

ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи



Кантонистова Елена Олеговна

**Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых
систем на многообразиях вращения в потенциальном поле.**

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Фоменко Анатолий Тимофеевич,
доктор физико-математических наук,
академик РАН,
профессор

Официальные оппоненты:

Карасев Михаил Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" (МИЭМ НИУ ВШЭ); заведующий лабораторией: центр фундаментальных исследований / лаборатория "Математические методы естествознания"; академический руководитель образовательной программы: математические методы моделирования и компьютерные технологии

Москвин Андрей Юрьевич,
кандидат физико-математических наук,
директор департамента маркетинговых исследований ЗАО
"Группа компаний С 7"

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО Челябинский государственный университет

Защита диссертации состоится 3 июня 2016 г. в 16⁴⁵ на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8^й этаж), <http://mech.math.msu.su/> snark/index.cgi, <http://istina.msu.ru/dissertations/19309651>.

Автореферат разослан 3 апреля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор

Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения в потенциальном поле, а именно, исследованию топологии этих систем, которое включает в себя изучение образа отображения момента, бифуркационных диаграмм, бифуркационных комплексов и других инвариантов слоения Лиувилля, характеризующих топологию интегрируемых гамильтоновых систем.

В диссертации изучается широкий класс механических систем, описывающих движение материальной точки по двумерной сфере с метрикой вращения, задаваемой функцией $f(r)$ (в случае, когда поверхность вращения вкладывается в \mathbb{R}^3 , эта функция задает образующую поверхности вращения), в произвольном гладком потенциальном поле $V(r)$. Известно, что такие системы полны (т.е. соответствующие потоки полны) и являются интегрируемыми по Лиувиллю, поэтому для их исследования применима теория топологической классификации, созданная А.Т. Фоменко и его школой. На основе этой теории мы даем топологическую (лиувилеву) классификацию указанных систем. Суть теории Фоменко заключается в том, что интегрируемой системе с двумя степенями свободы на симплектическом многообразии M^4 , ограниченной на трехмерное неособое компактное изоэнергетическое многообразие, эффективным образом сопоставляется некоторый дискретный инвариант, имеющий структуру графа с числовыми метками. Этот инвариант, называемый меченой молекулой, или инвариантом Фоменко–Цишанга, даёт полное описание (с точностью до послойной эквивалентности) слоения Лиувилля данной системы на изоэнергетических поверхностях, определяемого замыканиями траекторий общего положения.

С целью вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга для рассматриваемого класса систем, мы исследуем типы особенностей отображения момента и строим бифуркационные комплексы систем, введенные А.Т.Фоменко.

В нашей работе главным образом рассматриваются ограничения интегрируемых систем с двумя степенями свободы на трехмерные неособые ($dH \neq 0$ в каждой точке) связные компактные изоэнергетические поверхности $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$, на которых дополнительный интеграл K является функцией Ботта, т.е. множество его критических точек представляет собой несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий. Эти подмногообразия могут быть либо окружностью, либо двумерным тором, либо бутылкой Клейна. В реальных механических системах критические множества последних двух типов встречаются крайне редко. В исследуемых в нашей работе механических системах критические множества всегда являются окружностями.

Рассмотрим регулярный уровень энергии $H = h$, которому в образе отображения момента соответствует отрезок прямой $h = \text{const}$. На этом уровне каждому регулярному значению из образа отображения момента (т.е. каждой регулярной точке этого отрезка) отвечает тор или несвязное объединение торов Лиувилля, а точкам пересечения прямой $h = \text{const}$ с дугами бифуркационной диаграммы отвечает некоторое критическое множество в фазовом пространстве. Таким образом, при перемещении точки по данной прямой в момент пересечения прямой с бифуркационной диаграммой происходит перестройка торов Лиувилля, или *бифуркация*.

Определение 1. Две интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны, если существует послойный диффеоморфизм их фазовых многообразий.

Наряду с лиувиллевой эквивалентностью на всём симплектическом многообразии, мы будем говорить о лиувиллевой эквивалентности на отдельных изоэнергетических поверхностях.

Определение 2. Класс лиувиллевой эквивалентности замкнутой инвариантной (т.е. целиком состоящей из слоев) окрестности особого слоя слоения Лиувилля в изоэнергетической поверхности называется 3-атомом.

Таким образом, 3-атомы кодируют бифуркации торов Лиувилля. Оказывается, что если фиксировать число критических окружностей на данном особом слое, то в боттовском случае имеется лишь конечное число таких бифуркаций. Напомним также, что в случае, если дополнительный первый интеграл — функция Ботта, то 3-атом является расслоением Зейферта (см. определение ниже) с особыми слоями типа $(2, 1)$ над 2-атомом.

Напомним, что *расслоенным полноторием* называется полноторие, расслоенное на окружности следующим образом: возьмем тривиально расслоенный на отрезки цилиндр $D^2 \times [0, 1]$ и склеим его основания $D^2 \times \{0\}$ и $D^2 \times \{1\}$ по диффеоморфизму, являющемуся поворотом на угол $2\pi\alpha$ где α — рационально.

Определение 3. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие называется многообразием Зейферта, если на нем можно задать структуру расслоения Зейферта, т.е. разбить на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои) так, что каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию.

3-атомы и соответствующие им 2-атомы обозначаются заглавными латинскими буквами. В нашей работе встречаются атомы трех типов: A , B и V_k . Указанные атомы изображены на рисунке 1.

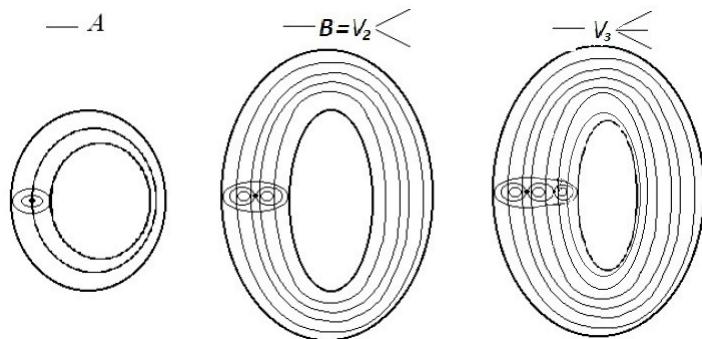


Рис. 1: атомы A , B и V_k

Каждой неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 соответствует некоторый граф, являющийся базой слоения Лиувилля на Q_h^3 . Внутренние точки ребер этого графа отвечают регулярным слоям слоения Лиувилля, а вершины соответствуют особым слоям. Согласно определению 2, каждой вершине графа можно сопоставить некоторый атом. Полученный ориентируемый граф с вершинами-атомами называется *молекулой*.

Молекула содержит много информации о структуре слоения Лиувилля, однако эта информация не полна, в том смысле, что молекула не определяет диффеоморфный тип многообразия Q_h^3 , а тем более, слоения Лиувилля на нем (с точностью до послойного диффеоморфизма). Например, молекула вида $A - A$ сообщает нам, что многообразие Q_h^3 склеено из двух полноторий, естественным образом расслоенных на концентрические торы. Однако, каким образом произведена склейка, какое в результате получается многообразие и какое слоение Лиувилля на нем — молекула не сообщает. Поэтому к молекуле необходимо добавить информацию о склейке отдельных атомов.

Разрежем каждое ребро молекулы посередине. Молекула распадется на отдельные 3-атомы. Это означает, что мы разрезали многообразие по некоторым торам Лиувилля на

отдельные атомы. Пусть мы хотим произвести обратную склейку. Молекула говорит нам, какие пары граничных торов мы должны склеивать между собой. Чтобы понять, как именно их нужно склеивать, мы должны задать для каждого разрезанного ребра матрицу склейки, определяющую изоморфизм фундаментальных групп склеивающихся торов. Эта матрица зависит от выбора допустимых систем координат на торах, однако, существуют инварианты, определяемые матрицей склейки, не зависящие от выбора допустимых координат — числовые метки r , ε и n .

Определение 4. Молекула, снабженная метками r , ε и n , называется меченой молекулой, или инвариантом Фоменко–Цишанга.

Теорема 1. (A.T.Фоменко, X.Цишанг). *Две невырожденные интегрируемые системы v на Q^3 и v' на Q'^3 ливувилево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные молекулы совпадают.*

В нашей работе мы исследуем топологию систем, которые описываются движением точки по многообразию вращения в поле действия потенциала. Повторим, что такие системы являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Эта задача возникла как обобщение известной задачи об изучении топологии интегрируемых геодезических потоков на поверхностях вращения (т.е. систем с нулевым потенциальным полем). Топология интегрируемых геодезических потоков хорошо изучена: важные результаты получены в работах А.Т.Фоменко, А.Бессе, М.Энгмана, А.В.Болсинова, Б.Йовановича, Т.З.Нгуена, Л.С.Поляковой, Н.В.Коровиной, Е.А.Кудрявцевой, Д.А.Федосеева, Е.О.Кантонистовой и М.В.Новикова.

Сформулируем основную теорему классификации геодезических потоков на сфере, полученную Т.З.Нгуеном и Л.С.Поляковой. В дальнейшем сравним полученные нами результаты (для систем с потенциалом) с их результатом.

Теорема 2. (T.З.Нгуен, Л.С.Полякова). *Рассмотрим на сфере геодезический поток римановой метрики вида*

$$ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2,$$

где θ, φ — стандартные сферические координаты.

1) Тогда отвечающая этому геодезическому потоку молекула имеет вид, показанный на рисунке (молекула на рисунке состоит из двух одинаковых частей $W(f)$, и $\widetilde{W}(f) = W(f) \setminus \cup A$). В вершинах графа стоят атомы A , B и V_k . На ребрах между седловыми атомами внутри каждой $W(f)$ метки r равны ∞ , на ребрах между седловыми атомами и атомами A r -метки равны нулю, все ε -метки равны $+1$.

2) Если молекула отлична от $A - A$, то на единственном центральном ребре (оно соединяет два седловых атома) метка r равна ∞ , а ε -метка равна -1 . Метка n на единственной семье, состоящей из всех седловых атомов, равна 2.

3) Если молекула имеет вид $A - A$, то метки следующие: $r = 1/2$, $\varepsilon = +1$.

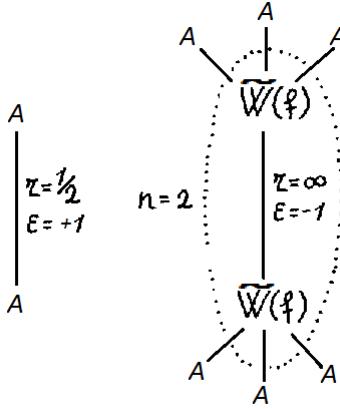


Рис. 2: меченные молекулы для геодезического потока на сфере.

В дипломной работе М.В.Новикова впервые поставлена задача исследования топологии интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле. М.В.Новиков исследует бифуркационные диаграммы таких систем. В работе сделаны значительные продвижения в поставленной задаче, а именно, исследованы типы особых точек ранга ноль отображения момента, найдены параметрические уравнения дуг бифуркационной диаграммы, в неявном виде найдены условия существования точек возврата и исследовано поведение бифуркационных дуг в окрестности этих точек. Также исследован тип точек, составляющих бифуркационные дуги (эллиптическая, гиперболическая, вырожденная).

В настоящей работе продолжено исследование бифуркационных диаграмм систем на поверхностях вращения, а также изучена топология данных систем.

Цели и задачи диссертации

Основной целью настоящей диссертации является лиувилева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения в потенциальном поле. Для этого решаются следующие задачи.

- 1) Поиск условий на метрику и потенциал, при которых число кривых бифуркационной диаграммы конечно.
- 2) Нахождение явных условий существования точек возврата бифуркационных кривых, а также условий, гарантирующих конечность (или бесконечность) числа точек возврата.
- 3) Классификация типов всех бифуркационных дуг (эллиптическая, гиперболическая).
- 4) Поиск критериев вырожденности или невырожденности точек бифуркационной диаграммы.
- 5) Классификация всевозможных типов взаимного расположения бифуркационных дуг, включая их пересечение и самопересечение.
- 6) Алгоритм построения бифуркационного комплекса.
- 7) Классификация слоений Лиувилля, возникающих в системах на многообразиях вращения, с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.
- 8) Вывод явных формул для переменных действия, построение по ним решеток переменных действия.
- 9) Алгоритм вычисления по решеткам переменных действия инвариантов Фоменко-Цишанга и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0.

10) Как приложение метода вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга и матриц монодромии по решеткам переменных действия, исследование с помощью предъявленного алгоритма обобщенного случая Лагранжа.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут использоваться для исследования топологии интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, при анализе различных обобщений изученного в работе класса систем.

В работе найден новый класс лиувиллевой эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем, который пополняет список ранее известных классов эквивалентности. Это дает возможность поиска интегрируемых гамильтоновых систем, лиувиллево эквивалентных изученным в данной диссертации.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получена полная лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения, гомеоморфных двумерной сфере, в поле действия потенциала. Также изучен и применен к конкретным системам (к системам на многообразиях вращения, а также к обобщенному случаю Лагранжа) эффективный метод вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0 — решетки переменных действия.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, лагранжевой и гамильтоновой механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математического анализа, а также инструменты компьютерного моделирования.

Положения, выносимые на защиту

1. В работе получена полная классификация систем на многообразиях вращения с потенциалом на изоэнергетических 3-многообразиях с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, классифицированы все соответствующие слоения Лиувилля. Эта классификация получена на основе вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга (меченых молекул) исследуемых систем (подробнее см. теорему 6 из параграфа 1.8).

2. Получена классификация всех соответствующих изоэнергетических 3-многообразий вместе со слоениями Лиувилля на них (более подробно см. теорему 6 и лемму 22 из параграфа 1.8).

3. Доказано, что интегрируемые системы на двумерных поверхностях вращения с гладким потенциалом, ограниченные на связные компоненты трехмерных изоэнергетических поверхностей, в некоторых случаях топологически (лиувиллево) эквивалентны

различным классическим интегрируемым динамическим системам (подробнее см. параграф 1.9).

Комментарий 3.1. Если молекула исследуемой системы имеет тип $A - A$, то система топологически эквивалентна интегрируемым системам Жуковского, Ковалевской, случаю динамики шероховатого эллипсоида на плоскости и некоторым другим системам (для подходящих зон энергии этих систем).

Комментарий 3.2. В том случае, когда молекула имеет вид дерева (см. теорему 6), доказано, что система на многообразии вращения с потенциалом, т.е. интегрируемая система вида $(f(r), V(r))$, “моделируется” некоторым набором геодезических потоков, а именно, в каждой энергетической зоне, границами которой являются особые значения энергии (критические значения энергии h_i , а также значения энергии h_j точек возврата и значения энергии h_k точек пересечения и самопересечения бифуркационных дуг на бифуркационном комплексе), система моделируется геодезическим потоком некоторой метрики вращения (при нулевом потенциале). Более точно, для каждой такой зоны по паре $(f(r), V(r))$ алгоритмически строится новая метрика вращения, задаваемая некоторой функцией $F(r)$, геодезический поток которой при $h > V_{max}$ лиувиллево эквивалентен, а при маленьких энергиях h — грубо эквивалентен исходной системе в выбранной зоне. В этом смысле любая интегрируемая система на поверхности вращения $(f(r), V(r))$ является “композицией” более простых интегрируемых систем, являющихся геодезическими потоками (без потенциала) на поверхностях вращения. При больших энергиях ($h > V_{max}$) утверждение верно благодаря принципу Монпертию. Однако, так как потоки с потенциалом при малых энергиях ведут себя более сложно, чем геодезические потоки, класс систем с потенциалом не вкладывается полностью в класс систем без потенциала (более подробно см. параграф 1.9).

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на следующих научно-исследовательских семинарах:

- 1) на семинаре “Современные геометрические методы” под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, доц. И.М. Никонова, асс. А.Ю. Коняева, асс. А.М. Изосимова; 2010 – 2015 гг., неоднократно;
- 2) на кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений;
- 3) на семинаре “Гамильтоновы системы и статистическая механика” под рук. акад. В.В. Козлова, проф. С.В. Болотина и чл.-корр. Д.В. Трещева.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих всероссийских и международных конференциях:

- 1) Конференция ”Ломоносов”, 2010 (диплом за лучший доклад), Москва
- 2) Международная конференция им.Петровского, 2010, Москва
- 3) Конференция ”Ломоносовские чтения”, 2011, Москва
- 4) Международная зимняя школа-конференция им.Крейна, 2011, Воронеж

- 5) Конференция "Ломоносов", 2012, Москва
- 6) Конференция "Александровские чтения", МГУ, 2013.
- 7) Workshop "Probability, Analysis and Geometry", Ulm, Germany, 2013
- 8) Международная зимняя школа-конференция им.Крейна, 2014, Воронеж
- 9) Конференция "Ломоносов", 2015, Москва
- 10) Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics, Bedlewo, Poland, 2015
- 11) Международная зимняя школа-конференция им.Крейна, 2016, Воронеж

Публикации

Основные результаты диссертации представлены в 5 работах [1–5], 5 из которых из списка ВАК, список работ приведен в конце авторефера.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из оглавления, двух глав (первая из которых включает в себя введение), разбитых на параграфы, заключения и списка литературы из 45 наименований. Нумерация теорем, лемм и т.п. сквозная. Работа изложена на 135 страницах и снабжена 39 рисунками.

Основное содержание работы

В параграфе 1 главы 1 (введение) описывается актуальность темы и история рассматриваемых вопросов, обосновывается научная новизна полученных результатов, сформулированы основные результаты диссертации. Кроме того, приводятся необходимые определения и утверждения, используемые в диссертации, а также известные результаты о топологии интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения.

В параграфах 2, 3 и 4 главы 1 исследованы особые точки и особые значения образа отображения момента, описаны всевозможные типы дуг, составляющих бифуркационную диаграмму и доказана теорема классификации бифуркационных диаграмм для систем на многообразиях вращения (глава 1.3, теорема 4).

Теорема 4. (классификация бифуркационных диаграмм систем на многообразиях вращения).

Рассмотрим натуральную механическую систему на многообразии вращения M , заданную парой функций $(f(r), V(r))$, $r \in [0, L]$. Предположим, что выполнены следующие условия:

a) функция $f(r)$ — функция Морса на интервале $(0, L)$, функция $V(r)$ — функция Морса на отрезке $[0, L]$ (отсюда, в частности, следует, что многообразие M имеет лишь конечное число экваторов (т.е. точек r , таких что $f'(r) = 0$), т.е. функция $f'(r)$ имеет лишь конечное число нулей на $(0, L)$)

b) $V'(r)^2 + f'(r)^2 > 0$ на $(0, L)$

Пусть r_j^i — все такие точки, в которых либо $f'(r_j^i) = 0$, либо $V'(r_j^i) = 0$ ($j = 1, 2$), где $r_1^0 = 0 < r_2^0 = r_1 < r_1^1 < r_2^1 < r_2^2 < \dots < r_1^i < r_2^i < \dots < r_1^N = r_2 < r_2^N = L$.

Рассмотрим параметризованную бифуркационную кривую, дуги которой определены на промежутках

$$\bigsqcup_{i=0}^N (r_1^i, r_2^i), N \in \mathbb{N}.$$

Тогда выполнено следующее:

1) параметризованная бифуркационная дуга регулярна в окрестности любого конца любого интервала (r_1^i, r_2^i)

2) если функция $k(r) = \pm \sqrt{\frac{f^3(r)V'(r)}{f'(r)}}$ на I_i является морсовской, то параметризованная бифуркационная дуга не имеет точек накопления нерегулярных точек (т.е. функция $k(r)$ имеет лишь конечное число критических точек), и каждая ее нерегулярная точка является невырожденной точкой возврата (отсутствие точек накопления означает, что в каждой ограниченной области плоскости (h, k) бифуркационные дуги имеют конечное число точек возврата);

3) если $k(r)$ — функция Морса на (r_1^i, r_2^i) , то точки возврата делят бифуркационную дугу на "регулярные участки" двух типов (типа A — "эллиптическая" и типа B — "гиперболическая"), каждый из которых является образом 1-параметрического семейства эллиптических или гиперболических (соответственно) окружностей ранга 1 при отображении момента, причем типы регулярных участков (поддуг) чередуются вдоль дуги, так что в малой окрестности любой точки возврата левая поддуга, примыкающая к этой точке, имеет тип A, а правая — тип B; тип дуги постоянен вдоль всей поддуги.

4) Бифуркационная диаграмма состоит из дуг трех типов: "парабола", "ключ" или "лунка":

a) если $f'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$, то дуга, параметризованная интервалом I_i , имеет тип "ключ";

b) если $f'(r_1^i) = V'(r_2^i) = 0$ (или $V'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$), то дуга, параметризованная интервалом I_i , имеет тип “парабола”;

c) если $V'(r_1^i) = V'(r_2^i) = 0$, то дуга, параметризованная интервалом I_i , имеет тип “лунка”;

В точках r , где $V'(r) = 0$ бифуркационные дуги являются гладкими.

5) Параметр r на бифуркационной дуге ведет себя следующим образом:

a) на дуге типа “клюв” при увеличении r от r_1^i до первой точки возврата при $V'(r) > 0$ на (r_1^i, r_2^i) параметр “пробегает” дугу типа B , идущую из бесконечности, затем все оставшиеся дуги; при $V'(r) < 0$ движение по дуге происходит в противоположном направлении;

b) на дуге типа “парабола” при увеличении r от r_1^i до r_2^i , если $V'(r_1^i) = 0$, то параметр “пробегает” “параболу”, начиная от точки, лежащей на оси h , и уходя в бесконечность по бифуркационной дуге; если $V'(r_2^i) = 0$, то движение по дуге происходит в противоположном направлении;

c) на дуге типа “лунка” при увеличении r от r_1^i до первой точки возврата параметр “пробегает” часть “лунки”, начиная от точки $((V(r_1^i), 0))$, лежащей на оси h . Т.е. при $V'(r) > 0$ на (r_1^i, r_2^i) параметр пробегает “лунку”, двигаясь от точки $(V(r_1^i), 0)$ по дуге типа A , затем по дуге типа B до точки $(V(r_2^i), 0)$; если $V'(r) < 0$, то движение по дуге происходит в противоположную сторону.

Все возможные типы бифуркационных дуг изображены на рисунке 3.

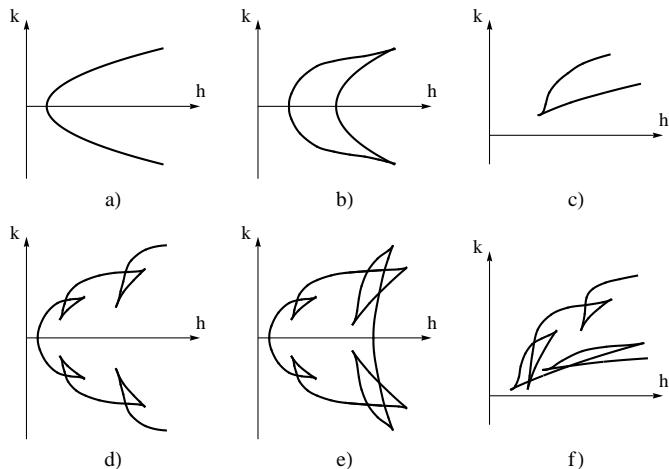


Рис. 3: типы бифуркационных дуг: “простая парабола”, “простой клюв”, “простая лунка”, “составная парабола”, “составной клюв”, “составная лунка”.

В параграфе 5 первой главы описан случай общего положения, а в параграфе 6 главы 1 приведен алгоритм построения бифуркационного комплекса.

В параграфах 7 и 8 главы 1 изучены инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения в потенциальном поле и доказаны две основные теоремы диссертации (теорема 5 из параграфа 1.7 и теорема 6 из параграфа 1.8).

Теорема 5 (классификация молекул). Рассмотрим систему на многообразии вращения, заданную парой функций $(f(r), V(r))$. Пусть $Q \subseteq Q_h^3$ — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой k — функция Ботта. Тогда молекула системы на Q симметрична (без учета ориентации на ребрах) относительно оси h ,

а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания k . Т.е. молекула имеет вид $W - W$, где каждая W — это либо один атом A , либо дерево. Все неконцевые вершины дерева — это седловые атомы V_l , а концевые вершины имеют тип A . При этом при $k > 0$ входящее ребро для каждого атома V_l одно, а исходящих l (при $k < 0$ картина антисимметрична, т.е. без учета ориентации на ребрах молекула $W - W$ симметрична относительно оси h , однако ориентация на кусках $W_+ = W(k > 0)$ и $W_- = W(k < 0)$ противоположна, см.рис.4).

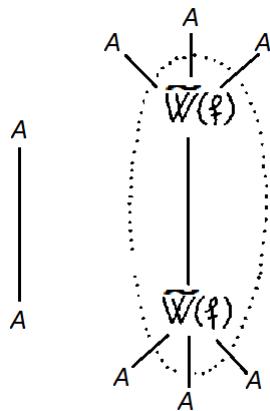


Рис. 4: общий вид грубых молекул для систем на многообразиях вращения (здесь \widetilde{W} — это W без концевых атомов A), пунктирным овалом выделена семья.

Теорема 6 (классификация меченых молекул). Пусть Q^3 — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Пусть $W - W$ — молекула системы на Q^3 .

- a) Метки на ребрах типа $A - V_l$ молекулы: $r = 0, \varepsilon = +1$.
- b) Метки на ребрах типа $V_s - V_l$, где оба седловых атома находятся в одной полу平面 ($k > 0$ или $k < 0$): $r = \infty, \varepsilon = +1$.
- c) Метки на центральном ребре типа $V_l - V_l$ (симметричном относительно прямой $k = 0$): $r = \infty, \varepsilon = -1$.
- d) Если молекула $W - W$ имеет вид $A - A$, то метка r определяется следующим образом: разрежем многообразие M^4 по поверхности Q^3 на два куска M_-^4 и M_+^4 (напомним, что Q^3 — связная компонента Q_h^3). Кусок M_-^4 , который отвечает строго меньшим значениям энергии, чем h , может содержать 2, 1 или 0 особых точек ранга ноль. Тогда соответственно $r = \frac{1}{2}, r = 0$ или $r = \infty$. Во всех трёх случаях $\varepsilon = +1$.
- e) Если молекула $W - W$ отлична от $A - A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A . Метка p в этом случае равна числу особых точек ранга ноль на многообразии M_-^4 (см. пункт d)).

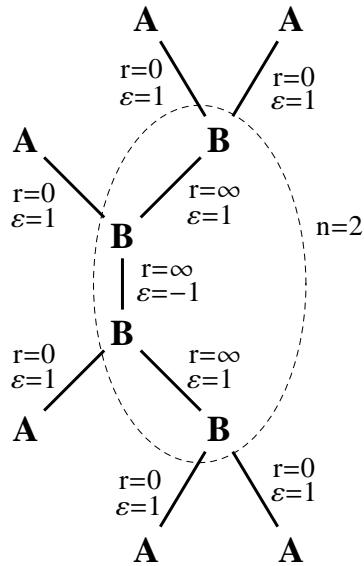


Рис. 5: меченая молекула для модельного примера системы на многообразии вращения.

В параграфе 9 первой главы изучается лиувиллева эквивалентность исследуемого класса систем уже известным ранее случаям интегрируемости. В случае, если молекула имеет вид $A - A$, то для почти каждой классической интегрируемой динамической системы (более точно, для каждой интегрируемой системы, обладающей при некоторых значениях энергии молекулой $A - A$) существуют значения энергии h , такие что система на многообразии вращения, ограниченная на изоэнергетическое 3-многообразие будет лиувиллово эквивалентна данной классической интегрируемой системе, ограниченной на Q_h^3 (для каждой классической интегрируемой системы уровень энергии h свой). Например, в случае молекулы $A - A$ исследуемым системам лиувиллово эквивалентны случай Жуковского, случай динамики шероховатого эллипсоида на плоскости, система Ковалевской, случай Лагранжа и др. В случае, если молекула имеет вид дерева, доказано следующее утверждение (утверждение 8 из параграфа 9).

Утверждение 8. Для любой системы на многообразии вращения, заданной парой функций $(f(r), V(r))$, для любого регулярного значения энергии $H = h_0$ (кроме значений энергии точек возврата и точек типа $V_l \neq B$ бифуркационных кривых) и для любой связной компоненты в $Q \subseteq Q_{h_0}^3$ существует геодезический поток метрики вращения, задаваемый функцией $F_0(r)$, такой, что система $(f(r), V(r))$ на Q и система $(F_0(r), 0)$ на любом положительном уровне энергии лиувиллово эквивалентны при $h_0 > \max V(r)$ и грубо лиувиллово эквивалентны при меньших энергиях h_0 (т.е. их молекулы без меток совпадают).

В главе 2 изучаются решетки переменных действия интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения. В параграфе 1 главы 2 приведена мотивация для изучения решеток переменных действия. В параграфе 2 главы 2 дано определение решетки переменных действия, а в третьем параграфе главы 2 обсуждается монодромия.

В параграфе 4 главы 2 вычислены переменные действия для систем на многообразиях вращения, а в параграфе 5 главы 2 приведен алгоритм вычисления матриц склейки по решеткам переменных действия.

В параграфе 6 второй главы по решеткам переменных действия вычислены метки на ребрах молекулы.

На рисунке изображена решетка переменных действия для примера интегрируемой гамильтоновой системы на многообразии вращения в потенциальном поле. По этой решетке, пользуясь алгоритмом из параграфа 5 главы 2, вычисляются метки в инварианте Фоменко-Цишанга, а также матрицы монодромии изолированных особых значений ранга ноль.

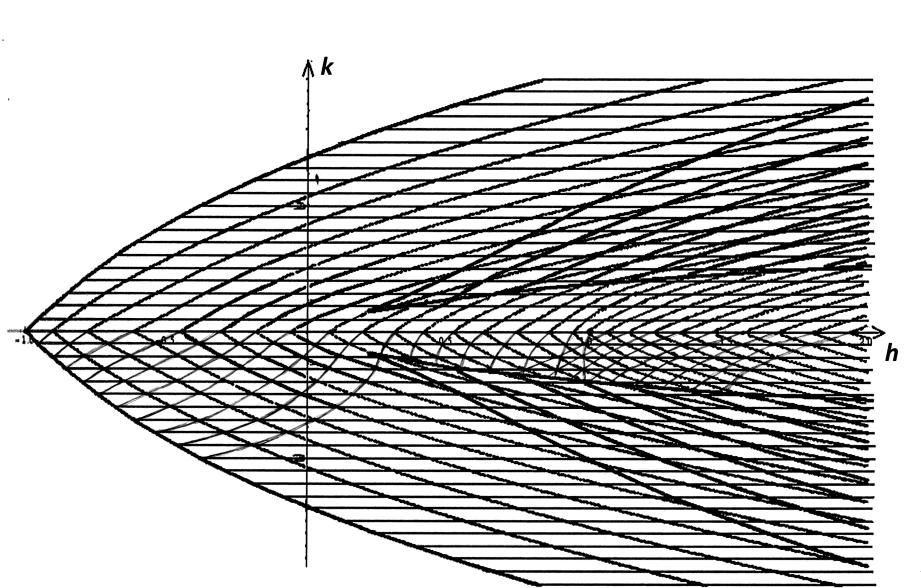


Рис. 6: решетка переменных действия (с продленными линиями уровня переменных действия) для модельного примера системы на многообразии вращения.

В параграфе 7 главы 2 решетки переменных действия построены для системы "обобщенный волчок Лагранжа" и по этим решеткам вычислены метки и матрицы монодромии изолированных особых значений ранга 0 для обобщенного случая Лагранжа.

Одна из решеток переменных действия для обобщенного случая Лагранжа показана на рисунке. Также на рисунке изображен базис решетки, который обносится вокруг изолированного особого значения ранга 0 для вычисления матрицы монодромии.

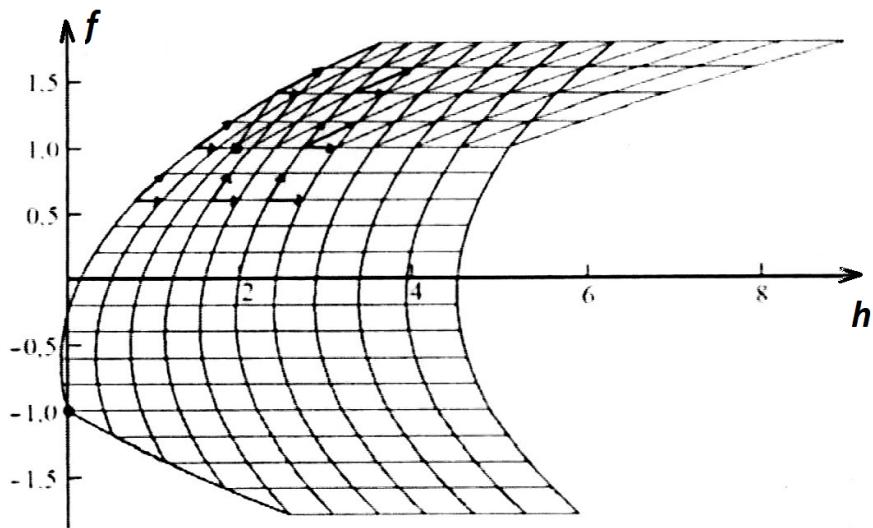


Рис. 7: решетка переменных действия для обобщенного случая Лагранжа.

В **заключении** подведены итоги диссертационной работы: перечислены главные результаты, полученные в диссертации, а также приведен список нерешенных задач, возникших в процессе работы, и возможные идеи решения некоторых из них.

Заключение

В диссертации полностью исследована топология слоения Лиувилля систем на многообразиях вращения $M \approx S^2$ в поле действия потенциала, а именно, доказана теорема классификации инвариантов Фоменко-Цишанга для исследуемого класса систем. Кроме того, изучен образ отображения момента и бифуркационные диаграммы, возникающие в данном классе систем, получена теорема классификации бифуркационных диаграмм.

Также в диссертации найдены случаи лиувиллевой эквивалентности исследуемым системам. Показано, что если молекула системы на многообразии вращения, ограниченной на неособое изоэнергетическое 3-многообразие, имеет вид $A - A$, то практически для каждой классической интегрируемой динамической системы (более точно, для каждой интегрируемой системы, обладающей при некоторых значениях энергии молекулой $A - A$) существуют значения энергии h , такие что система на многообразии вращения, ограниченная на изоэнергетическое 3-многообразие будет лиувиллево эквивалентна данной классической интегрируемой системе, ограниченной на Q_h^3 (для каждой классической интегрируемой системы уровень энергии h свой). В случае, если молекула имеет вид дерева, то система лиувиллево эквивалентна геодезическим потокам на сфере (при больших значениях энергии h) и грубо лиувиллево эквивалентна им при малых значениях энергии h .

Кроме того, в диссертации изучены решетки переменных действия интегрируемых гамильтоновых систем, а именно, дано формальное определение решетки и доказана его корректность. Для систем на многообразиях вращения вычислены переменные действия и по ним построены решетки переменных действия.

Также приведен алгоритм вычисления по решеткам переменных действия матриц склеек на ребрах молекулы и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0. Этот алгоритм применен к системам на многообразиях вращения и, как приложение, к обобщенному волчку Лагранжа — для вычисления меток в инварианте Фоменко-Цишанга,

а также матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0.

Благодарность

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Т.Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Е.А.Кудрявцевой за ценные научные идеи и многочисленные обсуждения и А.А.Ошемкову за очень важные комментарии, существенно улучшившие текст работы.

Публикации автора по теме работы

- [1] A.T.Fomenko, E.O.Kantonistova, *Topological Classification of Geodesic Flows on Revolution 2-Surfaces with Potential*, “Continuous and Disturbed Systems. Theory and Applications”, Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer, 2015, pp.11–17.
- [2] Е.О.Кантонистова, *Целочисленные решетки переменных действий для обобщенного случая Лагранжа*, Вестн.Моск.Ун–та, Сер.1, Матем.Мех., 2012, №1, стр.54–58.
- [3] Е.О.Кантонистова, *Целочисленные решетки переменных действия для системы "сферический маятник"*, Вестн.Моск.Ун–та, Сер.1, Матем.Мех., 2014, №4, стр.6–17.
- [4] Е.О.Кантонистова, *Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения*, Вестн.Моск.Ун–та, Сер.1, Матем.Мех., 2015, №5, стр.41–44.
- [5] Е.О.Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле*, Матем.сб., 2016, Том 207, №3, стр.47–92