{\mathcal{P}_2}(s,y,dx) = \int_{G^{\mathcal{P}_2}} \prod_j P(s(t_j - t_{j-1}), y_{t_j} y_{t_{j-1}}^{-1} x_{t_{j-1}}, dx_{t_j}) g(x_{t_1}, \ldots, x_{t_N}). \quad (2.3)$$

Здесь $P(t,y,dx)$ обозначает меру на G, для которой

$$(P(t)f)(y) = \int_G f(x)P(t,y,dx),$$

существующую вследствие теоремы Рисса. Определим теперь вложение $I^{\mathcal{P}} : G^{\mathcal{P}} \mapsto E$ как

$$I^{\mathcal{P}}(x)(s,t) = x_{s_i,t_j}, \quad (s,t) \in [s_i, s_{i+1}) \times [t_j, t_{j+1}).$$

Легко видеть, что $I^{\mathcal{P}}$ непрерывно и поэтому можно определить образ $\mu^{\mathcal{P}} = \overline{\mu}^{\mathcal{P}} \circ (I^{\mathcal{P}})^{-1}$ как меру на E. Через $x^{\mathcal{P}}$ и $\overline{x}^{\mathcal{P}}$ обозначим некоторые случайные величины с распределениями, соответственно, $\mu^{\mathcal{P}}$ и $\overline{\mu}^{\mathcal{P}}$.

Мы строим меры $\overline{\mu}^{\mathcal{P}}$ "по столбцам", то есть значение столбца $(\overline{x}_{s_i,t_j})_j$ в каждый следующий момент s_i определяется через переходную вероятность относительно значений в момент s_{i-1}. Можно заметить, что на самом деле распределение на всем квадрате $[0,1]\times[0,1]$ можно разбить на взаимно независимые столбцы $[s_i - s_{i-1}] \times [0,1]$ с распределениями $\overline{\mu}^{\mathcal{P}_2}(s_i - s_{i-1}, e, dx)$, которые, в свою очередь, разбиваются на независимые клетки $[s_i - s_{i-1}] \times [t_j - t_{j-1}]$ с распределениями $p((s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}), e, x)Vol(dx)$. Строгая формулировка и доказательство этого рассуждения есть предмет следующей леммы.

Лемма 2.1.1. *Выберем некоторое разбиение $\mathcal{P} = \{(s_i, t_j), i \le M, j \le N\}$ и рассмотрим семейство независимых случайных величин $u_{1,1}, \ldots, u_{N,M}$ с распределениями $u_{i,j} \sim P((s_i - s_{i-1})(t_i - t_{i-1}), e, du_{i,j})$. Тогда $G^{\mathcal{P}}$-значная случайная величина y, определенная как*

$$y_{s_i,t_j} = u_{1,1} \cdot \ldots \cdot u_{1,j} \cdot u_{2,1} \cdot \ldots \cdot u_{i,j},$$

совпадает по распределению с $\overline{x}^{\mathcal{P}}$.

Доказательство. Заметим, что в силу лево-инвариантности $P(t)$

$$\int_G f(y)P(t,x,dy) = (P(t)f)(x) = L_x(P(t)f)(e) = (P(t)L_x f)(e) = \int_G f(xz)P(t,e,dz).$$

Поэтому можно переписать (2.3) как

$$\int_{G^{\mathcal{P}_2}} g(x)\overline{\mu}^{\mathcal{P}_2}(s_i - s_{i-1}, z, dx) = \int_{G^{\mathcal{P}_2}} \prod_j P((s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}), e, du_{s_i,t_j}) g\left((z_{t_j} u_{s_i,t_1} \cdot \ldots \cdot u_{s_i,t_j})_j\right).$$

Подставляя это выражение в (2.2), получаем

$$\int_{G^{\mathcal{P}}} f d\overline{\mu}^{\mathcal{P}} = \mathbb{E} f\left((y_{s_i,t_j})_{i,j}\right),$$

что и требовалось доказать. □

В силу существенной несимметричности нашего процесса по параметрам s и t мы не можем точно так же построить разбиение по строкам, но для одного фиксированного значения s разбить на взаимно независимые строки процесс $\{x_{s,t_j}, j = 1, \dots, n\}$ все-таки можно:

Лемма 2.1.2. *Выберем некоторое разбиение $\mathcal{P} = \{(s_i, t_j), i \le M_1, j \le N\}$. Тогда для каждого $M \leqslant M_1$ можно выбрать семейство независимых случайных величин $v_{1,1}, \dots, v_{N,M}$ с распределениями $u_{i,j} \sim P((s_i - s_{i-1})(t_i - t_{i-1}), e, du_{i,j})$ таких, что $G^{\mathcal{P}_2}$-значная случайная величина z, определенная как*

$$z_{t_j} = v_{1,1} \cdot \ldots \cdot v_{M,1} \cdot v_{1,2} \cdot \ldots \cdot v_{M,j},$$

равняется по распределению $(\overline{x}^{\mathcal{P}}_{s_M,t_j})_j$.

Доказательство. Используя инвариантность $P(t)$ относительно сопряжения (следующую из левой и правой инвариантности), получаем:

$$\int_G g(y)P(t,e,dy) = \int_G g(h^{-1}zh)P(t,e,dz). \tag{2.4}$$

Выберем $u_{1,1}, \dots, u_{N,M}$ как в лемме 2.1.1, тогда

$$\mathbb{E}f((\overline{x}^{\mathcal{P}}_{s_M,t_j})_j) = \int_G \dots \int_G f\left((u_{1,1} \cdot \ldots \cdot u_{M,j})_j\right) \prod\nolimits_{i,j} P((s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}), e, du_{i,j}).$$

Заметим, что интегралы в этом выражении могут быть расставлены в произвольном порядке, поэтому можно переписать его как:

$$\int_G \dots \int_G f\left((u_{1,1} \cdot \ldots \cdot u_{i,j})_{i,j}\right) \prod\nolimits_j \prod\nolimits_i P((s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}), e, du_{i,j}).$$

В силу (2.4) можно выполнить замену переменных

$$\begin{cases} u_{i,1} = v_{i,1} & 1 \leqslant i \leqslant M \\ u_{i,2} = Ad_{u_{M,1}} \circ \ldots \circ Ad_{u_{i+1,1}} v_{i,2} & 1 \leqslant i \leqslant M \\ u_{i,3} = Ad_{u_{M,2}} Ad_{u_{M,1}} \circ \ldots \circ Ad_{u_{i+1,2}} Ad_{u_{i+1,1}} v_{i,3} & 1 \leqslant i \leqslant M \\ \dots, \end{cases}$$

где $Ad_g h := g^{-1}hg$. Легко видеть, что после такой замены $u_{1,1} \cdot \ldots \cdot u_{1,j} u_{2,1} \cdot \ldots \cdot u_{M,j}$ переходят в $v_{1,1} \cdot \ldots \cdot v_{M,1} v_{1,2} \cdot \ldots \cdot v_{M,j}$. В силу выбора порядка интегрирования и (2.4) $v_{i,j}$ взаимно независимы и $v_{i,j} \overset{d}{=} u_{i,j}$ для каждых i, j. Тогда

$$\mathbb{E}f(\overline{x}^{\mathcal{P}}_{s_M}) = \int_G \dots \int_G f\left((z_{t_j})_j\right) \prod\nolimits_{i,j} P((s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1}), e, dv_{i,j}).$$

$\square$

2.1.2 Относительная компактность приближающего семейства мер

Фиксируем последовательность равномерных разбиений $\mathcal{P}^n \to 0$. В этом разделе мы докажем предкомпактность семейства $\{\mu^{\mathcal{P}^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ в топологии слабой сходимости. Сначала нам понадобятся некоторые технические леммы. Следующее утверждение было доказано в [83, лемма 3].

Лемма 2.1.3. *Пусть $X_0, ..., X_n$ – это марковский процесс со значениями в метрическом пространстве (S,ρ), тогда для любого $\alpha > 0$ выполнено:*

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\rho(X_0,X_k) > 2\alpha) \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n}\sup_{x\in S} P(\rho(X_k,X_n) > \alpha | X_k = x).$$

Лемма 2.1.4. *Определим потоки σ-алгебр*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathcal{P}}_{s_k} &= \sigma(\overline{x}_{s_i,t_j}, i\leqslant k, j\leqslant N),\\ \mathcal{F}^{\mathcal{P}_{s_i}}_{t_k} &= \sigma(\overline{x}_{s_i,t_j}, j\leqslant k).\end{aligned}$$

Тогда для каждых $\mathcal{F}^{\mathcal{P}}_{s_k}$-момента остановки σ и $\mathcal{F}^{\mathcal{P}_{s_i}}_{t_k}$-момента остановки τ (со значениями в $\{1,\dots,M\}$ и $\{1,\dots,N\}$ соответственно) таких, что $\tau\leqslant T$ и $\sigma\leqslant S$, выполняется:

$$\begin{aligned}(\overline{x}^{-1}_{s_\sigma,t_j}\overline{x}_{s_{\sigma+i},t_j})_j &\overset{d}{=} (\overline{x}_{s_i,t_j})_j, && i\leqslant M-S,\\ \overline{x}^{-1}_{s_i,t_\tau}\overline{x}_{s_i,t_{\tau+j}} &\overset{d}{=} \overline{x}_{s_i,t_j}, && j\leqslant N-T,\end{aligned}$$

и $(\overline{x}^{-1}_{s_\sigma,t_j}\overline{x}_{s_{\sigma+i},t_j})_j$, $\overline{x}^{-1}_{s_i,t_\tau}\overline{x}_{s_i,t_{\tau+j}}$ независимы от $(\overline{x}_{s_\sigma,t_j})_j$ и $\overline{x}_{s_i,t_\tau}$ соответственно.

Доказательство. В силу леммы 2.1.1 для каждого s_k случайная величина $(\overline{x}^{-1}_{s_k,t_j}\overline{x}_{s_{k+i},t_j})_j$ равняется по распределению $(\overline{x}_{s_i,t_j})_j$ и независима от $\{\overline{x}_{s_i,t_j}, i\leqslant k, j\leqslant N\}$. Тогда для любых $f,g\in C(G^{\mathcal{P}_2})$ получаем:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f((\overline{x}^{-1}_{s_\sigma,t_j}\overline{x}_{s_{\sigma+i},t_j})_j)g((\overline{x}_{s_\sigma,t_j})_j) &= \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_k f((\overline{x}^{-1}_{s_k,t_j}\overline{x}_{s_{k+i},t_j})_j)g((\overline{x}_{s_k,t_j})_j)I_{\{\sigma=k\}}\right) =\\ &= \sum\nolimits_k \mathbb{E}f((\overline{x}_{s_i,t_j})_j)\mathbb{E}\left(g((\overline{x}_{s_k,t_j})_j)I_{\{\sigma=k\}}\right) = \mathbb{E}f((\overline{x}_{s_i,t_j})_j)\mathbb{E}g((\overline{x}_{s_\sigma,t_j})_j).\end{aligned}$$

Вторая часть утверждения доказывается аналогично с помощью леммы 2.1.2. □

Лемма 2.1.5. *Рассмотрим равномерное разбиение $\mathcal{P}$ и (не обязательно равномерное) подразбиение $\mathcal{P}' = \{(s_{i_k}, t_{j_l})\}\subset\mathcal{P}$. Тогда $(x^{\mathcal{P}}_{s_{i_k},t_{j_l}})_{k,l}$ совместно распределены как*

$$x^{\mathcal{P}}_{s_{i_k},t_{j_l}} \overset{d}{=} z_{1,1}\cdot\ldots\cdot z_{1,l}\cdot\ldots\cdot z_{k,l},$$

где $\{z_{k,l}\}_{k,l}$ есть семейство независимых G-значных случайных величин с распределениями, заданными соотношением

$$\mathbb{E}f(z_{k,l}) = P(|\mathcal{P}|)^{(i_k-i_{k-1})(j_l-j_{l-1})}f(e).$$

Доказательство. Построим семейство $\{u_{s_i,t_j}\}_{i,j}$ как в лемме 2.1.1, обозначим:

$$y_k(s_l,t_j) := u_{s_{i_k},t_1} \cdot \ldots \cdot u_{s_{i_k},t_j} \cdot \ldots \cdot u_{s_{i_k+l},t_j}.$$

Заметим, что для каждого k

$$(y_k(s_l,t_j))_{l,j} \overset{d}{=} \{\overline{x}(s_l,t_j), 1 \leqslant l \leqslant i_k - i_{k-1}, 1 \leqslant j \leqslant N\}.$$

В силу леммы 2.1.2 найдутся такие независимые случайные величины $\{v^{(k)}_{s_i,t_j}\}_{i,j,k}$, что

$$y_k(s_{i_k-i_{k-1}},t_j) \overset{d}{=} v^{(k)}_{s_1,t_1} \cdot \ldots \cdot v^{(k)}_{s_{i_k-i_{k-1}},t_1} \cdot \ldots \cdot v^{(k)}_{s_{i_k-i_{k-1}},t_j}.$$

Кроме того, $(v^{(k)}(s_l,t_j))_{l,j}$ могут быть выбраны независимыми от $(v^{(k')}(s_l,t_j))_{l,j}$ для $k \neq k'$. Положим

$$z_{k,l} := v^{(k)}_{s_1,t_{j_{l-1}+1}} \cdot \ldots \cdot v^{(k)}_{s_{i_k-i_{k-1}},t_{j_{l-1}+1}} \cdot \ldots \cdot v^{(k)}_{s_{i_k-i_{k-1}},t_{j_l}}.$$

Ясно, что они взаимно независимы, остается только найти их распределение. Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины a, b с распределением $P(t,e,dx)$ для некоторого $t > 0$. Тогда для любого $f \in C(G)$ выполнено:

$$\mathbb{E}f(ab) = \int_G \int_G f(ab)P(t,e,da)P(t,e,db) =$$
$$= \int_G \left(\int_G f(c)P(t,a,dc) \right) P(t,e,da) = P(t)^2 f(e).$$

Применяя эту формулу к $z_{k,l}$, получаем:

$$\mathbb{E}f(z_{k,l}) = P(|\mathcal{P}|)^{(i_k-i_{k-1})(j_l-j_{l-1})} f(e).$$

□

Лемма 2.1.6. *Рассмотрим последовательность $s_{i_n} \in \mathcal{P}_1^n$ такую, что $s_{i_n} \to 0$, $n \to 0$. Тогда для каждых $T > 0$ и $\eta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t_j \leqslant T} P(\rho(e, \overline{x}_{s_{i_n},t_j}) > \eta) = 0.$$

Доказательство. Фиксируем $n > 0$, $t_j \leqslant T$, $\eta > 0$ и применим лемму 2.1.5 к подразбиению $\mathcal{P}'$, состоящему из одной точки (s_{i_n}, t_j), тогда получаем:

$$\mathbb{E}f(\overline{x}_{s_{i_n},t_j}) = P(|\mathcal{P}|)^{i_n j} f(e)$$

для любой непрерывной f. Определим функцию $\phi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ как

$$\phi(r) = \begin{cases} 0, & r \leqslant \eta/2, \\ \frac{2}{\eta}(r - \eta/2), & \eta/2 \leqslant r \leqslant \eta, \\ 1, & r \geqslant \eta, \end{cases}$$

и положим $\psi(g) = \phi(\rho(e,g))\rho(e,g)$. Тогда

$$P(\rho(e,\overline{x}_{s_{i_n},t_j}) > \eta) \leqslant \eta^{-1}\mathbb{E}(\rho(e,\overline{x}_{s_{i_n},t_j}) I_{\{\rho(e,\overline{x}_{s_{i_n},t_j}) > \eta\}}) \leqslant$$
$$\leqslant \eta^{-1}\mathbb{E}\psi(\overline{x}_{s_{i_n},t_j})) = \eta^{-1} P(|\mathcal{P}|)^{i_n j} \psi(e)$$

Всегда можно считать, что $s_{i_n} < S$ для некоторого фиксированного $S > 0$. В силу теоремы Чернова (см. [21])

$$P(t/k)^k\psi \to e^{tL}\psi$$

равномерно на $[0, ST]$. Так как G компактна, найдется константа $K > 0$, для которой $\sup_{g\in G}\rho(e, g) < K$. Замечая, что $|\mathcal{P}| = s_{i_n}t_j/i_n j$, получаем:

$$\begin{aligned}\lim\nolimits_{n\to\infty}\max\nolimits_{t_j\leqslant T} P(\rho(e, \overline{x}_{s_{i_n},t_j}) > \eta) \leqslant \lim\nolimits_{n\to\infty}\max\nolimits_{t\leqslant s_{i_n}T, k\geqslant 1}\eta^{-1}P(t/k)^k\psi = \\ = \lim\nolimits_{n\to\infty}\max\nolimits_{t\leqslant s_{i_n}T}\eta^{-1}e^{tL}\psi \leqslant \eta^{-1}K\lim\nolimits_{n\to\infty}\max\nolimits_{t\leqslant s_{i_n}T}P(\rho(e, g_t) > \eta/2) \leqslant \\ \leqslant \eta^{-1}K\lim\nolimits_{n\to\infty}P(\max\nolimits_{t\leqslant s_{i_n}T}\rho(e, g_t) > \eta/2),\end{aligned}$$

где g_t обозначает рассматриваемый в этом разделе процесс Леви с производящим оператором L. Так как все траектории g_t право-непрерывны, последнее слагаемое стремится к нулю при $s_n \to 0$, что завершает доказательство. □

Лемма 2.1.7. *Рассмотрим последовательность положительных $\delta_n \to 0$, тогда*

$$\lim\nolimits_{n\to 0}\max\nolimits_{t\leqslant\delta_n} P(\rho(e, x^{\mathcal{P}^n}_{s,t}) > \eta) = 0$$

для любых $s > 0$ и $\eta > 0$.

Доказательство. Для каждого $n > 0$ выберем $s_i^{(n)} \in \mathcal{P}_1^n$, для которого $x(s_i^{(n)}, \cdot) = x(s, \cdot)$. Тогда, проводя рассуждение, аналогичное используемому в предыдущей лемме, получаем:

$$\begin{aligned}\lim\nolimits_{n\to 0}\max\nolimits_{t\leqslant\delta_n} P(\rho(e, x^{\mathcal{P}^n}_{s,t}) > \eta) = \lim\nolimits_{n\to 0}\max\nolimits_{t_j\leqslant\delta_n} P(\rho(e, \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_i^{(n)},t_j}) > \eta) \leqslant \\ \leqslant \lim\nolimits_{n\to\infty}\max\nolimits_{t\leqslant s\delta_n, k\geqslant 1}\eta^{-1}P(t/k)^k\psi \leqslant \eta^{-1}K\lim\nolimits_{n\to\infty}P(\max\nolimits_{t\leqslant s\delta_n}\rho(e, g_t) > \eta/2) = 0.\end{aligned}$$

□

Лемма 2.1.8. *Для каждых $s > 0$ и $\eta > 0$ найдется компакт $\overline{\Gamma} \subset D(\mathbb{R}_+, G)$ такой, что*

$$\inf\nolimits_{n>0} P(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot) \in \overline{\Gamma}) \geqslant 1 - \eta.$$

Доказательство. Модуль непрерывности на пространстве $D(\mathbb{R}_+, G)$ определяется как (см. [36; 53])

$$w(x, \delta, T) = \inf\nolimits_{(I_k)}\max\nolimits_k\sup\nolimits_{s,t\in I_k}\rho(x_s, x_t) \wedge 1,$$

где инфимум берется по всем разбиениям интервала $[0, T)$ на подинтервалы I_k длиной не меньше δ. Сначала докажем, что для любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\limsup_n P(w(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot), \delta, T) > \varepsilon) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

что равносильно

$$\sup\nolimits_n P(w(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot), \delta, T) > \varepsilon) \to 0, \quad \delta \to 0, \tag{2.5}$$

так как для любого фиксированного n

$$P(w(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot), \delta, T) > \varepsilon) \to 0, \quad \delta \to 0$$

и функция $w(x, \delta, T)$ – неубывающая по δ. В силу [53, теорема 16.11] достаточно доказать, что для любой ограниченной последовательности $\sigma(x^{\mathcal{P}^n}(s, r), r \leqslant t)$-моментов остановки τ_n и вещественных чисел $\delta_n \to 0$

$$\rho(x^{\mathcal{P}^n}(s, \tau_n), x^{\mathcal{P}^n}(s, \tau_n + \delta_n)) \xrightarrow{P} 0.$$

Выберем $L > 0$ такое, что $P(\tau_n \leqslant L) = 1$ для всех n. Всегда можно считать, что n достаточно большое, чтобы $L + \delta_n \leqslant t_N^{(n)}$, где $t_N^{(n)}$ обозначает последнюю точку разбиения $\mathcal{P}_2^n$. В дальнейшем мы будем опускать индекс (n) для точек соответствующих разбиений. Выберем i_n так, чтобы $s \in [s_{i_n}, s_{i_n+1})$, и положим $j_n(t) = k$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда

$$\{j_n(\tau_n) \leqslant k\} = \bigcup_r \{\tau_n \leqslant t_{k+1} - 1/r\} \subset \sigma(x^{\mathcal{P}^n}(s, t), t < t_{k+1}) = \sigma(\overline{x}^{\mathcal{P}^n}(s_{i_n}, t_j), j \leqslant k),$$

так что $j_n(\tau_n)$ является моментом остановки относительно дискретного процесса $\overline{x}^{\mathcal{P}^n}(s_{i_n}, t_j)$. Легко видеть, что $j_n(a + b) - j_n(a) - j_n(b) \in \{0, 1\}$, если $a + b \leqslant t_N$. Используя би-инвариантность метрики и лемму 2.1.4, получаем:

$$\begin{aligned}
&P(\rho(x^{\mathcal{P}^n}(s, \tau_n), x^{\mathcal{P}^n}(s, \tau_n + \delta_n)) > \varepsilon) = P(\rho(\overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n)}, \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n + \delta_n)}) > \varepsilon) \leqslant \\
&\leqslant P(\rho(\overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n)}, \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n) + j_n(\delta_n)}) > \varepsilon) + \\
&+ P(\rho(\overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n)}, \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n) + j_n(\delta_n) + 1}) > \varepsilon) = \\
&= P(\rho(e, (\overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n)})^{-1} \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n) + j_n(\delta_n)}) > \varepsilon) + \\
&\qquad\qquad + P(\rho(e, (\overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n)})^{-1} \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\tau_n) + j_n(\delta_n) + 1}) > \varepsilon) = \\
&\qquad\qquad\qquad = P(\rho(e, \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\delta_n)}) > \varepsilon) + P(\rho(e, \overline{x}^{\mathcal{P}^n}_{s_{i_n}, j_n(\delta_n) + 1}) > \varepsilon),
\end{aligned}$$

что стремится к нулю в силу леммы 2.1.7. Таким образом, доказано соотношение (2.5).

Выберем δ_k так, чтобы

$$\sup_n P(w(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot), \delta_k, T) > 1/k) < \eta/2^k,$$

и определим $A_k = \{w(y(\cdot), \delta_k, T) \leqslant 1/k\} \subset D(\mathbb{R}_+, G)$ и $\Gamma = \bigcap_k A_k$. Тогда

$$P(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot) \in \overline{\Gamma}) \geqslant P(x^{\mathcal{P}^n}(s, \cdot) \in \Gamma) > 1 - \eta$$

для каждого n. Используя критерий компактности для подмножеств $D(\mathbb{R}_+, G)$ (см. [36, гл. 3, теорема 6.3]), так как Γ удовлетворяет

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \Gamma} w(y, \delta, T) = 0$$

для каждого $T > 0$ и все пути из Γ принимают значения в компакте G, множество $\overline{\Gamma}$ компактно в топологии Скорохода. □

Теорема 2.1.9. *Выберем последовательность равномерных разбиений $\mathcal{P}^n \to 0$, тогда семейство вероятностных мер $\mu^{\mathcal{P}^n}$ предкомпактно в топологии слабой сходимости.*

Доказательство. В силу [36, гл. 3, теорема 7.2] семейство $\mu^{\mathcal{P}^n}$ предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. Для любых $\eta > 0$ и $s \geqslant 0$, найдется компакт $\Gamma_{\eta,s}$ такой, что
$$\inf_n P(x_s^{\mathcal{P}^n} \in \Gamma_{\eta,s}) \geqslant 1 - \eta.$$

2. Для любых $\eta > 0$ и $T > 0$
$$\limsup_n P(w(x^{\mathcal{P}^n}, \delta, T) > \eta) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Первый пункт был доказан в лемме 2.1.8, а в силу [53, теорема 16.11] второе условие вытекает из

(2') Для любой ограниченной последовательности $\sigma(x^{\mathcal{P}_n}(r,\cdot), r \leqslant s)$-моментов остановки τ_n
$$d(x^{\mathcal{P}_n}(\tau_n,\cdot), x^{\mathcal{P}_n}(\tau_n + \delta_n, \cdot)) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,$$
если $\delta_n \to 0$.

Пусть $P(\tau_n \leqslant L) = 1$ для всех n, будем считать, что n достаточно велико, чтобы $L + \delta_n \leqslant s_M^{(n)}$. В дальнейшем мы будем опускать индекс (n) для точек соответствующих разбиений. Положим $i_n(s) := k$ при $s \in [s_k, s_{k+1})$. С помощью того же рассуждения, что и в лемме 2.1.8, получаем, что $i_n(\tau_n)$ – это $\sigma(\overline{x}_{s_r,t_j}, 0 \leqslant j \leqslant N, r \leqslant i)$-момент остановки и

$$\begin{aligned} P(d(x^{\mathcal{P}_n}(\tau_n,\cdot), x^{\mathcal{P}_n}(\tau_n + \delta_n,\cdot)) > \eta) = P(d(x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)},\cdot), x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n+\delta_n)},\cdot)_j) > \eta) \leqslant \\ \leqslant P(d(x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)},\cdot), x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)+i_n(\delta_n)},\cdot)) > \eta) + \\ + P(d(x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)},\cdot), x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)+i_n(\delta_n)+1},\cdot)) > \eta). \end{aligned}$$

Мы рассмотрим только первое слагаемое, утверждение для второго получается, если положить $\widetilde{\delta}_n = \delta_n + |\mathcal{P}_1^n|$. Вспомним определение метрики Скорохода (2.1) и выберем $U > 0$ такое, что $e^{-U} < \eta/2$. Положим $d_u(x,y) \equiv d_u(x,y,id)$, где id обозначает тождественное отображение $\Lambda \ni id : x \mapsto x$. Если для некоторых $x, y \in D(\mathbb{R}_+, G)$
$$\int_0^\infty e^{-u} d_u(x,y)du > \eta,$$
то
$$\int_0^U e^{-u} d_u(x,y)du > \eta/2$$
и найдется такое $u \leqslant U$, что $d_u(x,y) > \eta/2$. Так как $d_u(\cdot,\cdot)$ есть неубывающая по u функция, $d_U(x,y) > \eta/2$. Заметим также, что $d_u(x,y)$ сохраняет свойство биинвариантности, то есть
$$d_u(gx, gy) = d_u(x,y), \quad \forall g, x, y \in D(\mathbb{R}_+, G),$$

где умножение отображений производится поточечно. Учитывая эти соображения, получаем из леммы 2.1.4:

$$
\begin{aligned}
&P(d(x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)},\cdot),x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)+i_n(\delta_n)},\cdot)>\eta)\leqslant\\
&\qquad\leqslant P(d_u(x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)},\cdot),x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)+i_n(\delta_n)},\cdot)>\eta/2)=\\
&\qquad=P(d_u(e,(x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)},\cdot))^{-1}x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\tau_n)+i_n(\delta_n)},\cdot))>\eta/2)=\\
&\qquad\qquad=P(d_u(e,x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\delta_n)},\cdot))>\eta/2),
\end{aligned}
$$

так как $\gamma(id)=0$. Применяя лемму 2.1.5 к подразбиению $\mathcal{P}'=\{(s_{i_n(\delta_n)},t_j),t_j\leqslant U\}$, получаем представление

$$
\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_j}\overset{d}{=}z_1\cdot\ldots\cdot z_j
$$

для независимых случайных величин z_j. Таким образом, $(\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{i_n(\delta_n),t_j})_j$ представляет из себя марковскую цепь и применение леммы 2.1.3 дает:

$$
\begin{aligned}
&P(d_u(e,x^{\mathcal{P}_n}(s_{i_n(\delta_n)},\cdot))>\eta/2)\leqslant\\
&\qquad\leqslant 2\max\nolimits_j P(\rho(\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_j},\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_{jn(u)}})>\eta/4|\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_j}=y)=\\
&\qquad=2\max\nolimits_j P(\rho(e,(\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_j})^{-1}\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_{jn(u)}})>\eta/4|\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_j}=y)=\\
&\qquad\qquad=2\max\nolimits_j P(\rho(e,\overline{x}^{\mathcal{P}_n}_{s_{i_n(\delta_n)},t_{jn(u)-j}})>\eta/4),
\end{aligned}
$$

что стремится нулю в силу леммы 2.1.6. □

2.1.3 Сходимость конечномерных распределений

В отличие от непрерывного случая, если последовательность процессов x_n с cádlág траекториями сходится по распределению, не все ее конечномерные распределения обязаны сходиться к соответствующим распределениям предельного процесса x. Они, однако, сходятся в *точках непрерывности* процесса x, то есть в тех точках t, для которых $P(x(t-)=x(t))=1$ (точки, в которых это соотношение не выполняется мы называем *точками разрыва*). Хорошо известно (см. [18]), что для всякого cádlág процесса множество всех его точек разрыва не более чем счетно. Нам пока не известно, к чему сходятся рассматриваемые распределения, но в силу теоремы 2.1.9 семейство $\mu^{\mathcal{P}^n}$ имеет хотя бы одну предельную точку, которую мы выберем произвольным образом и обозначим через μ, а соответствующий $D(\mathbb{R}_+,G)$-значный процесс через x.

Обозначим через $\mathcal{C}_1$ некоторое плотное счетное подмножество $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, состоящее из точек непрерывности x. Для каждого $s\in\mathcal{C}_1$ множество A_s точек разрыва $x(s,\cdot)$ не более чем счетно, следовательно, объединение $A=\bigcup\limits_{s\in\mathcal{C}_1}A_s$ также не более чем счетно. Обозначим через B множество точек разрыва процесса Леви g_t. Рассмотрим множество

$$
\widetilde{B}=\left\{\frac{b}{(s-s')}\,|\,b\in B,s,s'\in\mathcal{C}_1,s>s'\right\}.
$$

Определим $F_r\equiv\{qr\,|\,q\in\mathbb{Q}\}$. Легко видеть, что $\{F_r\}_r$ делят $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ на несчетное количество классов эквивалентности относительно соотношения

$$
a\sim b\Leftrightarrow a=qb\text{ for some }q\in\mathbb{Q}.
$$

Заметим также, что $|a-b| \in F_r$, если $a, b \in F_r$, и F_r плотно в $\mathbb{R}_+$ для каждого r. Так как множество $A \cup \widetilde{B}$ счетно, найдется такое $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, что F_r с ним не пересекается. Обозначим $\mathcal{C}_2 = F_r$. Таким образом, мы построили множества $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ со следующими свойствами:

1. Каждое $s \in \mathcal{C}_1$ есть точка непрерывности для x и для него каждое $t \in \mathcal{C}_2$ есть точка непрерывности для $x(s, \cdot)$.

2. Для любых $s, s' \in \mathcal{C}_1$ и $t, t' \in \mathcal{C}_2$ число $|s-s'||t-t'|$ есть точка непрерывности для g_t.

3. Множества $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ оба плотны в $\mathbb{R}_+$.

В оставшейся части раздела будем обозначать $Q(t) := e^{tL}$ и $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. Через $\nu^{\mathcal{P}}$ и $\overline{\nu}^{\mathcal{P}}$ обозначим меры, построенные как в первом разделе, но используя операторы $Q(t)$ вместо $P(t)$. Как и раньше, будем опускать индекс (n) при обозначении точек соответствующего разбиения.

Лемма 2.1.10. *Пусть дано компактное метрическое пространство V с метрикой d_V и $f \in C(G \times V)$, тогда*

$$\mathbb{E}f(g_t, v) \to \mathbb{E}f(g_{t_0}, v), \quad t \searrow t_0$$

равномерно по $v \in V$. При этом, если t_0 – это точка непрерывности g_t, то равномерно на V

$$\mathbb{E}f(g_t, v) \to \mathbb{E}f(g_{t_0}, v), \quad t \to t_0$$

Доказательство. Обозначим

$$w(f, \delta) := \sup\nolimits_{d_V(v,v') + \rho(g,g') < \delta} |f(g, v) - f(g', v')|,$$

тогда

$$|\mathbb{E}f(g_t, v) - \mathbb{E}f(g_{t_0}, v)| \leqslant \mathbb{E}w(f, \rho(g_t, g_{t_0})) \to 0, \quad t \searrow t_0,$$

так как траектории g_t почти всюду право-непрерывны. Более того, эта оценка не зависит от v и сходимость равномерна на V. Если t_0 – точка непрерывности g_t, то $t \searrow t_0$ можно заменить на $t \to t_0$. $\square$

Теорема 2.1.11. *Рассмотрим разбиение $\mathcal{P}' = \{(s'_u, t'_v), 1 \leqslant u \leqslant U, 1 \leqslant v \leqslant V\}$ такое, что $(s'_u, t'_v) \in \mathcal{C}$ для всех u, v. Пусть $f \in C(G^{UV})$, тогда*

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \int_E f(\{x(s'_u, t'_v)\}_{u,v}) d\mu^{\mathcal{P}_n} = \int_{G^{UV}} f d\overline{\nu}^{\mathcal{P}'}.$$

Доказательство. Выберем ${\mathcal{P}'}^n = \{s_{i_u}, t_{j_v}\}_{u,v} \subset \mathcal{P}^n$ так, чтобы $(s'_u, t'_u) \in [s_{i_u}, s_{i_u+1}) \times [t_{j_v}, t_{j_v+1})$. Пусть $z_{u,v}$ – как в лемме 2.1.5, примененной к ${\mathcal{P}'}^n$, обозначим:

$$g(\{z_{u,v}\}_{u,v}) := f(\{z_{1,1} \cdot \ldots \cdot z_{u,l} \cdot \ldots \cdot z_{u,v}\}_{u,v}).$$

Тогда имеем:

$$\int_E f(\{x(s'_u, t'_v)\}_{u,v}) d\mu^{\mathcal{P}_n} = \left[\prod_{u,v} P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v}}^{(i_{u+1}-i_u)(j_{v+1}-j_v)} g\right](e, \ldots, e),$$

где $P(t)_z$ означает, что оператор применяется к переменной z, в то время как остальные параметры остаются фиксированными.

$$\int_E f(\{x(s'_u, t'_v)\}_{u,v}) d\mu^{\mathcal{P}_n} - \int_E f d\overline{\nu}^{\mathcal{P}'_n} =$$
$$= \sum\nolimits_{u,v} P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{1,1}}^{(i_1-0)(j_1-0)} \dots P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v-1}}^{(i_u-i_{u-1})(j_{v-1}-j_{v-2})} \cdot$$
$$\cdot \Big(P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v}}^{(i_{u+1}-i_u)(j_{v+1}-j_v)} - Q((s_{i_u} - s_{i_{u-1}})(t_{j_v} - t_{j_{v-1}}))_{z_{u,v}} \Big) \cdot$$
$$\cdot Q((s_{i_u} - s_{i_{u-1}})(t_{j_{v-1}} - t_{j_{v-2}}))_{z_{u,v+1}} \dots Q((s_{i_U} - s_{i_{U-1}})(t_{j_V} - t_{j_{V-1}}))_{z_{U,V}} g(e, \dots, e).$$

В силу леммы 2.1.10 и сжимающего свойства $Q(t)$ и $P(t)$ последняя группа множителей

$$Q((s_{i_u} - s_{i_{u-1}})(t_{j_{v-1}} - t_{j_{v-2}}))_{z_{u,v+1}} \dots$$
$$\dots Q((s_{i_U} - s_{i_{U-1}})(t_{j_V} - t_{j_{V-1}}))_{z_{U,V}} g(z_{1,1} \dots, z_{u,v}, e, \dots, e)$$

стремится к

$$Q((s'_u - s'_{u-1})(t'_{v-1} - t'_{v-2}))_{z_{u,v+1}} \dots$$
$$\dots Q((s'_U - s'_{U-1})(t'_V - t'_{V-1}))_{z_{U,V}} g(z_{1,1} \dots, z_{u,v}, e, \dots, e)$$

равномерно по $z_{1,1} \dots, z_{u,v}$. Так как общее количество слагаемых остается постоянным, все выражение имеет тот же предел, что и

$$\sum\nolimits_{u,v} P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{1,1}}^{(i_1-0)(j_1-0)} \dots P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v-1}}^{(i_u-i_{u-1})(j_{v-1}-j_{v-2})} \cdot$$
$$\cdot \Big(P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v}}^{(i_{u+1}-i_u)(j_{v+1}-j_v)} - Q((s_{i_u} - s_{i_{u-1}})(t_{j_v} - t_{j_{v-1}}))_{z_{u,v}} \Big) \cdot$$
$$\cdot Q((s'_u - s'_{u-1})(t'_{v-1} - t'_{v-2}))_{z_{u,v+1}} \dots Q((s'_U - s'_{U-1})(t'_V - t_{V-1}))_{z_{U,V}} g(e, \dots, e).$$

В силу теоремы Чернова (см. [21]) каждая группа множителей вида

$$\Big(P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v}}^{(i_{u+1}-i_u)(j_{v+1}-j_v)} - Q((s_{i_u} - s_{i_{u-1}})(t_{j_v} - t_{j_{v-1}}))_{z_{u,v}} \Big) \cdot$$
$$\cdot Q((s'_u - s'_{u-1})(t'_{v-1} - t'_{v-2}))_{z_{u,v+1}} \dots$$
$$\dots Q((s'_U - s'_{U-1})(t'_V - t_{V-1}))_{z_{U,V}} g(z_{1,1} \dots, z_{u,v-1}, e, \dots, e)$$

сходится к нулю. Мы хотим доказать, что эта сходимость равномерна по $z_{1,1} \dots, z_{u,v-1}$. Этот факт вытекает из теоремы Арцела-Асколи. Равномерная ограниченность есть следствие компактности G и сжимающего свойства рассматриваемых операторов. Равностепенная непрерывность вытекает из оценки:

$$\Big(P(|\mathcal{P}^n|)_{z_{u,v}}^{(i_{u+1}-i_u)(j_{v+1}-j_v)} - Q((s_{i_u} - s_{i_{u-1}})(t_{j_v} - t_{j_{v-1}}))_{z_{u,v}} \Big) \cdot$$
$$\cdot Q((s'_u - s'_{u-1})(t'_{v-1} - t'_{v-2}))_{z_{u,v+1}} \dots Q((s'_U - s'_{U-1})(t'_V - t_{V-1}))_{z_{U,V}}$$
$$|g(\widetilde{z}_{1,1} \dots, \widetilde{z}_{u,v-1}, e, \dots, e) - g(z_{1,1} \dots, z_{u,v-1}, e, \dots, e)| \leqslant$$
$$\leqslant w(g, \max\{\rho(\widetilde{z}_{1,1}, z_{1,1}), \dots, \rho(\widetilde{z}_{u,v-1}, z_{u,v-1})\}),$$

не зависящей от n. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f(\{x(s'_u,t'_v)\}_{u,v})d\mu^{\mathcal{P}_n}-\int_E fd\overline{\nu}^{\mathcal{P}'_n}\right)=0.$$

Теперь можно записать:

$$\int_E fd\overline{\nu}^{\mathcal{P}'_n}-\int_E fd\overline{\nu}^{\mathcal{P}'}=\sum\nolimits_{u,v}Q((s_{i_1}-0)(t_{j_1}-0))_{z_{1,1}}\dots$$
$$\dots Q((s_{i_u}-s_{i_{u-1}})(t_{j_{v-1}}-t_{j_{v-2}}))_{z_{u,v-1}}\cdot$$
$$\cdot\left(Q((s_{i_{u+1}}-s_{i_u})(t_{j_{v+1}}-t_{j_v})_{z_{u,v}}-Q((s'_u-s'_{u-1})(t'_v-t'_{v-1}))_{z_{u,v}}\right)\cdot$$
$$\cdot Q((s'_u-s'_{u-1})(t'_{v-1}-t'_{v-2}))_{z_{u,v+1}}\dots Q((s'_U-s'_{U-1})(t'_V-t_{V-1}))_{z_{U,V}}g(e,\dots,e),$$

что стремится к нулю по лемме 2.1.10. □

2.1.4 Доказательство основного результата

Теорема 2.1.12. *Для каждого $s>0$ пусть $\{g_s(t),t\geqslant 0\}$ – это начинающийся в единице процесс Леви на G, порожденный оператором $(sL,D(L))$. Рассмотрим семейство $R(s)$ операторов на пространстве $B_b(D(\mathbb{R}_+,G))$ ограниченных борелевских функций с равномерной нормой, определенное как*

$$R(s)f(x)=\mathbb{E}f(x(\cdot)g_s(\cdot)).$$

Тогда семейство $\{R(s),s\geqslant 0\}$ образует марковскую полугруппу, порождающую $D(\mathbb{R}_+,G)$-значный процесс Леви x с распределением μ. Ее сужение на пространство $UC_b(D(\mathbb{R}_+,G))$ всех ограниченных равномерно непрерывных функций $D(\mathbb{R}_+,G)\to\mathbb{R}$ сильно право-непрерывно по t. Кроме того, для любой последовательности равномерных разбиений $\mathcal{P}^n\to 0$ и операторного семейства $P(t)$, удовлетворяющего условиям 1-5 из раздела 1, $\mu^{\mathcal{P}^n}$ слабо сходятся к μ при $n\to\infty$.

Доказательство. Заметим сначала, что операторы $R(t)$ определены корректно, то есть поточечное умножение и взятие обратного элемента являются борелевскими операциями на $D(\mathbb{R}_+,G)$. Это вытекает из [36, гл.3, предложение 7.1], где доказывается, что борелевская σ-алгебра на $D(\mathbb{R}_+,G)$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной конечномерными проекторами вида $x\mapsto(x(t_1),\dots,x(t_k))$.

В силу теоремы 2.1.9 семейство $\{\mu^{\mathcal{P}^n}\}$ слабо относительно компактно, поэтому у нее найдется хотя бы одна предельная точка μ. Обозначим соответствующий случайный процесс через x и рассмотрим подпоследовательность $\mu^{\mathcal{P}_k}\xrightarrow{w}\mu$, тогда $\mu^{\mathcal{P}^k}$ сходится к μ в смысле конечномерных распределений в точках непрерывности $x(s,\cdot)$. Из теоремы 2.1.11 вытекает, для любого разбиения $\mathcal{P}'=\{(s'_u,t'_v)\}_{u,v}\subset\mathcal{C}$

$$\int_E f(\{x(s'_u,t'_v)\}_{u,v})d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_E f(\{x(s'_u,t'_v)\}_{u,v})d\mu^{\mathcal{P}_k}=\int_{G^{UV}}fd\overline{\nu}^{\mathcal{P}'},$$

где $f\in C(G^{UV})$. Мы хотим доказать, что

$$\int_E f(\{x(s'_u,t'_v)\}_{u,v})d\mu=\int_{G^{UV}}fd\overline{\nu}^{\mathcal{P}'}\tag{2.6}$$

для произвольного разбиения $\mathcal{P}'$. Применим лемму 2.1.5 к $\mathcal{P}'$ как к подразбиению произвольного равномерного разбиения. Обозначая $Q(t) = e^{tL}$, имеем:

$$\int_{G^{UV}} f d\overline{\nu}^{\mathcal{P}'} = \prod\nolimits_{u,v} Q((s'_u - s'_{u-1})(t'_v - t'_{v-1}))_{z_{u,v}} g(e, \ldots, e),$$

где

$$g(\{z_{u,v}\}_{u,v}) = f(\{z_{1,1} \cdot \ldots \cdot z_{u,l} \cdot \ldots \cdot z_{u,v}\}_{u,v}).$$

Выберем $\mathcal{P}^k = \{(s^k_u, t^k_v)\} \subset \mathcal{C}$ так, чтобы $s^k_u \searrow s'_u$ и $t^k_v \searrow t'_v$. Тогда по лемме 2.1.10 получаем:

$$\int_E f(\{x(s'_u, t'_v)\}_{u,v}) d\mu = \lim\nolimits_{k\to\infty} \int_E f(\{x(s^k_u, t^k_v)\}_{u,v}) d\mu = \lim\nolimits_{k\to\infty} \int_{G^{UV}} f d\overline{\nu}^{\mathcal{P}^k} =$$
$$= \lim\nolimits_{k\to\infty} \prod\nolimits_{u,v} Q((s^k_u - s^k_{u-1})(t^k_v - t^k_{v-1}))_{z_{u,v}} g(e, \ldots, e) =$$
$$= \prod\nolimits_{u,v} Q((s'_u - s'_{u-1})(t'_v - t'_{v-1}))_{z_{u,v}} g(e, \ldots, e) = \int_{G^{UV}} f d\overline{\nu}^{\mathcal{P}'}.$$

Для каждого набора $s_1, ...s_n \in \mathbb{R}_+$ конечномерные распределения процесса $\{x(s_i, \cdot)\}_i$ однозначно определяются распределениями $\{x(s_i, t_j)\}_{i,j}$, заданными по формуле (2.6). Следовательно, μ есть единственная предельная точка последовательности $\mu^{\mathcal{P}^n}$, а значит, в силу относительной компактности, вся последовательность слабо сходится к μ. Более того, формула (2.6) не зависит от выбора $\{P(t), t \geqslant 0\}$ и $\mathcal{P}^n$, а значит, от их выбора не зависит и построенная мера μ.

Докажем теперь, что $x(s, \cdot)$ для каждого $s > 0$ представляет собой процесс Леви с переходной полугруппой $R(s)$. Рассмотрим цилиндрические функции $f, g : D(\mathbb{R}_+, G) \to \mathbb{R}$, тогда из (2.6) и леммы 2.1.5 следует:

$$\mathbb{E} g(x(s, \cdot)) f(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)) = \mathbb{E} g(x(s, \cdot)) \mathbb{E} f(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)).$$

Для произвольных $f, g \in B_b(D(\mathbb{R}_+, G), \mathbb{R})$ выберем ограниченные последовательности цилиндрических функций f_k, g_k таких, что $g_k(x(s, \cdot)) \to g(x(s, \cdot))$ и $f_k(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)) \to f(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot))$ почти всюду относительно меры μ. Это можно сделать, так как $x(s, \cdot)$ и $x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)$ представляют собой случайные величины и достаточно выбрать g_k и f_k, сходящиеся почти всюду относительно их распределений. По теореме Лебега получаем:

$$\mathbb{E} g(x(s, \cdot)) f(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)) = \lim\nolimits_{k\to\infty} \mathbb{E} g_k(x(s, \cdot)) f_k(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)) =$$
$$= \lim\nolimits_{k\to\infty} \mathbb{E} g_k(x(s, \cdot)) \mathbb{E} f_k(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)) = \mathbb{E} g(x(s, \cdot)) \mathbb{E} f(x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)).$$

Из формулы (2.6) и леммы 2.1.5 легко получить, что конечномерные распределения процесса $x(s, \cdot)^{-1} x(s', \cdot)$ совпадают с соответствующими распределениями $x(s' - s, \cdot)$, поэтому приращения $x(s, \cdot)$ независимы и стационарны, а значит, $x(s, \cdot)$ есть процесс Леви на $D(\mathbb{R}_+, G)$ и операторы

$$\widetilde{R}(s) f(y) = \mathbb{E} f(y(\cdot) x(s, \cdot))$$

образуют полугруппу. Из формулы (2.6) также видно, что для каждого $s > 0$ процесс $x(s, \cdot)$ имеет распределение процесса Леви, порожденного оператором $(sL, D(L))$, так что $R(s) \equiv \widetilde{R}(s)$.

Нам осталось показать, что сужение $R(s)$ на $UC_b(D(\mathbb{R}_+, G))$ сильно право-непрерывно по s. Фиксируем $x \in D(\mathbb{R}_+, G)$ так, чтобы $x(0,\cdot) \equiv e$, что выполнено для почти всех траекторий. Так как x право-непрерывно, $d(e, x(s,\cdot)) \to 0$ при $s \to 0$ почти наверное. Заметим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ выполнено:

$$d_u(x(s,\cdot), e, \lambda) = d_u(x(s,\cdot), e) = \sup\nolimits_{t\geqslant 0} \rho(x(s, t\wedge u), e),$$

то есть $d(x(s,\cdot), e)$ не зависит от λ. Следовательно, для любого $y \in D(\mathbb{R}_+, G)$

$$d(x(s,\cdot)y(\cdot), y(\cdot)) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} d_u(x(s,\cdot)y(\cdot), y(\cdot))e^{-u}du = \int_{\mathbb{R}_+} d_u(x(s,\cdot), e)e^{-u}du = \\ = \rho(x(s,\cdot), e),$$

а значит,

$$\rho(x(s,\cdot)y(\cdot), y(\cdot)) \leqslant \rho(x(s,\cdot), e) \to 0, \quad s \to 0 \tag{2.7}$$

почти наверное. Тогда для любой функции $f \in UC_b(D(\mathbb{R}_+, G))$

$$|\mathbb{E}f(y(\cdot)x(s,\cdot)) - f(y(\cdot))| \leqslant \mathbb{E}\left(\sup\{|f(u) - f(v)|, \rho(u,v) \leqslant \rho(x(s,\cdot), e)\}\right) \to 0,$$

по теореме Лебега, и доказательство теоремы завершено. □

Замечание 2.1.2. В общем случае построенный процесс не является сопряженно-инвариантным, так как для фиксированного $s > 0$ соотношение $a(\cdot)^{-1}x(s,\cdot)a(\cdot) \stackrel{d}{=} x(s,\cdot)$ не обязано выполнятся для непостоянного $a \in D(\mathbb{R}_+, G)$. Для постоянных же путей, в силу соотношения (2.6) и инвариантности относительно сопряжения полугруппы e^{tL}, имеем:

$$a^{-1}x(\cdot,\cdot)a \stackrel{d}{=} x(\cdot,\cdot), \quad \forall a \in G.$$

Покажем теперь, что можно избавиться от условий марковости для $P(t)$, если найдется некоторое асимптотически близкое семейство, для которого эти условия выполнены. Наше рассуждение мотивированно тем, что различные операторные семейства, используемые в работе [84] для приближения процессов на римановом многообразии, далеко не все порождают вероятностные меры. Кроме того, это позволяет избавиться от различных нормировочных констант, которые не влияют на асимптотическое поведение при малых t.

Следствие 2.1.13. *Пусть семейство $\{P(t), t \geqslant 0\}$ удовлетворяет условиям 1-5, рассмотрим произвольное семейство операторов $\{R(t), t \geqslant 0\}$ на $C(G, \mathbb{R})$. Предположим, что для некоторой равномерной последовательности $\mathcal{P}^n \to 0$ выполнено:*

$$\|P(|\mathcal{P}^n|) - R(|\mathcal{P}^n|)\| = o(|\mathcal{P}^n|/T_n), \tag{2.8}$$

где $T_n = s_M^{(n)} t_N^{(n)}$. Построим (знакопеременные) меры $\nu^{\mathcal{P}_n}$ как в первом разделе, используя операторы $R(t)$. Такие меры существуют в силу теоремы Рисса-Маркова, но они уже не обязаны быть ни вероятностными, ни положительными. Тем не менее, при этих условиях

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \int_E f d\nu^{\mathcal{P}^n} = \int_E f d\mu$$

для любого $f \in C_b(E)$, где μ есть мера, построенная в теореме 2.1.12.

Доказательство. Построим меры $\mu^{\mathcal{P}_n}$ с помощью операторов $P(t)$. Тогда

$$\int_E f d\nu^{\mathcal{P}^n} - \int_E f d\mu^{\mathcal{P}^n} =$$
$$= \sum\nolimits_{i,j} R_{x_{s_1,t_1}}((t_1-t_0)(s_1-s_0), x_{s_1,t_0}) \dots R_{x_{s_i,t_{j-1}}}((t_{j-1}-t_{j-2})(s_i-s_{i-1}), x_{s_i,t_{j-2}}) \cdot$$
$$\cdot \Big(R_{x_{s_i,t_j}}((t_j-t_{j-1})(s_i-s_{i-1}), x_{s_i,t_{j-1}}) - P_{x_{s_i,t_j}}((t_j-t_{j-1})(s_i-s_{i-1}), x_{s_i,t_{j-1}}) \Big) \cdot$$
$$\cdot P_{x_{s_i,t_{j+1}}}((t_{j+1}-t_j)(s_i-s_{i-1}), x_{s_i,t_j}) \dots P_{x_{s_M,t_N}}((t_N-t_{N-1})(s_M-s_{M-1}), x_{s_M,t_{N-1}}) \cdot$$
$$\cdot f \circ I^{\mathcal{P}^n}.$$

Здесь P_y и R_y означают, что операторы применяются к функции аргумента y при фиксированных оставшихся переменных. Из (2.8) и сжимающего свойства $P(t)$ получаем:

$$\|R(|\mathcal{P}^n|)\| \leqslant 1 + o(|\mathcal{P}^n|/T_n),$$

следовательно, для $0 < k \leqslant MN$ и достаточно больших n

$$\|R(|\mathcal{P}^n|)^k\| \leqslant (1 + |\mathcal{P}^n|/T_n)^k \leqslant \exp(k \log(1 + |\mathcal{P}^n|/T_n)) \leqslant exp(k|\mathcal{P}^n|/T_n) \leqslant exp(1).$$

Выберем $\varepsilon > 0$, тогда найдется $k > 0$ такое, что

$$\|R(|\mathcal{P}^n|) - P(|\mathcal{P}^n|)\| \leqslant \varepsilon |\mathcal{P}^n|/T_n$$

для всех $n > k$. Собирая полученные оценки, выводим:

$$\left| \int_E f d\nu^{\mathcal{P}^n} - \int_E f d\mu^{\mathcal{P}^n} \right| \leqslant \varepsilon \exp(1) \frac{|\mathcal{P}^n| NM}{T_n} \|f\| = \varepsilon \exp(1) \|f\|,$$

что завершает доказательство в силу теоремы 2.1.12. □

Замечание 2.1.3. Условие (2.8) есть другая запись соотношения

$$\|R(t) - P(t)\| = o(t), \tag{2.9}$$

также накладывающее ограничения на рост количества точек разбиений $\mathcal{P}^n$. Оно необходимо, чтобы скомпенсировать неограниченность нашего параметрического множества (полупрямой). Рассмотрим следующий пример. Пусть $R(t) = (1+t)e^{tL}$, тогда

$$\int_E 1 \cdot d\nu^{\mathcal{P}^n} = (1 + |\mathcal{P}^n|)^{NM}.$$

Выбирая NM сколь угодно большим, не меняя при этом $|\mathcal{P}^n|$, можно построить последовательность $\mathcal{P}^n$ так, чтобы это выражение стремилось к бесконечности, и тогда никакой сходимости от соответствующих мер ждать не приходится.

С другой стороны, для произвольной последовательности $\{(s_i^n, t_j^n), i \leqslant M, j \leqslant N\} = \mathcal{P}^n \to 0$ всегда можно построить другую последовательность подразбиений $\mathcal{P}^n \supset \{(s_i^n, t_j^n), i \leqslant M', j \leqslant N'\} = \mathcal{P}'^n \to 0$ так, чтобы имело место (2.8) при выполнении (2.9). Например, можно взять M', N', для которых

$$T_n = |\mathcal{P}^n| M' N' < \left(\frac{\|R(|\mathcal{P}^n|) - P(|\mathcal{P}^n|)\|}{|\mathcal{P}^n|} \right)^{-1/2}.$$

Так как последнее слагаемое стремится к бесконечности, M', N' можно выбрать такими, что числа $s_{M'}, t_{N'}$ будут неограниченно возрастать.

2.2 Приближения к распределению броуновского листа

2.2.1 Основные конструкции

Рассмотрим компактную связную группу Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Будем считать, что на G задана би-инвариантная риманова метрика, обозначим соответствующее расстояние через $\rho(\cdot,\cdot)$, меру объема как $Vol(dx)$, а оператор Лапласа-Бельтрами через Δ. Хорошо известно (см., например, [27]), что Δ может быть продолжен до самосопряженного оператора на $L^2(G, Vol)$, а порожденная им полугруппа $e^{\frac{t}{2}\Delta}$ имеет строго положительное гладкое ядро $K(t,\cdot,\cdot)$. Это ядро би-инвариантно в том смысле, что $K(t,x,y) = K(t,gx,gy) = K(t,xg,yg)$ для всех $x,y,g \in G$.

В этом разделе мы рассматриваем броуновское движение $g_s(t)$ на $C([0,1],G)$, построенное как в теореме 1.2.3 для случая, когда $M = [0,1]$, $H = \{h : h(0) = 0, \exists \dot{h}$ п.в. $, \int_0^1 |\dot{h}(t)|^2_{\mathfrak{g}} dt < \infty\}$, а переносимый семимартингал есть $C([0,1],\mathfrak{g})$-значное броуновское движение $W_s(t)$, которое также можно рассматривать как двухпараметрический процесс $W(s,t) = W_s(t)$, носящий название *броуновского листа*. Тогда $g(s,t) = g_s(t)$ естественно называть *броуновским листом на* G. Пространство его траекторий $C([0,1]^2, G)$ обозначим через Ω.

Рассмотрим разбиения $\mathcal{P}_1 = \{0 = s_0 \leqslant ... \leqslant s_m = 1\}$ и $\mathcal{P}_2 = \{0 = t_0 \leqslant ... \leqslant t_n = 1\}$ отрезка $[0,1]$, $m,n \in \mathbb{N}$, и разбиение $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(s_i,t_j),\ 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$ квадрата $[0,1]\times[0,1]$. Обозначим $\|\mathcal{P}\| := \max\limits_{i,j}\{s_i - s_{i-1}, t_j - t_{j-1}\}$. Пусть $G^{\mathcal{P}_1}$, $G^{\mathcal{P}_2}$, $G^{\mathcal{P}}$ – как и в предыдущем разделе.

Рассмотрим семейство операторов на $C(G)$, определенных как

$$Q(t)f(x) = \int_G p(t,x,y)Vol(dy),$$

где

$$p(t,x,y) = \frac{e^{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t}}}{\int_G e^{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t}} Vol(dy)}.$$

Используя семейство $\{Q(t), t \geqslant 0\}$, для каждого разбиения $\mathcal{P}$ зададим меру $\overline{\mu}^{\mathcal{P}}$ как и в предыдущем разделе.

Нам понадобится способ вложить наши конечномерные распределения в функциональное пространство. В первом разделе мы строили приближающие процессы как кусочно-постоянные траектории, но на множестве непрерывных функций со значениями в группе Ли нету какого-то выделенного способа построить функцию по ее значениям на заданном наборе точек, поэтому мы введем общую процедуру интерполирования, удовлетворяющую некоторым естественным условиям.

Определение 2.2.1. Пусть $\{\mathcal{P}^\alpha\}_\alpha$ – это некоторое множество разбиений квадрата $[0,1]^2$. Семейство борелевских отображений $I^{\mathcal{P}^\alpha} : G^{\mathcal{P}^\alpha} \to \Omega$ называется *интерполяцией*, если выполнены следующие условия:

1. $I^{\mathcal{P}^\alpha}(x)(s_i,t_j) = x_{s_i,t_j}$.

2. Существует константа L такая, что для всех разбиений $\mathcal{P}^\alpha$ и $x \in G^{\mathcal{P}^\alpha}$ имеем:

$$\max_{i,j} \sup_{(s,t)\in[s_i,s_{i+1}]\times[t_j,t_{j+1}]} \rho\left(I^{\mathcal{P}^\alpha}(x)(s,t), I^{\mathcal{P}^\alpha}(x)(s_i,t_j)\right) \leqslant$$
$$\leqslant L \max_{i,j} \max_{\sigma,\tau,\phi,\psi=0,1} \{\rho\left(x_{s_{i+\sigma},t_{j+\tau}}, x_{s_{i+\phi},t_{j+\psi}}\right)\}.$$

Замечание 2.2.1. Хотя бы одна такая интерполяция всегда существует – например, можно рассмотреть следующую конструкцию. Выберем произвольное разбиение $\mathcal{P}$. Вложим нашу группу G изометрически в объемлющее евклидово пространство $\mathbb{R}^d$, тогда, в силу теоремы о трубчатой окрестности (см. [19, гл 2, теорема 11.4]), для некоторого $\varepsilon > 0$ можно определить проекцию на G для всех точек $\mathbb{R}^d$, удаленных от G не более чем на 2ε. Для всех $\overline{x} \in G^{\mathcal{P}}$ таких, что

$$\max_{i,j} \max_{\sigma,\tau,\phi,\psi=0,1} \{\rho\left(\overline{x}_{s_{i+\sigma},t_{j+\tau}}, \overline{x}_{s_{i+\phi},t_{j+\psi}}\right)\} < \varepsilon,$$

линейно проинтерполируем $\overline{x}$ на каждой клетке $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ как элемент $\mathbb{R}^d$, а результат спроектируем на G, получая тем самым отображение $x : [0,1]^2 \to G$. Так как проекция задает гладкое отображение на замкнутой ε-окрестности многообразия, ее дифференциал на ней равномерно ограничен и поэтому для x выполнено условие 2 с константой, не зависящей ни выбора разбиения, ни от $\overline{x}$.

На всех остальных $\overline{x} \in G^{\mathcal{P}}$ определим $I^{\mathcal{P}}$ следующим образом. Разобьем G на конечное число подмножеств U_k, изоморфных шару $\overline{B(0,1)} = \{|x| \leqslant 1\}$ в евклидовом пространстве. Фиксируем точки $u_k \in U_k$, переходящие при таком изоморфизме в центр шара $\overline{B(0,1)}$. Проведем какие-нибудь кривые $A_k : [0,1] \to G$, соединяющие u_k с единицей группы: $A_k(0) = u_k, A_k(1) = e$. Кроме того, выберем $\delta > 0$ так, чтобы окрестности $\overline{B((s_i,t_j),\delta)} := \{z \in [0,1]^2 : |z - (s_i,t_j)| \leqslant \delta\}$ разных точек разбиения не пересекались.

Рассмотрим по отдельности все возможные распределения точек $\{\overline{x}_{s_i,t_j}\}$ по множествам $\{U_k\}$. В случае, если точка лежит в двух или более таких множествах, выберем наименьшее по номеру. Предположим, что $\overline{x}_{s_i,t_j} \in U_k$ для фиксированных i, j, k. Отождествим U_k с $\overline{B(0,1)}$, проведем прямую $D_k : [0,1] \to G$ из точки $\overline{x}_{s_i,t_j}$ в u_k: $D_k(0) = \overline{x}_{s_i,t_j}, D_k(1) = u_k$. Для $z \in \overline{B((s_i,t_j),\delta)}$ положим

$$I^{\mathcal{P}}(\overline{x})(z) := \begin{cases} D_k(2|z|/\delta), & |z| \leqslant \delta/2, \\ A_k(2|z|/\delta - 1), & \delta/2 < |z| \leqslant \delta. \end{cases}$$

Аналогичную конструкцию проделаем для всех точек разбиения, а на оставшейся части квадрата $[0,1]^2$ положим $I^{\mathcal{P}}(\overline{x})(z) \equiv e$. Несложно видеть, что построенное отображение непрерывно на (борелевском) множестве элементов $G^{\mathcal{P}}$, распределенных фиксированным способом по шарам U_k. Таким образом, построенная интерполяция $I^{\mathcal{P}}$ является борелевской и удовлетворяет условиям 1 и 2.

Пусть теперь $\mu^{\mathcal{P}}$ – это образ $\overline{\mu}^{\mathcal{P}}$ под действием отображения $I^{\mathcal{P}}$ для данного разбиения $\mathcal{P}$. Наша главная задача в этом разделе – доказать, что последовательность $\mu^{\mathcal{P}^n}$ слабо сходится к распределению броуновского листа, если $|\mathcal{P}^n| \to 0$.

2.2.2 Относительная компактность приближающей последовательности

С этого момента мы будем работать с фиксированной последовательностью разбиений $\mathcal{P}^n$, для которых $|\mathcal{P}^n| \to 0$, и некоторой интерполяцией $I^{\mathcal{P}^n}$. Заметим, что, в отличие от предыдущего раздела, мы не требуем равномерности разбиений. Это связано с тем, что для полугруппы $e^{\frac{t}{2}\Delta}$ известны конкретные формулы для ее асимптотики при малых t (см., например, [44]), которые можно использовать вместо теоремы Чернова.

По построению, меры $\mu^{\mathcal{P}^n}$ являются борелевскими вероятностными мерами на Ω, поэтому они принадлежат пространству Прохорова (см. [36]), топология которого, в силу сепарабельности Ω, является топологией слабой сходимости. Задача этого подраздела – это показать, что для $\{\mathcal{P}^n\}$ выполняются условия теоремы Прохорова (см. [53, теорема 16.3]). Сначала нам понадобятся некоторые технические леммы. Напомним, что семейство $\mathcal{A}$ вероятностных мер называется *плотным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется компакт K, для которого $\sup_{P\in\mathcal{A}} P(K) > 1 - \varepsilon$.

Лемма 2.2.1. *Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$ борелевских вероятностных мер на Ω. Обозначим для $x \in \Omega$:*

$$w(x,\delta) := \sup\{\rho(x(s_1,t_1), x(s_2,t_2)) \mid (s_1,t_1),(s_2,t_2) \in [0,1]^2 : |(s_1,t_1)-(s_2,t_2)| < \delta\}$$

Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{P\in\mathcal{A}} P\left(w(x,\delta) > \varepsilon\right) = 0,$$

тогда множество $\mathcal{A}$ плотно.

Доказательство. Рассмотрим семейство положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ и $\alpha > 0$. В силу условия леммы можно выбрать последовательность $\{\delta_n\}$, для которой

$$\sup_{P\in\mathcal{A}} P\left(w(x,\delta_n) > \varepsilon_n\right) < \alpha 2^{-n}.$$

Положим $K_n = \{w(x,\delta_n) \leqslant \varepsilon_n\}$. Заметим, что K_n являются замкнутыми, следовательно,и $K = \bigcap\limits_n K_n$ замкнуто. Кроме того, по построению, K есть равностепенно непрерывное семейство функций $[0,1]^2 \to G$, следовательно, применимо обобщение теоремы Арцела-Асколи ([54, гл. 7, теорема 18] и K компактно. Так как

$$\sup_{P\in\mathcal{A}} P(K) > 1 - \alpha$$

и α было произвольным, доказательство можно считать завершенным. □

Следствие 2.2.2. *В условиях леммы 2.2.1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется компактное множество $K_\varepsilon \subset \Omega$ такое, что $\sup_{P\in\mathcal{A}} P(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ и $w(x,\delta) \rightrightarrows 0$ равномерно на K_ε при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из построения множества K в доказательстве леммы 2.2.1. □

Наш последний технический результат основан на идее доказательства леммы 4 в [83].

Лемма 2.2.3. *Обозначим через R радиус инъективности G и выберем $\varepsilon < \frac{1}{2}R$. Положим $\mathcal{R} = \{0 = r_0 < r_1 < ... < r_n = 1\}$ и рассмотрим $G^{\mathcal{R}}$-значную случайную величину Z с распределением $\overline{\mu}_s^{\mathcal{R}}$. Тогда существуют постоянные C и δ_0, не зависящие от выбора ε и $\mathcal{R}$, такие, что для любых $m \leqslant n$ и $\delta < \delta_0/s$ выполнено:*

$$\max_{j:\, r_m - r_j < \delta} \sup_{x \in G} P(\rho(Z_{r_j}, Z_{r_m}) > \varepsilon \,|\, Z_{r_j} = x) \leqslant C s^{3/2} \delta^{3/2} \varepsilon^{-4}$$

Доказательство. Выберем гладкую, строго возрастающую функцию $\chi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ такую, что $\chi(t) = t$ на $[0, R/2]$ и $\chi = const$ на $[R, \infty)$. Выберем $y \in G$, тогда $u_y := (\chi \circ \rho(y, \cdot))^4$ является гладкой на G. В силу [83, следствие 2] существуют постоянные K и $\delta_0 > 0$ такие, что для любых $t_1, .., t_m$, для которых $t = \sum_i^m t_i < \delta_0$, выполнено:

$$|(Q(t_1)...Q(t_m) - (I + \frac{t}{2}\Delta))u_y(y)| \leqslant K \|u_y\|_4 t^{3/2},$$

где $\|u_y\|_n := \max\{|u_y^{(k)}(g)|, g \in G, k \leqslant n|\}$. Так как $\left((I + \frac{t}{2}\Delta)u_y\right)(y) = 0$ для любого $y \in G$, в силу неравенства Чебышева получаем:

$$\max_{j:\, r_m - r_j < \delta} \sup_{y \in G} P(\rho(Z_{r_j}, Z_{r_m}) > \varepsilon \,|\, Z_{r_j} = y) \lesssim$$
$$\lesssim \max_{j:\, r_m - r_j < \delta} \sup_{y \in G} \varepsilon^{-4} Q(s(r_{j+1} - r_j))...Q(s(r_m - r_{m-1}))u_y(y) \leqslant$$
$$\leqslant C\delta^{3/2} s^{3/2} \varepsilon^{-4}.$$

□

Теорема 2.2.4. *Семейство $\{\mu^{\mathcal{P}_n}\}_n$ относительно компактно в топологии слабой сходимости.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы применить лемму 2.2.1 и получить плотность $\{\mu^{\mathcal{P}_n}\}_n$, тогда относительная компактность будет следовать из теоремы Прохорова. Таким образом, нам нужно доказать, что

$$\lim\nolimits_{\delta \to 0} \sup\nolimits_{1 \leqslant n < \infty} \mu^{\mathcal{P}^n}(w(x, \delta) > \varepsilon) = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Мы начнем с того, что вкратце изложим происходящее далее. Сначала мы переносим нашу задачу с помощью интерполяции обратно на $G^{\mathcal{P}}$. Затем мы рассмотрим отдельно "горизонтальные" и "вертикальные" расстояния. Для горизонтальной части, используя лемму 2.1.3, мы оценим соответствующую вероятность с помощью максимума по вероятностям, которые учитывают только *фиксированные* вертикальные линии. В этом случае, мы можем разбить выбранную часть на горизонтальные линии с помощью леммы 2.1.2 и получить однопараметрические приближения, для которых задача сводится к исследованию семейства операторов $Q(t)f(x) = \int f(y)p(t, x, y)dy$. В случае вертикальных расстояний поступаем аналогично.

Используя второе условие на интерполяцию $I^{\mathcal{P}^n}$, получаем:

$$w(x, \delta) = \sup\{\rho(x(u_1, v_1), x(u_2, v_2)) \,|\, (u_1, v_1) - (u_2, v_2)| < \delta\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\rho(x(s_i, t_j), x(u_1, v_1)) + \rho(x(s_i, t_j), x(s_k, t_l)) + \rho(x(s_k, t_l), x(u_2, v_2))\} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + 2L) \sup\{\rho(x(s_i, t_j), x(s_k, t_l)) \,|\, |(s_i, t_j) - (s_k, t_l)| < 3\delta\}$$

для $\delta > \sqrt{2}|\mathcal{P}^n|$. Фиксируем теперь $n \geqslant 1$, для которого $\delta > 2\sqrt{2}|\mathcal{P}^n|$. Для удобства, пока n фиксировано, будем писать $\mathcal{P}$ вместо $\mathcal{P}^n$. Обозначим:

$$\overline{w}(x,\delta) = \sup\{\rho(x(s_i,t_j), x(s_k,t_l)) \,|\, |(s_i,t_j) - (s_k,t_l)| < 3\delta\},$$

тогда

$$\overline{w}(x,\delta) \leqslant \sup\{\rho(x(s_i,t_j), x(s_k,t_j)) \,|\, |s_i - s_k| < 3\delta\} + \\ + \sup\{\rho(x(s_i,t_j), x(s_i,t_k)) \,|\, |t_j - t_k| < 3\delta\} \equiv \overline{w}_l(x,\delta) + \overline{w}_r(x,\delta)$$

Выберем подразбиение $\mathcal{P}_1' = \{0 = s_{i_0} < \ldots < s_{i_q} = 1\} \subset \mathcal{P}_1$ такое, что $|\mathcal{P}_1'| < 3\delta$ и $\min_{1 \leqslant k < q} |s_{i_{k+1}} - s_{i_k}| > \frac{3}{4}\delta$. Для $f, g \in G^{\mathcal{P}_2}$ положим

$$\rho(f,g) := \max_j \rho(f_j, g_j),$$

тогда

$$\overline{w}_l(x,\delta) = \max\{\rho((x(s_i,x_j))_j, (x(s_k,x_j))_j),\, |s_i - s_k| < 3\delta\} \leqslant \\ \leqslant \max_k \max\{2\rho((x(s_{i_k},x_j))_j, (x(s_{i_k+l},x_j))_j),\, 1 \leqslant l \leqslant i_{k+1} - i_k\}$$

Рассмотрим $G^{\mathcal{P}}$-значный случайный элемент $(x_{s_i,t_j})_{i,j}$ с распределением $\overline{\mu}^{\mathcal{P}}$. Случайные величины $(x_{s_i,t_j})_j$, $i = 1, \ldots, m$, образуют марковскую цепь с переходной вероятностью

$$P(\rho(x_{s_{i+1},t_j})_j | (x_{s_i,t_j})_j) = \overline{\mu}^{\mathcal{P}_2}(s_{i+1} - s_i, (x_{s_i,t_j})_j, \rho(x_{s_{i+1},t_j})_j).$$

Применяя лемму 2.1.3, получаем:

$$\begin{aligned} & P(\overline{w}_l(x,\delta) > \varepsilon) \leqslant \\ & \leqslant P\left(\max_k \max\{2\rho((x_{s_{i_k},x_j})_j, (x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j),\, 1 \leqslant \lambda \leqslant i_{k+1} - i_k\} > \varepsilon\right) \leqslant \\ & \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} P\left(\max\{2\rho((x_{s_{i_k},t_j})_j, (x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j),\, 1 \leqslant \lambda \leqslant i_{k+1} - i_k\} > \varepsilon\right) \leqslant \\ & \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \max_{1 \leqslant \lambda \leqslant i_{k+1} - i_k} \sup_{z \in G^{\mathcal{P}_2}} 2P\left(4\rho((x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j, (x_{s_{i_{k+1}},t_j})_j) > \varepsilon \,|\, (x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j = z\right) = \\ & = \sum_{k=0}^{q-1} \max_{1 \leqslant \lambda \leqslant i_{k+1} - i_k} \sup_{z \in G^{\mathcal{P}_2}} 2P\left(4\rho(e, (x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j^{-1}(x_{s_{i_{k+1}},t_j})_j) > \varepsilon \,|\, (x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j = z\right). \end{aligned}$$

По лемме 2.1.1, x может быть представлено как $(x_{s_i,t_j})_{i,j} \overset{d}{=} (y_{s_1,t_j} \cdot \ldots \cdot y_{s_i,t_j})_{i,j}$ для взаимно независимых $(y_{s_1,t_j})_j$. Так что $(x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j^{-1}(x_{s_{i_{k+1}},t_j})_j$ имеют распределения $(y_{s_{i_k+\lambda+1},t_j} \cdot \ldots \cdot y_{s_{i_{k+1}},t_j})_{i,j}$. Для некоторых k, λ определим разбиения $\mathcal{R} = \{0 = u_0 < u_1 = s_{i_k+\lambda+1} - s_{i+k+\lambda} < \ldots < u_l = s_{i_{k+1}} - s_{i+k+\lambda} \leqslant u_{l+1} = 1\} \times \mathcal{P}_2$. Пусть q – это $G^{\mathcal{R}}$-значная случайная величина с распределением $\overline{\mu}^{\mathcal{R}}$, тогда $(x_{s_{i_k+\lambda},t_j})_j^{-1}(x_{s_{i_{k+1}},t_j})_j \overset{d}{=} (q_{u_l,t_j})_j$.

Применим лемму 2.1.2 к $(q_{u_k,t_j})_{k,j}$ и получим:

$$q_{u_l,t_j} \overset{d}{=} h_1 \cdot \ldots \cdot h_{jl}, \tag{2.10}$$

для взаимно независимых случайных величин h_j. Положим $\mathcal{R}_1 = \{0 = r_0 < r_1 = v_1 < r_2 = v_1 + v_2 < ... < r_{nl} = v_1 + ... + v_{nl} < r_{nl+1} = 1\}$, где $v_{(k-1)l+r} = (u_{r+1} - u_r)(t_k - t_{k-1})$, и построим $G^{\mathcal{R}_1}$-значную случайную величину Z с распределением $\overline{\mu}^{\mathcal{R}_1}(1, e, dx)$. Тогда $(Z_{r_{lj}})_j \overset{d}{=} (q_{u_l, t_j})_j$ и по лемме 2.1.3 выполнено:

$$P(4\rho(e, (q_{u_l,t_j})_j) > \varepsilon) \leqslant P(4 \max_j \rho(e, Z_{r_j}) > \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \max_j \sup_{x \in G} P(8\rho(Z_{r_j}, Z_{r_{nl}}) > \varepsilon \,|\, Z_{r_j} = x).$$

Заметим, что $r_{nl} < 3\delta$, поэтому, в силу леммы 2.2.3

$$2 \max_j \sup_{x \in G} P(8\rho(Z_{r_j}, Z_{r_{nl}}) > \varepsilon \,|\, Z_{r_j} = x) \leqslant 2C 3^{3/2} \delta^{3/2} \varepsilon^{-4} 8^4.$$

Наконец, собирая все полученные неравенства, выводим:

$$P(\overline{w}_l(x, \delta) > \varepsilon) \leqslant const \cdot \sum_0^{q-1} \delta^{3/2} \varepsilon^{-4} \leqslant const \cdot \delta^{-1} \delta^{3/2} \varepsilon^{-4} = K \delta^{1/2} \varepsilon^{-4}. \tag{2.11}$$

Для некоторой постоянной K. Выберем $n_0 = n_0(\delta)$, начиная с которого $\delta > 2\sqrt{2}|\mathcal{P}^n|$ при всех $n \geqslant n_0$. Для таких n выполняется неравенство (2.11). Теперь мы посмотрим, что происходит, когда $n < n_0$. Так как для *любой* непрерывной функции $f \in \Omega$ ее модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta \to 0$, для любого n имеем:

$$\mu^{\mathcal{P}^n}(\overline{w}_l(x, \delta) > \varepsilon) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Для произвольного $\alpha > 0$ фиксируем δ_0 такое, что $K\delta_0^{1/2}\varepsilon^{-4} < \alpha$. Затем выберем $n_0 = n_0(\delta_0)$. Тогда для достаточно малых $\delta < \delta_0$ выполнено

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant n_0} \mu^{\mathcal{P}^n}(\overline{w}_l(x, \delta) > \varepsilon) < \alpha. \tag{2.12}$$

При уменьшении δ, оценка (2.11) сохраняется для каждого $n > n_0$ в том смысле, что

$$\mu^{\mathcal{P}^n}(\overline{w}_l(x, \delta) > \varepsilon) \leqslant \mu^{\mathcal{P}^n}(\overline{w}_l(x, \delta_0) > \varepsilon) \leqslant \alpha \tag{2.13}$$

Объединяя (2.12) и (2.13) получаем

$$\sup\nolimits_{1 \leqslant n < \infty} \mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_l(x, \delta) > \varepsilon\right) < \alpha$$

для достаточно малых δ. Следовательно,

$$\lim\nolimits_{\delta \to 0} \sup\nolimits_{1 \leqslant n < \infty} \mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_l(x, \delta) > \varepsilon\right) = 0.$$

Теперь перейдем к оценке $\overline{w}_r$. Фиксируем $\alpha > 0$, выберем δ_0 такое, что

$$\sup\nolimits_{1 \leqslant n < \infty} \mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_l(x, \delta_0) > \varepsilon\right) < \alpha.$$

Предположим, что $|\mathcal{P}^n| < \frac{1}{4}\delta_0$ при всех $n > n_0$ для некоторого n_0. Выберем подразбиения $\mathcal{R}_2^n = \{0 = t_{j_0} < ... < t_{j_q} = 1\} \subset \mathcal{P}_1^n$ такие, что $|\mathcal{R}_2^n| < \delta_0$ и

$\min_{1\leqslant k<q}|t_{j_{k+1}}-t_{j_k}|>\frac{1}{4}\delta_0$. Обозначим $\mathcal{R}^n:=\mathcal{P}_1^n\times\mathcal{R}_2^n$ и заметим, что для произвольного $\delta<\delta_0$ выполнено:

$$\mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_r(x,\delta)>3\varepsilon\right)\leqslant\mu^{\mathcal{R}^n}\left(\overline{w}_r(x,\delta)>\varepsilon\right)+\mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_l(x,\delta_0)>\varepsilon\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_k P\left(\sup\{\rho(x(s_i,t_{j_k}),x(s_l,t_{j_k})),|s_i-s_l|<\delta\}>\varepsilon\right)+\alpha. \quad (2.14)$$

Фиксируем k, применим лемму 2.1.2 к каждому набору $(x_{s_i,t_{j_l}})_{s=1,l=1}^{m,k}$ и получим:

$$(x_{s_i,t_{j_k}})_i\stackrel{d}{=}(v_1\cdot\ldots\cdot v_kv_{k+1}\cdot\ldots\cdot v_{ik})$$

для взаимно независимых $v_{(i-1)k+l}$ с распределениями $p((s_i-s_{i-1})(t_{jl}-t_{jl-1}),e,dv_{ik+l})Vol(dv_{ik+l})$. С помощью рассуждений, аналогичных примененных к представлению (2.10), получаем оценку

$$P\left(\sup\{\rho(x(s_i,t_{j_k}),x(s_l,t_{j_k})),|s_i-s_l|<\delta\}>\varepsilon\right)\lesssim\delta^{1/2}\varepsilon^{-4}.$$

Подставляя это неравенство в (2.14), получаем:

$$\mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_r(x,\delta)>3\varepsilon\right)\lesssim\delta_0^{-1}\delta^{1/2}\varepsilon^{-4}+\alpha,$$

что влечет

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{1\leqslant n<\infty}\mu^{\mathcal{P}^n}\left(\overline{w}_r(x,\delta)>\varepsilon\right)=0,$$

а значит, и

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{1\leqslant n<\infty}\mu^{\mathcal{P}^n}\left(w(x,\delta)>\varepsilon\right)=0.$$

Наконец, применение леммы 2.2.1 и теоремы Прохорова (см. [53, теорема 16.3]) завершает доказательство. □

Из предыдущей теоремы и следствия 2.2.2 вытекает следующее

Следствие 2.2.5. *Для любого $\varepsilon>0$ найдется компакт $K_\varepsilon\subset\Omega$ такой, что $\sup_n\mu^{\mathcal{P}^n}(K_e)>1-\varepsilon$ и $w(x,\delta)\rightrightarrows0$ равномерно на K_ε.*

2.2.3 Сходимость фейнмановских аппроксимаций

Сначала мы докажем сходимость конечномерных распределений $\mu^{\mathcal{P}^n}$ к соответствующим распределениям броуновского листа. Обозначим через $J^{\mathcal{P}}:\Omega\mapsto G^{\mathcal{P}}$ проекцию

$$(J^{\mathcal{P}}(x))_{s_i,t_j}=x(s_i,t_j),\quad(s_i,t_j)\in\mathcal{P}.$$

Заметим, что $J^{\mathcal{P}}$ непрерывна и $J^{\mathcal{P}}\circ(I^{\mathcal{P}})=id_{G^{\mathcal{P}}}$.

Так как интерполяция допускается произвольной, "внутренние" точки, не принадлежащие разбиению, могут, в принципе, зависеть от *всех* точек сетки $\mathcal{P}$, и тогда цилиндрическая функция перестает быть такой уж цилиндрической, если подставить в нее $I^{\mathcal{P}^n}$ и устремить n к бесконечности. Следующая лемма позволяет свести задачу к случаю, когда наша функция зависит только от точек разбиения.

Лемма 2.2.6. *Пусть $\mathcal{R}$ – это некоторое разбиение квадрата. Предположим, что для каждого n можно выбрать подразбиение $\mathcal{P}'^n \subset \mathcal{P}^n$ с тем же количеством вершин, что и $\mathcal{R}$, для которого*

$$\rho(\mathcal{R}, \mathcal{P}'^n) \equiv \max_{i,j}\{|(s_i, t_j) - (s'_i, t'_j)|,\, (s_i, t_j) \in \mathcal{R},\, (s'_i, t'_j) \in \mathcal{P}'^n\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда для всех $f \in C(G^{\mathcal{R}}, \mathbb{R})$ выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left[f(J^{\mathcal{R}}x) - f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\right] d\mu^{\mathcal{P}^n} = 0$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$, пусть $K_\varepsilon \subset \Omega$ – это компакт, построенный в следствии 2.2.5. Обозначим через $w(f, \delta)$ стандартный модуль непрерывности, тогда

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left[f(J^{\mathcal{R}}x) - f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\right] d\mu^{\mathcal{P}^n}\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int_{K_\varepsilon} \left[f(J^{\mathcal{R}}x) - f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\right] d\mu^{\mathcal{P}^n}\right| + \left|\int_{\Omega\setminus K_\varepsilon} \left[f(J^{\mathcal{R}}x) - f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\right] d\mu^{\mathcal{P}^n}\right| \leqslant \\
&\leqslant 2\varepsilon\|f\|_\infty + \sup_{x\in K_\varepsilon} w(f, w(x, \rho(\mathcal{R}, \mathcal{P}'^n))).
\end{aligned}$$

В силу следствия 2.2.5 $w(x, \rho(\mathcal{R}, \mathcal{P}'^n))$ сходится к нулю равномерно на K_ε при $\rho(\mathcal{R}, \mathcal{P}'^n) \to 0$, поэтому для достаточно больших n получаем:

$$\left|\int_E \left[f(J^{\mathcal{R}}x) - f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\right] d\mu^{\mathcal{P}^n}\right| \leqslant 2\varepsilon\|f\|_\infty + \varepsilon.$$

□

Лемма 2.2.7. *Рассмотрим разбиение $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ и семейство $\{r(s)\}_{s\geqslant 0}$ функционалов на $C(G^{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$, определенных как*

$$r(s)f = \int_{G^{\mathcal{P}}} f(y)\overline{\mu}^{\mathcal{P}_2}(s, e, dy)$$

Тогда для любого $f \in C^\infty(G^{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ выполнено:

$$|r(s)f - (e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}}} f)(e)| \lesssim \|f\|_4 s^{3/2}\|\mathcal{P}\|^{1/2},$$

где

$$(e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}}} f)(z) = e^{\frac{s(t_1-t_0)}{2}\Delta_{x_{t_1}}}[...e^{\frac{s(t_n-t_{n-1})}{2}\Delta_{x_{t_n}}}[f(x_{t_1}, ..., x_{t_n})](x_{t_{n-1}})]...](x_{t_1})](z).$$

Символ $\Delta_{x_{t_j}}$ обозначает оператор Δ, примененный к функции, зависящей от $x_{t_j} \in G$, в то время как остальные переменные считаются фиксированными.

Доказательство. Сначала заметим, что $r(s)$ представляется как

$$r(s)f = Q(s(t_1 - t_0))[...Q(s(t_n - t_{n-1}))[f(x_{t_1}, ..., x_{t_n})](x_{t_{n-1}})]...](x_{t_1})](e).$$

Обозначим $q(t)f = (Q(t)f)(e)$, тогда по лемме 2.1.2, после соответствующей замены переменных $x_{t_i} = y_{t_1} \cdot ... \cdot y_{t_i}$, получаем:

$$r(s)f = q_{y_{t_1}}(s(t_2 - t_1))...q_{y_{t_n}}(s(t_n - t_{n-1}))f(y_{t_1}, y_{t_1}y_{t_2}, \dots, y_{t_1} \cdot \dots \cdot y_{t_n}). \qquad (2.15)$$

Так как полугруппа $e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}}}$ би-инвариантна, получаем для нее аналогичное разложение:

$$(e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}}}f)(e) = m_{y_{t_1}}(s(t_2 - t_1))...m_{y_{t_n}}(s(t_n - t_{n-1}))f(y_{t_1}, ..., y_{t_1} \cdot ... \cdot y_{t_n}),$$

где $m_z(s) := (e^{\frac{s}{2}\Delta_z}f)(e)$. В силу теоремы Фубини мы можем менять порядок множителей как нам заблагорассудится, с помощью чего вычисляем:

$$\begin{aligned}
&|r(s)f - (e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}}}f)(e)| \leqslant \\
&\quad\leqslant \big| \big[q_{y_{t_1}}(s(t_2 - t_1))...q_{y_{t_n}}(s(t_n - t_{n-1})) - m_{y_{t_1}}(s(t_2 - t_1))...m_{y_{t_n}}(s(t_n - t_{n-1}))\big] \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot f(y_{t_1}, ..., y_{t_1} \cdot ... \cdot y_{t_n})\big| \leqslant \\
&\qquad\leqslant |(...)[q_{y_{t_1}}(s(t_2 - t_1)) - m_{y_{t_1}}(s(t_2 - t_1))]f(y_{t_1}, ..., y_{t_1} \cdot ... \cdot y_{t_n})| + ... \\
&\qquad\quad ... + |(...)[q_{y_{t_n}}(s(t_n - t_{n-1})) - m_{y_{t_n}}(s(t_n - t_{n-1}))]f(y_{t_1}, ..., y_{t_1} \cdot ... \cdot y_{t_n})|.
\end{aligned}$$

Все функционалы в (...) имеют единичные нормы, а из асимптотических свойств ядра теплопроводности известно (см. [83, следствие 2]), что

$$|(Q(s)f - e^{\frac{s}{2}\Delta}f)(e)| \lesssim \|f\|_4 s^{3/2}.$$

Таким образом,

$$|r(s)f - (e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}}}f)(e)| \lesssim \sum_j (t_{j+1} - t_j)^{3/2} s^{3/2} \|f\|_4 \lesssim \|f\|_4 s^{3/2} \|\mathcal{P}\|^{1/2}.$$

□

Лемма 2.2.8. *Рассмотрим разбиение $\mathcal{P}$ квадрата $[0,1]^2$ и напомним, что μ обозначает распределение броуновского листа на G. Для любого $f \in C^\infty(G^{\mathcal{P}}, \mathbb{R})$ имеет место оценка*

$$\left| \int_E f(J^{\mathcal{P}}x)\mu^{\mathcal{P}}(dx) - \int_E f(J^{\mathcal{P}}x)\mu(dx) \right| \leqslant const \cdot \|f\|_4 \|\mathcal{P}\|.$$

Доказательство. В силу леммы 2.1.1

$$\begin{aligned}
&\int_E f(J^{\mathcal{P}}x)\mu^{\mathcal{P}}(dx) = \int_{G^{\mathcal{P}}} f(x)\overline{\mu}^{\mathcal{P}}(dx) = \\
&\quad = \int_{G^{\mathcal{P}_2}} \overline{\mu}(s_1 - s_0, e, y_{s_1})... \int_{G^{\mathcal{P}_2}} \overline{\mu}(s_m - s_{m-1}, e, y_{s_m}) f(y_{s_1}, ..., y_{s_1} \cdot ... \cdot y_{s_m}) = \\
&\qquad\qquad = r_{y_{s_1}}(s_2 - s_1)...r_{y_{s_m}}(s_m - s_{m-1}) f(y_{s_1}, ..., y_{s_1} \cdot ... \cdot y_{s_m}).
\end{aligned}$$

По лемме 2.2.7 имеем:

$$|r(s)f - (e^{\frac{s}{2}\Delta^{\mathcal{P}_2}}f)(e)| \leqslant const \cdot \|f\|_4 s^{3/2} \|\mathcal{P}\|^{1/2}.$$

Отсюда, используя теорему Фубини, получаем:

$$
\begin{aligned}
&|r_{y_{s_1}}(s_2-s_1)...r_{y_{s_m}}(s_m-s_{m-1})f(y_{s_1},...,y_{s_1}\cdot...\cdot y_{s_m})- \\
&\qquad -\left[e^{\frac{s_2-s_1}{2}\Delta^{\mathcal{P}_2}_{y_{s_1}}}...e^{\frac{s_m-s_{m-1}}{2}\Delta^{\mathcal{P}_2}_{y_{s_m}}}f(y_{s_1},...,y_{s_1}\cdot...\cdot y_{s_m})\right](e,...,e)|\lesssim \\
&\qquad\qquad\lesssim \|f\|_4\|\mathcal{P}\|^{1/2}\sum_j(s_{j+1}-s_j)^{3/2}\lesssim \|f\|_4\|\mathcal{P}\|.
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\left[e^{\frac{s_2-s_1}{2}\Delta^{\mathcal{P}_2}_{y_{s_1}}}...e^{\frac{s_m-s_{m-1}}{2}\Delta^{\mathcal{P}_2}_{y_{s_m}}}f(y_{s_1},...,y_{s_1}\cdot...\cdot y_{s_m})\right](e,...,e)=\int_E f(J^{\mathcal{P}}x)\mu(dx),
$$

поэтому

$$
\left|\int_\Omega f(J^{\mathcal{P}}x)\mu^{\mathcal{P}}(dx)-\int_\Omega f(J^{\mathcal{P}}x)\mu(dx)\right|\leqslant const\cdot\|f\|_4\|\mathcal{P}\|.
$$

□

Следующее предложение устанавливает сходимость $\mu^{\mathcal{P}^n}$ к μ в смысле конечномерных распределений, что, вместе с доказанной в предыдущем разделе плотностью этой последовательности, влечет также слабую сходимость $\mu^{\mathcal{P}^n}$.

Предложение 2.2.9. *Пусть $\mathcal{R}$ – это некоторое разбиение квадрата $[0,1]^2$, тогда*

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(J^{\mathcal{R}}x)\mu^{\mathcal{P}^n}(dx)=\int_\Omega f(J^{\mathcal{R}}x)\mu(dx)
$$

для любого $f\in C(G^{\mathcal{R}})$.

Доказательство. Так как любую непрерывную функцию на $G^{\mathcal{P}}$ можно равномерно приблизить гладкой и все меры $\mu^{\mathcal{P}^n}$ вероятностные, можно считать, что f бесконечно дифференцируема. Так как $|\mathcal{P}_n|\to 0$, то существует последовательность подразбиений $\mathcal{P}'^n\subset\mathcal{P}^n$ таких, что в терминах леммы 2.2.6 $\rho(\mathcal{R},\mathcal{P}'^n)\to 0$. Тогда достаточно доказать, что

$$
\lim_{n\to\infty}\int_E f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\mu^{\mathcal{P}^n}(dx)=\int_E f(J^{\mathcal{R}}x)\mu(dx). \tag{2.16}
$$

Выберем $f_n\in C^\infty(G^{\mathcal{P}^n},\mathbb{R})$, зависящую только от точек разбиения $\mathcal{P}'^n$ и такую, что $f_n(J^{\mathcal{P}^n}I^{\mathcal{P}'^n}x)=f(x)$. Так как $\|f_n\|_4=\|f\|_4$, по лемме 2.2.8 получаем:

$$
\left|\int_\Omega f_n(J^{\mathcal{P}^n}x)\mu^{\mathcal{P}^n}(dx)-\int_\Omega f_n(J^{\mathcal{P}^n}x)\mu(dx)\right|\lesssim\|f\|_4\|\mathcal{P}^n\|.
$$

Так как $f_n(J^{\mathcal{P}^n}x)=f(J^{\mathcal{P}'^n}x)\to f(J^{\mathcal{R}}x)$ для каждого $x\in\Omega$, (2.16) следует из теоремы Лебега. □

Теперь у нас все готово для того, чтобы доказать основной результат раздела.

Теорема 2.2.10. *Рассмотрим последовательность разбиений $\mathcal{P}^n$, для которых $|\mathcal{P}^n|\to 0$, и интерполяцию $I^{\mathcal{P}^n}$. Тогда μ^{P^n} слабо сходятся к распределению μ броуновского листа на G.*

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется подпоследовательность $\{\mathcal{P}^{n_k}\}_k$, ограниченная функция $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ и $\delta > 0$, для которых $|\int f d\mu^{\mathcal{P}^{n_k}} - \int f d\mu| > \delta$ при всех k. В силу теоремы 2.2.4 можно выбрать под-подпоследовательность $\{\mu^{\mathcal{P}^{n_{k_j}}}\}_j$, сходящуюся слабо к некоторой мере $\widetilde{\mu}$. Вследствие предложения 2.2.9, эта мера имеет те же конечномерные распределения, что и μ, а значит, $\mu = \widetilde{\mu}$, следовательно,$\int f d\mu^{\mathcal{P}^{n_{k_j}}}$ должно сходиться к $\int f d\mu$ и получаем противоречие. $\square$

Глава 3

Векторные поля на пространствах путей

Рассмотрим пространство $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ непрерывных отображений отрезка на евклидово пространство $\mathbb{R}^d$. Распределение стандартного броуновского движения w_t в $\mathbb{R}^d$ задает на нем гауссовскую меру P, называемую мерой Винера. В силу известной теоремы Камерона-Мартина эта мера квази-инвариантна относительно сдвигов вдоль гильбертова пространства $H := \{h \in C([0,1],\mathbb{R}^d), h(0) = 0, \exists \dot{h}$ п. н. , $\int_0^1 |\dot{h}(t)|^2 dt < \infty\}$, то есть P и $P \circ \Phi_h^{-1}$ взаимно абсолютно непрерывны для любого $h \in H$, где $\Phi_h(x) := x + h$. Другими словами, поток Φ_{th}, порожденный векторным полем дифференцирования вдоль h, оставляет меру P квази-инвариантной. Если вместо евклидова пространства рассмотреть некоторое риманово многообразие M, то на нем также можно задать броуновское движение x_t, распределение которого определяет меру на $C([0,1],M)$. Возникает вопрос, что является аналогом теоремы Камерона-Мартина в этом случае.

Процесс x_t можно определить как решение стохастического дифференциального уравнения относительно плоского броуновского движения в некотором евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ (см. [44, предложение 3.2.1]). Таким образом получается измеримый изоморфизм $I : C([0,1],\mathbb{R}^d) \to C([0,1],M)$, задающий на пространстве траекторий структуру бесконечномерного многообразия с единственной картой, хотя нужно заметить, что соответствующее координатное отображение не является непрерывным ни в каком разумном смысле. Этот изоморфизм, однако, позволяет переносить многие объекты на плоский случай.

В работе Б. К. Драйвера [28] был найден естественный аналог теоремы Камерона-Мартина в случае $C([0,1],M)$. Потоки, оставляющие распределение броуновского движения квази-инвариантным, порождаются векторными полями вида $U(t)h(t)$, где $h \in H$, а $U(t)$ есть стохастический параллельный перенос вдоль x_t (определение и подробное описание связанных объектов можно прочитать, например, в книге [44]). В [28] утверждение было доказано для гладких h, а общий случай был немного позже доказан Хсу в работе [43]. При переносе на $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ эти потоки переходят в семимартингалы вида

$$\int_0^t O_t dw_t + \int_0^t c_t dt, \tag{3.1}$$

где O_t принимает значения во множестве ортогональных матриц. Здесь и далее мы предполагаем на нашем пространстве наличие некоторого потока полных σ-алгебр

$\mathcal{F}_t$, относительно которого w_t является броуновским движением. При некоторых технических условиях, по теореме Леви первое слагаемое определяет новое броуновское движение, а в силу теоремы Гирсанова добавление второго слагаемого оставляет меру квази-инвариантной. Из такого выражения для потока видно, что соответствующее векторное поле должно иметь вид

$$\int_0^t A_t dw_t + \int_0^t b_t dt, \tag{3.2}$$

где A_t почти всюду является косо-симметричной.

Здесь возникают некоторые интересные эффекты. Во-первых, векторное поле существенно *нелокально* и задается вероятностными методами как семимартингал. Во-вторых, множество векторных полей вида $U(t)h(t)$ оказывается не замкнутым относительно взятия коммутатора, поэтому само понятие *векторного поля* необходимо обобщить на более общие процессы, имеющие вид (3.2) после переноса на $C([0,1],\mathbb{R}^d)$. В нашей статье мы называем такие векторные поля *касательными процессами*. Их изучение вызвало также дополнительный интерес к изучению преобразований вида (3.1) и их обобщений. Понятие касательного процесса, а также порождаемая им дифференциальная геометрия, развивалась далее в работах многих авторов (см. [22; 24; 25; 31; 34; 38; 45] и ссылки внутри). Также в литературе рассматривается случай непредсказуемых преобразований, где стохастический интеграл в (3.1) заменяется интегралом Скорохода (см. [23; 46]).

Когда M – это конечномерная группа, имеются естественные преобразования левого и правого сдвига, $g(t) \mapsto k(t)g(t)$ и $g(t) \mapsto g(t)k(t)$, а аналогом пространства Камерона-Мартина является множество $K := \{k \in C([0,1],M), k(0) = e, \exists\dot{k}$ п. н. $, \int_0^t k(t)^{-1}\dot{k}(t)dt \in H\}$. Необходимое и достаточное условие квази-инвариантности распределения броуновского движения относительно сдвигов на элементы из K было доказано в [79]. Такие сдвиги также представляют собой частный случай касательных процессов. В дальнейшем подобные результаты были распространены на группы петель $C(S^1,M)$, где S^1 обозначает единичную окружность (см. [30; 63; 78]).

Однако уже в простейшем бесконечномерном случае, когда траектории броуновского движения лежат в $C([0,1],C([0,1],G))$, квази-инвариантность не имеет места ни для каких (нетривиальных) сдвигов (см. [77]). С другой стороны, касательные процессы по аналогии со случаем конечномерного многообразия построить можно, как и соответствующие потоки. Этой задаче и посвящена данная глава. А именно, мы распространяем понятие касательного процесса на пространство путей группы токов $C(N,G)$, где N есть некоторое компактное риманово многообразие, а G – компактная группа Ли, и доказываем существование порожденных ими потоков, оставляющих квази-инвариантным распределение броуновского движения на $C(N,G)$, построенного в первой главе.

При попытке обобщить выражение (3.1) на бесконечномерный случай возникает сложность, связанная с отсутствием понятия стохастического интеграла в произвольном банаховом пространстве. Один из способов ее преодолеть – это перейти от множества непрерывных отображений к пространствам Соболева-Слободецкого и воспользоваться теорией стохастического интегрирования на пространствах второго мартингального типа (см. [20]). Также можно было бы использовать стохастический интеграл, построенный в главе 1. Мы, однако, идем другим путем. Так как понятие производной в нашем случае естественно определяется на цилиндрических функциях и затем продолжается на произвольные, нас на самом деле интересуют только интегралы вида

$$\int_0^t (O_t^* c_t, dW_t),$$

где c_t принимает значения в H, а такому выражению можно придать смысл за счет использования хорошо развитой теории стохастического интегрирования в гильбертовых пространствах (см. [26]). Более того, при таком подходе выбор объемлющего банахова пространства не имеет значения. Поэтому мы сначала строим наши касательные процессы на основе изонормальных гауссовских процессов, по аналогии с подходом к исчислению Маллявэна, изложенному в [70], а затем применяем полученные результаты к построению потоков на банаховых пространствах и далее переносим их на пространство путей группы токов.

Глава организована следующим образом. В разделе 1 мы вводим абстрактное понятие касательного процесса как векторного поля на измеримом пространстве, доказываем формулу интегрирования по частям для соответствующего дифференциального оператора, что влечет его замыкаемость, и строим порожденные такими векторными полями потоки. В разделе 2 показывается, как эти результаты продолжаются на случай абстрактного винеровского пространства. Раздел 3 посвящен переносу понятия касательного процесса на нелинейный случай пространства путей группы токов. В первой части формула интегрирования по частям доказана в общем случае, без каких-либо дополнительных условий на H, во второй, при условии выполнения неравенства (1.6), строятся потоки, порожденные произвольными касательными процессами. В последней части раздела мы рассматриваем случай группы петель, когда $N = S^1$. Достоинство этого случая в том, что на группе петель есть достаточно хорошо изученная дифференциальная геометрия (см., например, [32; 37]), в частности, определен оператор стохастического параллельного переноса $U(t)$. Пользуясь этим, мы доказываем, что для векторного поля вида $U(t)h(t)$ существует порожденный им поток, оставляющий распределение броуновского движения квази-инвариантным, и выполняется формула интегрирования по частям, аналогичная доказанной Б. К. Драйвером в [28].

3.1 Абстрактная теория касательных процессов

3.1.1 Формулы замены переменных

Предположим, что нам дано некоторое измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ и сепарабельное гильбертово пространство H. Для некоторой меры P, относительно которой σ-алгебра $\mathcal{F}$ полна, обозначим через $Iso(P)$ множество всех изонормальных гауссовских процессов $W : L^2[0,1] \otimes H \to L^2_P(\Omega)$. Напомним, что $\otimes$ обозначает пополнение алгебраического тензорного произведения по гильбертовой норме и $L^2[0,1] \otimes H$ изоморфно пространству $L^2([0,1], H)$. Определим также ISO как объединение $Iso(P)$ по всем таким вероятностным мерам P.

Пусть $W \in Iso(P)$, а X – некоторое банахово пространство. Обозначим через $\mathcal{FC}_p^\infty(W; X)$ пространство случайных X-значных величин вида $F = f(W(k_1), \ldots, W(k_n))$, $k_1, \ldots, k_n \in L^2[0,1] \otimes H$, где f – X-значное бесконечно дифференцируемое по Фреше отображение $\mathbb{R}^n \mapsto X$, имеющее вместе со всеми своими производными не более чем полиномиальный рост. Определим $\mathcal{F}^W$ как σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\{W(k), k \in L^2([0,1], H)\}$. Обозначим через $L^2(W; X)$ пространство классов эквивалентности относительно равенства P-почти всюду X-значных $\mathcal{F}^W$-измеримых случайных величин f с квадратично интегрируемой по мере P нормой $\|f\|_X$. Для $X = \mathbb{R}$ будем просто писать $L^2(W) := L^2(W; \mathbb{R})$. Введем также поток σ-алгебр $\mathcal{F}_t^W$, являющихся пополнениями σ-алгебр, порожденных $\{W(I_{[0,s]} \otimes h), h \in H, s \leqslant t\}$.

Далее нам понадобится понятие "замены переменных" в контексте изонормальных гауссовских процессов. Выберем $\widetilde{W} \in Iso(\widetilde{P})$ и $F = f(W(k_1), \ldots, W(k_n)) \in \mathcal{FC}_p^\infty(W; X)$. Определим $F(\widetilde{W})$ как

$$F(\widetilde{W}) := f(\widetilde{W}(k_1), \ldots, \widetilde{W}(k_n)).$$

Несложно видеть, что $F(\widetilde{W})$ имеет то же распределение относительно $\widetilde{P}$, что и F относительно P. Поэтому отображение $F \mapsto F(\widetilde{W})$ продолжается до изометрии $L^2(W; X) \mapsto L^2(\widetilde{W}; X)$. Так как $F(W_1)(W_2) = F(W_2)$ для цилиндрических функций, построенная изометрия не зависит от выбора первоначального процесса W. В дальнейшем мы часто будем предполагать наличие некоторого фиксированного изонормального гауссовского процесса W, относительно которого будут определяться случайные величины, в которых, при необходимости, будет затем проводиться замена переменных.

Пусть теперь $X = H_1$ – это некоторое сепарабельное гильбертово пространство. Имеет место следующая

Лемма 3.1.1. *Пусть $W, \widetilde{W} \in ISO$, а R_t – $\mathcal{F}_t^W$-предсказуемый случайный процесс со значениями в $HS(H, H_1)$, для которого $\mathbb{E}\int_0^1 \|R_t\|_{HS}^2 dt < \infty$. Тогда $R_t(\widetilde{W})$ удовлетворяет тем же условиям относительно $\widetilde{W}$, что и R_t относительно W, и если $I = \int_0^t R_s dW_s$, то $I(\widetilde{W}) = \int_0^t R_s(\widetilde{W}) d\widetilde{W}_s$.*

Доказательство. В силу [26, предложение 4.22] R_t представим в виде предела в $L^2([0,1] \times \Omega) \otimes HS(H, H_1)$ процессов вида

$$R_t^n := \sum\nolimits_{i,j,k=1}^N f_{i,j,k} I_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \otimes e_j \otimes e_k,$$

для некоторого ортонормированного базиса $\{e_j \otimes e_k, e_j \in H, e_k \in H_1\}$ в $HS(H, H_1)$ и $\mathcal{F}_{t_i}^W$-измеримых квадратично интегрируемых случайных величин $f_{i,j,k}$. Так как R_t измеримо относительно $\mathcal{F}^W$, то переходя, если нужно, к условным математическим ожиданиям, можно считать, что $f_{i,j,k} \in L^2(W)$. Каждое $f_{i,j,k}$ приближается в $L^2(W)$ элементами $\mathcal{FC}_p^\infty(W)$, зависящими только от $\{W(I_{[0,s]} \otimes h), s \leqslant t_i, h \in H\}$, следовательно,$f_{i,j,k}(\widetilde{W})$ являются $\mathcal{F}_{t_i}^{\widetilde{W}}$-измеримыми, а $R_t^n(\widetilde{W})$ – $\mathcal{F}_t^{\widetilde{W}}$-предсказуемыми, что влечет предсказуемость $R_t(\widetilde{W})$.

В то же время, стохастический интеграл $\int_0^t R_s dW_s$ может быть приближен в $L^2(W; H_1)$ суммами вида

$$I^n := \sum\nolimits_{i,j,k=1}^N f_{i,j,k} W(I_{[t_i, t_{i+1}]} \otimes e_j) e_k.$$

Тогда

$$I^n(\widetilde{W}) = \sum\nolimits_{i,j,k=1}^{N} f_{i,j,k}(\widetilde{W})\widetilde{W}(I_{[t_i,t_{i+1}]} \otimes e_j)e_k$$

сходятся в $L^2(\widetilde{W}; H_1)$ к $I(\widetilde{W}) = \int_0^t R_s(\widetilde{W})d\widetilde{W}_s$. □

Рассмотрим $\mathcal{F}_t^W$-предсказуемые процессы U_t и c_t, со значениями, соответственно, в $L(H)$ и H. По умолчанию предполагаем, что на $L(H)$ введена борелевская σ-алгебра, соответствующая топологии нормы. Потребуем, чтобы U_t почти наверное являлось изометрией, то есть $|U_t h|_H = |h|$ п.н. для каждых $h \in H, t \in [0,1]$, а $c_t(\omega)$ было существенно ограничено на $[0,1] \times \Omega$.

Для каждого $W \in ISO$ определим отображение $\Phi_{U,c}[W] : L^2([0,1], H) \mapsto L^2(W)$ через

$$\Phi_{U,c}[W](k) := \int_0^1 (U_t(W)k_t, dW_t) + \int_0^1 (k_t, c_t(W))dt.$$

То, что это отображение действительно принимает значения в $L^2(W)$, следует из условий на U_t и c_t, а также из свойств стохастического интеграла. Обозначим через $\mathcal{AF}$ множество $\Phi_{U,c}$ для всех U и c, удовлетворяющих приведенным выше условиям. Далее, где это не вызывает двусмысленностей, мы будем опускать параметр W и писать просто $c_t \equiv c_t(W)$, $U_t \equiv U_t(W)$. Заметим также, что определение не зависит от выбора исходного процесса W.

Отображение $\Phi_{U,c}$ можно неформально записать в виде

$$\Phi_{U,c}[W]_t = \int_0^t U_s(W)^* dW_s + \int_0^t c_s(W)ds.$$

В конечномерном случае эта запись является строгой, а в бесконечномерном ей можно придать смысл, если позволить $\Phi_{U,c}[W]_t$ принимать значения в некотором объемлющем банаховом пространстве (см. раздел 3.2). Также заметим, что, в отличие от конечномерного случая, изометрия U_t не обязана быть сюръективной.

Далее нам понадобится следующий аналог теоремы Гирсанова.

Предложение 3.1.2. *Пусть* $\Phi_{U,c} \in \mathcal{AF}$, *а* $W \in Iso(P)$. *Обозначим*

$$q(\omega) := e^{-\int_0^1 (c_t, dW_t) - 1/2 \int_0^1 |c_t|_H^2 dt},$$

тогда $\Phi_{U,c}[W] \in Iso(q \cdot P)$.

Доказательство. Из теоремы Леви о мартингальной характеризации броуновского движения и свойств стохастического интеграла следует, что для любого $h \in H$ процесс $\Phi_{U,0}[W]([0,t] \otimes h)$ – гауссовский и $\mathcal{F}_t^W$-согласованный. Так как линейные комбинации векторов такого вида плотны в $L^2([0,1], H)$, случайные величины $\Phi_{U,0}[W](k)$ будут гауссовскими для всех k. Вычисляя их ковариации, получаем, что они удовлетворяют определению изонормального гауссовского процесса.

Обозначим $\widetilde{W} := \Phi_{U,0}[W]$, тогда $\Phi_{U,c}[W](k) = \widetilde{W}(k) + \int_0^1 (c_t, k_t)_H dt$. Бесконечномерные аналоги теоремы Гирсанова доказывались в разных контекстах многими авторами, здесь мы воспользуемся версией для броуновского движения со значениями в гильбертовом пространстве (см. [26]). Для этого нам потребуется ввести другое гильбертово пространство H_1, для которого существует инъективное вложение

$J : H \hookrightarrow H_1$, являющееся оператором Гильберта-Шмидта. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_j\}$ в H, тогда, согласно [26, предложение 4.7], ряд

$$W_1(t) := \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} Je_j \widetilde{W}(I_{[0,t]} \otimes e_j)$$

сходится почти наверное в H_1, равномерно на отрезке [0,1], и определяет H_1-значное броуновское движение с ковариационной функцией

$$\mathbb{E}\langle a, W_1(s)\rangle\langle b, W_1(t)\rangle = s \wedge t(J^*a, J^*b)_H$$

для $a, b \in H_1^* \overset{J^*}{\hookrightarrow} H^* \simeq H$, $s, t \in [0,1]$. Применяя аналог теоремы Гирсанова для этого случая (см. [26, теорема 10.14]), получаем, что процесс

$$\widehat{W}_1(t) := W_1(t) + \int_0^t Jc_s ds$$

также является броуновским движением на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, q \cdot P)$ с той же ковариационной функцией. Из равенств

$$\begin{aligned}
&\langle a, \widehat{W}_1(t)\rangle = \langle a, W_1(t)\rangle + \int_0^t \langle a, Jc_s\rangle ds = \\
&= \langle a, \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} Je_j \widetilde{W}(I_{[0,t]} \otimes e_j)\rangle + \int_0^t (J^*a, c_s)_H ds = \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} (J^*a, e_j)_H \widetilde{W}(I_{[0,t]} \otimes e_j) + \int_0^t (J^*a, c_s)_H ds = \\
&\qquad\qquad = \widetilde{W}(I_{[0,t]} \otimes J^*a) + \int_0^t (J^*a, c_s)_H ds = \Phi_{U,c}[W](I_{[0,t]} \otimes J^*a)
\end{aligned}$$

следует, что все $\Phi_{U,c}[W](I_{[0,t]} \otimes h)$ являются гауссовскими относительно $q \cdot P$, и их ковариации соответствуют ковариациям изонормального гауссовского процесса. Так как, в силу свойств стохастического интеграла, $\Phi_{U,c}[W]$ является линейным непрерывным отображением $L^2([0,1], H) \to L^2(W)$, для любого элемента $k \in L^2([0,1], H)$ случайная величина $\Phi_{U,c}[W](k)$ представима в виде $L^2(W)$-предела последовательности линейных комбинаций из $\{\Phi_{U,c}[W](I_{[0,t]} \otimes h), t \in [0,1], h \in J^*H_1^*\}$. Из нее можно выбрать P-почти всюду, а значит, и $q \cdot P$-почти всюду, сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, все $\Phi_{U,c}[W](k)$ – гауссовские относительно $q \cdot P$, и их ковариации соответствуют тем, которые должны быть у изонормального гауссовского процесса. □

Из доказанного предложения вытекает, что $\Phi_{U,c}$ задает отображение $ISO \mapsto ISO$.

3.1.2 Касательные процессы

Рассмотрим $\mathcal{F}_t^W$-предсказуемые процессы A_t и b_t, со значениями, соответственно, в $L(H)$ и H. Потребуем, чтобы A_t почти наверное были кососимметричными, то есть $A_t + A_t^* = 0$ почти наверное. Кроме того, будем считать, что $A_t(\omega)$ и $b_t(\omega)$ существенно ограничены на $[0,1] \times \Omega$.

Определение 3.1.1. Для каждого $W \in ISO$ определим отображение $\mathcal{A}_{A,b}[W] : L^2([0,1],H) \mapsto L^2(W)$ как

$$\mathcal{A}_{A,b}[W](k) := \int_0^1 (A_t(W)k_t, dW_t) + \int_0^1 (k_t, b_t(W))_H dt.$$

Будем называть $\mathcal{A}_{A,b}$ *касательным процессом* с параметрами (A,b). Множество касательных процессов для всех A, b, удовлетворяющих указанным выше условиям, обозначим через $\mathcal{AV}$. Также будем писать $(h, \mathcal{A}_{A,b}[W]_t) := \mathcal{A}_{A,b}[W](I_{[0,t]} \otimes h)$. В неформальной записи, такой процесс имеет вид

$$\mathcal{A}_{A,b}[W]_t = \int_0^t A_s(W)^* dW_s + \int_0^t b_s(W) ds.$$

Определим оператор $D_{A,b}$ дифференцирования вдоль касательного процесса $\mathcal{A}_{A,b}$ следующим образом. Пусть H_1 – это некоторое сепарабельное гильбертово пространство. Для $F = f(W(k_1), \ldots, W(k_n)) \in \mathcal{FC}_p^\infty(W; H_1)$ полагаем

$$D_{A,b}F(W) := \sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i f(W(k_1), \ldots, W(k_n)) \mathcal{A}_{A,b}[W](k_i).$$

Можно заметить, что при $A = 0$ и $b \in L^2([0,1],H)$ $D_{0,b}$ есть обычный оператор дифференцирования вдоль b в смысле Маллявэна (см. [70]). Теперь мы докажем некоторые свойства $D_{A,b}$, аналогичные соответствующим свойствам производной Маллявэна.

Предложение 3.1.3 (интегрирование по частям)**.** *Пусть $F, G \in \mathcal{FC}_p^\infty(W, H_1)$, тогда имеет место формула интегрирования по частям:*

$$\mathbb{E}(D_{A,b}F, G)_{H_1} = -\mathbb{E}(F, D_{A,b}G)_{H_1} + \mathbb{E}(F,G)_{H_1} \int_0^1 (b_t, dW_t). \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала заметим, что $(F,G)_{H_1} \in \mathcal{FC}_p^\infty(W)$ и поэтому достаточно доказать формулу (3.3) для случая $H_1 = \mathbb{R}$, $G = 1$, тогда она принимает вид

$$\mathbb{E}D_{A,b}F = \mathbb{E}F \int_0^1 (b_t, dW_t). \tag{3.4}$$

Кроме того, можно считать, что $F = f(W(k_1), \ldots, W(k_n)) =: f(W)$, где f имеет компактный носитель. Действительно, рассмотрим вещественную. функцию $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемую, имеющую компактный носитель и такую, что $\phi(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$. Обозначим $\phi_N(x) := \phi(x/N)$, тогда

$$D_{A,b}(\phi_N f)(W) \lesssim \max_j \{|\partial_j f(W)||\mathcal{A}_{A,b}[W](k_j)|\}.$$

Поэтому, применяя теорему Лебега, можно перейти к пределу в

$$\mathbb{E}D_{A,b}(\phi_N f)(W) = \mathbb{E}(\phi_N f)(W) \int_0^1 (b_t, dW_t)$$

и получить равенство (3.4) для произвольной $F \in \mathcal{FC}_p^\infty(W)$.

Рассмотрим $\Phi^\alpha = \Phi_{U^\alpha, c^\alpha} \in \mathcal{AF}$, где $U_t^\alpha := e^{\alpha A_t}$, $c_t^\alpha := \alpha b_t$. Из стохастической теоремы Фубини ([26, теорема 4.33]) и равенства

$$\int_0^t (U_s^\alpha k_s, dW_s) = \int_0^t (\int_0^\alpha A_s^\beta U_s^\beta k_s d\beta, dW_s)$$

следует, что для каждого $k \in L^2([0,1], H)$ существует абсолютно непрерывная версия $\Phi^\alpha[W](k)$ и

$$\frac{d}{d\alpha}|\Phi^\alpha[W](k) = \int_0^1 (A_t e^{\alpha A_t} k_t, dW_t) + \int_0^1 (k_t, b_t)_H dt.$$

В частности, $\frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0} F(\Phi^\alpha[W]) = D_{A,b}F$.

В силу предложения 3.1.2

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbb{E}F(\Phi^\alpha[W])q^\alpha \equiv 0,$$

где $q^\alpha = e^{-\alpha\int_0^1 (b_t, dW_t) - 1/2\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt}$. Покажем что можно поменять местами порядок интегрирования и взятия производной.

Заметим, что из теоремы Новикова ([5, теорема 5.3]) следует

$$\mathbb{E}(q^\alpha)^2 = \mathbb{E}e^{-2\alpha\int_0^1 (b_t, dW_t) - 2\cdot 1/2\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt} =$$
$$= \mathbb{E}e^{-2\alpha\int_0^1 (b_t, dW_t) - 8\cdot 1/2\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt} e^{3\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{E}e^{-4\alpha\int_0^1 (b_t, dW_t) - 16\cdot 1/2\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt} \mathbb{E}e^{6\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt} = \mathbb{E}e^{6\alpha^2 \int_0^1 |b_t|_H^2 dt} \leqslant \mathbb{E}e^{6B},$$

где B есть существенный супремум $b_t(\omega)$. Распишем

$$\mathbb{E}F(\Phi^\alpha[W])q^\alpha = \mathbb{E}\int_0^\alpha \sum \partial_k f(W) \frac{d}{d\beta}\Phi^\beta[W](k) q^\beta d\beta -$$
$$- \mathbb{E}\int_0^\alpha F(\Phi^\beta[W]) \left(\int_0^1 (b_t, dW_t) + \beta \int_0^1 |b_t|_H^2 dt\right) q^\beta d\beta.$$

В первом слагаемом

$$\mathbb{E}|\frac{d}{d\beta}\Phi^\beta[W](k)|q^\beta \leqslant \|\frac{d}{d\beta}\Phi^\beta[W](k)\|_{L^2(W)} \sqrt{\mathbb{E}(q^\beta)^2} \leqslant const,$$

где мы воспользовались существенной ограниченностью A_t. Аналогично, выражение

$$\mathbb{E}|\left(\int_0^1 (b_t, dW_t) + \beta\int_0^1 |b_t|_H^2 dt\right) q^\beta|$$

равномерно ограничено при $\beta \in [0,1]$. Таким образом, применима теорема Фубини и

$$0 = \frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0}\mathbb{E}F(\Phi^\alpha[W])q^\alpha = \mathbb{E}D_{A,b}F - \mathbb{E}F\int_0^1 (b_t, dW_t),$$

что завершает доказательство. □

Из доказанного вытекает, что сопряженный к $D_{A,b}$ оператор в $L^2(W; H_1)$ определен на плотном множестве $\mathcal{FC}_p^\infty(W; H_1)$, а значит, имеет место следующее

Следствие 3.1.4. *Оператор $D_{A,b}$ замыкаем на $L^2(W;H_1)$.*

Замыкание $D_{A,b}$ будем обозначать той же буквой, а его область определения – через $\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W;H_1)$. Если $H_1=\mathbb{R}$, то будем писать $\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W):=\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W;\mathbb{R})$. Из формулы (3.4) следует, что $D^*_{A,b}1=\int_0^1(b_t,dW_t)$, поэтому имеем

Следствие 3.1.5. *Для любого $F\in\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W)$ выполняется формула* (3.4) *интегрирования по частям.*

Лемма 3.1.6. *Пусть $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, а $F_1,\dots,F_n\in\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W)$, тогда $\phi(F_1,\dots,F_n)\in\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W)$ и*

$$D_{A,b}\phi(F_1,\dots,F_n)=\sum_k\partial_k\phi(F_1,\dots,F_n)D_{A,b}F_k. \tag{3.5}$$

Доказательство. Выберем последовательности $\{F^j_k\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{FC}^\infty_p(W)$ такие, что $F^j_k\to F_k$ в $\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}(W)$. Тогда из теоремы Лебега следует, что $\phi(F^j_1,\dots,F^j_n)\to\phi(F_1,\dots,F_n)$ в $L^2(W)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}D_{A,b}\phi(F^j_1,\dots,F^j_n)&=\sum_k\partial_k\phi(F^j_1,\dots,F^j_n)D_{A,b}F^j_k=\\&=\sum_k(\partial_k\phi(F^j_1,\dots,F^j_n)-\partial_k\phi(F_1,\dots,F_n))(D_{A,b}F^j_k-D_{A,b}F_k)+\\&+\sum_k(\partial_k\phi(F^j_1,\dots,F^j_n)-\partial_k\phi(F_1,\dots,F_n))D_{A,b}F_k+\sum_k\partial_k\phi(F_1,\dots,F_n)D_{A,b}F^j_k.\end{aligned}$$

Первое слагаемое стремятся в $L^2(W)$ к нулю вследствие сходимости $D_{A,b}F^j_k\to D_{A,b}F^j$ в $L^2(W)$ и ограниченности ϕ и всех ее производных. По той же причине, третье сходится к выражению в (3.5). Второе слагаемое стремится к нулю по теореме Лебега. □

Возьмем некоторое отображение R из H_1 в пространство $HS(H,H_1)$ операторов Гильберта-Шмидта и $Q:H_1\to H_1$. Потребуем, чтобы R,Q были бесконечно дифференцируемыми по Фреше и все их производные были равномерно ограничены. Заметим, что из этого вытекает липшицевость и не более чем линейный рост R и Q. Предположим, что X_t удовлетворяет следующему стохастическому интегральному уравнению:

$$X_t=X_0+\int_0^tR(X_s)dW_s+\int_0^tQ(X_s)ds \tag{3.6}$$

для некоторого постоянного $X_0\in H_1$.

Выпишем следующую вариацию приближений Эйлера для этого уравнения. Разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных частей с точками разбиения $t_i=i/n$ и зададим X^n итеративно на каждом интервале как

$$\begin{cases}X^n_0=X_0,\\X^n_t=X^n_{t_i}+\sum_{j=1}^nW(I_{[t_i,t]}\otimes e_j)R(X^n_{t_i})e_j+Q(X^n_{t_i})(t-t_i),\quad t\in[t_i,t_{i+1}],\end{cases} \tag{3.7}$$

где $\{e_j\}_1^\infty$ – некоторый ортонормированный базис H. Обозначив через P_n ортогональный проектор на первые n векторов этого базиса и положив $\tau_n(t) := \max\{t_i : t_i \leqslant t\}$, можно переписать (3.7) в виде

$$X_t^n = X_0 + \sum\nolimits_{j=1}^n \int_0^t R(X_{\tau_n(s)}^n) e_j d(e_j, W_s) + \int_0^t Q(X_{\tau_n(s)}^n) ds =$$
$$= X_t^n = X_0 + \int_0^t R(X_{\tau_n(s)}^n) P_n dW_s + \int_0^t Q(X_{\tau_n(s)}^n) ds \quad (3.8)$$

Далее мы будем опускать параметр W, когда это не приводит к недоразумениям и писать $F \equiv F(W)$ для некоторых F. Несложно заметить, что $X_t^n \in \mathcal{FC}_p^\infty(W; H_1)$, поэтому можно взять производную от обеих частей равенства (3.7) и получить, по аналогии с (3.8):

$$D_{A,b} X_t^n = \int_0^t \left[dR(X_{\tau_n(s)}^n) D_{A,b} X_{\tau_n(s)}^n \right] P_n dW_s +$$
$$+ \int_0^t dQ(X_{\tau_n(s)}^n) D_{A,b} X_{\tau_n(s)}^n ds + \int_0^t \sum_j R(X_{\tau_n(s)}^n) e_j d(e_j, \mathcal{A}_{A,b}[W]_s) =$$
$$= \int_0^t \left[dR(X_{\tau_n(s)}^n) D_{A,b} X_{\tau_n(s)}^n \right] P_n dW_s + \int_0^t dQ(X_{\tau_n(s)}^n) D_{A,b} X_{\tau_n(s)}^n ds +$$
$$+ \int_0^t R(X_{\tau_n(s)}^n) P_n A_s^* dW_s + \int_0^t R(X_{\tau_n(s)}) b_s ds, \quad (3.9)$$

где dR и dQ обозначают производные Фреше от R и Q соответственно.

Теорема 3.1.7. *В вышеприведенных обозначениях, $X_t \in \mathbb{D}_{A,b}^{1,2}(W; H_1)$ для всякого $t \in [0,1]$ и непрерывная версия $D_{A,b} X_t$ существует и является (потраекторно) единственным решением уравнения*

$$D_{A,b} X_t = \int_0^t \left[dR(X_s) D_{A,b} X_s \right] dW_s + \int_0^t dQ(X_s) D_{A,b} X_s ds +$$
$$+ \int_0^t R(X_s) A_s^* dW_s + \int_0^t R(X_s) b_s ds. \quad (3.10)$$

Мы разобьем доказательство на несколько лемм. Определим для H_1-значного процесса Y_t равномерную норму на $[0,t]$ через $\|Y\|_{C[0,t]} := \max\{|Y_s|_{H_1}, s \in [0,t]\}$.

Лемма 3.1.8. *$\|X^n(W)\|_{C[0,t]}$ и $\|D_{A,b} X^n(W)\|_{C[0,t]}$ равномерно ограничены в $L^2(W)$.*

Доказательство. Используя свойства стохастического интеграла, получаем

$$\mathbb{E} \|X^n\|_{C[0,t]}^2 \lesssim \mathbb{E} \int_0^t \|R(X_{\tau_n(s)}^n)\|_{HS}^2 ds + \mathbb{E} \int_0^t |Q(X_{\tau_n(s)}^n)|_{H_1}^2 ds,$$

откуда, используя линейный рост коэффициентов R и Q, следует

$$\mathbb{E} \|X^n\|_{C[0,t]}^2 \lesssim const + \mathbb{E} \int_0^t |X_{\tau_n(s)}^n|_{H_1}^2 ds + \mathbb{E} \int_0^t |X_{\tau_n(s)}^n|_{H_1}^2 ds \lesssim$$
$$\lesssim const + \int_0^t \mathbb{E} \|X^n\|_{C[0,s]}^2 ds,$$

где константа не зависит от n. Ограниченность $\|X^n\|_{C[0,t]}$ теперь следует из леммы Гронуолла. Тем же способом получается и оценка для $\|D_{A,b}X^n\|_{C[0,t]}$. □

Лемма 3.1.9. $\mathbb{E}\|X^n_t - X_t\|^2_{C[0,1]} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Выпишем

$$X^n_t - X_t = \left[\int_0^t (R(X_s) - R(X^n_{\tau_n(s)}))P_n dW_s + \int_0^t (Q_s(X_s) - Q_s(X^n_{\tau_n(s)}))ds\right] + \\ + \int_0^t R(X_s)(I - P_n)dW_s.$$

Так как их производные равномерно ограничены, R и Q липшицевы и получаем

$$\mathbb{E}\|X^n_t - X_t\|^2_{C[0,t]} \lesssim \\ \lesssim \mathbb{E}\int_0^t \|R(X_s) - R(X^n_{\tau_n(s)})\|^2_{HS} ds + \mathbb{E}\int_0^t |Q_s(X_s) - Q_s(X^n_{\tau_n(s)})|^2_{H_1} ds + \\ + \mathbb{E}\int_0^1 \|R(X_s)(I - P_n)\|_{HS} ds \lesssim \mathbb{E}\int_0^t |X_{\tau_n(s)} - X^n_{\tau_n(s)}|^2_{H_1} ds + \\ + \mathbb{E}\int_0^t |X_{\tau_n(s)} - X_s|^2_{H_1} ds + \mathbb{E}\int_0^1 \|R(X_s)(I - P_n)\|_{HS} ds \lesssim \\ \lesssim \int_0^t \mathbb{E}\|X^n_t - X_t\|^2_{C[0,t]} ds + \mathbb{E}\int_0^1 |X_{\tau_n(s)} - X_s|^2_{H_1} ds + \\ + \mathbb{E}\int_0^1 \|R(X_s)(I - P_n)\|^2_{HS} ds.$$

По теореме Лебега и лемме 3.1.8, последние два слагаемые стремятся к нулю, и применение леммы Гронуолла завершает доказательство. □

Лемма 3.1.10. $\mathbb{E}\|D_{A,b}X^m_\cdot - D_{A,b}X^n_\cdot\|^2_{C[0,1]} \to 0$ *при* $m, n \to \infty$.

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать $m \leqslant n$. По аналогии с доказательством леммы 3.1.9, получаем оценку

$$\mathbb{E}\|D_{A,b}X^m_\cdot - D_{A,b}X^n_\cdot\|^2_{C[0,t]} \lesssim \\ \lesssim \int_0^t \mathbb{E}\|D_{A,b}X^m_\cdot - D_{A,b}X^n_\cdot\|^2_{C[0,s]} ds + \int_0^1 \mathbb{E}\|X^m - X^n\|^2_{C[0,s]} ds + \\ + \int_0^1 \mathbb{E}|X^m_{\tau_n(s)} - X^m_{\tau_m(s)}|^2_{H_1} ds + \mathbb{E}\int_0^1 \|R(X^m_{\tau_m(s)})(P_n - P_m)\|^2_{HS} ds. \quad (3.11)$$

Последнее слагаемое оценивается как

$$\mathbb{E}\int_0^1 \|R(X^m_{\tau_m(s)})(P_n - P_m)\|^2_{HS} ds \lesssim \mathbb{E}\int_0^1 \|R(X_{\tau_m(s)})(P_n - P_m)\|^2_{HS} ds + \\ + \mathbb{E}\int_0^1 \|R(X_{\tau_m(s)}) - R(X^m_{\tau_m(s)})\|^2_{HS} ds,$$

что стремится к нулю по теореме Лебега, условий на R_t и лемме 3.1.9. С другой стороны, из уравнения (3.8) обычным способом получаем, что

$$\mathbb{E}|X^m_{\tau_n(s)} - X^m_{\tau_m(s)}|^2_{H_1} \lesssim \mathbb{E}|\int_{\tau_n(s)}^{\tau_m(s)} |X^m_{\tau_m(u)}|^2_{H_1} du| \lesssim$$

$$\lesssim |\tau_n(s) - \tau_m(s)| \mathbb{E}\|X^m\|^2_{C[0,1]},$$

что стремится к нулю при $n, m \to \infty$, так как, по лемме 3.1.8, $\mathbb{E}\|X^m\|^2_{C[0,1]}$ равномерно ограничены. Таким образом, применяя лемму Гронуолла к (3.11), получаем необходимое утверждение. □

Лемма 3.1.11. *Решение уравнения* (3.10) *потраекторно единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения M_t и N_t. Тогда, по аналогии с оценками предыдущих лемм, получаем

$$\mathbb{E}\|M - N\|^2_{C[0,t]} \lesssim \int_0^t \mathbb{E}\|M - N\|^2_{C[0,s]} ds.$$

Теперь из леммы Гронуолла вытекает, что $\|M - N\|_{C[0,t]} = 0$ почти наверное. □

Доказательство теоремы. В силу предыдущих лемм в доказательстве нуждается только равенство (3.10). Оно получается переходом к пределу в (3.9), с использованием свойств стохастических интегралов и сходимости к нулю интеграла $\mathbb{E}\int_0^1 \|R(X_s)(P_n - I)\|^2_{HS} ds$, вытекающей из теоремы Лебега. □

3.1.3 Потоки

Сначала мы докажем вспомогательное утверждение о дифференцировании решения стохастического уравнения по параметру. Рассмотрим семейство $\{\Phi^\alpha = \Phi_{U^\alpha, c^\alpha}, \alpha \in [0,1]\} \subset \mathcal{AF}$ такое, что $\Phi^\alpha[W](k)$ почти наверное абсолютно непрерывная функция от α для каждого k. Предположим, что существует семейство $\{\mathcal{A}^\alpha, \alpha \in [0,1]\} \subset \mathcal{AV}$ с параметрами $A^\alpha_t(\omega)$, $b^\alpha_t(\omega)$, измеримыми и существенно ограниченными по совокупности всех своих переменных, для которого $\mathcal{A}^\alpha[\Phi^\alpha[W]](k) = \frac{d}{d\alpha}\Phi^\alpha[W](k)$.

Предложение 3.1.12. *Пусть X_t – решение* (3.6), *тогда $X_t(\Phi^\alpha[W])$ для каждого t обладает абсолютно непрерывной по α версией и*

$$\frac{d}{d\alpha} X_t(\Phi^\alpha[W]) = D_{A^\alpha, b^\alpha} X_t(\Phi^\alpha[W]).$$

Доказательство. Заметим, что для любой $F \in \mathcal{FC}^\infty_p(W; H_1)$ выполняется

$$F(\Phi^\alpha[W]) = F(W) + \int_0^\alpha D_{A^\beta, b^\beta} F(\Phi^\beta[W]) d\beta.$$

Применяя эту формулу к X^n получаем

$$\mathbb{E}\left| X_t(\Phi^\alpha[W]) - \int_0^\alpha D_{A^\beta, b^\beta} X_t(\Phi^\beta[W]) d\beta \right|^2_{H_1} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^\alpha \mathbb{E}\left| D_{A^\beta, b^\beta} X_t(\Phi^\beta[W]) - D_{A^\beta, b^\beta} X^n_t(\Phi^\beta[W]) \right|^2_{H_1} d\beta.$$

В силу леммы 3.1.10 $D_{A^\beta,b^\beta}X_t^n(W)$ сходятся к $D_{A^\beta,b^\beta}X_t(W)$ в $L^2(W;H_1)$, а значит, $D_{A^\beta,b^\beta}X_t^n(\Phi^\beta[W])$ сходятся к $D_{A^\beta,b^\beta}X_t(\Phi^\beta[W])$ в $L^2(\Phi^\beta[W];H_1)$. По лемме 3.1.8 и теореме Лебега получаем, что $X_t(\Phi^\alpha) = \int_0^\alpha D_{A^\beta,b^\beta}X_t(\Phi^\beta[W])$ почти всюду для любых фиксированных t и α, откуда следует существование абсолютно непрерывной версии $X_t(\Phi^\alpha[W])$. □

Нас интересуют потоки, порожденные фиксированным касательным процессом. Для этого введем

Определение 3.1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{AV}$. *Потоком*, порожденным $\mathcal{A}$, называем семейство $\{\Phi^\alpha, \alpha \geqslant 0\} \subset \mathcal{AF}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\Phi^0[W] \equiv W$, $W \in ISO$.
2. $\Phi^\alpha[\Phi^\beta[W]] = \Phi^{\alpha+\beta}[W]$, $\alpha, \beta \geqslant 0$.
3. Для каждого $k \in L^2([0,1], H)$ существует абсолютно непрерывная по α версия $\Phi^\alpha[W](k)$ и
$$\frac{d}{d\alpha}\Phi^\alpha[W](k) = \mathcal{A}[\Phi^\alpha[W]](k)$$

Следующая теорема дает достаточное условие существования такого потока.

Теорема 3.1.13. *Пусть $W \in Iso(P)$, обозначим $X := L^2_{\lambda\otimes P}([0,1]\times\Omega, L(H))$, $Y := L^2_{\lambda\otimes P}([0,1]\times\Omega, H)$, где λ – это мера Лебега на $[0,1]$. Предположим, что для касательного процесса $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AV}$ являются липшицевыми отображения*

$$\begin{array}{lll} A: & X\times Y \to X, & (U_t, c_t) \mapsto A(\Phi_{U,c}[W]), \\ b: & X\times Y \to Y, & (U_t, c_t) \mapsto b(\Phi_{U,c}[W]), \end{array}$$

определенные для на $\mathcal{F}_t^W$-предсказуемых парах процессов U_t, c_t, для которых $\Phi_{U,c} \in \mathcal{AF}$. Тогда существует поток $\{\Phi_{U^\alpha,c^\alpha}, \alpha \geqslant 0\}$, порожденный $\mathcal{A}_{A,b}$.

Естественно искать $\Phi^\alpha := \Phi_{U^\alpha,c^\alpha}$ через уравнение на его параметры:

$$\left\{\begin{array}{l} U^\alpha = I + \int_0^\alpha U^\beta A(\Phi_{U^\beta,c^\beta})d\beta, \\ c^\alpha = \int_0^\alpha A(\Phi_{U^\beta,c^\beta})^* c^\beta d\beta + \int_0^\alpha b(\Phi_{U^\beta,c^\beta})d\beta. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Лемма 3.1.14. *Существуют единственная пара $\mathcal{F}_t^W$-предсказуемых процессов (U_t^α, c_t^α) такая, что*

1. *$(U^\alpha, c^\alpha) \in X\times Y$ для каждого $\alpha \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям, введенным при определении $\Phi_{U^\alpha,c^\alpha} \in \mathcal{AF}$.*
2. *Выполняются уравнения* (3.12).

Кроме того, $\mathbb{E}\int_0^1 |c_s^\alpha|_H^2 ds$ ограничены равномерно по α на любом конечном интервале.

Доказательство. Заметим, что мы не можем применить к (3.12) теорию обыкновенных дифференциальных уравнений на банаховых пространствах, так как $\Phi_{U,c}$ имеет смысл только при изометрических U_t, множество которых не является подпространством. Вместо этого мы используем метод приближений Эйлера, по аналогии с [42].

Фиксируем некоторый интервал $[0, \alpha_0]$ значений α. Без ограничения общности считаем, что это отрезок $[0,1]$. Разобьем его на $n+1$ равных частей и обозначим точки разбиения через $\alpha_j := j/n, j = 0, \ldots, n$. Определим $\tau(\alpha) := \max\{\alpha_j, \alpha_j \leqslant \alpha\}$ и рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} U_n^\alpha = I + \int_0^\alpha U_n^\beta A(\Phi_{U_n^{\tau(\beta)}, c_n^{\tau(\beta)}}) d\beta, \\ c_n^\alpha = \int_0^\alpha A(\Phi_{U_n^{\tau(\beta)}, c_n^{\tau(\beta)}})^* c_n^{\tau(\beta)} d\beta + \int_0^\alpha b(\Phi_{U_n^{\tau(\beta)}, c_n^{\tau(\beta)}}) d\beta. \end{cases} \tag{3.13}$$

Решения можно выписать явно, в частности, $U^\alpha = U^{\tau(\alpha)} e^{(\alpha - \tau(\alpha)) A(\Phi_{U^{\tau(\alpha)}, c^{\tau(\alpha)}})}$ принимает значения в множестве изометрических операторов. Обозначим

$$|||(U,c)|||_\alpha := \sup_{\beta \in [0,\alpha]} \|U^\beta\|_X + \sup_{\beta \in [0,\alpha]} \|c^\beta\|_Y.$$

Выберем $n > m > 0$. Используя условия на коэффициенты, из (3.13) легко получается оценка

$$|||(U_m - U_n, c_m - c_n)|||_\alpha \lesssim 1/m \cdot const + \int_0^\alpha |||(U_m - U_n, c_m - c_n)|||_\beta d\beta.$$

Теперь из леммы Гронуолла следует равномерная сходимость на отрезке приближений (U_n^α, c_n^α) к некоторым (U^α, c^α). В частности, величина $\sup_{\alpha \in [0,1]} \|c^\alpha\|_Y$ конечна, что доказывает второй пункт леммы. Кроме того,

$$\sup_{|h|_H \leqslant 1} ||U_t^\alpha h|_H - |h|_H| = \lim_{n \to \infty} \sup_{|h|_H \leqslant 1} ||(U_n)_t^\alpha h|_H - |h|_H| = 0$$

в $L^2([0,1] \times \Omega)$, что влечет изометричность значений U_t^α. Используя этот факт и липшицевость (A, b), мы можем перейти к пределу в уравнении (3.13) и получить, что (U^α, c^α) удовлетворяют (3.12).

Теперь докажем единственность. Пусть (U,c) и (V,d) – две пары решений, удовлетворяющие условиям 1-3. Пользуясь липшицевостью коэффициентов, из уравнения (3.12) получаем

$$|||(U - V, c - d)|||_\alpha \lesssim \int_0^\alpha |||(U - V, c - d)|||_\beta d\beta,$$

откуда при помощи леммы Гронуолла выводим, что $U^\alpha = V^\alpha$ и $c^\alpha = d^\alpha$ для всех α. $\square$

Доказательство теоремы. Вставляя формулы из (3.12) в определение $\Phi_{U^\alpha, c^\alpha}$, получаем

$$\Phi_{U^\alpha, c^\alpha}[W](k) = \int_0^1 (k_t + \int_0^\alpha U^\beta A(\Phi_{U^\beta, c^\beta}) k_t d\beta), dW_t) + \\ + \int_0^1 \int_0^\alpha (A(\Phi_{U^\beta, c^\beta}) k_t, c^\beta)_H d\beta dt + \int_0^1 \int_0^\alpha (k_t, b(\Phi_{U^\beta, c^\beta}))_H d\beta dt.$$

Используя бесконечномерный вариант стохастической теоремы Фубини ([26, теорема 4.33]), можно переписать это выражение как

$$\Phi_{U^\alpha,c^\alpha}[W](k) = \int_0^1 (k_t, dW_t) + \int_0^\alpha \left[\int_0^1 (U^\beta A(\Phi_{U^\beta,c^\beta})k_t, dW_t) + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 (A(\Phi_{U^\beta,c^\beta})k_t, c^\beta)_H dt + \int_0^1 (k_t, b(\Phi_{U^\beta,c^\beta}))_H dt\right] d\beta =$$
$$= \int_0^1 (k_t, dW_t) + \int_0^\alpha \mathcal{A}[\Phi^\beta](k) d\beta,$$

откуда вытекает пункт 3 определения потока.

Докажем теперь пункт 2. Фиксируем $\alpha \geqslant 0$. Рассмотрим семейство $\{\Psi^\beta, \beta \geqslant 0\}$, определенное как

$$\begin{array}{ll} \Psi^\beta[W] = \Phi^\beta[W], & \beta \leqslant \alpha, \\ \Psi^\beta[W] = \Phi^{\beta-\alpha}[\Phi^\alpha[W]], & \beta \geqslant \alpha. \end{array}$$

Соответствующие параметры (V^β, d^β) для Ψ^β можно вычислить следующим образом. Для $\beta \leqslant \alpha$ они очевидным образом совпадают с (U^β, c^β). При $\beta \geqslant \alpha$ имеем:

$$\Psi^\beta[W](k) = \Phi^{\beta-\alpha}[\Phi^\alpha[W]](k) =$$
$$= \int_0^1 (U_t^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W])k_t, d\Phi^\alpha[W]_t) + \int_0^1 (k_t, c_t^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W]))_H dt =$$
$$= \int_0^1 (U_t^\alpha U_t^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W])k_t, dW_t) + \int_0^1 (U_t^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W])k_t, c_t^\alpha)_H dt +$$
$$+ \int_0^1 (k_t, c_t^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W]))_H dt.$$

Отсюда получаем:

$$V^\beta = U^\alpha U^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W]) = U^\alpha + \int_\alpha^\beta U^\alpha U^{\gamma-\alpha}(\Phi^\alpha[W]) A(\Phi^{\gamma-\alpha}[\Phi^\alpha]) d\gamma =$$
$$= I + \int_0^\beta V^\gamma A(\Psi^\gamma) d\gamma,$$

$$d^\beta = U^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W])^* c^\alpha + c_t^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W]) =$$
$$= c^\alpha + \int_\alpha^\beta A(\Phi^{\gamma-\alpha}\left[\Phi^\alpha[W]\right])^*[U^{\gamma-\alpha}(\Phi^\alpha[W])^* c^\alpha + c^{\beta-\alpha}(\Phi^\alpha[W])\big] d\gamma +$$
$$+ \int_\alpha^\beta b(\Phi^{\gamma-\alpha}[\Phi^\alpha[W]]) d\gamma = \int_0^\beta [A(\Psi^\gamma)^* d^\gamma + b(\Psi^\gamma)] d\gamma.$$

В силу единственности решения (3.6) $(V^\beta, d^\beta) \equiv (U^\beta, c^\beta)$, а значит, и $\Phi^\beta \equiv \Psi^\beta$.

$\square$

3.2 Потоки на абстрактных винеровских пространствах

В этом разделе мы покажем, что введенные выше конструкции принимают естественный вид в контексте абстрактных винеровских пространств. Рассмотрим некоторое сепарабельное банахово пространство X, на котором задана структура абстрактного винеровского пространства (X, H, i). Положим $\Omega := C([0,1], X)$, а через P обозначим распределение X-значного броуновского движения. Определим $\mathcal{F}$ как замыкание борелевской σ-алгебры относительно P. Тогда координатный процесс w_t будет X-значным броуновским движением, обозначим порожденный им изонормальный гауссовский процесс через W. Будем отождествлять элементы H с их образами при вложении в X и полагать $H \subset X$. Такое же отождествление будем проводить для образов элементов $L^2([0,1], H)$ в Ω.

Выберем некоторый ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty \subset \Omega^* \subset L^2([0,1], H)$. Хорошо известно (см., например, [3, теорема 3.4.4]), что имеет место равенство

$$w = \sum_1^\infty \langle e_i, w\rangle e_i,$$

где ряд сходится в $C([0,1], X)$ почти наверное. Если $\Phi \in \mathcal{AF}$, то такая же сходимость имеет место для

$$\Phi(w) := \sum_1^\infty \Phi[W](e_i) e_i$$

относительно меры $\widetilde{P} = q \cdot P$, где q определяется как в предложении 3.1.2. Обозначим через $\mathcal{FC}_c^\infty(\Omega)$ пространство случайных величин вида $F(w) = f(\langle z_1, w_{t_1}\rangle, \ldots, \langle z_n, w_{t_n}\rangle)$, где $z_1, \ldots, z_n \in X^*$, $t_1 \ldots, t_n \in [0,1]$, а $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель.

Предложение 3.2.1. *P и $P \circ \Phi^{-1}$ эквивалентны и $F(\Phi(w)) = F(\Phi[W])$ для любой $F \in L^2(W)$.*

Доказательство. Несложно видеть, что если $F \in \mathcal{FC}_c^\infty(\Omega)$, то $F(\Phi(w)) = F(\Phi[W])$. Тогда из предложения 3.1.2 следует, что

$$\mathbb{E}F(w) = \mathbb{E}F(\Phi(w))q(w) = \mathbb{E}F(\Phi(w))\widetilde{q}(\Phi(w)), \tag{3.14}$$

где $\widetilde{q}(\Phi(w)) = \mathbb{E}(q|\Phi^{-1}\mathcal{F})$. Так как множество таких F плотно в пространстве интегрируемых функций, получаем абсолютную непрерывность P относительно $P \circ \Phi^{-1}$. Так как P-почти всюду $q > 0$, то и $\widetilde{q} > 0$ почти всюду относительно $P \circ \Phi^{-1}$, поэтому P и $P \circ \Phi^{-1}$ эквивалентны и корректно определена замена переменных $F \to F(\Phi(w))$.

Любая $F \in L^2(W)$ есть предел некоторой последовательности функций $F_n \in \mathcal{FC}_c^\infty(\Omega)$. В силу неравенства Чебышева сходимость в $L^2(W)$ влечет сходимость по вероятности, а тогда и $F_n(\Phi(w))$ сходятся к $F(\Phi(w))$ по вероятности. С другой стороны, $F_n(\Phi(w)) = F_n(\Phi[W])$ сходятся к $F(\Phi[W])$ в $L^2(\Phi[W])$, следовательно,также по вероятности относительно $q \cdot P$, а значит, и относительно P. Таким образом, $F(\Phi(w)) = F(\Phi[W])$. □

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AV}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.13, а Φ^α – порожденный $\mathcal{A}$ поток. В предыдущих обозначениях, $w \mapsto \Phi^\alpha(w)$ определяет поток измеримых преобразований пространства Ω. Докажем в этом случае аналог теоремы 3.1.13.

Теорема 3.2.2. *Поток $w \mapsto \Phi^\alpha(w)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Мера P квази-инвариантна относительно действия Φ^α, то есть P и $P\circ(\Phi^\alpha)^{-1}$ эквивалентны для всех α.*
2. *$\Phi^0(w) = w$ почти наверное.*
3. *$\Phi^\alpha \circ \Phi^\beta = \Phi^{\alpha+\beta}$ почти наверное для любых $\alpha, \beta \geqslant 0$.*
4. *Для каждой $F \in \mathcal{FC}_c^\infty(\Omega)$ функция $F(\Phi^\alpha(w))$ обладает абсолютно непрерывной по α версией, для которой выполнено:*

$$\frac{d}{d\alpha} F(\Phi^\alpha(w)) = D_{A,b} F(\Phi^\alpha(w)).$$

Доказательство. Первый пункт очевиден. Для доказательства второго рассмотрим цепочку равенств:

$$\langle z, \Phi^{\alpha+\beta}(w)_t\rangle = \Phi^{\alpha+\beta}[W](I_{[0,t]} \otimes z) = \Phi^\alpha[\Phi^\beta[W]](I_{[0,t]} \otimes z) = \\ = \{\Phi^\alpha[W](I_{[0,t]} \otimes z)\}(\Phi^\beta(w)) = \langle z, \Phi^\alpha(\Phi^\beta(w))_t\rangle.$$

Так как, в соответствии с замечанием 1.1.1, значения Φ^α однозначно определяются величинами $\langle z, \Phi^\alpha(w)_t\rangle$ для счетного числа точек $z \in X^*$ и $t \in [0,1]$, отсюда следует равенство $\Phi^\alpha \circ \Phi^\beta = \Phi^{\alpha+\beta}$ почти наверное. Третий пункт вытекает из теоремы 3.1.13, леммы 3.1.6 и предложения 3.2.1. Четвертый вытекает из предложения 3.2.1. □

3.3 Касательные процессы к пространству путей группы токов

3.3.1 Общая формула интегрирования по частям

Пусть G – это компактная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Для некоторого компактного риманова многообразия M (возможно, с краем) рассмотрим группу $C(M,G)$ непрерывных отображений $M \to G$, называемую здесь группой токов. Роль ее "алгебры Ли" играет пространство $X = C(M, \mathfrak{g})$. Предположим, что на X задана структура абстрактного винеровского пространства (X, H, i). Обозначим соответствующее X-значное броуновское движение через w_t, а его распределение через P.

В силу компактности можно считать, что G – это матричная группа, а $\mathfrak{g}$ – ее касательное пространство в единице e. Рассмотрим систему стохастических уравнений в форме Стратоновича на пространстве матриц:

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z) \cdot \partial_t w_t(z), \quad g_0(z) = e, \tag{3.15}$$

для всех $z \in M$. Коэффициенты каждого уравнения имеют линейный рост, поэтому решение существует на всей прямой. Уравнение (3.15) можно также переписать в форме Ито как

$$d_t g_t(z) = g_t(z) \cdot d_t w_t(z) + 1/2 g_t(z) V(z) dt, \quad g_0(z) = e,$$

где $V(z) := \sum_{i,j} v_i v_j (z \otimes v_i, z \otimes v_j)_H$ для ортонормированного базиса $\{v_j\}$ алгебры $\mathfrak{g}$. В силу теоремы 1.2.3, при дополнительных условиях на H (неравенство (1.6)), существует непрерывная версия $g_t(z)$ и эта система определяет измеримое отображение $C([0,1], C(M,\mathfrak{g})) \to C([0,1], C(M,G))$. Но мы пока рассмотрим общий случай.

В обозначениях предыдущего раздела, построим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = C([0,1], X)$, а $\mathcal{F}$ – это пополнение борелевской σ-алгебры на Ω, и рассмотрим изонормальный гауссовский процесс W, соответствующий координатному процессу w_t. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AV}$, для каждого $z \in M$ рассмотрим $\mathfrak{g}$-значный семимартингал

$$\mathcal{A}_t(z) := \sum_j \mathcal{A}[W](I_{[0,t]} \otimes (z \otimes v_j)) v_j.$$

Определим случайный процесс

$$J(\mathcal{A})_t(z) := Ad_{g_t(z)} \int_0^t Ad_{g_s^{-1}(z)} \partial \mathcal{A}_s(z).$$

где $Ad_g x := g^{-1} x g$. Элементы множества $\{J(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in \mathcal{AV}\}$ будем называть *касательными процессами* к пространству путей группы токов.

Замечание 3.3.1. Выражение для $J(\mathcal{A})$ мотивировано следующими соображениями. Определим отображение $x \mapsto I(x)$, сопоставляющее $\mathfrak{g}$-значному семимартингалу x_t процесс $I(x)_t$, являющийся решением уравнения

$$\partial_t I(x)_t = I(x)_t \cdot \partial_t x_t, \quad I(x)_0 = e.$$

Тогда из формулы Ито несложно получить соотношение

$$I(y) I(x) = I(x_\cdot + \int_0^\cdot Ad_{I(x)_s} \partial_s y_s).$$

Поэтому мы можем эвристически вывести следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0} I(w(z) + \alpha \mathcal{A}(z))_t = \frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0} I(\alpha \int_0^\cdot Ad_{I(w(z))_s^{-1}} \partial \mathcal{A}_s(z))_t g_t(z) = \\ = \frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0} g_t(z) I(\alpha Ad_{g_\cdot(z)} \int_0^\cdot Ad_{g_s(z)^{-1}} \partial \mathcal{A}_s(z)) = g_t(z) J(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Этому рассуждению можно придать строгий смысл, но в настоящей работе мы этого делать не будем. Вместо этого, мы приведем следующее непрямое доказательство.

Чтобы немного упростить формулы, будем писать $[x, y]_t \equiv [x_t, y_t]$ для обозначения квадратичной ковариации семимартингалов x и y.

Лемма 3.3.1. *Для любых $z \in M$ и $t \in [0,1]$ случайная величина $g_t(z)$ лежит в $\mathbb{D}^{1,2}_{A,b}$ и*

$$D_{A,b} g_t(z) = g_t(z) J(\mathcal{A})_t(z).$$

Доказательство. Вычислим по формуле Ито:

$$\partial\{g_t(z)J(\mathcal{A})_t(z)\} = g_t(z)\partial\mathcal{A}_t(z) + \left(\int_0^t Ad_{g_s^{-1}(z)}\partial\mathcal{A}_s(z)\right) g_t(z)\partial w_t(z) =$$
$$= \sum_{i,j} g_t(z)v_iv_j\left(d[(w_t(z),v_i)_{\mathfrak{g}}, (\mathcal{A}_t(z),v_j)_{\mathfrak{g}}] + d[(\mathcal{A}_t(z),v_i)_{\mathfrak{g}}, (w_t(z),v_j)_{\mathfrak{g}}]\right) +$$
$$+ g_t(z)d\mathcal{A}_t(z) + \{g_t(z)J(\mathcal{A})_t(z)\}dw_t(z) + \{g_t(z)J(\mathcal{A})_t(z)\}V(z)dt.$$

Используя косо-симметричность A_t, докажем, что первое слагаемое есть тождественный ноль:

$$[(w_t(z),v_i)_{\mathfrak{g}}, (\mathcal{A}_t(z),v_j)_{\mathfrak{g}}] = \int_0^1 (z\otimes v_i, A_t(z\otimes v_j))_H dt =$$
$$= -\int_0^1 (A_t(z\otimes v_i), z\otimes v_j)_H dt = -[(\mathcal{A}_t(z),v_i)_{\mathfrak{g}}, (w_t(z),v_j)_{\mathfrak{g}}].$$

Теперь утверждение следует из теоремы 3.1.7. □

Рассмотрим множество $\mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)$ случайных величин вида $F = f(g_{t_1}(z_1),\dots,g_{t_n}(z_n))$, где $f : G^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Пусть $\{k_t(z), z\in M, t\in[0,1]\}$ – некоторое семейство $\mathfrak{g}$-значных случайных величин. Будем обозначать:

$$(\nabla F, k) := \sum_{j=1}^n \frac{d}{ds}|_{s=0} f(g_{t_1}(z_1),\dots,g_{t_j}(z_j)e^{sk_{t_j}(z_j)},\dots,g_{t_n}(z_n)).$$

Непосредственно из лемм 3.1.6, 3.3.1 и предложения 3.1.3 вытекает

Теорема 3.3.2. *Пусть $\mathcal{A}_{A,b}\in\mathcal{AV}$, тогда $\mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)\subset\mathbb{D}_{A,b}^{1,2}$ и для любого $F\in\mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)$ выполняется $D_{A,b}F = (\nabla F, J(\mathcal{A}_{A,b}))$, а также имеет место следующая формула интегрирования по частям:*

$$\mathbb{E}(\nabla F, J(\mathcal{A}_{A,b})) = \mathbb{E}F\int_0^1 (b_t, dW_t).$$

3.3.2 Существование потоков

В этом разделе потребуем, чтобы было выполнено неравенство (1.6). Тогда, в силу теоремы 1.2.3, существует непрерывная версия $g_t(z)$, которую можно рассматривать как случайный элемент на $\Omega_G := C([0,1], C(M,G))$. Обозначим его распределение через P_G и введем пополнение $\mathcal{F}_G$ борелевской σ-алгебры на Ω_G. Тогда уравнения (3.15) определяют измеримое отображение $I : (\Omega,\mathcal{F},P)\to(\Omega_G,\mathcal{F}_G,P_G)$. Введем также обратное отображение I^{-1}, определенное как

$$I^{-1}(g)_t(z) := \int_0^t g_s(z)^{-1}\partial g_s(z).$$

Для каждых z,t случайная величина $I^{-1}(g(w))_t(z)$ совпадает почти всюду с $w_t(z)$, поэтому у нее существует непрерывная версия и отображение определено корректно. Так как $[0,1]\times M$ сепарабельно, эта версия должна совпадать почти всюду с

w, так что $I^{-1} \circ I(w) = w$ почти наверное. Непосредственной подстановкой также проверяется, что $I \circ I^{-1}(g) = g$ почти всюду.

Пусть теперь $\mathcal{A} \in \mathcal{AV}$ – некоторый касательный процесс, удовлетворяющий условиям теоремы 3.1.13, а Φ^α – порожденный им поток. Тогда $\Psi^\alpha := I \circ \Phi^\alpha \circ I^{-1}$ определяет поток на Ω_G. Здесь и далее мы используем обозначение $\Phi^\alpha(w)$ из раздела 3.2.

Теорема 3.3.3. *Введенный выше поток Ψ^α удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Мера P_G квази-инвариантна относительно действия Ψ^α, то есть P_G и $P_G \circ (\Psi^\alpha)^{-1}$ эквивалентны для всех α.*

2. *$\Psi^0(g) = g$ почти наверное.*

3. *$\Psi^\alpha \circ \Psi^\beta = \Psi^{\alpha+\beta}$ почти наверное для любых $\alpha, \beta \geqslant 0$.*

4. *Для каждой $F \in \mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)$ функция $F(\Psi^\alpha(g))$ обладает абсолютно непрерывной по α версией, для которой выполнено*

$$\frac{d}{d\alpha} F(\Psi^\alpha(w)) = (\nabla F, J(\mathcal{A})) \circ \Psi^\alpha(w).$$

Доказательство. Пункты 1, 2, 4 непосредственно следуют из теоремы 3.2.2. Третий пункт является следствием также лемм 3.1.6, 3.3.1 и предложения 3.1.12 □

3.3.3 Группы петель

Здесь мы рассмотрим случай, когда $M = [0,1]$ и $H = \{h : \text{ п.в. } \exists \dot{h}, \int_0^1 |\dot{h}(t)|^2_{\mathfrak{g}} dt < \infty, h(0) = h(1) = 0\}$. На самом деле соответствующий процесс живет на пространстве закрепленных петель $\{g \in C([0,1], G), g(0) = g(1) = e\}$, но для упрощения изложения мы будем работать с большим пространством $C([0,1], G)$.

Случай группы петель замечателен тем, что на H существует довольно развитая дифференциальная геометрия алгебры Ли (см., например, [30; 32; 37]). Далее мы вкратце изложим некоторые необходимые нам объекты и их свойства. Все доказательства можно найти в вышеуказанной литературе.

На H поточечно определяется скобка Ли: $[h,k](z) := [h(z), k(z)]$. Оператор $ad_h : k \mapsto [h,k]$ представляет собой непрерывный линейный оператор $H \to H$, обозначим его сопряженный через ad_h^*. Тогда, по аналогии с конечномерным случаем, можно определить ковариантную производную (соответствующую ковариантной производной лево-инвариантных векторных полей) через

$$D_h k := \frac{1}{2}(ad_h k - ad_h^* k - ad_k^* h).$$

Тогда $Dk : h \mapsto D_h k$ есть оператор Гильберта-Шмидта и $\|Dk\|_{HS} \lesssim |k|_H$. Непосредственно из определения вытекает, что D_h есть связность Леви-Чивиты относительно метрики H в том смысле, что $D_h^* = -D_h$ и $D_h k - D_k h = [h,k]$.

Определим также "оператор Лапласа" на H:

$$\Delta h := \sum_{i=1}^\infty D_{e_i} D_{e_i} h,$$

где $\{e_i\}$ – некоторый ортонормированный базис H и сумма не зависит от его выбора. Тогда Δ представляет собой самосопряженный ограниченный оператор.

Для некоторого вектора $h \in H$ определим его *стохастический параллельный перенос* как решение уравнения

$$dK_h(t) = -D_{\partial W_t} K_h(t) := -D_{dW_t} K_h(t) + 1/2\Delta K_h(t)dt, \quad K_h(0) = h.$$

Из свойств D и Δ вытекает, что коэффициенты этого уравнения липшицевы и имеют линейный рост, поэтому решение существует и единственно. Более того, операторнозначный процесс $U(t)$, определенный как $U(t)h := K_h(t)$ является почти всюду сильно непрерывным и принимает значения в множестве изометрических операторов ([30, лемма 4.3]).

Пусть $h(t)$ – абсолютно непрерывный процесс со значениями в H такой, что $\int_0^1 |\dot{h}(t)|_H^2 dt < \infty$. Тогда, согласно лемме [30, лемма 4.4], процесс $U(t)h(t)$ допускает следующее представление:

$$U(t)h(t) = -\int_0^t D_{dW_s} U(s)h(s) + \int_0^t [1/2\Delta U(s)h(s) + U(s)\dot{h}(s)]ds.$$

Мы хотим получить формулу интегрирования по частям относительно производной вдоль лево-инвариантного векторного поля, соответствующего $Uh_t(z) := [U(t)h(t)](z)$, $t, z \in [0,1]$. Чтобы воспользоваться для этого теоремой 3.3.2, найдем соответствующий касательный процесс $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A,b} \in \mathcal{AF}$, для которого

$$Uh_t(z) = J(\mathcal{A})_t(z) = Ad_{g_t(z)} \int_0^t Ad_{g_s^{-1}(z)} \partial\mathcal{A}_s(z).$$

Несложно видеть, что каждое $\mathcal{A}_s(z)$ должно тогда иметь вид

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{A}_s(z) = Ad_{g_s(z)}\partial[Ad_{g_s(z)^{-1}} Uh_t(z)] =& \\ = -[D_{\partial W_t} U(t)h(t)](z) + ad_{\partial w_t(z)} Uh_t(z) + (z, U(t)\dot{h}(t))_H dt.&\end{aligned}$$

Для $v \in \mathfrak{g}$ распишем

$$\begin{aligned}&-(D_{dW_t} U(t)h(t), z\otimes v)_H + (ad_{dW_t(z)} Uh_t(z), v)_{\mathfrak{g}} = \\ &\quad = -1/2[(ad_{dW_t(z)} Uh_t(z), v)_{\mathfrak{g}} - (U(t)h(t), ad_{dW_t}(z\otimes v))_H - \\ &\quad\quad - (dW_t, ad_{U(t)h(t)} z\otimes v)] + (ad_{dW_t(z)} Uh_t(z), v)_{\mathfrak{g}} = \\ &\quad = -1/2[(-ad_{dW_t} U(t)h(t), z\otimes v)_H - (U(t)h(t), ad_{dW_t}(z\otimes v))_H - \\ &\quad\quad - (dW_t, ad_{U(t)h(t)} z\otimes v)] = \\ &\quad = -1/2(ad^*_{U(t)h(t)} z\otimes v + ad^*_{z\otimes v} U(t)h(t) - ad_{U(t)h(t)} z\otimes v, dW_t) = \\ &\quad\quad = (A_t(z\otimes v), dW_t),\end{aligned}$$

где процесс A_t определяется как

$$A_t x := -1/2(ad^*_{U(t)h(t)} x + ad^*_x U(t)h(t) - ad_{U(t)h(t)} x).$$

Нетрудно проверить, что почти всюду $A_t^* = -A_t$ и $\|A_t\|_{L(H)} \lesssim |U(t)h(t)|_H$. Посчитаем теперь член ограниченной вариации для $ad_{\partial w_t(z)} U h_t(z)$. Выберем некоторый ортонормированный базис $\{e_n\} \subset H$, тогда

$$\begin{aligned}
-\sum (ad_{v_i} v_j, v_k)_{\mathfrak{g}} d[\langle z \otimes v_i, w_t\rangle, (D_{dW_t} U(t)h(t), z \otimes v_j)_H] = \\
= -\sum (ad_{v_i} v_j, v_k)_{\mathfrak{g}} (D_{z\otimes v_i} U(t)h(t), z \otimes v_j)_H dt = \\
= -\sum (v_i, ad_{v_j} v_k)_{\mathfrak{g}} (D_{e_n} U(t)h(t), z \otimes v_j)_H (v_i, e_n(z))_{\mathfrak{g}} dt = \\
= -\sum (e_n(z), ad_{v_j} v_k)_{\mathfrak{g}} (D_{e_n} U(t)h(t), z \otimes v_j)_H dt = \\
= \sum (ad_{e_n(z)} v_k, v_j)_{\mathfrak{g}} ([D_{e_n} U(t)h(t)](z), v_j)_{\mathfrak{g}} dt = \\
= -\sum (ad_{e_n} D_{e_n} U(t)h(t), z \otimes v_k)_H dt.
\end{aligned}$$

Одно из возможных определений оператора Риччи на H имеет вид (см. [37, теорема 2.3.5])

$$(\mathrm{Ric}\, x, y) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} (D_{e_n} x, e_m)_H (D_{e_m} y, e_n)_H.$$

Можно показать, что Ric представляет собой ограниченный самосопряженный оператор. Используя свойства связности D, преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{m,n=1}^{\infty} (D_{e_n} x, e_m)_H (D_{e_m} y, e_n)_H = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (D_{D_{e_n} x} y, e_n)_H = \\
= -\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (D_{D_{e_n} x} e_n, y)_H = \\
= -\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (D_{e_n} D_{e_n} x - ad_{e_n} D_{e_n} x, y)_H.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\partial(\mathcal{A}_s(z), v_j) = \\
&\quad = -(D_{\partial W_t} U(t)h(t), z \otimes v_j)_H + (ad_{\partial w_t(z)} U h_t(z), v_j)_{\mathfrak{g}} + (U(t)\dot{h}(t), z \otimes v_j)_H dt = \\
&\quad = (A_t(z \otimes v_j), dW_t) + (U(t)\dot{h}(t), z \otimes v_j)_H dt + 1/2(\mathrm{Ric}\, U(t)h(t), z \otimes v_j)_H dt.
\end{aligned}$$

Положим теперь $b_t := U(t)\dot{h}(t) + 1/2\, \mathrm{Ric}\, U(t)h(t)$, тогда для касательного процесса $\mathcal{A}_{A,b}$ выполняется $J(\mathcal{A})_t(z) = U h_t(z)$.

Замечание 3.3.2. Предыдущее громоздкое рассуждение можно провести гораздо проще, если действовать нестрого. А именно, запишем

$$\begin{aligned}
&\partial \mathcal{A}_t = Ad_{g_t} \partial (Ad_{g_t^{-1}} U(t)h(t)) = \partial(U(t)h(t)) - ad_{\partial w_t} U(t)h(t) = \\
&= -D_{dw_t} U(t)h(t) - ad_{dw_t} U(t)h(t) + U(t)\dot{h}(t)dt + \sum (D_{e_n} D_{e_n} - ad_{e_n} D_{e_n}) U(t)h(t)dt.
\end{aligned}$$

Теперь, преобразовав, как и выше, последнее слагаемое в тензор Риччи, получаем выражение для $\mathcal{A}_{A,b}$.

Теорема 3.3.4. *В предыдущих обозначениях, существует порожденный $\mathcal{A}_{A,b}$ поток Ψ^α, обладающий всеми свойствами, перечисленными в теореме 3.3.3. Для него также верно равенство*

$$\frac{d}{d\alpha}F(\Psi^\alpha(w)) = (\nabla F, Uh) \circ \Psi^\alpha(w)$$

для всех $F \in \mathcal{FC}_c^\infty(\Omega_G)$. Кроме того, имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\mathbb{E}(\nabla F, Uh) = \mathbb{E}F \int_0^1 (U(t)\dot{h}(t) + 1/2 \operatorname{Ric} U(t)h(t), dW_t).$$

Доказательство. В силу теорем 3.3.3 и 3.3.2 остается только доказать, что построенный выше касательный процесс $\mathcal{A}_{A,b}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.13.

Нетрудно видеть, что A_t и b_t равномерно ограничены. Для произвольных $\Phi_{O,c}, \Phi_{V,d} \in \mathcal{AF}$ из определения A_t также получается оценка

$$\int_0^1 \mathbb{E}\|A_t(\Phi_{O,c}) - A_t(\Phi_{V,d})\|^2_{L(H)}dt \lesssim \int_0^1 \mathbb{E}|(U(t)(\Phi_{O,c}) - U(t)(\Phi_{V,d}))h(t)|^2_H dt.$$

Аналогичную оценку можно выписать и для b_t. Фиксируем постоянный $k \in H$, тогда с помощью леммы 3.1.1 получаем:

$$U(t)(\Phi_{V,c})k = -\int_0^t D_{V_s^* dW_s}U(s)(\Phi_{V,c})k - \int_0^t D_{c_s ds}U(s)(\Phi_{V,c})k +$$
$$+ \int_0^t [1/2\Delta U(s)(\Phi_{V,c})k ds.$$

Из неравенства Буркхольдера следует:

$$\mathbb{E}\sup\nolimits_{s\leqslant t}|U(s)(\Phi_{V,c})k - U(s)(\Phi_{O,d})k|^2_H \lesssim$$
$$\lesssim |k|^2_H \int_0^t \mathbb{E}\|V_s - O_s\|^2_{L(H)}ds + |k|^2_H \int_0^t \mathbb{E}|c_s - d_s|^2_H ds +$$
$$+ \int_0^t \mathbb{E}\sup\nolimits_{\tau\leqslant s}|U(\tau)(\Phi_{V,c})k - U(\tau)(\Phi_{O,d})k|^2_H ds,$$

откуда по лемме Гроноулла получаем

$$\mathbb{E}\sup\nolimits_{s\leqslant t}|U(s)(\Phi_{V,c})k - U(s)(\Phi_{O,d})k|^2_H \lesssim$$
$$\lesssim |k|^2_H \left[\int_0^t \mathbb{E}\|V_s - O_s\|^2_{L(H)}ds + \int_0^t \mathbb{E}|c_s - d_s|^2_H ds\right].$$

Предположим, что $\sup_{t\in[0,1]}|h(t)|_H \leqslant M$ для некоторой постоянной $M > 0$, тогда

$$\int_0^1 \mathbb{E}|U(t)(\Phi_{V,c})h(t) - U(t)(\Phi_{O,d})h(t)|^2_H dt \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|k|\leqslant M, t\in[0,1]} \mathbb{E}|U(t)(\Phi_{V,c})k - U(t)(\Phi_{O,d})k|^2_H \lesssim$$
$$\lesssim M^2 \left[\int_0^1 \mathbb{E}\|V_t - O_t\|^2_{L(H)}dt + \int_0^1 \mathbb{E}|c_t - d_t|^2_H dt\right],$$

откуда следует липшицевость для $U(t)(\Phi_{V,c})$, а значит, и для $A_t(\Phi_{V,c})$ и $b_t(\Phi_{V,c})$. $\square$

Глава 4

Потоки преобразований суперпространства

В предыдущей главе изучались преобразования пространства, согласованные с потоком σ-алгебр, соответствующим броуновскому движению. Но можно рассматривать и несогласованные трансформации, что, однако, требует дополнительных условий регулярности. В плоском случае эти вопросы подробно изложены, к примеру, в книгах [3; 86], наиболее значительным результатом здесь является теорема Р. Рамера (см. [74]), утверждающая квази-инвариантность гауссовской меры на абстрактном винеровском пространстве (X, H, i) относительно нелинейных преобразований вида $x \to x + h(x)$, где $h(x)$ принимает значения в H. Полученная им формула для производной Радона-Никодима допускает обобщение и на негауссовские меры, обладающие логарифмическими производными вдоль некоторого гильбертова подпространства H (см. [81; 82]).

Формулы для плотностей образов меры μ под действием некоторого потока $\{F_t, t \geqslant 0\}$ преобразований пространства часто получаются из соответствующих формул интегрирования по частям. Напомним, что логарифмической производной меры μ относительно векторного поля k называется μ-интегрируемая функция β_k такая, что

$$\int (\phi', k) d\mu = -\int \phi \beta_k d\mu$$

для любой функции ϕ из некоторого заданного класса функций, для которых это выражение имеет смысл. Логарифмической производной μ по направлению $h \in H$ называется функция $\beta(h, x) = \beta_{k_h}(x)$, где $k_h(x) \equiv h$. При некоторых технических условиях логарифмическую производную вдоль векторного поля можно восстановить из логарифмической производной по направлениям из H по формуле (см. [82, предложение 8.2])

$$\beta_k(x) = \beta(k(x), x) + \operatorname{Tr} k'(x). \tag{4.1}$$

Пользуясь этим выражением, можно получить производную Радона-Никодима $\frac{(d\mu F_t^{-1})'}{d\mu F_t^{-1}}$, где дифференцирование происходит по переменной t в некоторой топологии на пространстве мер, а из нее получить и выражение для $\frac{d\mu F_t^{-1}}{d\mu}$, обобщающее формулу Рамера на негауссовские меры и являющуюся ее частным случаем для гауссовских (см. [81]).

В данной главе мы проводим похожие рассуждения в случае наличия антикоммутирующих координат. А именно, мы рассматриваем супермеру μ на суперпространстве E_Λ с конечномерной нечетной частью, имеющую логарифмическую производную вдоль некоторого гильбертова подсуперпространства H_Λ (определения этих понятий приводятся в первом разделе, см. также [12]), и доказываем ее квазиинвариантность относительно потока диффеоморфизмов суперпространства, удовлетворяющего некоторым техническим условиям, а также выводим соответствующую формулу интегрирования по частям. В частности, уравнение (4.1) принимает в этой ситуации вид

$$\beta_k(x) = \beta(\overline{k(x)}, x) + \operatorname{Str} k'(x),$$

где черта обозначает сопряжение, то есть перемену знака перед нечетной компонентой, а Str есть суперслед, аналог следа на суперпространствах.

Глава устроена следующим образом. В первом и втором разделах вводятся основные определения, связанные с суперпространствами и супермерами на них, а в разделе 3 доказываются основные результаты главы - формула интегрирования по частям, явный вид производной Радона-Никодима $\frac{d\mu F_t^{-1}}{d\mu}$ и выражение логарифмической производной вдоль векторного поля через логарифмическую производную по направлениям гильбертова подсуперпространства.

4.1 Основные понятия

Банахово пространство Λ с нормой $\|\cdot\|$ будем называть *$\mathbb{Z}_2$-градуированным*, если оно разлагается в прямую сумму $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, где Λ_0, Λ_1 – замкнутые подпространства, проекции на которые являются непрерывными. Назовем Λ *коммутативной банаховой супералгеброй*, если $xy = (-1)^{i-j}yx$ для всех $x \in \Lambda_i$, $y \in \Lambda_j$, $i, j \in \{0, 1\}$, а также $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ для любых $x, y \in \Lambda$. В настоящей работе мы также предполагаем, что Λ сепарабельно и аннулятор нечетной части тривиален, то есть:

$$\Lambda_1^\perp = \{x \in \Lambda : x\theta = 0 \ \ \forall \theta \in \Lambda_1\} = \{0\}.$$

Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное банахово пространство $E = E_0 \oplus E_1$, где E_0 и E_1 – замкнуты. *Суперпространством* назовем $E_\Lambda = (E_\Lambda)_0 \oplus (E_\Lambda)_1$, где

$$(E_\Lambda)_0 = \Lambda_0 \widehat{\otimes} E_0,$$
$$(E_\Lambda)_1 = \Lambda_1 \widehat{\otimes} E_1,$$

$\widehat{\otimes}$ обозначает пополнение алгебраического тензорного произведения по некоторой норме. Для $x = y + \theta$, $y \in (E_l)_0$, $\theta \in (E_\Lambda)_1$ определим сопряженный элемент как $\overline{x} := y - \theta$. Непрерывно вложенное в E_Λ суперпространство G_Λ называется *подсуперпространством*, если G_0 и G_1 непрерывно вложены в E_0 и E_1 соответственно.

Пусть E_Λ, G_Λ – суперпространства. Выберем $i, j \in \{0, 1\}$, из операторов $(x \otimes A) : \Lambda_i \otimes E_i \to \Lambda_j \otimes G_j$, действующих как

$$(x \otimes A)y \otimes v := xy \otimes Av,$$

где $A \in L(E_i, G_j)$, $v \in E_i$, $x \in \Lambda_{|i-j|}$, $y \in \Lambda_i$, выберем те, которые продолжаются до непрерывных операторов $(E_\Lambda)_i \to (G_\Lambda)_j$ и обозначим пополнение их линейных комбинаций по операторной норме через $\Lambda_{|i-j|}\widehat{\otimes}L(E_i, G_j)$. Определим множество *гомоморфизмов* $Hom_\Lambda(E, G)$, состоящее из операторов вида

$$Ax = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{10} \\ A^{01} & A^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{00}x^0 + A^{10}x^1 \\ A^{01}x^0 + A^{11}x^1 \end{pmatrix},$$

где $x^0 \in (E_\lambda)_0$, $x^1 \in (E_\lambda)_1$, $A^{ij} \in \Lambda_{|i-j|}\widehat{\otimes}L(E_i, G_j)$. Заметим, что на $Hom(E_\Lambda, G_\Lambda)$ также можно ввести структуру суперпространства, представив его в виде:

$$Hom(E_\Lambda, G_\Lambda) = \Lambda_0\widehat{\otimes} \begin{pmatrix} L(E_0, G_0) & 0 \\ 0 & L(E_1, G_1) \end{pmatrix} \oplus \Lambda_1\widehat{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & L(E_1, G_0) \\ L(E_0, G_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

На $Hom(E_\Lambda, G_\Lambda)$ вводится естественная операторная норма. Рассмотрев случай алгебраических тензорных произведений и перейдя к пределу, несложно проверить, что для $A \in Hom(E_\Lambda, G_\Lambda)$ и $B \in Hom(G_\Lambda, F_\Lambda)$ их композиция $AB \in Hom(E_\Lambda, F_\Lambda)$ и $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Отображение $f : E_\Lambda \to G_\Lambda$ назовем супердифференцируемым в точке $x \in E_\Lambda$, если f дифференцируема по Фреше в точке x и ее производная $f'(x) \in Hom(E_\Lambda, G_\Lambda)$. Говорим, что она дважды супердифференцируема, если $f'(x)$ дифференцируема как отображение $E_\Lambda \to Hom(E_\Lambda, G_\Lambda)$. Аналогично определяются производные высших порядков.

Пусть H_Λ является подсуперпространством пространства E_Λ. Говорим, что $f : E_\Lambda \to G_\Lambda$ *супердифференцируемо вдоль* H_Λ, если для каждого $x \in E_\lambda$ функция $h \mapsto f(x+h)$ супердифференцируема как отображение $H_\Lambda \to G_\Lambda$, и обозначаем его производную как $f'(x) \in Hom(H_\Lambda, G_\Lambda)$. Говорим, что f *непрерывно супердифференцируема вдоль* H_λ, если $f'(x)$ определяет непрерывное отображение $E_\Lambda \to Hom(H_\Lambda, G_\Lambda)$. Точно так же определяются производные высших порядков вдоль подпространства. Обозначим через $S^n(E_\Lambda, H_\Lambda; G_\Lambda)$ множество n раз непрерывно супердифференцируемых вдоль H_Λ отображений $E_\Lambda \to G_\Lambda$ (n может быть бесконечным).

Пусть теперь $H = H_0 \oplus H_1$ – $\mathbb{Z}_2$-градуированное сепарабельное гильбертово пространство, будем считать что H_0 ортогонально H_1. Выберем некоторый ортонормированный базис $\{e_i^k \in H_k, i \geqslant 1, k = 0, 1\}$ в H, для каждого i вложим естественным образом $\Lambda_i \otimes H_i$ в пространство

$$l_2(\Lambda_i) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ \sum_j \|x_j\|^2 < \infty,\ x_j \in \Lambda_i \right\},$$

снабженное нормой:

$$\|x\| = \sqrt{\sum \|x_j\|^2}.$$

Тогда суперпространство $H_\Lambda = \Lambda_0\widehat{\otimes}H_0 \oplus \Lambda_1\widehat{\otimes}H_1$, где тензорные произведения замыкаются по вышеприведенным нормам, называется *гильбертовым суперпространством.* По построению, оно изоморфно

$$l_2(\Lambda) := \left\{ x = (x_i^k), \sum_{i,k} \|x_i^k\|^2 < \infty, x_j^k \in \Lambda_k, k = 0, 1 \right\}.$$

Здесь количество элементов в наборе $(x_i^k)_{i,k}$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Легко показать, что операторы

$$\begin{aligned} &P_i^k : H_\Lambda \to \Lambda_k \quad x \mapsto x_i^k, \\ &Q_i^k : \Lambda_k \to H_\Lambda \quad y \mapsto x : \quad x_i^k = y;\, x_j^l = 0, (j,l) \neq (i,k) \end{aligned}$$

лежат в $Hom(H_\Lambda, \Lambda)$ и $Hom(\Lambda, H_\Lambda)$ соответственно. Тогда для любого $A \in Hom(H_\Lambda, H_\Lambda)$ оператор $P_i^k A P_j^l \in Hom(\Lambda, \Lambda)$ представляет собой умножение слева на элемент Λ, который мы обозначим через A_{ij}^{kl}. *Суперследом* оператора A будем называть сумму

$$\operatorname{Str} A := \sum_j A_{jj}^{00} - \sum_j A_{jj}^{11},$$

когда оба ряда сходятся в норме Λ. Аналогично, операторы $a \in Hom(H_\Lambda, \Lambda)$ имеют вид $ax = \sum_{i,k} a_i^k x_i^k$.

4.2 Супермеры

С этого момента фиксируем суперпространство E_Λ. Потребуем, чтобы для нормы на E_Λ выполнялось $\|\lambda \otimes x\| = \|\lambda\| \|x\|$, где $x \in E_i$, $\lambda \in \Lambda_i$, $i = 0, 1$. Также, будем предполагать, что нечетное подпространство конечномерно, то есть $\dim E_1 = d < \infty$, а $\Lambda_1 \widehat{\otimes} E_1$ можно отождествить с декартовым произведением $\Lambda_1^d = \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_1$. Для дальнейшего введем обозначения:

$$x = y + \theta \in E_\Lambda,\ y \in (E_\Lambda)_0,\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \Lambda_1^d = (E_\Lambda)_1.$$

Так как (см. [12, гл. 1, предложение 1.1]) любая более чем d раз супердифференцируемая функция $\Lambda_1^d \to \Lambda$ суть многочлен, то естественно в качестве основного множества функций рассмотреть многочлены от нечетных переменных. Определим пространство $\mathcal{P} = \{\sum\limits_\alpha f_\alpha \theta^\alpha, f_\alpha \in \Lambda,\ \alpha$ – мультииндекс$\}$ с нормой:

$$\|\sum_\alpha f_\alpha \theta^\alpha\|_{\mathcal{P}} = \max_\alpha \|f_\alpha\|.$$

Из банаховости Λ следует, что $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ – банахово. Заметим, что $\mathcal{P}$ представляет собой прямую сумму 2^d копий Λ, поэтому на $\mathcal{P}$ также можно ввести структуру суперпространства $\mathcal{P} = \Lambda_0 \otimes \mathbb{R}^{2^d} \oplus \Lambda_1 \otimes \mathbb{R}^{2^d}$.

В [12, гл. 1, теорема 3.1] доказано, что единственным интегралом по Λ_1^d, являющимся Λ-линейным оператором $\mathcal{P} \to \Lambda$, инвариантным относительно сдвигов, является так назваемый интеграл по антикоммутирующим переменным, определяемый как:

$$\int\limits_{\Lambda_1^d} \sum_\alpha f_\alpha \theta^\alpha d\theta = \lambda_0 f_{(1,\ldots,1)},$$

то есть просто выделение старшего коэффициента. Здесь $\lambda_0 \in \Lambda$ - произвольная постоянная, которую мы будем считать равной единице. Заметим, что выполняется:

$$\|\int_{\Lambda_1^d} f d\theta\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{P}},$$

так что интеграл представляет собой непрерывный линейный оператор $\mathcal{P} \to \Lambda$.

Супермерой на суперпространстве E_Λ называется борелевская мера μ на E_0 со значениями в $\mathcal{P}$, а интеграл по ней от функции $f : E_0 \oplus (E_\Lambda)_1 \to \Lambda$ определяется как:

$$\int\limits_{E_\Lambda} f(x) d\mu = \int\limits_{\Lambda_1^d} \left(\int\limits_{E_0} f(y,\theta)\mu(dy)(\theta) \right) d\theta.$$

Здесь внешний интеграл – интеграл по антикоммутирующим переменным, а внутренний – билинейный интеграл (см. [62]) относительно билинейной формы умножения многочленов. Пространство E_0 мы естественным образом отождествляем с пространством $\{1 \otimes v, v \in E_0\}$. Чтобы определение имело смысл, $y \mapsto f(y,\cdot)$ должно быть измеримым отображением $E_0 \to \mathcal{P}$, для которого $\int_{E_0} \|f(y,\cdot)\|_{\mathcal{P}} d|\mu| < \infty$ (см. [62, лемма 21-2.7]). В этом случае говорим, что f принадлежит пространству $L^1(E_\Lambda, \mu)$. Здесь $|\mu|$ обозначает вариацию меры μ, определяемую как

$$|\mu|(A) := \sup_{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n = A} \sum_j \|\mu(A_j)\|_{\mathcal{P}}.$$

Для функции f, определенной на всем пространстве E_Λ, будем также писать $f \in L^p(E_\Lambda, \mu)$, когда ее сужение на $E_0 \oplus (E_\Lambda)_1$ интегрируемо в степени p.

Пусть $F : E_\Lambda \to E_\Lambda$ – некоторое непрерывное отображение. *Образом* супермеры μ под действием отображения F будем называть оператор μF^{-1}, действующий как

$$\mu F^{-1} f := \int_{E_\Lambda} f \circ F d\mu$$

на те функции $f : F(E_0 \oplus (E_\Lambda)_1) \to \Lambda$, для которых $f \circ F \in L^1(E_\Lambda, \mu)$.

Рассмотрим некоторое гильбертово подсуперпространство H_Λ пространства E_Λ. Для определения производной супермеры возьмем в качестве пространства основных функций множество $S_b^{1,\infty}$ отображений $\phi : E_\Lambda \to \Lambda$ таких, что:

1. $\phi \in S^1(E_\Lambda, (H_\Lambda)_0; \Lambda) \cap S^\infty(E_\Lambda, (E_\Lambda)_1; \Lambda)$.
2. $\|\phi\|_\infty := \sup_{y \in (E_\Lambda)_0} \|\phi(y,\cdot)\|_{\mathcal{P}} < \infty$.
3. $\|\phi'\|_\infty := \sup_{y \in (E_\Lambda)_0, h \in (H_\Lambda)_0, \|h\|_{H_\Lambda} \leqslant 1} \|\phi'(y,\cdot)h\|_{\mathcal{P}} < \infty$.

На $S_b^{1,\infty}$ введем норму $\|\phi\|_1 := \|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty$.

Выберем некоторое подпространство $\mathcal{H}$ множества всех векторных полей $k : E_\Lambda \to H_\Lambda$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $k(x) = k^0(y) + k^1(y,\theta)$, где $k^0 \in S^1((E_\Lambda)_0, (H_\Lambda)_0; (H_\Lambda)_0)$, $k^1 \in S^1(E_\Lambda, H_\Lambda; (H_\Lambda)_1) \cap S^\infty(E_\Lambda, (E_\Lambda)_1; (H_\Lambda)_1)$.
2. $\|k^1\|_\infty := \sup_{y \in (E_\Lambda)_0, i=1,\ldots,d} \|k_i^1(y,\cdot)\|_{\mathcal{P}} < \infty$.
3. $\|k^0\|_\infty := \sup_{y \in (E_\Lambda)_0} \|k^0(y)\|_{H_\Lambda} < \infty$.
4. Суперслед $\operatorname{Str} k'(x)$ существует в смысле сходимости ряда в $L^1(E_\Lambda, \mu)$, где k' обозначает производную вдоль H_Λ.

Будем считать, что на $\mathcal{H}$ определена норма $\|k\|_{\mathcal{H}} := \|k^0\|_\infty + \|k^1\|_\infty$.

Определение 4.2.1. Будем говорить, что супермера μ допускает *логарифмическую производную вдоль* H_Λ, если существует такое непрерывное отображение $\beta : H_\Lambda \to L^1(E_\lambda, \mu)$, что функция $h \to \beta(h, y, \cdot)$ лежит в $Hom(H_\Lambda, \mathcal{P})$ для почти всех $y \in E_0$ и выполнено:

$$\int_{E_\Lambda} \phi(x)' h d\mu = -\int_{E_\Lambda} \phi(x)\beta(h, x) d\mu$$

для любых $h \in H_\Lambda$, $\phi \in S_b^{1,\infty}$. Выберем некоторое векторное поле $k \in \mathcal{H}$, функцию $\beta_k \in L^1(E_\lambda, \mu)$ будем называть *логарифмической производной вдоль* k, если

$$\int_{E_\Lambda} \phi(x)' k(x) d\mu = -\int_{E_\Lambda} \phi(x)\beta_k(x) d\mu$$

для всех $\phi \in S_b^{1,\infty}$.

Заметим, что отображение $h_i^k \to \beta(h_i^k, x)$ можно представить как умножение $h_i^k \to h_i^k \beta(e_i^k, x)$ на некоторый $\beta(e_i^k, x) \in \Lambda$. Действительно, для четных элементов $(k = 0)$ достаточно положить $\beta(e_i^0, x) := \beta(1 \otimes e_i^0, x)$. Для нечетных можно воспользоваться тем, что для почти всех $y \in E_0$ каждый коэффициент $\Lambda_1 \ni h_i^1 \mapsto \beta(h_i^1, y, \cdot) \in \mathcal{P}$ представляет собой элемент $Hom(\Lambda_1, \Lambda)$, а значит, задается умножением на некоторый $\beta(e_i^1, x) \in \Lambda$.

Определим также класс $\mathcal{F}$ потоков $\{F_t, t \in [0,1]\}$ диффеоморфизмов суперпространства, вместе со своими обратными отображениями допускающих разложения:

$$\begin{aligned} F_t(x) = F_t(y, \theta) = F(t, y, \theta) = y + \theta + h_t^0(y) + h_t^1(y, \theta), \\ F_t^{-1}(x) = F_t^{-1}(y, \theta) = F^{-1}(t, y, \theta) = y + \theta + k_t^0(y) + k_t^1(y, \theta) \end{aligned}$$

и удовлетворяющих условиям:

1. F_t и F_t^{-1} непрерывно дифференцируемы по t.
2. $h_t^0, k_t^0, \partial_t h_t^0, \partial_t k_t^0 \in S^1((E_\Lambda)_0, (H_\Lambda)_0, (H_\Lambda)_0)$ для всех t.
3. $h_t^1, k_t^1, \partial_t h_t^1, \partial_t k_t^1 \in S^1(E_\Lambda, H_\Lambda, (H_\Lambda)_1) \cap S^\infty(E_\Lambda, (E_\Lambda)_1, (H_\Lambda)_1)$ для всех t.
4. $\partial_t F_t^{-1} \circ F_t \in \mathcal{H}$ для всех t.

Заметим, что $\phi \circ F \in S_b^{1,\infty}$ для любых $F \in \mathcal{F}$, $\phi \in S_b^{1,\infty}$ и $\|\phi \circ F\|_1 \lesssim \|\phi\|_1$.

На пространстве линейных операторов $S_b^{1,\infty} \to \Lambda$ введем *слабую топологию*, порожденную полунормами

$$p_\phi(\mu) := \|\mu(\phi)\|_\Lambda$$

для всех $\phi \in S_b^{1,\infty}$. Несложно заметить, что любая супермера лежит в этом пространстве, в связи с чем мы будем обозначать действие произвольного оператора ν на $\phi \in S_b^{1,\infty}$ через $\nu(\phi) \equiv \int_{E_\Lambda} \phi d\nu$.

Определение 4.2.2. Пусть $F \in \mathcal{F}$, рассмотрим семейство $\{\mu_t = \mu F_t^{-1}\}_{t\in[0,1]}$ как подмножество $L(S_b^{1,\infty}, \Lambda)$. Говорим, что μ_t *слабо дифференцируемо*, если предел $\mu_s' := \lim_{t\to s, t\in[0,1]} \frac{\mu_t - \mu_s}{t-s} \in L(S_b^{1,\infty}, \Lambda)$ существует в слабой топологии для всех $s \in [0,1]$.

4.3 Квази-инвариантные потоки на суперпространстве

Следующая лемма обобщает на суперслучай аналогичную формулу из [82, предложение 8.2].

Лемма 4.3.1. *Пусть μ имеет логарифмическую производную $\beta(h,x)$ вдоль H_Λ, для которой $k \to \sum_{i,j} k(\cdot)_i^j \beta(e_i^j,\cdot) =: \beta(k(\cdot),\cdot)$ представляет собой непрерывное отображение $\mathcal{H} \to L^1(E_\Lambda,\mu)$. Тогда для любого $k \in \mathcal{H}$ существует логарифмическая производная μ вдоль k, задаваемая формулой*

$$\beta_k(x) = \beta(\overline{k(x)},x) + \operatorname{Str} k'(x).$$

Напомним, что $\overline{k(x)}$ обозначает сопряженный к $k(x)$ элемент (см. определение суперпространства).

Доказательство. Выберем произвольную $\phi \in S_b^{1,\infty}$ и заметим, что частичные суммы ряда $\sum_i \phi'(x)_i^0 k_i^0(x)$ равномерно ограничены по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ величиной $\|\phi\|_1 \|k^0\|_{H_\Lambda}$. Поэтому по теореме Лебега получаем:

$$\begin{aligned}
\int_{E_\Lambda} \phi' k d\mu &= \int_{E_\Lambda} \sum_{i,j} \phi'^j_i k_i^j d\mu = \sum_{i,j} \int_{E_\Lambda} \phi'^j_i k_i^j d\mu = \\
&= \sum_{i,j} \int_{E_\Lambda} (-1)^j (\phi k_i^j)'^j_i d\mu + \sum_{i,j} \int_{E_\Lambda} (-1)^{j+1} \phi (k_i^j)'^j_i d\mu = \\
&= -\sum_{i,j} \int_{E_\Lambda} (-1)^j \phi k_i^j \beta(e_i^j, x) d\mu - \int_{E_\Lambda} \phi \operatorname{Str} k' d\mu = \\
&= -\int_{E_\Lambda} \phi(\beta(\overline{k(x)},x) + \operatorname{Str} k') d\mu,
\end{aligned}$$

где для перестановки суммирования и интегрирования мы воспользовались условиями на $\operatorname{Str} k'$ и $\beta(k(\cdot),\cdot)$. □

Лемма 4.3.2. *Пусть $F \in \mathcal{F}$, семейство μ_t слабо дифференцируемо с производной μ_t' тогда и только тогда, когда имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int_{E_\Lambda} \phi' \partial_t F_t \circ F_t^{-1} d\mu_t = \int_{E_\Lambda} \phi d\mu_t'$$

для любой функции $\phi \in S_b^{1,\infty}$.

Доказательство. Так как

$$\left\| \frac{\phi F_t - \phi F_s}{t-s} \right\|_{\mathcal{P}} \lesssim \|\phi' \circ F_t\|_\infty |\partial_t h_t^0|_{H_\Lambda} + \|\phi \circ F_t\|_\infty |\partial_t h_t^1|_{\mathcal{P}},$$

где мы использовали тот факт, что производная по нечетным переменным просто переставляет местами коэффициенты многочлена, по теореме Лебега имеем:

$$\int_{E_\Lambda} \phi d\mu_t' = \lim_{s\to t} \int_{E_\Lambda} \phi d(\frac{\mu_t - \mu_s}{t-s}) = \lim_{t\to s} \int_{E_\Lambda} \frac{\phi F_t - \phi F_s}{t-s} d\mu = \int_{E_\Lambda} \phi' \circ F_t \partial_t F_t d\mu.$$

Читая это выражение слева направо, получаем прямую импликацию, а справа налево – обратную. □

В следующих двух теоремах мы доказываем основные результаты этой главы.

Теорема 4.3.3. *Пусть μ имеет логарифмическую производную $\beta(h,x)$ вдоль H_Λ, для которой $k \to \sum_{i,j} k(\cdot)_i^j \beta(e_i^j,\cdot) =: \beta(k(\cdot),\cdot)$ представляет собой непрерывное отображение $\mathcal{H} \to L^1(E_\Lambda,\mu)$. Выберем некоторое $F \in \mathcal{F}$, тогда семейство $\{\mu_t = \mu F_t^{-1}\}$ слабо дифференцируемо и*

$$\int_{E_\Lambda} \phi d\mu_t' = \int_{E_\Lambda} \phi \rho_t d\mu_t$$

для любой $\phi \in S_b^{1,\infty}$, где

$$\rho_t = \beta(\overline{\partial_t F_t^{-1}}, F_t^{-1}) + \mathrm{Str}(\partial_t F_t^{-1} \circ F_t)' \circ F_t^{-1}.$$

Здесь выражение $\beta(\overline{\partial_t F_t^{-1}}, F_t^{-1})$ означает, что композиция этой функции с F_t интегрируема относительно μ, поэтому, по определению, существует интеграл от нее по μ_t.

Доказательство. Выпишем сначала следующее соотношение:

$$0 = \frac{d}{dt} F(t, F^{-1}(t,x)) = \partial_t F_t \circ F_t^{-1} + F_t' \circ F_t^{-1} \partial_t F_t^{-1},$$

откуда, в силу леммы 4.3.1, получаем:

$$\int_{E_\Lambda} \phi' \circ F_t \partial_t F_t d\mu = -\int_{E_\Lambda} \phi' \circ F_t F_t' \partial_t F_t^{-1} \circ F_t d\mu =$$
$$= -\int_{E_\Lambda} (\phi \circ F_t)' \partial_t F_t^{-1} \circ F_t d\mu = \int_{E_\Lambda} \phi \circ F_t (\beta(\overline{\partial_t F_t^{-1} \circ F_t}, x) + \mathrm{Str}(\partial_t F_t^{-1} \circ F_t)') d\mu =$$
$$= \int_{E_\Lambda} \phi \cdot (\beta(\overline{\partial_t F_t^{-1}}, F_t^{-1}) + \mathrm{Str}(\partial_t F_t^{-1} \circ F_t)' \circ F_t^{-1}) d\mu_t.$$

Утверждение теоремы теперь следует из леммы 4.3.2. □

Напомним следующее определение. Говорим, что банахово пространство X обладает *свойством Радона-Никодима*, если для каждой конечной меры ν на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ любая X-значная мера γ, вариация которой абсолютно непрерывна относительно какой-то конечной меры ν, задается равенством

$$\gamma(E) = \int_E f d\nu$$

для всякого $E \in \mathcal{F}$, где f – некоторая ν-интегрируемая функция $\Omega \to X$.

Теорема 4.3.4. *В дополнение к условиям предыдущей теоремы предположим также:*

1. *Λ обладает свойством Радона-Никодима.*
2. *Сужения F_t на $E_0 \equiv \{1 \otimes v, v \in E_0\}$ представляют собой гомеоморфизмы пространства E_0, в этом случае все μ_t являются супермерами.*
3. *μ_t непрерывны по вариации на $[0,1]$.*

4. $|\mu_0|+|\mu_1|$-почти всюду ρ_t принимает четные значения и $\int_0^1 \rho_t dt$ существует в смысле интеграла Бохнера со значениями в $\mathcal{P}$.

Тогда $\mu_1 = e^{\int_0^1 \rho_t dt}\cdot\mu$, в частности – μ и μ_1 взаимно абсолютно непрерывны.

Доказательство. Выберем некоторое счетное семейство $\{t_n\}$, плотное в $[0,1]$. Так как μ_t непрерывна по вариации, все меры $|\mu_t|$ абсолютно непрерывны относительно меры

$$\nu := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1}(|\mu_{t_n}|(E_0))^{-1}|\mu_{t_n}|.$$

Так как Λ обладает свойством Радона-Никодима, то им обладает и $\mathcal{P}$, а значит, существуют ν-интегрируемые функции $f_t : E_0 \to \mathcal{P}$ такие, что $\mu_t = f_t\nu$. Из непрерывности μ_t по вариации также вытекает, что f_t непрерывны по вероятности, поэтому у них существует измеримая на $[0,1]\times E_0$ версия. Пусть $\phi \in S_b^{1,\infty}$, по теореме Фубини ([61, теорема III.11.9]) получаем:

$$\int_{E_\Lambda}\phi(f_t-f_0)d\nu = \int_{E_\Lambda}\phi d(\mu_t-\mu_0) = \int_0^t(\int_{E_\Lambda}\phi d\mu_s')ds =$$
$$= \int_0^t(\int_{E_\Lambda}\phi\rho_s f_s d\nu)ds = \int_{E_\Lambda}\phi(\int_0^t\rho_s f_s ds)d\nu.$$

Докажем, что $g_t := f_t - f_0 - \int_0^t f_s\rho_s ds$ равно нулю ν-почти всюду. Заметим сначала, что множество $\mathcal{FC}_0^\infty$ вещественных функций вида $\Phi(x,\theta) = \phi(l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x))$, где $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем, $x \in E_0$, $l_1,\ldots,l_n \in (E_\Lambda)_0^*$, является подмножеством $S_b^{1,\infty}$. В силу сепарабельности $\mathcal{P}$ можно выбрать счетное семейство функционалов $\{p_n\}\in\mathcal{P}^*$, разделяющих точки $\mathcal{P}$ (см. [6, глава I, лемма 2.1]). Для любых $n>0$ и $\phi\in\mathcal{FC}_0^\infty$ имеем:

$$0 = p_n(\int_{E_0}\phi g_t d\nu) = \int_{E_0}\phi p_n(g_t)d\nu.$$

Так как $\{1\otimes v, v\in E_0\}$ есть замкнутое подпространство в $(E_\Lambda)_0$, для любого функционала $l\in E_0^*$ можно построить функционал $\bar{l}$, заданный как $\bar{l}(1\otimes v) := l(v)$, и продолжить его до непрерывного функционала на всем $(E_\Lambda)_0$. Поэтому равенство $\int_{E_0}\phi p_n(g_t)d\nu = 0$ выполнено для любой гладкой ограниченной цилиндрической функции ϕ на E_0, так что $p_n(g_t)=0$ почти всюду для всех n, откуда следует, что и $g_t=0$ почти всюду.

Итак, мы доказали, что $f_t = f_0 + \int_0^t f_s\rho_s ds$ почти всюду для каждого $t\in[0,1]$. Кроме того, из теоремы Фубини следует, что ν-почти всюду $f_t\rho_t$ интегрируемо на $[0,1]$, а значит, у f_t существует абсолютно непрерывная версия, для которой $f_t = \int_0^t f_s\rho_s ds$ выполнено почти всюду для всех t. Тогда из условия 4 следует, что ν-почти всюду либо $f_1 = f_0 = 0$, либо ρ_t интегрируема на $[0,1]$. В последнем случае легко показать, что $f_t = e^{\int_0^t\rho_s ds}f_0$. Экспонента коммутирует со своей производной и f_s в силу четности ρ_s. Таким образом, ν-почти всюду имеет место равенство $f_1 = e^{\int_0^t\rho_s ds}f_0$, откуда:

$$\mu_1 = f_1\nu = e^{\int_0^1\rho_t dt}f_0\nu = e^{\int_0^1\rho_t dt}\mu,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 4.3.1. Формуле в предыдущей теореме можно придать более простой вид, если записать

$$\operatorname{Str}(\partial_t F_t^{-1} \circ F_t)' \circ F_t^{-1} = \operatorname{Str}(\partial_t \partial_x F_t^{-1} \partial_x F_t \circ F_t^{-1}) = \operatorname{Str}(\partial_t \partial_x F_t^{-1} (\partial_x F_t^{-1})^{-1}) = \\ = \operatorname{Str}(\partial_t \ln \partial_x F_t^{-1}) = \partial_t \operatorname{Str}(\ln \partial_x F_t^{-1}),$$

в предположении, что соответствующие ряды сходятся и допускают почленное дифференцирование. В этом случае получаем:

$$e^{\int_0^1 \rho_t dt} = e^{\int_0^1 d_t \operatorname{Str}(\ln \partial_x F_t^{-1}) dt + \int_0^1 \beta(\overline{\partial_t F_t^{-1}}, F_t^{-1}) dt} = \operatorname{Sdet} \partial_x F_1^{-1} e^{\int_0^1 \beta(\overline{\partial_t F_t^{-1}}, F_t^{-1}) dt},$$

что обобщает аналогичную формулу в [81] и для вещественных гауссовских мер является частным случаем формулы Рамера. Здесь Sdet обозначает суперслед и определяется как $\operatorname{Sdet} A := e^{\operatorname{Str} \ln A}$.

Заключение

В диссертации разработаны новые подходы к построению мер, порождаемых диффузиями на группах токов, и исследованы их свойства квази-инвариантности. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Разработан альтернативный метод построения диффузий на группе токов, допускающий обобщение на процессы с разрывными траекториями.

2. Построены двухпараметрические процессы Леви на компактной группе Ли, представляющие из себя процессы Леви на пространстве Скорохода.

3. Построены фейнмановские приближения к интегралам по распределению броуновского листа на компактной группе Ли.

4. Доказана квази-инвариантность супермер, обладающих логарифмической производной вдоль некоторого гильбертова подсуперпространства, относительно действия потоков диффеоморфизмов суперпространства и выведена явная формула для производной Радона-Никодима, аналогичная формуле Рамера.

Ожидается, что в будущем полученные результаты будут обобщены на марковские случайные поля, широко применяемые в квантовой теории поля. Дальнейшее изучение свойств квази-инвариантности построенных диффузионных мер также представляет интерес с точки зрения теории представлений бесконечномерных групп, так как может привести к получению нового класса нетривиальных представлений группы токов.

Список обозначений

Все векторные пространства рассматриваются над полем вещественных чисел.

$\mathbb{R}$	Множество вещественных чисел.
$\mathbb{R}_+$	Полупрямая $[0, \infty)$.
$C(X, Y)$	Множество непрерывных отображений из X в Y.
$L(X, Y)$	Множество ограниченных линейных операторов между пространствами X и Y.
$L(X)$	$L(X, X)$.
$\operatorname{Tr} A$	След оператора A.
$\lesssim$	Не превосходит, с точностью до умножения на константу.
$\stackrel{d}{=}$	Равенство по распределению.
$\sigma(\xi_i, i \in I)$	σ-алгебра, порожденная случайными величинами ξ_i, где i пробегает множество индексов I.
I_A	Индикатор множества A.
$[x, y]_t$	Ковариация семимартингалов x_t и y_t.
$a \wedge b$	Минимум из a и b.
$\mathbb{E}\xi$	Математическое ожидание случайной величины ξ.
$const$	Некоторая константа.

Список литературы

1. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Труды Московского математического общества. — 1971. — Т. 24. — С. 133—174.
2. *Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л.* Уравнения Ито и дифференциальная геометрия // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37:3, № 225. — С. 95—142.
3. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. — М.: Наука, 1997.
4. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва – Ижевск, 2008.
5. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.
6. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.
7. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теоретическая и математическая физика. — 1984. — Т. 60, № 2. — С. 169—198.
8. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983.
9. *Калиниченко А. А.* Преобразования супермер // Сборник тезисов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012». — МГУ, 2012.
10. *Калиниченко А. А.* Формулы Фейнмана для броуновского листа со значениями в группе Ли // Сборник международной конференции «Спектральтная теория и дифференциальные уравнения», посвященной 100-летию Б. М. Левитана. — МГУ, 2014. — С. 76—77.
11. *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Успехи математических наук. — 1968. — Т. 23:1, № 139. — С. 221—222.
12. *Хренников А. Ю.* Суперанализ. — Физматлит М., 2005.
13. *Applebaum D.* Infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Lévy processes // Probability Surveys. — 2015. — Vol. 12, no. 2015. — Pp. 33–54.
14. *Applebaum D.* Lévy processes and stochastic integrals in Banach spaces // Probability and Mathematical Statistics-Wroclaw University. — 2007. — Vol. 27. — Pp. 75–88.

15. *Applebaum D.* Probability on compact Lie groups. Vol. 70. — Springer, 2014.

16. *Applebaum D.*, *Riedle M.* Cylindrical Lévy processes in Banach spaces // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2010. — Vol. 101, no. 3. — Pp. 697–726.

17. *Bell D. R.* The Malliavin Calculus. — Dover, 2012.

18. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. — John Wiley & Sons, 2013.

19. *Bredon G. E.* Topology and geometry. — Springer, 1993.

20. *Brzeźniak Z.*, *Carroll A.* Approximations of the Wong–Zakai type for stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces with applications to loop spaces // Séminaire de Probabilités XXXVII. — Springer, 2003. — Pp. 251–289.

21. *Chernoff P. R.* Note on product formulas for operator semigroups // Journal of Functional Analysis. — 1968. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 238–242.

22. *Cipriano F.*, *Cruzeiro A.-B.* Flows associated to tangent processes on the Wiener space // Journal of Functional Analysis. — 1999. — Vol. 166, no. 2. — Pp. 310–331.

23. *Cruzeiro A.-B.*, *Malliavin P.* A class of anticipative tangent processes on the Wiener space // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. — 2001. — Vol. 333, no. 4. — Pp. 353–358.

24. *Cruzeiro A.-B.*, *Malliavin P.* Frame bundle of Riemannian path space and Ricci tensor in adapted differential geometry // Journal of Functional Analysis. — 2000. — Vol. 177, no. 1. — Pp. 219–253.

25. *Cruzeiro A.-B.*, *Malliavin P.* Renormalized differential geometry on path space: structural equation, curvature // Journal of Functional Analysis. — 1996. — Vol. 139, no. 1. — Pp. 119–181.

26. *Da Prato G.*, *Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge university press, 2014.

27. *Davies E. B.* Heat kernels and spectral theory. Vol. 92. — Cambridge University Press, 1990.

28. *Driver B. K.* A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold // Journal of Functional Analysis. — 1992. — Vol. 110, no. 2. — Pp. 272–376.

29. *Driver B. K.* Analysis of Wiener measure on path and loop groups // Contemporary Mathematics. — 2003. — Vol. 317. — Pp. 57–86.

30. *Driver B. K.* Integration by parts and quasi-invariance for heat kernel measures on loop groups // Journal of Functional Analysis. — 1997. — Vol. 149, no. 2. — Pp. 470–547.

31. *Driver B. K.* The Lie bracket of adapted vector fields on Wiener spaces // Applied Mathematics and Optimization. — 1999. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 179–210.

32. *Driver B. K.*, *Lohrenz T.* Logarithmic Sobolev inequalities for pinned loop groups // Journal of Functional Analysis. — 1996. — Vol. 140, no. 2. — Pp. 381–448.

33. *Driver B. K.*, *Röckner M.* Construction of diffusions on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds // Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. — 1992. — Vol. 315, no. 5. — Pp. 603–608.

34. *Enchev O.*, *Stroock D. W.* Towards a Riemannian geometry on the path space over a Riemannian manifold // Journal of Functional Analysis. — 1995. — Vol. 134, no. 2. — Pp. 392–416.

35. *Epperson J. B.*, *Lohrenz T.* Diffusions on finite-energy loop spaces // Soochow J. Math. — 1994. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 113–136.

36. *Ethier S. N.*, *Kurtz T. G.* Markov processes: characterization and convergence. Vol. 282. — John Wiley & Sons, 2009.

37. *Fang S.*, *Franchi J.* De Rham–Hodge–Kodaira operator on loop groups // Journal of Functional Analysis. — 1997. — Vol. 148, no. 2. — Pp. 391–407.

38. *Gong F.*, *Zhang J.* Flows associated to adapted vector fields on the Wiener space // Journal of Functional Analysis. — 2007. — Vol. 253, no. 2. — Pp. 647–674.

39. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space // Journal of Functional Analysis. — 1967. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 123–181.

40. *Gross L.* Uniqueness of ground states for Schrödinger operators over loop groups // Journal of functional analysis. — 1993. — Vol. 112, no. 2. — Pp. 373–441.

41. *Heyer H.* Structural aspects in the theory of probability. — World Scientific, 2009.

42. *Hsu E. P.* Flows and quasi-invariance of the Wiener measure on path spaces // Proc. of Symposia in Pure Math. Vol. 57. — 1995. — Pp. 265–279.

43. *Hsu E. P.* Quasi-invariance of the Wiener measure on the path space over a compact Riemannian manifold // Journal of Functional Analysis. — 1995. — Vol. 134, no. 2. — Pp. 417–450.

44. *Hsu E. P.* Stochastic analysis on manifolds. Vol. 38. — American Mathematical Soc., 2002.

45. *Hsu E. P.*, *Ouyang C.* Quasi-invariance of the Wiener measure on the path space over a complete Riemannian manifold // Journal of Functional Analysis. — 2009. — Vol. 257, no. 5. — Pp. 1379–1395.

46. *Hu Y.*, *Üstünel A. S.*, *Zakai M.* Tangent processes on Wiener space // Journal of Functional Analysis. — 2002. — Vol. 192, no. 1. — Pp. 234–270.

47. *Hunt G. A.* Semi-groups of measures on Lie groups // Transactions of the American Mathematical Society. — 1956. — Vol. 81, no. 2. — Pp. 264–293.

48. *Inahama Y.* Convergence of finite dimensional distributions of heat kernel measures on loop groups // Journal of Functional Analysis. — 2003. — Vol. 198, no. 2. — Pp. 311–340.

49. *Inahama Y.*, *Kawabi H.* Large deviations for heat kernel measures on loop spaces via rough paths // Journal of the London Mathematical Society. — 2006. — Vol. 73, no. 3. — Pp. 797–816.

50. *Kalinichenko A. A.* Construction of Levi processes on path spaces of Lie groups // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 2016. — Vol. 19, no. 1. — 1650002. 22 pp.

51. *Kalinichenko A. A.* Feynman approximation to integrals with respect to Brownian sheet on Lie groups // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 2015. — Vol. 18, no. 1. — 1550008. 15 pp.

52. *Kalinichenko A. A.* Transformation of supermeasures and their logarithmic derivatives under the action of a flow of diffeomorphisms of the superspace // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 19, no. 4. — Pp. 469–483.

53. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. — Springer, 2006.

54. *Kelley J. L.* General topology. — Springer, 1975.

55. *Konecny F.* On Wong-Zakai approximation of stochastic differential equations // Journal of Multivariate Analysis. — 1983. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 605–611.

56. *Kuo H.-H.* Stochastic integrals in abstract Wiener space // Pacific Journal of Mathematics. — 1972. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 469–483.

57. *Léandre R.* Brownian surfaces with boundary and Deligne cohomology // Reports on Mathematical Physics. — 2003. — Vol. 52, no. 3. — Pp. 353–362.

58. *Léandre R.* The geometry of Brownian surfaces // Probability Surveys. — 2006. — Vol. 3. — Pp. 37–88.

59. *Li X.-M.* The stochastic differential equation approach to analysis on path space // New Trends in Stochastic Analysis and Related Topics: A Volume in Honour of Professor K. D. Elworthy. — 2011. — Vol. 12.

60. *Liao M.* Lévy processes in Lie groups. Vol. 162. — Cambridge University Press, 2004.

61. Linear operators. Part I: General Theory / N. Dunford [et al.]. — Wiley-interscience New York, 1971.

62. *Ma T.-W.* Banach-Hilbert spaces, vector measures and group representations. — World Scientific, 2002.

63. *Malliavin M.-P.*, *Malliavin P.* Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures // Journal of Functional Analysis. — 1990. — Vol. 93, no. 1. — Pp. 207–237.

64. *Malliavin P.* Stochastic analysis. Vol. 313. — Springer, 1997.

65. *Malliavin P.* Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators // Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto. — Kinokuniya. 1978. — Pp. 195–263.

66. *Mamporia B. I.* Wiener Processes and Stochastic integrals on a Banach space // Probab. Math. Statist. — 1986. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 59–75.

67. *Neerven J. v.*, *Veraar M.*, *Weis L.* Stochastic integration in Banach spaces–a survey // Stochastic Analysis: A Series of Lectures. — Springer, 2015. — Pp. 297–332.

68. *Neerven J. v.*, *Weis L.* Stochastic integration of functions with values in a Banach space // Studia Math. — 2005. — Vol. 166, no. 2. — Pp. 131–170.

69. *Norris J. R.* Twisted sheets // Journal of Functional Analysis. — 1995. — Vol. 132, no. 2. — Pp. 273–334.

70. *Nualart D.* The Malliavin calculus and related topics. Vol. 1995. — Springer, 2006.

71. *Ondreját M.* Integral representations of cylindrical local martingales in every separable Banach space // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 2007. — Vol. 10, no. 03. — Pp. 365–379.

72. *Pickrell D.* Heat kernel measures and critical limits // Developments and Trends in Infinite-Dimensional Lie Theory. — Springer, 2011. — Pp. 393–415.

73. *Prévôt C.*, *Röckner M.* A concise course on stochastic partial differential equations. Vol. 1905. — Springer, 2007.

74. *Ramer R.* On nonlinear transformations of Gaussian measures // Journal of Functional Analysis. — 1974. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 166–187.

75. *Riedle M.* Stochastic integration with respect to cylindrical Lévy processes in Hilbert spaces: an L2 approach // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 2014. — Vol. 17, no. 01. — 1450008. 19 pp.

76. *Röckner M.* Dirichlet Forms on Infinite-Dimensional 'Manifold-Like'State Spaces: A Survey of Recent Results and Some Prospects for the Future // Probability Towards 2000. — Springer, 1998. — Pp. 287–306.

77. *Sadasue G.* A non quasi-invariance of the Brownian motion on loop groups // Osaka Journal of Mathematics. — 2004. — Vol. 41, no. 4. — Pp. 949–960.

78. *Sadasue G.* Equivalence-singularity dichotomy for the Wiener measures on path groups and loop groups // Journal of Mathematics of Kyoto University. — 1995. — Vol. 35, no. 4. — Pp. 653–662.

79. *Shigekawa I.* Transformations of the Brownian motion on the Lie group // North-Holland Mathematical Library. — 1984. — Vol. 32. — Pp. 409–422.

80. *Smolyanov O. G.*, *Tokarev A. G.*, *Truman A.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // Journal of mathematical physics. — 2002. — Vol. 43, no. 10. — Pp. 5161–5171.

81. *Smolyanov O. G.*, *Weizsäcker H. v.* Change of measures and their logarithmic derivatives under smooth transformations // Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. — 1995. — Vol. 321, no. 1. — Pp. 103–108.

82. *Smolyanov O. G.*, *Weizsäcker H. v.* Differentiable Families of Measures // Journal of Functional Analysis. — 1998. — Vol. 118, no. 2. — Pp. 454–476.

83. *Smolyanov O. G.*, *Weizsäcker H. v.*, *Wittich O.* Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions // Stochastic processes, physics and geometry: new interplays, II. — 2000. — Vol. 29. — Pp. 589–602.

84. *Smolyanov O. G.*, *Weizsäcker H. v.*, *Wittich O.* Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds // Potential Analysis. — 2007. — Vol. 26, no. 1. — Pp. 1–29.

85. *Üstünel A. S.* An introduction to analysis on Wiener space. — Springer, 1995.

86. *Üstünel A. S.*, *Zakai M.* Transformation of measure on Wiener space. — Springer, 2000.

87. *Widom H.* Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants. II // Advances in Mathematics. — 1976. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 1–29.