

ФГБОУ ВО
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 514.7, 514.8

КАНТОНИСТОВА ЕЛЕНА ОЛЕГОВНА

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ
ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ ВРАЩЕНИЯ В
ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ**

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Академик РАН А.Т. Фоменко

Москва – 2015

Содержание

1	Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения в потенциальном поле.	4
1.1	Введение	4
1.2	Исследование особых точек и особых значений отображения момента для систем на многообразиях вращения	14
1.3	Исследование поведения бифуркационных кривых в окрестности точек возврата. Теорема классификации бифуркационных диаграмм изучаемых систем.	30
1.4	Анализ взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы	43
1.5	Случай общего положения	48
1.6	Алгоритм построения бифуркационного комплекса исследуемой системы	53
1.7	Построение грубой молекулы системы на неособой изоэнергетической поверхности	59
1.8	Вычисление меток для систем на многообразии вращения	63
1.9	Лиувиллева эквивалентность систем на многообразиях вращения с изученными ранее интегрируемыми гамильтоновыми системами . .	83
2	Решетки переменных действия интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения	89
2.1	Решетки переменных действия в квантовых системах и мотивация для их изучения	89
2.2	Решетки переменных действия. Определения	91
2.3	Монодромия	95
2.4	Вычисление переменных действия для систем на многообразиях вращения	98
2.5	Алгоритм вычисления матрицы склейки по решетке переменных действия	109

2.6	Вычисление меток и матрицы монодромии по решеткам переменных действия	114
2.7	Решетки переменных действия для обобщенного случая Лагранжа	118
3	Заключение	125

1 Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения в потенциальном поле.

1.1 Введение

В работе рассматривается широкий класс механических систем, описывающих движение материальной точки по двумерной сфере с метрикой вращения, задаваемой функцией $f(r)$ (в случае, когда поверхность вращения вкладывается в $\mathbb{R}^3$, эта функция задает образующую поверхности вращения), в произвольном гладком потенциальном поле $V(r)$. Известно, что такие системы полны (т.е. соответствующие потоки полны) и являются интегрируемыми по Лиувиллю, поэтому для их исследования применима теория топологической классификации, созданная А.Т. Фоменко и его школой, см.[1]. На основе этой теории мы даем топологическую (лиувиллеву) классификацию указанных систем. Суть теории Фоменко заключается в том, что интегрируемой системе с двумя степенями свободы, ограниченной на трехмерное неособое компактное изоэнергетическое многообразие, эффективным образом сопоставляется некоторый дискретный инвариант, имеющий структуру графа с числовыми метками. Этот инвариант, называемый меченой молекулой, или инвариантом Фоменко–Цишанга, даёт полное описание (с точностью до послонной эквивалентности) слоения Лиувилля данной системы на изоэнергетических поверхностях, определяемого замыканиями траекторий общего положения.

С целью вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга для рассматриваемого класса систем, мы исследуем типы особенностей отображения момента и строим бифуркационные комплексы систем, введенные А.Т.Фоменко. Подробнее см. работы А.Т.Фоменко [2] и [3], работу А.Т.Фоменко и А.В.Болсинова [1], а также работу работы А.Т.Фоменко и А.Ю.Коняева [33].

Напомним основные понятия, связанные с упомянутой теорией классифика-

ции интегрируемых систем. Подробное изложение основ теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, а также её приложения к исследованию механических систем см. в работе А.Т.Фоменко [31], а также в работах А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [1], в также в работах А.Т.Фоменко [8],[9], А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [10],[6], А.Т.Фоменко и П.В.Морозова [12], А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко и А.А.Ошемкова [13], Е.А.Кудрявцевой, И.М.Никонова, А.Т.Фоменко [14], Е.А.Кудрявцевой, А.Т.Фоменко [15], А.Т.Фоменко, А.Ю.Коняева [16].

Пусть (M^4, ω, H) — вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система, где M^4 — симплектическое многообразие с симплектической структурой ω , H — гамильтониан системы, определяющий гамильтоново векторное поле $\omega^{-1}dH = \text{sgrad } H$. Интегрируемость означает существование дополнительного первого интеграла K системы, почти всюду независимого с H , причем векторные поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ полны.

Определение 1 *Слоением Лиувилля интегрируемой гамильтоновой системы называется разбиение многообразия M^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов H и K .*

Согласно классической теореме Лиувилля (см. работу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]), слоение Лиувилля, отвечающее интегрируемой гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, в компактном случае состоит из двумерных торов (торов Лиувилля) и особых слоев. Торы Лиувилля заполняют почти все M^4 , а особые слои заполняют множество меры 0.

Напомним, что отображение $\Phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что если $x \in M^4$, то $\Phi(x) = (H(x), K(x))$, называется *отображением момента*.

Если $\text{rk } d\Phi(x) < 2$, то точка x называется *особой (критической) точкой отображения момента*, а точка $\xi = \Phi(x)$ — *особым значением*. Множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ особых значений называется *бифуркационной диаграммой*.

В нашей работе главным образом рассматриваются ограничения интегрируемых систем с двумя степенями свободы на трехмерные неособые ($dH \neq 0$ ни в

одной точке) связные компактные изоэнергетические поверхности $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$, на которых дополнительный интеграл K является функцией Ботта, т.е. множество его критических точек представляет собой несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий. Эти подмногообразия могут быть либо окружностью, либо двумерным тором, либо бутылкой Клейна. В реальных механических системах критические множества последних двух типов встречаются крайне редко. Для исследуемых в нашей работе механических систем критические множества всегда являются окружностями.

Рассмотрим регулярный уровень энергии $H = h$, которому в образе отображения момента соответствует отрезок прямой $h = \text{const}$. На этом уровне каждому регулярному значению из образа отображения момента (т.е. каждой регулярной точке этого отрезка) отвечает тор или несвязное объединение торов Лиувилля, а точкам пересечения прямой $h = \text{const}$ с дугами бифуркационной диаграммы отвечает некоторое критическое множество в фазовом пространстве. Таким образом, при перемещении точки по данной прямой в момент пересечения прямой с бифуркационной диаграммой происходит перестройка торов Лиувилля, или *бифуркация*.

Определение 2 *Две интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны, если существует послойный диффеоморфизм их фазовых многообразий.*

Наряду с лиувиллевой эквивалентностью на всём симплектическом многообразии, мы будем говорить о лиувиллевой эквивалентности на отдельных изоэнергетических поверхностях.

Определение 3 *Класс лиувиллевой эквивалентности замкнутой инвариантной (т.е. целиком состоящей из слоев) окрестности особого слоя слоения Лиувилля в изоэнергетической поверхности называется 3-атомом (подробнее о 3-атомах см. статью А.Т.Фоменко, Х.Цишанга [17]).*

Таким образом, 3-атомы кодируют бифуркации торов Лиувилля. Оказывается, что если фиксировать число критических окружностей на данном особом слое, то в

боттовском случае имеется лишь конечное число таких бифуркаций. Напомним также, что в случае, если дополнительный первый интеграл — функция Ботта, то 3-атом является расслоением Зейферта (см. определение ниже) с особыми слоями типа $(2, 1)$ над 2-атомом.

Напомним, что *расслоенным полноторием* называется полноторие, расслоенное на окружности следующим образом: возьмем тривиально расслоенный на отрезки цилиндр $D^2 \times [0, 1]$ и склеим его основания $D^2 \times \{0\}$ и $D^2 \times \{1\}$ по диффеоморфизму, являющемуся поворотом на угол $2\pi\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Определение 4 *Компактное ориентируемое трехмерное многообразие называется многообразием Зейферта, если на нем можно задать структуру расслоения Зейферта, т.е. разбить на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои) так, что каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию.*

3-атомы и соответствующие им 2-атомы обозначаются заглавными латинскими буквами. В нашей работе встречаются атомы трех типов: A , B и V_k (подробнее см. книгу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]). Указанные атомы изображены на рисунке 1.

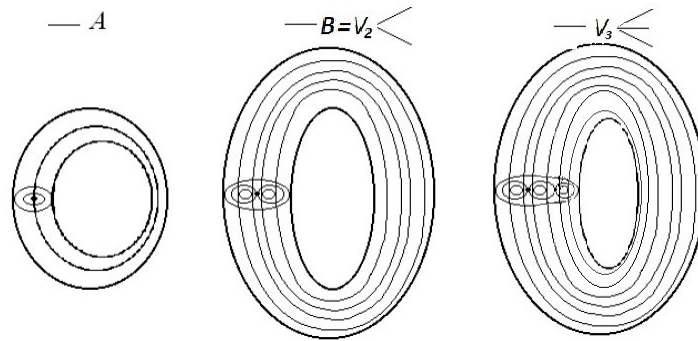


Рис. 1: атомы типов A , B и V_k .

Каждой неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 соответствует некоторый граф, являющийся базой слоения Лиувилля на Q_h^3 . Внутренние точки ребер этого

графа отвечают регулярным слоям слоения Лиувилля, а вершины соответствуют особым слоям. Согласно определению 3, каждой вершине графа можно сопоставить некоторый атом. Полученный ориентируемый граф с вершинами-атомами называется *молекулой*.

Молекула содержит много информации о структуре слоения Лиувилля, однако эта информация не полна, в том смысле, что молекула не определяет диффеоморфный тип многообразия Q_h^3 , а тем более, слоения Лиувилля на нем (с точностью до послойного диффеоморфизма). Например, молекула вида $A - A$ сообщает нам, что многообразие Q_h^3 склеено из двух полноторий, естественным образом расслоенных на концентрические торы. Однако, каким образом произведена склейка, какое в результате получается многообразие и какое слоение Лиувилля на нем — молекула не сообщает. Поэтому к молекуле необходимо добавить информацию о склейке отдельных атомов.

Разрежем каждое ребро молекулы посередине. Молекула распадется на отдельные 3-атомы. Это означает, что мы разрезали многообразие по некоторым торам Лиувилля на отдельные атомы. Пусть мы хотим произвести обратную склейку. Молекула говорит нам, какие пары граничных торов мы должны склеивать между собой. Чтобы понять, как именно их нужно склеивать, мы должны задать для каждого разрезанного ребра матрицу склейки, определяющую изоморфизм фундаментальных групп склеивающихся торов. Чтобы задать эту матрицу, фиксируем на торах системы координат — пары независимых ориентированных циклов (λ, μ) , являющихся образующими фундаментальной группы $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (подробнее см.[1]).

Рассмотрим произвольное ребро e_i молекулы и зададим на нем ориентацию. Разрежем это ребро вдоль некоторого тора Лиувилля и определим на берегах разреза допустимые системы координат (λ^-, μ^-) — на начале ребра и (λ^+, μ^+) — на конце ребра. Рассматривая эти пары циклов как базисы в группе одномерных го-

мологий, получаем матрицу склейки

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}.$$

C_i — это целочисленная матрица с определителем, равным -1 . Эта матрица определена не однозначно, а с точностью до допустимых замен координат (см.[1]).

Определение 5 Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \beta_i \neq 0 \\ \infty, & \beta_i = 0 \end{cases}$$

Определение 6 Числовой целочисленной меткой ε_i на ребре e_i молекулы называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign}\beta_i, & \beta_i \neq 0 \\ \text{sign}\alpha_i, & \beta_i = 0 \end{cases}$$

Несмотря на то, что матрица склейки C_i определена неоднозначно, метки r_i и ε_i являются инвариантами, т.е. не меняются при допустимых заменах координат.

Дадим определение метки n_k . Если разрезать молекулу по всем рёбрам с конечной r -меткой, то она распадётся на несколько связных кусков. Семьями называются те из них, которые не содержат атомов A . Рассмотрим теперь отдельную семью. Все рёбра, имеющие в ней хотя бы одну вершину, можно разделить на три класса (с учётом имеющейся на них ориентации): входящие, выходящие и внутренние.

Определение 7 Сопоставим каждому ребру e_i данной семьи целое число θ_i по следующему правилу:

$$\theta_i = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right\rfloor, & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ \left\lfloor -\frac{\delta_i}{\beta_i} \right\rfloor, & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \\ \left\lfloor -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right\rfloor, & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Метка n_k , отвечающая данной семье, определяется как сумма чисел θ_i по всем рёбрам этой семьи.

Отметим, что метка n_k является характеристическим классом расслоения Зейфферта.

Определение 8 *Молекула, снабженная метками r_i , ε_i и n_k , называется меченой молекулой, или инвариантом Фоменко–Цишанга.*

Теорема 1 *(А.Т.Фоменко, Х.Цишанг [17]). Две невырожденные интегрируемые системы v на Q^3 и v' на Q'^3 ливувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

В нашей работе мы исследуем топологию систем, которые описываются движением точки по многообразию вращения в поле действия потенциала. Повторим, что такие системы являются интегрируемыми гамильтоновыми системами (см.далее утверждение 1). Эта задача возникла как обобщение известной задачи об изучении топологии интегрируемых геодезических потоков на поверхностях вращения (т.е. систем с нулевым потенциальным полем). Топология интегрируемых геодезических потоков хорошо изучена: важные результаты получены в работах А.Т.Фоменко, А.Бессе ([23]), М.Энгмана ([25]), А.Т.Фоменко, Е.О.Кантонишовой ([19]), А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко ([20]), А.В.Болсинова, Б.Йовановича ([21]), Н.В.Коровиной ([22]), М.В.Новикова ([24]), Е.А.Кудрявцевой и Д.А.Федосеева ([30]).

Сформулируем основную теорему классификации геодезических потоков на сфере, полученную Т.З.Нгуеном и Л.С.Поляковой. В дальнейшем сравним полученные нами результаты (для систем с потенциалом) с их результатом.

Теорема 2 *(Т.З.Нгуен, Л.С.Полякова [1]). Рассмотрим на сфере геодезический поток римановой метрики вида*

$$ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2,$$

где θ, φ — стандартные сферические координаты.

1) *Тогда отвечающая этому геодезическому потоку молекула имеет вид, показанный на рисунке (молекула на рисунке состоит из двух одинаковых частей*

$W(f)$, и $\widetilde{W}(f) = W(f) \setminus \cup A$. В вершинах графа стоят атомы A , B и V_k . На ребрах между седловыми атомами внутри каждой $W(f)$ метки r равны ∞ , на ребрах между седловыми атомами и атомами A r -метки равны нулю, все ε -метки равны $+1$.

2) Если молекула отлична от $A - A$, то на единственном центральном ребре (оно соединяет два седловых атома) метка r равна ∞ , а ε -метка равна -1 . Метка n на единственной семье, состоящей из всех седловых атомов, равна 2.

3) Если молекула имеет вид $A - A$, то метки следующие: $r = 1/2$, $\varepsilon = +1$.

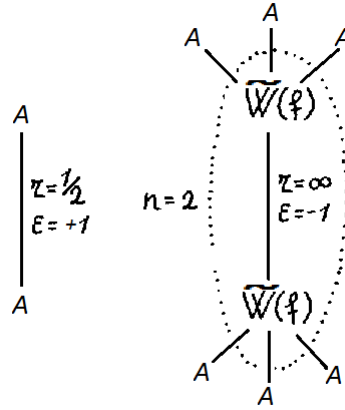


Рис. 2: меченые молекулы для геодезических потоков на сфере.

В дипломной работе М.В.Новикова [24] впервые поставлена задача исследования топологии интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле. М.В.Новиков исследует бифуркационные диаграммы таких систем. В работе сделаны значительные продвижения в поставленной задаче, а именно, исследованы типы особых точек ранга ноль отображения момента, найдены параметрические уравнения дуг бифуркационной диаграммы, в неявном виде найдены условия существования точек возврата и исследовано поведение бифуркационных дуг в окрестности этих точек. Также исследован тип точек, составляющих бифуркационные дуги (эллиптическая, гиперболическая, вырожденная).

В настоящей работе продолжено исследование бифуркационных диаграмм систем на поверхностях вращения, а также изучена топология данных систем.

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

1. В работе получена полная классификация систем на многообразиях вращения с потенциалом на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, классифицированы все соответствующие слоения Лиувилля. Эта классификация получена на основе вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга (меченых молекул) исследуемых систем (подробнее см. теорему 6 из параграфа 1.8).

2. Получена классификация всех соответствующих изоэнергетических 3-многообразий вместе со слоениями Лиувилля на них (более подробно см. теорему 6 и лемму 22 из параграфа 1.8).

3. Доказано, что интегрируемые системы на двумерных поверхностях вращения с гладким потенциалом, ограниченные на связные компоненты трехмерных изоэнергетических поверхностей, в некоторых случаях топологически (лиувиллево) эквивалентны различным классическим интегрируемым динамическим системам (подробнее см. параграф 1.9).

Комментарий 3.1. Если молекула исследуемой системы имеет тип $A - A$, то система топологически эквивалентна интегрируемым системам Жуковского, Ковалевской, случаю динамики шероховатого эллипсоида на плоскости (см. работу М.Ю.Ивочкина [4] и Г.М.Сечкина [5]) и некоторым другим системам (для подходящих зон энергии этих систем).

Комментарий 3.2. В том случае, когда молекула имеет вид дерева (см. теорему 6), доказано, что система на многообразии вращения с потенциалом, т.е. интегрируемая система вида $(f(r), V(r))$, “моделируется” некоторым набором геодезических потоков, а именно, в каждой энергетической зоне, границами которой являются особые значения энергии (критические значения энергии h_i , а также значения энергии h_j точек возврата и значения энергии h_k точек пересечения и самопересечения бифуркационных дуг на бифуркационном комплексе), система моделируется геодезическим потоком некоторой метрики вращения (при нулевом потенциале). Более точно, для каждой такой зоны по паре $(f(r), V(r))$ алгоритмически строится новая метрика вращения, задаваемая некоторой функцией $F(r)$, геодезический поток которой при $h > V_{\max}$ лиувиллево эквивалентен, а при маленьких энергиях h — грубо эквивалентен исходной системе в выбранной зоне. В этом смысле любая интегрируемая система на поверхности вращения $(f(r), V(r))$ является “композицией” более простых интегрируемых систем, являющихся геодезическими потоками (без потенциала) на поверхностях вращения. При больших энергиях ($h > V_{\max}$) утверждение верно благодаря принципу Мопертюи. Однако, так как потоки с потенциалом при малых энергиях ведут себя более сложно, чем геодезические потоки, класс систем с потенциалом не вкладывается полностью в класс систем без потенциала (более подробно см. 1.9).

Эти главные результаты опираются на следующие результаты, полученные в данной диссертации.

1) Выяснено, при каких условиях на метрику и потенциал число кривых бифуркационной диаграммы конечно, а при каких бесконечно.

2) Найдены явные условия существования точек возврата бифуркационных кривых, а также найдены условия, гарантирующие конечность (или бесконечность) числа точек возврата.

3) Классифицированы типы всех бифуркационных дуг (эллиптическая, гиперболическая).

4) Найдены критерии вырожденности или невырожденности точек бифуркационной диаграммы.

5) Классифицированы всевозможные типы взаимного расположения бифуркационных дуг, включая их пересечение и самопересечение.

6) Предъявлен алгоритм построения бифуркационного комплекса.

7) Классифицированы слоения Лиувилля, возникающие в системах на многообразиях вращения, с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

8) Как уже было отмечено выше, доказана теорема топологической классификации систем на многообразиях вращения с потенциалом (теорема 6).

9) Получены явные формулы для переменных действия, и по ним построены решетки переменных действия. Предъявлен алгоритм вычисления по решеткам переменных действия инвариантов Фоменко–Цишанга и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0.

10) Как приложение метода вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга и матриц монодромии по решеткам переменных действия, с помощью предъявленного алгоритма исследован обобщенный случай Лагранжа.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Т.Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Е.А.Кудрявцевой за ценные научные идеи и многочисленные обсуждения и А.А.Ошемкову за очень важные комментарии, существенно улучшившие текст работы.

1.2 Исследование особых точек и особых значений отображения момента для систем на многообразиях вращения

Рассмотрим риманово многообразие $M \approx S^2$ с метрикой g , для которой определено эффективное действие группы S^1 (окружности) изометриями (такая метрика g называется метрикой вращения, а соответствующее многообразие M — многообразием вращения).

Пусть N и S — неподвижные точки S^1 -действия, назовем их северным и южным полюсами многообразия $M \approx S^2$ (известно, что их ровно две, см. книгу А.Бессе [23]). Выберем на M специальные координаты (*нормальные координаты*) следующим образом. Пусть γ_0 — геодезическая, соединяющая N и S . Изометрии R_φ (т.е. сдвиги на угол φ вдоль орбит S^1 -действия) переводят геодезические в геодезические. Для любой точки $m \in M \setminus \{N, S\}$ существует единственное значение $\varphi \bmod 2\pi$, такое что $m \in R_\varphi(\gamma_0) = \gamma_\varphi$. Определим параметр r как длину отрезка геодезической γ_φ , соединяющей точки N и m . Тогда точка m будет иметь координаты (r, φ) .

Можно показать (см. книгу А.Бессе [23]), что метрику g можно записать в виде

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2,$$

где $f(r) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, положительная на $(0, L)$, где L — длина геодезической γ_0 . Также выполнены условия $f(0) = f(L) = 0$. Мы будем рассматривать гладкие функции $f(r)$. Пусть $V(r)$ — гладкая функция на отрезке $[0, L]$, назовем её *потенциалом*.

Легко показать, что метрика на многообразии M регулярна вне полюсов. Сформулируем утверждение о том, когда метрика на M будет являться гладкой в полюсах.

Комментарий. Употребляемый здесь термин “многообразие вращения” отнюдь не означает, что поверхность M с метрикой ds^2 обязательно должна вкладываться в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности вращения, где ds^2 индуцируется объемлющей евклидовой метрикой. Более того, известны примеры, когда это не так (см. более подробно лемму 2). Например, известен целый класс поверхностей вращения, не вкладывающихся в $\mathbb{R}^3$, являющихся многообразиями Бертрана (см. работу Е.А.Кудрявцевой и Д.А.Федосеева [30]). В случае, если многообразие M вкладывается в $\mathbb{R}^3$, функция $f(r)$ имеет смысл расстояния до оси вращения.

Лемма 1 (А.Бессе [23]). Метрика на многообразии вращения M и функция $V(r)$ на нем являются гладкими в полюсах (т.е. в точках $r = 0$ и $r = L$), если существуют гладкие функции $F = F(r)$ и $W = W(r)$, определенные на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, такие что $F|_{[0,L]} = f$, $W|_{[0,L]} = V$ и выполнены следующие условия:

1) $F(-r) = -F(r) = F(2L-r)$, т.е. функции $F(r)$ и $F(L+r)$ нечетны (или, что эквивалентно, функция $F(r)$ — периодична с периодом $2L$ и нечетна) и $F'(0) = 1$, $F'(L) = -1$;

2) $W(-r) = W(r) = W(2L-r)$, т.е. функции $W(r)$ и $W(L+r)$ четны (или, что эквивалентно, функция $W(r)$ — периодична с периодом $2L$ и четна).

Комментарий. На самом деле, функции $F(r)$ и $W(r)$ на всей числовой прямой нам в дальнейшем не понадобятся. Их существование важно лишь в окрестности концов отрезка $[0, L]$ для проверки четности и нечетности функций $f(r)$ и $V(r)$. Другими словами, для наших целей достаточно того, чтобы функции $f(r)$ и $V(r)$ продолжались в окрестности концов отрезка $[0, L]$ должным образом.

Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении T^*M к M со стандартной симплектической структурой $\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(\mathbf{q})p_i p_j + V(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где $\mathbf{q} = (q^1, q^2)$ — локальные координаты на $M \approx S^2$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ — соответствующие импульсы, т.е. координаты в $T_{\mathbf{q}}^*M$, а g^{ij} — матрица, обратная к матрице метрики g .

Определение 9 Пусть (M, g) — многообразие вращения с метрикой вращения $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$. Пусть функции $f(r), r \in [0, L]$, и $V(r), r \in [0, L]$, удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда будем говорить, что пара функций $(f(r), V(r)), r \in [0, L]$, задает натуральную механическую систему на римановом многообразии вращения (M, g) .

Отметим, что многообразие (M, g) не всегда вкладывается в $\mathbb{R}^3$, т.е. оно не обяза-

тельно является поверхностью вращения. Сформулируем соответствующий критерий.

Лемма 2 (*М.Енгман [25]*). Многообразие вращения (M, g) изометрично C^1 -вкладывается в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда $f'(0) = 1, f'(L) = -1$ и $|f'(r)| \leq 1$ для всех $r \in [0, L]$.

Замечание. В случае, когда многообразие M вкладывается в $\mathbb{R}^3$, существует функция $u(r)$, такая что $f'(r)^2 + u'(r)^2 = 1$, и поверхность M получается вращением кривой $(f(r), u(r)) \in \mathbb{R}^2(x, z)$ вокруг оси Oz , т.е. параметрически задается следующим образом:

$$(f(r)\cos\varphi, f(r)\sin\varphi, u(r)), r \in [0, L], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Всюду далее в статье будем считать, что функции $f(r), V(r), r \in [0, L]$ удовлетворяют условиям леммы 1.

Утверждение 1 Гамильтонова система с гамильтонианом (1) на многообразии вращения для всех пар $(f(r), V(r))$ является вполне интегрируемой в смысле Лиувилля.

Доказательство.

1) Фазовое пространство системы четырехмерно — каждая его точка задается координатами $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$, где (p_r, p_φ) — импульсы точки, (r, φ) — координаты точки.

2) Система имеет два первых интеграла:

интеграл энергии

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r)$$

и дополнительный первый интеграл $K = p_\varphi$ (так как $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$). Отметим, что интеграл K определен на всем фазовом пространстве, в том числе, в полюсах.

3) Движение точки по многообразию вращения, заданному функцией $f(r)$, в поле действия потенциала $V(r)$ задается уравнениями Гамильтона:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Таким образом, система гамильтонова, её фазовое пространство четырехмерно, и она имеет два первых интеграла, поэтому система интегрируема (см., например, работы А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1] и Е.О.Кантонистой [26],[27],[28]).□.

Лемма 3 *Натуральная механическая система на многообразии вращения M , такая что $f'(r)^2 + V'(r)^2 > 0$, имеет ровно две особые точки (в T^*M) ранга 0: точку $(p, q) = (0, N)$ и точку $(p, q) = (0, S)$, а также 2-параметрическое семейство особых точек $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (0, k(r), r, \varphi)$ ранга 1 с параметрами $(r, \varphi) \in I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, где $k(r) := \pm f(r)\sqrt{\frac{f(r)V'(r)}{f'(r)}}$, $r \in I$, I — открытое подмножество интервала $(0, L)$, задаваемое неравенством $V'(r)f'(r) > 0$ (и состоящее из конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов $I_i = (r_1^i, r_2^i)$ и, возможно, "граничных" интервалов $(0, r_1)$ и (r_2, L)), N и S — северный и южный полюсы многообразия вращения M (с координатой $r = 0$ и $r = L$ соответственно). На любом конце любого интервала I_i выполнено либо $V'(r)f'(r) = 0$, либо $r = 0$ или $r = L$.*

В частности, бифуркационная диаграмма системы симметрична относительно оси h . Она состоит из двух точек

$$(h, k) = (V(0), 0), (h, k) = (V(L), 0),$$

являющихся образами особых точек $(p, q) = (0, N)$ и $(p, q) = (0, S)$ ранга 0, и из кривой, являющейся образом при отображении момента семейства точек ранга 1 и допускающей гладкую параметризацию вида

$$h(r) = \frac{f(r)V'(r)}{2f'(r)} + V(r), \quad k(r) = \pm f(r)\sqrt{\frac{f(r)V'(r)}{f'(r)}},$$

где параметр r кривой пробегает открытое множество I (см. выше). Эта кривая состоит из конечного или счетного числа дуг, где на $(2i - 1)$ -ой и $(2i)$ -ой дугах

(симметричных относительно оси h), $i = 1, 2, \dots$, параметр r пробегает интервал I_i .

Особая точка $(0, N)$ (соответственно $(0, S)$) невырождена тогда и только тогда, когда $V''(0)$ (соответственно $V''(L)$) отлично от 0. Если эта точка невырождена, то она имеет тип центр–центр или фокус–фокус, в зависимости от знака $\operatorname{sgn} V''(0) = +1$ или -1 (соответственно $\operatorname{sgn} V''(L) = +1$ или -1).

Замечание. В лемме 3 бифуркационные дуги заданы своими параметрическими уравнениями. Поведение дуг, а именно: изломы, пересечения и самопересечения будут исследованы в последующих утверждениях.

Доказательство.

Рассмотрим на T^*M две гамильтоновы системы — с функциями Гамильтона H и p_φ .

Особые точки ранга 0 — это фазовые точки, являющиеся положениями равновесия обеих этих систем. Но положения равновесия второй системы, т.е. системы $v = \operatorname{sgrad} p_\varphi$ — это требуемые точки $(p, q) = (0, N)$ и $(p, q) = (0, S)$. Непосредственно проверяется, что обе эти точки являются положениями равновесия первой системы (с гамильтонианом H), а потому имеют ранг 0.

Найдем особые точки ранга 1. Это те точки, в которых векторные поля $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} K$ коллинеарны и одновременно не равны нулю. Напомним, что траектории системы $v = \operatorname{sgrad} K$ — это окружности, за исключением двух найденных выше точек. Известно, что если некоторая точка является особой точкой ранга 1, то таковой является и вся проходящая через нее траектория. Следовательно, замкнутая траектория системы $v = \operatorname{sgrad} K$, не являющаяся положением равновесия, будет особой ранга 1 в том и только том случае, если она также является замкнутой траекторией системы $v = \operatorname{sgrad} H$, либо целиком состоит из ее неподвижных точек.

Покажем, что проекция любой такой траектории не проходит через полюса поверхности M (иначе говоря, во всех точках траектории $0 < r < L$). В самом деле, траектории векторного поля $\operatorname{sgrad} K$ на пространствах T_N^*M (или T_S^*M) — это concentрические окружности и одна неподвижная точка. Рассмотрим точку,

лежащую на какой-то из этих окружностей. Она имеет ненулевой импульс, следовательно, траектория векторного поля $v = \text{sgrad} H$, выходящая из этой точки $((\bar{p}, N)$ или $(\bar{p}, S)$, где $\bar{p} \neq 0$), покинет T_N^*M (или T_S^*M), поэтому она не совпадает ни с какой траекторией системы $v = \text{sgrad} K$.

Теперь явный вид точек ранга 1 вытекает из условия линейной зависимости ковекторов dH и dp_φ в этих координатах.

Определим тип особых точек, используя алгоритм из [[1], §1.10.2]. Симплектическая структура в точках ранга 0 (в полюсах) задается канонической матрицей $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Критическая точка x невырождена тогда и только тогда, когда существуют числа λ и μ такие, что матрица $\lambda A_H + \mu A_M$ не вырождена и имеет различные собственные значения. Здесь $A_H = \Omega^{-1} d^2 H|_x$, $A_M = \Omega^{-1} d^2 M|_x$.

Введем в окрестности полюса локальные координаты (x, y, p_x, p_y) на фазовом пространстве:

$$x = f(r) \cos \varphi, \quad y = f(r) \sin \varphi.$$

Напомним, что метрика на M имеет вид $ds^2 = dr^2 + f^2(r) d\varphi^2$.

Согласно лемме 1, в полюсах имеем $|f'(r)| = 1$, поэтому метрика в полюсах имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r) d\varphi^2 = f'(r)^2 dr^2 + f^2(r) d\varphi^2 = dx^2 + dy^2.$$

Следовательно, гамильтониан H в полюсе выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(0).$$

Запишем дополнительный первый интеграл в локальных координатах (x, y, p_x, p_y) :

$$p_\varphi = K = xp_y - yp_x.$$

Если $V(f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}))$ — функция Морса, то в малой окрестности полюса

$$V(f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})) = c_0 + c_1(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2), \quad c_1 \neq 0,$$

поэтому в окрестности полюса гамильтониан и дополнительный интеграл принимают следующий вид:

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + c_0 + c_1(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2) \\ K = xp_y - yp_x \end{cases}$$

Тогда $dH = p_x dx + p_y dy + 2c_1 x dx + 2c_1 y dy$, $dK = -y dp_x + x dp_y + p_y dx - p_x dy$. Затем вычисляем матрицы вторых дифференциалов:

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_1 \end{pmatrix}, d^2K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что формы d^2K и d^2H независимы.

Затем вычисляем матрицы $A_H = \Omega^{-1}d^2H$ и $A_K = \Omega^{-1}d^2K$. Так как $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось найти собственные значения матрицы

$$\lambda A_H + \mu A_K = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & -2c_1\lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 & -2c_1\lambda \\ \lambda & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $c_1 > 0$, то собственные значения k следующие: $k = \pm i(\sqrt{2c_1}\lambda \pm \mu)$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип центр–центр.

Если $c_1 < 0$, сделаем замену $c = -c_1, c > 0$, тогда собственные значения k следующие: $k = \pm(\sqrt{2c}\lambda \pm i\mu)$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип фокус–фокус.

Заметим также, что в силу представления $V(z) = c_0 + c_1 \cdot z^2 + o(z^2)$, получаем, что $c_1 = \operatorname{sgn} V''(0)$, т.е. c_1 — это знак второй производной потенциала в полюсе. $\square$.

Параметризованную кривую из леммы 3 назовем *параметризованной бифуркационной кривой*, или просто *бифуркационной кривой*.

Так как бифуркационная диаграмма симметрична относительно оси h , то каждому интервалу области определения (r_1^i, r_2^i) соответствуют две симметричные непрерывные кривые на бифуркационной диаграмме. Поэтому чтобы изучать свойства бифуркационной диаграммы, достаточно исследовать область $k > 0$.

Для дальнейшего исследования бифуркационной диаграммы дадим несколько определений.

Пусть $\gamma : (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая параметризованная кривая в плоскости. Напомним, что кривая γ называется регулярной в точке r^* , если вектор скорости $\gamma'(r^*)$ отличен от нуля.

Определение 10 Будем говорить, что кривая γ имеет особенность типа ”невырожденная точка возврата” в точке r^* , если

$$\gamma'(r^*) = 0, \gamma''(r^*) \neq 0, \langle \gamma'''(r^*), w \rangle \neq 0,$$

где w — единичный вектор, ортогональный вектору $v := \frac{\gamma''(r^*)}{|\gamma''(r^*)|}$, а $\langle \gamma'''(r^*), w \rangle$ — скалярное произведение векторов $\gamma'''(r^*)$ и w .

Нетрудно проверяется, что в этом случае

$$\lim_{r \rightarrow r_-^*} \frac{\gamma'(r)}{|\gamma'(r)|} = -v, \lim_{r \rightarrow r_+^*} \frac{\gamma'(r)}{|\gamma'(r)|} = v$$

(т.е. r^* — это "точка возврата" кривой γ , причем "острие" кривой сонаправлено вектору $-v$), и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ две дуги, исходящие из точки возврата, $\gamma(r^*-\varepsilon, r^*)$ и $\gamma(r^*, r^*+\varepsilon)$ расположены по разные стороны прямой $\gamma(r^*) + tv$, $t \in \mathbb{R}$, касательной к кривой (т.е. в разных полуплоскостях относительно этой прямой). А именно, если $\langle \gamma'''(r^*), w \rangle > 0$, то эти дуги расположены в полуплоскостях с внутренними нормальными $-w$ и w соответственно.

В параграфе 1.3 будет показано, что невырожденная точка возврата является полукубической параболой (вида $y^2 = x^3$).

Определение 11 *Дугой бифуркационной кривой с номером i (дугой с номером i) назовем часть бифуркационной кривой, определённую на интервале (r_1^i, r_2^i) (дуг с номером i две — в верхней и в нижней полуплоскости относительно оси h).*

Определение 12 *Поддугой дуги бифуркационной кривой с номером i назовём гладкую часть дуги бифуркационной кривой, лежащую либо между соседними точками возврата, либо определенную на интервале (r_1^i, r_1^*) или (r_k^*, r_2^i) , где r_1^*, r_k^* — первая и последняя точки возврата на дуге.*

Лемма 4 *Рассмотрим функцию, определенную на области $r \in [0, L]$, называемую эффективным потенциалом:*

$$U_k(r) = \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r).$$

Эффективный потенциал обладает следующим свойством: на промежутке, содержащемся в области I изменения параметра бифуркационной кривой, если $f'(r) > 0$ ($V'(r) > 0$):

$U_{k_0}(r)$ монотонно убывает, если $k_0^2 > k^2(r)$ на этом промежутке, и $U_{k_0}(r)$ монотонно возрастает, если $k_0^2 < k^2(r)$ на этом промежутке.

На промежутке, имеющем пустое пересечение с областью I изменения параметра бифуркационной кривой, $U_{k_0}(r)$ монотонно убывает.

Если $f'(r) < 0$ ($V'(r) < 0$), то характер монотонности изменяется на противоположный.

Доказательство.

Решим неравенство $U'_{k_0}(r) > 0$:

$$U'_{k_0}(r) = -\frac{k_0^2 f'(r)}{f^3(r)} + V'(r) > 0.$$

Отсюда получаем, что $k_0^2 f'(r) < f^3(r) V'(r)$. При $f'(r) > 0$ получаем

$$k_0^2 < \frac{f^3(r) V'(r)}{f'(r)} = k^2(r),$$

то есть эффективный потенциал $U_{k_0}(r)$ монотонно возрастает. Если $f'(r) < 0$, то имеем монотонное убывание эффективного потенциала при выполнении того же неравенства.

Промежутки, не принадлежащие областям определения бифуркационных кривых, характеризуются условием: $f'(r) V'(r) < 0$. Поэтому при $f'(r) > 0$ имеем $V'(r) < 0$. Получаем $f^3(r) V'(r) < 0 < k_0^2 f'(r)$, т.е. при $f'(r) > 0$ эффективный потенциал убывает на этих промежутках. $\square$.

Сформулируем полезное утверждение относительно характера монотонности бифуркационных дуг.

Лемма 5 *При $k > 0$ вектор скорости в точках бифуркационной кривой лежит либо в 1 четверти координатной плоскости (h, k) , либо в 3 четверти, либо равен 0 (в точках возврата).*

Доказательство. Напомним, что бифуркационная кривая задается параметрически следующим образом:

$$\gamma = \left\{ \frac{fV'}{2f'} + V, f \sqrt{\frac{fV'}{f'}} \right\}.$$

Введем обозначение: $p := \left(\frac{fV'}{f'} \right)'$. Тогда вектор скорости имеет вид

$$\dot{\gamma} = \frac{p + 2V'}{2} \left\{ 1, \frac{f}{\sqrt{\frac{fV'}{f'}}} \right\}.$$

Так как вторая координата всегда положительна ($f > 0$), то знаки обеих координат определяются знаком общего множителя. То есть, если $(p + 2V') > 0$, то вектор

скорости лежит в 1 четверти; если $(p + 2V') < 0$, то вектор скорости лежит в 3 четверти. В противном случае вектор скорости равен 0. $\square$.

Замечание. Выражение $p + 2V'$ равно 0 тогда и только тогда, когда $\frac{\partial^2 U_k(r)}{\partial r^2} = \frac{\partial k(r)}{\partial r} = 0$.

Дадим определения различным типам бифуркационных дуг. Будем предполагать, что все дуги из определений удовлетворяют лемме 5.

Определение 13 *Дугой типа “простая парабола” называется симметричная относительно оси h (в плоскости h, k) гладкая (всюду, кроме, возможно, “вершины параболы”) дуга, имеющая одну точку, лежащую на оси h , и уходящая на плюс бесконечность по обеим координатам в верхней полуплоскости.*

Определение 14 *Дугой типа “составная парабола” называется симметричная относительно оси h непрерывная дуга, имеющая одну точку, лежащую на оси h (“вершина параболы”), состоящая из гладких (всюду, кроме, возможно, “вершины параболы”) поддуг, разделенных точками возврата, и уходящая на плюс бесконечность по обеим координатам в верхней полуплоскости.*

Определение 15 *Дугой типа “простая лунка” называется симметричная относительно оси h (в плоскости h, k) замкнутая дуга, состоящая из двух гладких (всюду, кроме, возможно, левой “вершины лунки”) поддуг, разделенных двумя точками возврата, и имеющая две точки, лежащие на оси h (“вершины лунки”).*

Определение 16 *Дугой типа “составная лунка” называется симметричная относительно оси h (в плоскости h, k) непрерывная замкнутая дуга, имеющая две точки, лежащие на оси h (“вершины лунки”), и состоящая из гладких (всюду, кроме, возможно, левой “вершины лунки”) поддуг, разделенных точками возврата.*

Определение 17 *Дугой типа “простой клюв” называется дуга, состоящая из двух гладких поддуг, разделенных точкой возврата и уходящих на бесконечность по обеим координатам в верхней полуплоскости.*

Определение 18 *Дугой типа “составной клюв” называется дуга, состоящая из гладких поддуг, разделенных точками возврата, оба конца которой уходят на бесконечность по обеим координатам в верхней полуплоскости.*

Примеры дуг, описанных в определениях 13–18, показаны на рисунке 3.

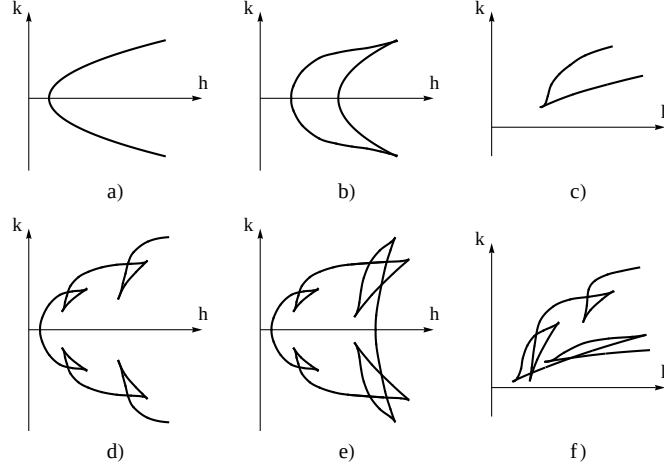


Рис. 3: типы бифуркационных дуг: а) ”простая парабола”; б) ”простая лунка”; с) ”простой клюв”; d) ”составная парабола”; e) ”составная лунка”; f) ”составной клюв”.

Отметим, что “простая” дуга является частным случаем “составной” дуги такого же типа. Далее вместо “составной клюв” будем говорить просто “клюв” (то же относится и к “параболе”, и к “лунке”).

Далее (*под*)*дугой типа A* (*под*)*дугой эллиптического типа*) будем называть (*под*)дугу бифуркационной диаграммы, прообразу каждой точки которой соответствует атом A . (*Под*)*дугой типа V_p* (*под*)*дугой гиперболического типа*) будем называть (*под*)дугу, прообразу каждой точки которой соответствует атом V_p (в частности, атом B). Отметим, что бифуркационные дуги почти всюду состоят из точек типов A и B , а бифуркации V_k могут возникать только на пересечении (*под*)дуг типа B , причем могут возникать только бифуркации указанного типа (см. лемму 21).

Определение 19 Областью возможности движения, отвечающей значению интеграла K равному k , назовем область, в которой подкоренное выражение функции $p_r(r) = \pm\sqrt{2(h - U_k(r))}$ неотрицательно.

Лемма 6 Если в точке $(h, k) = (h(r^*), 0)$, принадлежащей “параболе”, значение $V''(r^*) > 0$, то “парабола” в окрестности своей вершины имеет тип A . Если $V''(r^*) < 0$, то в окрестности своей вершины “парабола” имеет тип B .

Доказательство. Так как точка $(H(r^*), 0)$ принадлежит “параболе”, то $k(r^*) = \pm f(r^*)\sqrt{\frac{f(r^*)V'(r^*)}{f'(r^*)}} = 0$, т.е. $V'(r^*) = 0$. Так как $V(r)$ — функция Морса, то $V''(r^*) \neq 0$.

Далее, так как $U_0(r) = V(r)$, то если $V''(r^*) > 0$, то эффективный потенциал имеет минимум в точке r^* , значит, при увеличении уровня энергии h ($h > U_0(r^*)$) возникает новая область возможности движения, отвечающая значению $k = 0$ (см. определение 19), следовательно, в фазовом пространстве (r, φ, p_r, k) появляется новый тор. Следовательно, “парабола” имеет тип A . Из аналогичных рассуждений получаем, что если $V''(r^*) < 0$, то “парабола” имеет тип B . $\square$.

Доказательство следующей леммы является вычислительным, поэтому мы его опустим.

Лемма 7 Если “вершина параболы” — это особая точка ранга 0, то “парабола” имеет излом в этой точке. Иначе “парабола” является гладкой на всей своей области определения.

Изучим точки ранга 1 отображения момента. Для этого вспомним определение невырожденной точки.

Пусть x — критическая точка ранга 1 отображения момента. Пусть $dH(x) \neq 0$. Тогда по теореме Дарбу в окрестности точки x существует каноническая система координат (p_1, q_1, p_2, q_2) , где $H = p_1$. Так как f (дополнительный интеграл) и H коммутируют, то f не зависит от q_1 , т.е. $f = f(p_1, p_2, q_2)$. Точка x — критическая точка отображения момента, поэтому $\frac{\partial f(x)}{\partial p_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial q_2} = 0$.

Определение 20 Пусть H и K — гамильтониан и дополнительный интеграл системы. Особая точка x ранга 1 отображения момента (и содержащая ее фазовая траектория системы), такая что $dH(x) \neq 0$, называется невырожденной, если матрица

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial p_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial q_2 \partial q_2} \end{pmatrix}$$

невырождена в точке x .

Если $\det J(x) > 0$ или < 0 , то точка x (и содержащая ее фазовая траектория системы) имеет тип "центр" или "седло" соответственно (так как матрица $J(x)$ симметрична, невырождена и имеет сигнатуру $(+, +)$, $(-, -)$ или $(+, -)$ соответственно). Фазовая траектория системы, содержащая точку x , называется также устойчивой (эллиптической) или неустойчивой (гиперболической) соответственно.

Определение 21 1-параметрическое семейство гладких функций $F_t(r)$ на интервале $(r_1, r_2) \subset \mathbb{R}$ с параметром $r \in (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ назовем семейством общего положения (или невырожденным семейством), если для любого значения параметра $t = t^0$ любая критическая точка r^* функции $F_{t^0}(r)$ — либо морсовская (т.е. $F''_{t^0}(r^*) \neq 0$), либо

$$F''_{t^0}(r^*) = 0, \quad F'''_{t^0}(r^*) \neq 0, \quad \frac{d^2 F_{t^0}(r^*)}{dt dr} \neq 0.$$

Нетрудно проверяется, что в последнем случае (при $F''_{t^0}(r^*) = 0$) значение параметра t^0 является "бифуркационным": при непрерывном изменении параметра t все морсовские критические точки функции F_t "сохраняются", лишь слегка изменяя свое положение, однако при переходе параметра t через бифуркационное значение t^0 некоторая пара морсовских критических точек — точка локального минимума и точка локального максимума — либо возникает ("рождается") из точки r^* , либо склеивается в точку r^* и "исчезает", в зависимости от знака $F'''_{t^0}(r^*)$ имеем $\frac{d^2 F_{t^0}(r^*)}{dt dr} > 0$ или < 0 соответственно.

Применим определение 20 к исследуемому случаю. Система обладает каноническими координатами $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$ указанного вида, поэтому мы можем напрямую проверить определение невырожденности точки.

Теорема 3 *Предположим, что пара функций $(f(r), V(r))$ на $(0, L)$ задает натуральную механическую систему на римановом многообразии вращения (M, g) , и функция $k(r)$ — морсовская на каждом интервале I_i . Тогда:*

А) 1-параметрическое семейство гладких функций $U_k(r)$ на любом интервале (r_1^i, r_2^i) с параметром $k > 0$ является семейством общего положения (см. определение 21), т.е. для любого значения параметра любая критическая точка функции — либо морсовская, либо удовлетворяет условиям (3) из леммы 9 ниже.

В) невырожденным особым точкам ранга 1 отображения момента (и соответствующим особым окружностям, т.е. "круговым орбитам") отвечают (в силу леммы 3) регулярные точки бифуркационной кривой (являющейся образом множества особых точек ранга 1 отображения момента), а вырожденным особым точкам ранга 1 — невырожденные точки возврата бифуркационной кривой (см. определение 10).

Доказательство. Запишем матрицу из определения 20 для исследуемой системы:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_r} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial r} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial r} & \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}.$$

Таким образом, если r не является регулярной точкой бифуркационной кривой (а значит, является невырожденной точкой возврата, см. определение 10), то отвечающая ей критическая окружность $\{(0, k(r), r, \varphi) | \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ ранга 1 отображения момента вырождена. И наоборот, регулярным точкам r бифуркационной кривой отвечают невырожденные критические окружности $\{(0, k(r), r, \varphi) | \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ ранга 1 отображения момента. $\square$.

1.3 Исследование поведения бифуркационных кривых в окрестности точек возврата. Теорема классификации бифуркационных диаграмм изучаемых систем.

В параграфе 1.2 мы показали, что все нерегулярные точки на бифуркационных кривых — это невырожденные точки возврата и только они (далее мы покажем, что если выполнены условия (3) из леммы 9, точки возврата являются полукубическими). В этом параграфе мы исследуем поведение бифуркационных кривых и топологию системы в окрестности точек возврата, а затем сформулируем и докажем теорему классификации бифуркационных диаграмм для систем на многообразиях вращения.

Напомним, что гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r) = \frac{p_r^2}{2} + U_k(r).$$

Обозначим через γ множество пар вида

$$\gamma = \{(U_k(r), k) \mid \exists r : U'_k(r) = 0\},$$

где k — параметр, а r — переменная. Из условия $U'_k(r) = 0$ получаем, что либо $f'(r) = V'(r) = 0$, либо $f'(r)V'(r) > 0$ и $k = k(r) = \pm \sqrt{\frac{f^3(r)V'(r)}{f'(r)}}$, поэтому в случае $f'(r)^2 + V'(r)^2 > 0$ параметризованная бифуркационная кривая γ имеет следующий вид

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{f(r)V'(r)}{2f'(r)} + V(r), \pm \sqrt{\frac{f^3(r)V'(r)}{f'(r)}} \right) \mid a < r < b \right\},$$

где a и b — соседние нули функции $f(r)f'(r)V'(r)$, такие что $\frac{f^3(r)V'(r)}{f'(r)} > 0$ на интервале (a, b) .

Лемма 8 (достаточное условие регулярности γ).

Для любого r из открытого подмножества I интервала $(0, L)$ следующие условия равносильны:

1) особая точка $(0, k(r), r, \varphi)$ ранга 1 отображения момента (и соответствующая особая окружность) невырождена

2) параметризованная бифуркационная кривая регулярна в точке r

3) число $k'(r)$ отлично от 0, т.е. r не является критической точкой функции $k(r)$ на I

4) точка r является морсовской критической точкой функции $U_{k(r)}(r)$, т.е. число $U''_{k(r)}(r)$ отлично от 0, где

$$U''_{k(r)}(r) = \frac{(3f'(r)^2 - f(r)f''(r))V'(r)}{f(r)f'(r)} + V''(r). \quad (2)$$

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует, что если выполнено условие (2), то локально имеем

$$U'_{k(r)}(r) = 0 \Leftrightarrow r = r(k) \in C^\infty.$$

Лемма доказана. $\square$.

Лемма 9 (достаточное условие невырожденности точки возврата). Для любого промежутка (r_1^i, r_2^i) следующие условия равносильны:

1) функция $k(r)$ на (r_1^i, r_2^i) является морсовской

2) в любой критической точке r_0 функции $k(r)$ на (r_1^i, r_2^i) выполнены следующие достаточные условия на полукубическую точку возврата:

$$\begin{cases} U'_{k(r_0)}(r_0) = 0 \\ U''_{k(r_0)}(r_0) = 0 \\ U'''_{k(r_0)}(r_0) \neq 0 \\ f'(r_0) \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

3) любая нерегулярная точка r дуги бифуркационной кривой, параметризованной интервалом I_i , является невырожденной точкой возврата (а потому полукубической точкой возврата).

Доказательство. Доказательство этой леммы является полностью вычислительным. Приведем только идею доказательства эквивалентности условий 2) и 3). Согласно определению 10, точка r_0 является невырожденной (полукубической) точкой возврата параметрически заданной кривой $(h(r), k(r))$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$h'(r_0) = 0, k'(r_0) = 0, h'''(r_0)k''(r_0) - h''(r_0)k'''(r_0) \neq 0.$$

Прямым вычислением проверяется, что эти условия эквивалентны условиям (3) на эффективный потенциал $U_k(r)$. $\square$

Комментарий. Если $U'''_{k(r_0)}(r_0) = 0$, но существует $m > 0$ такое, что $U^{(m)}_{k(r_0)}(r_0) \neq 0$, тогда точка r_0 все равно будет невырожденной точкой возврата, однако уже не полукубической.

Изобразим схематически поведение графика функции эффективный потенциал $U_{k(\tilde{r})}(\tilde{r})$ и бифуркационной кривой в окрестности точки возврата. Функция $U_{k(\tilde{r})}(\tilde{r})$ имеет два локальных экстремума — точку локального максимума и точку локального минимума (которым соответствуют гиперболическая и эллиптическая критические окружности $H_{k=k(r_0)}$). Значит, в случае, когда $U'''_{k(r_0)}(r_0) > 0$, график функции $U_k(r)$ имеет вид, показанный на рис.4а (если $U'''_{k(r_0)}(r_0) < 0$, то области возрастания и убывания функции $U_k(r)$ меняются местами).

Следствие 1. Согласно леммам 8 и 9, если функция $k(r)$ является морсовской на любом интервале I_i , то любая некритическая точка r функции $k(r)$ является регулярной точкой параметризованной бифуркационной кривой, а все ее критические точки r^* являются полукубическими точками возврата бифуркационной кривой, т.е. бифуркационная кривая состоит из регулярных точек и точек возврата.

Из лемм 8 и 9 следует, что точка, удовлетворяющая условиям этих лемм, является точкой возврата. Значит, локально ветви бифуркационной диаграммы в окрестности точки возврата выглядят так, как показано на рис.4b. В прообразе точек из области, находящейся внутри “клюва”, число торov Лиувилля на единицу

больше, чем в прообразе точек, находящихся снаружи “клюва” (см. рис.4b).

Теперь определим, какая из этих ветвей отвечает эллиптической особенности, а какая — гиперболической.

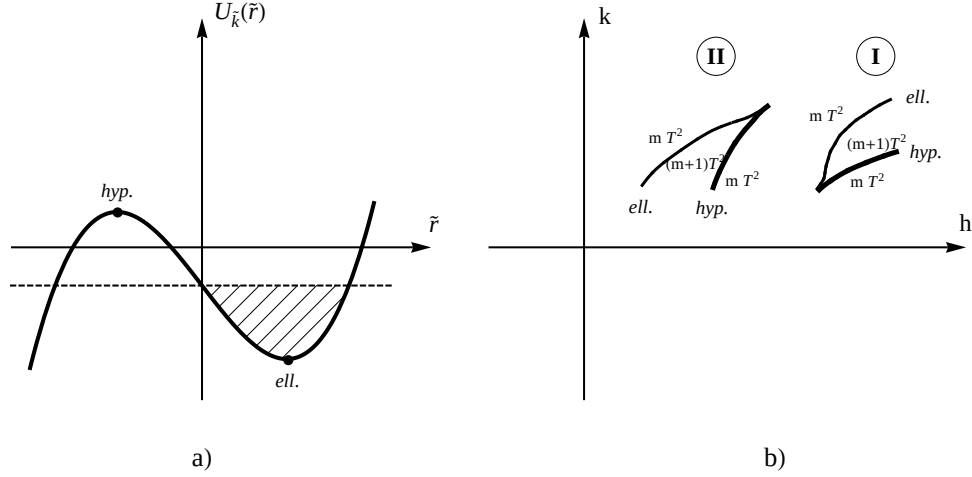


Рис. 4: а) график функции $U_{\tilde{k}}(\tilde{r})$; б) клювы типов II (слева) и I (справа).

Лемма 10 В окрестности точки возврата регулярный участок бифуркационной кривой, состоящий из точек, отвечающих атому A , лежит левее регулярного участка бифуркационной кривой, состоящего из точек, отвечающих атому B .

Доказательство. При фиксированном значении параметра $\tilde{k}$, близком к нулю и таком, что $f'(r_0) \cdot \tilde{k} < 0$, при увеличении энергии $H = h$, при прохождении h через морсовский локальный минимум h_0 функции $U_{\tilde{k}_0}(r)$ возникает новая область возможности движения, отвечающая значению $\tilde{k}$ (То есть, точке локального минимума функции $U_{\tilde{k}_0}(r)$ отвечают точка $(h_0, \tilde{k}_0)$ на бифуркационной кривой и атом A — эллиптическая критическая окружность ранга 1 отображения момента.)

При дальнейшем увеличении уровня энергии h , при прохождении h через морсовский локальный максимум h_0 функции $U_{\tilde{k}_0}(r)$ две области возможности движения (в том числе упомянутая выше) сливаются в одну. (То есть, точке локального максимума функции $U_{\tilde{k}_0}(r)$ отвечают точка $(h_0, \tilde{k}_0)$ на бифуркационной кривой и

атом В — гиперболическая критическая окружность ранга 1 отображения момента.) $\square$.

Следующее утверждение является критерием различия “клювов”.

Лемма 11 *Существует четыре качественно различных типа поведения бифуркационной кривой в окрестности точки возврата, которые определяются знаками функций $h''(r)$ и $k''(r)$ в точке возврата r_0 : случаи $h''(r_0) > 0, k''(r_0) > 0$ (локально мы имеем на бифуркационной диаграмме невырожденную точку возврата типа I) и $h''(r_0) < 0, k''(r_0) < 0$ (имеем невырожденную точку возврата типа II) (см.рис.5) и получаемые из них отражением относительно оси h .*

Доказательство. Согласно книге П.К.Рашевского [34] (глава 1, §7), в окрестности точки возврата функции $h(r)$ и $k(r)$ имеют вид

$$h(r) = \frac{1}{2}h''(r_0)(r - r_0)^2 + o((r - r_0)^2), \quad k(r) = \frac{1}{2}k''(r_0)(r - r_0)^2 + o((r - r_0)^2),$$

т.е. локально функции $h(r)$ и $k(r)$ — это параболы. Поэтому, например, при $h''(r_0) > 0$ и $k''(r_0) > 0$ при подходе к точке возврата слева ($r \rightarrow r_0 - 0$) функции $h(r)$ и $k(r)$ убывают (аналогично при $r \rightarrow r_0 + 0$) функции возрастают. Значит, в этом случае имеем клюв типа I.

Аналогичными рассуждениями получаем, что при $h''(r_0) < 0$ и $k''(r_0) < 0$ имеем клюв типа II.

Так как вектор скорости бифуркационной кривой при $k > 0$ всегда лежит в первой или третьей четверти, других наборов знаков функций $h''(r_0)$ и $k''(r_0)$ в верхней полуплоскости быть не может. $\square$

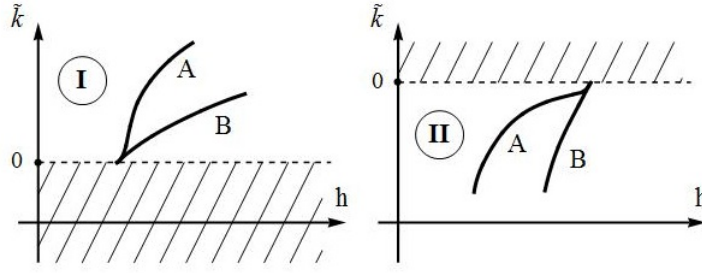


Рис. 5: Ключ: а) типа I; б) типа II.

В следующей теореме мы опишем структуру бифуркационных диаграмм общего вида.

Теорема 4 (классификация бифуркационных диаграмм систем на многообразиях вращения). Рассмотрим натуральную механическую систему на многообразии вращения M , заданную парой функций $(f(r), V(r))$, $r \in [0, L]$. Предположим, что выполнены следующие условия:

а) функция $f(r)$ — функция Морса на интервале $(0, L)$, функция $W(r)$ — функция Морса на отрезке $[0, L]$ (напомним, что $W(r)|_{[0, L]} = V(r)$) (отсюда, в частности, следует, что многообразие M имеет лишь конечное число экваторов (т.е. точек r , таких что $f'(r) = 0$), т.е. функция $f'(r)$ имеет лишь конечное число нулей на $(0, L)$)

б) $V'(r)^2 + f'(r)^2 > 0$ на $(0, L)$

Пусть r_j^i — все такие точки, в которых либо $f'(r_j^i) = 0$, либо $V'(r_j^i) = 0$ ($j = 1, 2$), где $r_1^0 = 0 < r_2^0 = r_1 < r_1^1 < r_2^1 < r_2^2 < \dots < r_1^i < r_2^i < \dots < r_1^N = r_2 < r_2^N = L$.

Рассмотрим параметризованную бифуркационную кривую, дуги которой определены на промежутках

$$\bigsqcup_{i=0}^N (r_1^i, r_2^i), N \in \mathbb{N}.$$

Тогда выполнено следующее:

1) параметризованная бифуркационная дуга регулярна в окрестности любого конца любого интервала (r_1^i, r_2^i)

2) если функция $k(r) = \pm \sqrt{\frac{f^3(r)V'(r)}{f'(r)}}$ на I_i является морсовской, то параметризованная бифуркационная дуга не имеет точек накопления нерегулярных точек (т.е. функция $k(r)$ имеет лишь конечное число критических точек), и каждая ее нерегулярная точка является невырожденной точкой возврата (отсутствие точек накопления означает, что в каждой ограниченной области плоскости (h, k) бифуркационные дуги имеют конечное число точек возврата);

3) если $k(r)$ — функция Морса на (r_1^i, r_2^i) , то точки возврата делят бифуркационную дугу на "регулярные участки" двух типов (типа A — "эллиптическая" и типа B — "гиперболическая"), каждый из которых является образом 1-параметрического семейства эллиптических или гиперболических (соответственно) окружностей ранга 1 при отображении момента, причем типы регулярных участков (поддуг) чередуются вдоль дуги, так что в малой окрестности любой точки возврата левая поддуга, примыкающая к этой точке, имеет тип A , а правая — тип B ; тип дуги постоянен вдоль всей поддуги.

4) Бифуркационная диаграмма состоит из дуг трех типов: "парабола", "клюв" или "лунка":

а) если $f'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$, то дуга, параметризованная интервалом I_i , имеет тип "клюв" (см.рис.3б);

б) если $f'(r_1^i) = V'(r_2^i) = 0$ (или $V'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$), то дуга, параметризованная интервалом I_i , имеет тип "парабола" (см.рис.3а);

с) если $V'(r_1^i) = V'(r_2^i) = 0$, то дуга, параметризованная интервалом I_i , имеет тип "лунка" (см.рис.3с);

В точках r , где $V'(r) = 0$ бифуркационные дуги являются гладкими.

5) Параметр r на бифуркационной дуге ведет себя следующим образом:

а) на дуге типа "клюв" при увеличении r от r_1^i до первой точки возврата при $V'(r) > 0$ на (r_1^i, r_2^i) параметр "пробежит" дугу типа B , идущую из бесконечности, затем все оставшиеся дуги; при $V'(r) < 0$ движение по дуге происходит в

противоположном направлении;

b) на дуге типа “парабола” при увеличении r от r_1^i до r_2^i , если $V'(r_1^i) = 0$, то параметр “пробегают” “параболу”, начиная от точки, лежащей на оси h , и уходя в бесконечность по бифуркационной дуге; если $V'(r_2^i) = 0$, то движение по дуге происходит в противоположном направлении;

c) на дуге типа “лунка” при увеличении r от r_1^i до первой точки возврата параметр “пробегают” часть “лунки”, начиная от точки $((V(r_1^i), 0))$, лежащей на оси h . Т.е. при $V'(r) > 0$ на (r_1^i, r_2^i) параметр пробегает “лунку”, двигаясь от точки $(V(r_1^i), 0)$ по дуге типа A , затем по дуге типа B до точки $(V(r_2^i), 0)$; если $V'(r) < 0$, то движение по дуге происходит в противоположную сторону.

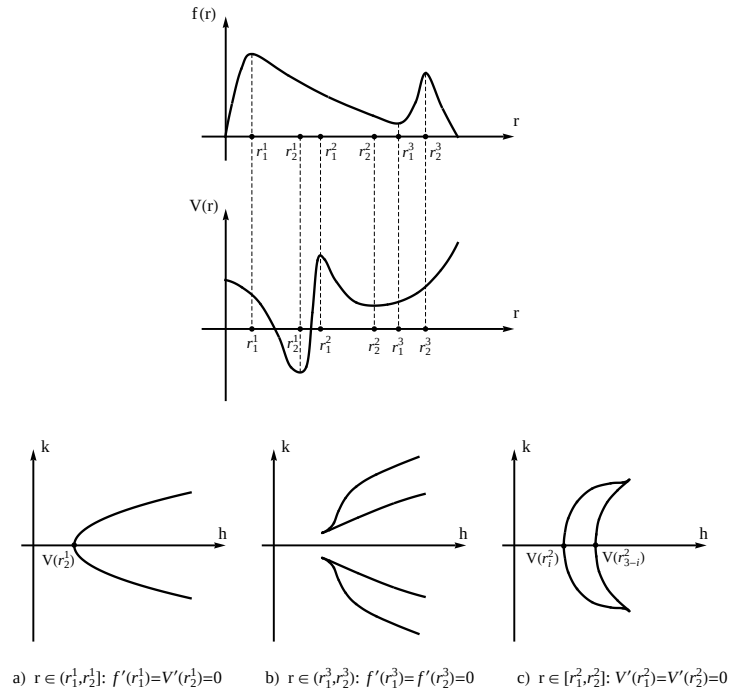


Рис. 6: типы бифуркационных дуг: а) поведение функций $f(r)$ и $V(r)$ в окрестности точек r_j^i ; б) дуга типа “парабола”: $r \in (r_1^1, r_2^1)$: $f'(r_1^1) = V'(r_2^1) = 0$; в) дуга типа “клюв”: $r \in (r_1^3, r_2^3)$: $f'(r_1^3) = f'(r_2^3) = 0$; г) дуга типа “лунка”: $r \in [r_1^2, r_2^2]$: $V'(r_1^2) = V'(r_2^2) = 0$.

Доказательство.

Докажем пункт 1).

Введем вспомогательные функции

$$F(r) := \frac{1}{f^2(r)}, \quad a(r) := \frac{k^2(r)}{2} = -\frac{V'(r)}{F'(r)}.$$

Для того, чтобы кривая была регулярна в $U(r_j^i)$, надо чтобы при $r \rightarrow r_j^i$ функция $a'(r)$ не стремилась к 0.

$$a'(r) = -\frac{V''(r)F'(r) - V'(r)F''(r)}{F'(r)^2}$$

Пусть $r \rightarrow r_j^i$ и пусть $F'(r_j^i) = 0$.

Так как $F(r)$ — функция Морса, то $F''(r_j^i) \neq 0$. Также $V'(r_j^i) \neq 0$.

Поэтому в окрестности точки r_j^i , положив $\tilde{r} = r - r_j^i$, имеем:

$$F(\tilde{r}) = a_0 + a_1\tilde{r}^2 + o(\tilde{r}^2), \quad V(\tilde{r}) = c_0 + c_1\tilde{r} + c_2\tilde{r}^2 + o(\tilde{r}^2), \quad a_1 \neq 0, c_1 \neq 0,$$

поэтому $a'(\tilde{r}) \sim -\frac{2c_2 \cdot 2a_1\tilde{r} - (c_1 + 2c_2\tilde{r})2a_1\tilde{r}}{(2a_1\tilde{r})^2} = \frac{c_1}{2a_1\tilde{r}} \rightarrow \infty \neq 0$.

Пусть теперь $r \rightarrow 0$ (аналогично $r \rightarrow L$):

$V'(0) = 0, F'(0) = 1$, и $V''(0) \neq 0$ ($V(r)$ — функция Морса) поэтому в окрестности 0 имеем

$$F(r) = a_0 + 1 \cdot r + a_2r^2 + o(r^2), \quad V(r) = c_0 + c_1r^2 + o(r^2), \quad c_1 \neq 0,$$

поэтому $a'(r) = \frac{2c_1r \cdot 2a_1 - 2c_1(2a_1r+1)}{(2a_1r+1)^2} \Big|_{r=0} = -2c_1 \neq 0$.

Пункт 2) следует из пунктов 1) и 2) леммы 8 и из леммы 9.

Пункт 3) следует из леммы 10.

Докажем пункт 4).

Если на концах интервала $(r_1^i, r_2^i) : f'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$, то при $r \rightarrow r_1^i(r_2^i)$ имеем $k(r) \rightarrow +\infty$. Следовательно, и $H(r) \rightarrow +\infty$. То есть оба конца соответствующей бифуркационной кривой уходят на бесконечность по обеим координатам при стремлении r к концам интервала (r_1^i, r_2^i) . Значит, мы имеем на бифуркационной диаграмме дугу типа “клюв”.

Пусть на концах интервала $(r_1^i, r_2^i) : f'(r_1^i) = 0, V'(r_2^i) = 0$. Тогда $k \rightarrow +\infty$ и $H(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow r_1^i$, т.е. бифуркационная дуга одним концом уходит на бесконечность. А при $r \rightarrow r_2^i$ получаем $k \rightarrow 0, H(r) \rightarrow H(r_2^i)$, т.е. другой конец бифуркационной дуги — это точка, лежащая на оси h . В этом случае имеем на бифуркационную дугу типа “парабола”.

Наконец, если $V'(r_1^i) = 0$ и $V'(r_2^i) = 0$, то оба конца бифуркационной дуги для интервала (r_1^i, r_2^i) лежат на оси h . Этот случай описывает дугу типа “лунка”.

Покажем теперь, что в точках r , где $V'(r) = 0$ и $r \neq r(P)$ (P — полюс), бифуркационные дуги гладкие.

Пусть $V'(r_1) = 0$. Тогда $f'(r_1) \neq 0$. В терминах функций $F(r)$ и $V(r)$ бифуркационные дуги параметрически задаются следующим образом:

$$a(r) = -\frac{V'(r)}{F'(r)}, \quad H(r) = a(r)F(r) + V(r).$$

В точке r_1 имеем $V'(r_1) = 0$, поэтому $a(r_1) = 0$.

В точке r_1 имеем $V'(r_1) = 0$, поэтому $a(r_1) = 0$.

$a'(r_1) = -\frac{V''(r_1)}{F''(r_1)} \neq 0$, т.к. $V(r)$ — функция Морса. Следовательно, можно сделать замену $h = h(a) = h(k^2)$.

Имеем $a = 0, h'_r = a'_r \cdot F \neq 0$, следовательно, $h(k^2) \sim c \cdot k^2$.

Так как $h'_a = \frac{h'_r}{a'_r} = F > 0$, то $h \sim a \sim k^2$. Значит, в точке r_1 дуга имеет вид $a(k) = k^2$, поэтому в этой точке дуга гладкая.

Докажем пункт 5) теоремы.

а) Для дуги типа “клюв” на концах области определения (r_1^i, r_2^i) имеем $f'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$, поэтому функция $k(r)$ выглядит так, как на рисунке 7а. Пусть $V'(r) > 0$ на (r_1^i, r_2^i) . Изобразим схематически, пользуясь леммой 4, график функции $U_{k_0}(r)$ для некоторого $k_0 > k^*$, где k^* — наименьшее значение функции $k(r)$ на (r_1^i, r_2^i) . График показан на рисунке 7б. Локальный минимум функции $U_{k_0}(r)$ соответствует точке на дуге типа A бифуркационной кривой, локальный максимум — точке на дуге типа B . Мы видим, что при $H = h_{locmin}$ значение параметра r больше, чем при $H = h_{locmax}$, т.е. пересекая “клюв” прямой $k = k_0$, пересечение с дугой типа B

происходит при наименьшем значении параметра r . Значит, движение по “клюву” начинается из бесконечности по дуге типа B (см.рис.7d). При $V'(r) < 0$ имеем движение по “клюву” в противоположном направлении (см.рис.7с,е).

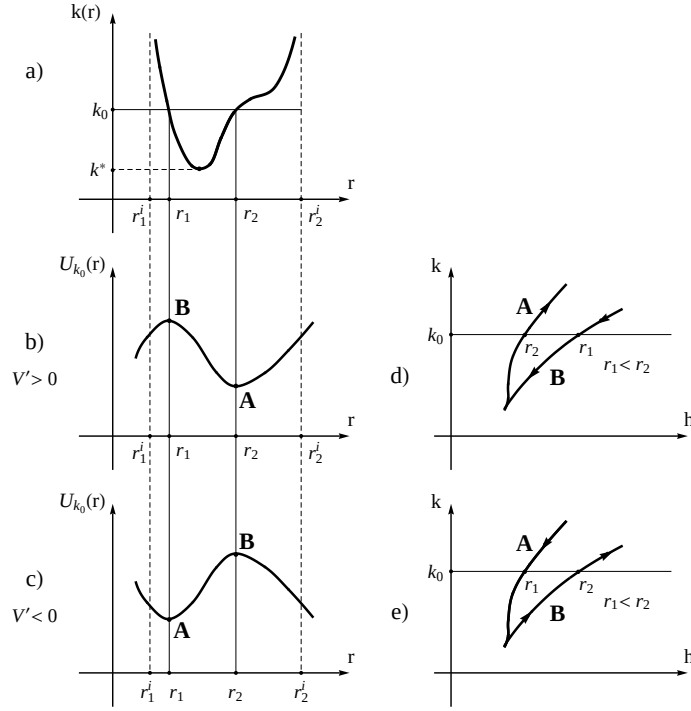


Рис. 7: поведение параметра r на бифуркационной дуге типа “клюв”.

б) Пусть для дуги типа “парабола” $V'(r_1^i) = 0$. В этом случае поведение функции $k(r)$ изображено на рисунке 8а, т.е. в малой окрестности $(r_1^i, r_1^i + \varepsilon)$ имеем $k'(r) > 0$. Согласно лемме 5, в этой окрестности $h'(r) > 0$, поэтому вектор скорости на “параболе” при движении от её “вершины”, лежит в первой четверти. Т.е. увеличение параметра r начинается от вершины (см.рис.8б). В случае, если $V'(r_2^i) = 0$ имеем движение в противоположную сторону (см.рис.8с,д).

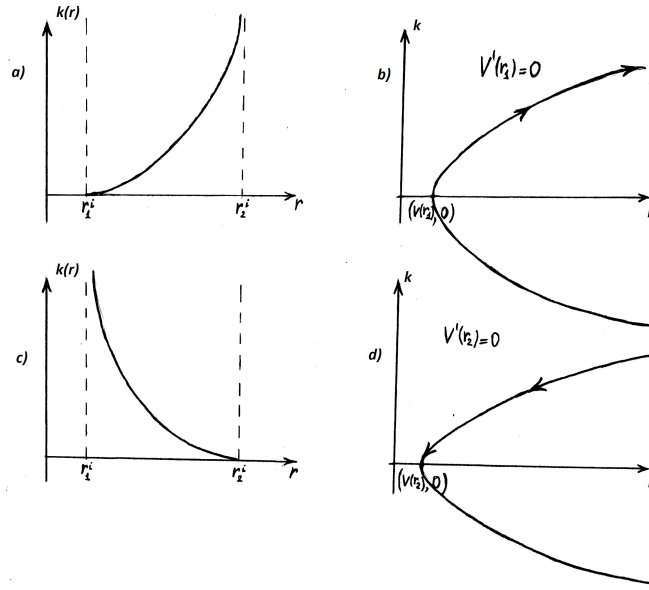


Рис. 8: поведение параметра r на бифуркационной дуге типа "парабола".

с) Пусть на дуге типа "лунка", определенной на интервале (r_1^i, r_2^i) , выполнено условие $V'(r) > 0$. Пользуясь аналогичными пункту а) рассуждениями, получаем, что при увеличении параметра r движение по дуге начинается из точки, лежащей на оси h , по дуге типа A . При $V'(r) < 0$ движение по дуге происходит в противоположную сторону (см.рис.9а-е).□.

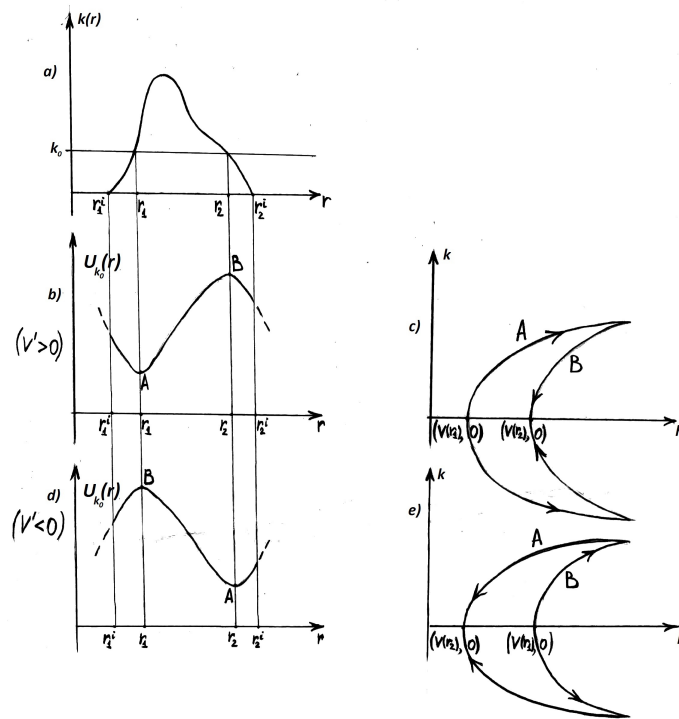


Рис. 9: поведение параметра r на бифуркационной дуге типа "лунка".

Отметим, что если для некоторого значения k_0 существует больше двух точек локального максимума r_i , в которых значения функции $U_{k_0}(r_i)$ совпадают, то есть на бифуркационной кривой и на бифуркационном комплексе (см. определение 22) в некоторой точке пересекаются больше двух дуг типа В, то в прообразе этой точки бифуркационной диаграммы в фазовом пространстве происходит гиперболическая перестройка, имеющая тип V_k (см. лемму 21).

Далее будем считать, что пара функций $(f(r), V(r))$, задающих систему на многообразии вращения, удовлетворяет всем условиям теоремы 4.

1.4 Анализ взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы

В этом параграфе изучим вопрос о взаимном расположении бифуркационных дуг: об их пересечении друг с другом и о самопересечении.

Из теоремы 3 следует, что точки возврата — это точки $(h(r^*), k(r^*))$ такие, что $k'(r^*) = 0$. Таким образом, регулярные части бифуркационной кривой заданы на области

$$\bigsqcup_{i=0}^{N-1} (r_i^*, r_{i+1}^*),$$

где $r_0^* = r_1$, $r_N^* = r_2$ и каждому интервалу из (r_i^*, r_{i+1}^*) отвечает гладкая кривая с концами в точках возврата (в случае первого и последнего интервалов один из концов кривых может уходить в бесконечность).

Ответим на следующие вопросы: *может ли кривая, определенная на интервале (r_i^*, r_{i+1}^*) , самопересекаться? могут ли пересекаться кривые, определенные на соседних интервалах? могут ли пересекаться кривые, определенные не на соседних интервалах? могут ли пересекаться бесконечные "хвосты" кривой бифуркационной диаграммы при больших значениях энергии h ?*

Лемма 12 *Поддуга бифуркационной кривой (см.опр.12), определенная на интервале (r_i^*, r_{i+1}^*) , не может самопересекаться.*

Доказательство. Пусть кривая самопересекается (см.рис.10), тогда на ней существуют точки, в которых вектор скорости не принадлежит 1 или 3 четверти. Получаем противоречие с утверждением леммы 5. Действительно, если кривая самопересекается, то у нее существуют такие два значения параметра t_0, t_1 , такие что $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Тогда хотя бы в какой-то точке на отрезке $[t_0, t_1]$ касательный вектор обязан будет выйти за пределы первой или третьей четверти. $\square$.

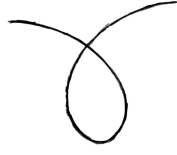


Рис. 10: бифуркационная дуга с самопересечением

Лемма 13 *Соседние поддуги одной и той же дуги бифуркационной кривой (т.е. дуги, определенные на соседних интервалах, разделенных точкой возврата) не пересекаются .*

Доказательство. Пусть $k(a) = k(b) = k_0$, где a, b — значения параметра r с соседних интервалов (см. рисунок 11).

На интервале (a, b) график функции $k(r)$ находится полностью под прямой $k = k_0$, либо полностью над ней (т.к. a и b — соседние корни уравнения $k(r) = k_0$ в силу того, что эти точки отвечают соседним кривым). Тогда по лемме 4 функция $U_{k_0}(r)$ монотонна на (a, b) . (см. рис.11), поэтому $U_{k_0}(a) \neq U_{k_0}(b)$, то есть не существует значений a и b параметра r , принадлежащих соседним подинтервалам, что $k(a) = k(b)$ и $h(a) = h(b)$ одновременно. Это и означает требуемое. $\square$.

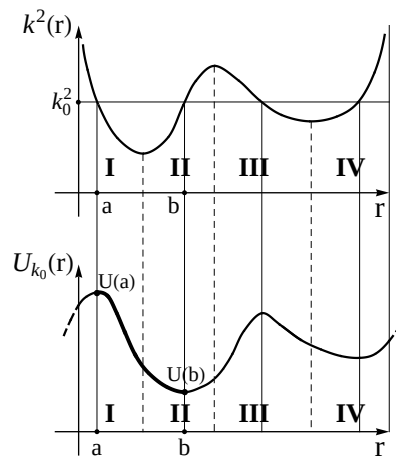


Рис. 11: иллюстрация к лемме 13.

Лемма 14 *Регулярные участки (поддуги) одной и той же дуги бифуркационной кривой, не являющиеся соседними (т.е. не имеющие общей точки возврата), могут пересекаться, причем могут пересекаться дуги всевозможных типов: A с A , A с B и B с B .*

Доказательство. Приведем примеры, как могут выглядеть графики функций $k(r)$ и $U_{k_0}(r)$, чтобы реализовывались все виды пересечений дуг: см. рисунок 12а,б,с. Бифуркационная кривая, реализующая сразу все типы пересечений, показана на рисунке 12д.□.

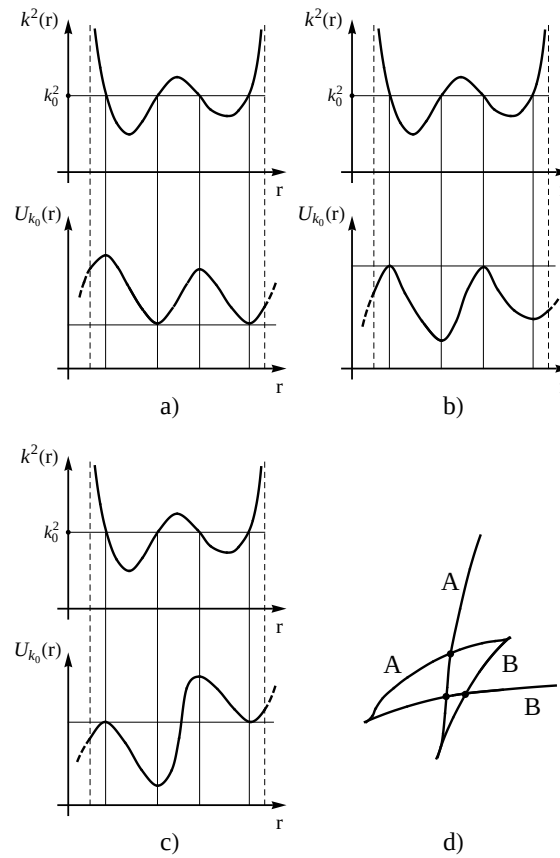


Рис. 12: а)-с) возможный вид графиков функций $k^2(r)$ и $U_{k_0}(r)$, реализующих различные типы пересечения бифуркационных дуг; d) бифуркационная кривая, реализующая все возможные типы пересечения бифуркационных дуг.

Лемма 15 Два бесконечных "хвоста" (т.е. два неограниченных регулярных участка) одной и той же дуги бифуркационной кривой (это дуга типа "клюв", так как хвосты "параболы", очевидно, не пересекаются в силу того, что лежат в разных полуплоскостях) не пересекаются при больших значениях k , а значит, и при больших значениях энергии h (так как "хвосты" уходят на бесконечность по h и по k одновременно).

Доказательство. Нарисуем типичный вид графика функции $k(r)$ на интервале (r_1, r_2) . Эта функция может иметь несколько локальных экстремумов на этом интервале. Фиксируем значение k_0 большее самого большого локального максимума. Тогда график пересекается с прямой $k = k_0$ ровно в двух точках, которые соответствуют значениям a и b параметра r , причем $r = a$ принадлежит первой гладкой дуге бифуркационной кривой, а $r = b$ — последней. В силу того, что пересечений ровно два, пользуясь леммой 4, получаем, что $U_{k_0}(r)$ монотонен на интервале (a, b) , поэтому $U_{k_0}(a) \neq U_{k_0}(b)$ и, значит, $h(a) \neq h(b)$ (см.рис.13).□.

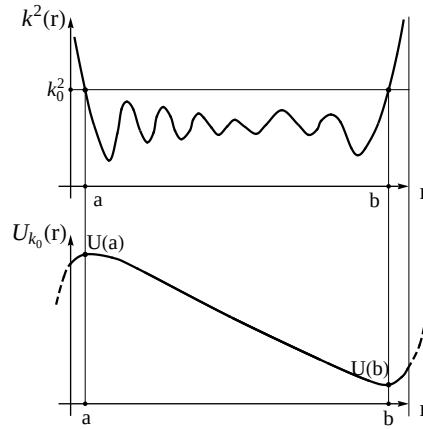


Рис. 13: иллюстрация к лемме 15.

Теперь ответим на вопрос: *могут ли пересекаться между собой различные дуги бифуркационной кривой (т.е. дуги, параметризованные разными интервалами I_i области I изменения параметра бифуркационной кривой)?*

Лемма 16 Две дуги бифуркационной кривой, параметризованные интервалами $(r_1^i, r_2^i) \neq (r_1^j, r_2^j)$ могут трансверсально пересекаться на бифуркационной диаграмме, т.е. иметь общую точку, причем могут пересекаться любые их регулярные поддуги: A с A , A с B , B с B .

Доказательство. Пересечение двух дуг означает, что существуют значения a и b с разных отрезков области определения, такие, что $k(a) = k(b) = k_0$. Нарисуем $U_{k_0}(r)$. Мы хотим, чтобы $U_{k_0}(a) = U_{k_0}(b)$ — то есть мы хотим совпадения значений в двух локальных экстремумах графика $U_{k_0}(r)$ (т.к. именно точки экстремума $U_{k_0}(r)$ являются решениями уравнения $k(r) = k_0$). На рисунке 14а приведен пример графика функции $U_{k_0}(r)$, для которого реализуются все типы пересечений дуг, указанные в условии. На рисунке 14б приведен пример кривых бифуркационной диаграммы, имеющих пересечения дуг A - A , A - B и B - B . $\square$.

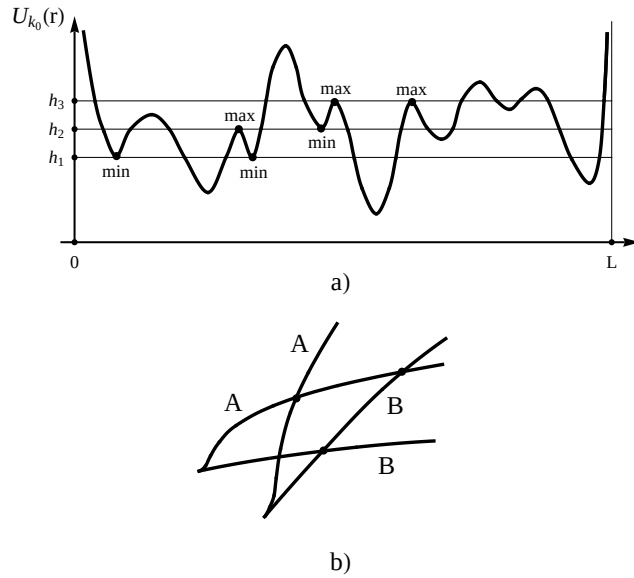


Рис. 14: верхний рисунок — график функции $U_{k_0}(r)$, для которого реализуются все типы пересечений дуг из условия леммы 16; нижний рисунок — часть бифуркационной диаграммы, отвечающая графику функции $U_{k_0}(r)$ и реализующая все типы пересечений дуг из условия леммы 16.

Вывод. В параграфах 1.2 и 1.3 исследовано, из каких типов дуг может состоять бифуркационная диаграмма. В параграфе 1.4 изучено взаимное расположение этих дуг. Как следствие, бифуркационные диаграммы, приведенные на рисунках, иллюстрирующих теорему 4, не единственные возможные. Возможны также любые “шевеления” этих диаграмм, допускающие всевозможные пересечения кривых друг с другом, удовлетворяющие леммам 12–16.

1.5 Случай общего положения

В предыдущих параграфах мы полностью исследовали устройство бифуркационной диаграммы для систем на многообразиях вращения. Наша дальнейшая цель — научиться по бифуркационной диаграмме восстанавливать бифуркационный комплекс (см. определение 22). Напомним, что в главе 1.4 были описаны всевозможные типы взаимного расположения бифуркационных кривых. Однако некоторые неустойчивые конфигурации дуг бифуркационной диаграммы (т.е. те конфигурации, которые малым шевелением изменяют свой тип) мы рассматривать не будем. Для этого ниже мы определим случай общего положения. Рассматривая случай общего положения, мы отбрасываем те ситуации, когда бифуркационная диаграмма неустойчива относительно малых шевелений.

Напомним, что такое бифуркационный комплекс. Он является обобщением понятия бифуркационной диаграммы. Заметим, что в образе отображения момента могут быть регулярные значения (h, k) , которым соответствует более чем одна связная компонента (тор) интегрального многообразия $M_{h,k} = \Phi^{-1}(h, k)$. Это можно интерпретировать следующим образом: над точкой (h, k) имеется несколько различных *листов* области возможных значений интегралов. Ясно, что эти листы могут склеиваться только вдоль бифуркационных дуг. Совокупность склеенных листов и дуг назовем *бифуркационным комплексом* (подробнее см. в работах А.Т.Фоменко [2], [3]). Дадим теперь строгое определение.

Определение 22 (А.Т.Фоменко) *Топологическое пространство, точками которого являются связные компоненты интегральных многообразий $M_{h,k}$, с естественной фактортопологией, называется бифуркационным комплексом (т.е. бифуркационный комплекс получается из многообразия M^4 при отождествлении в точку каждой связной компоненты интегральных многообразий $M_{h,k}$).*

Дадим теперь другое, более общее определение бифуркационного комплекса, также введенное А.Т.Фоменко (см. работы А.Т.Фоменко [2], [3], а также работу А.Т.Фоменко и А.Ю.Коняева [16]).

Пусть (M^{2n}, ω) — гладкое симплектическое многообразие, $v = \text{sgrad}H$ — гладкая вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с функционально независимыми и попарно коммутирующими первыми интегралами $f_1 = H, \dots, f_n$. Рассмотрим слоение Лиувилля данной системы. Точки $x, y \in M^{2n}$ назовем *эквивалентными*, если $f(x) = f(y)$ для любого интеграла f системы $v = \text{sgrad}H$. Таким образом, слои слоения Лиувилля являются классами описанной эквивалентности точек многообразия M^{2n} . Рассмотрим множество Z — дополнение к множеству всех регулярных слоев слоения в M^{2n} . Множество Z замкнуто и может быть представлено в виде объединения слоев размерности не более n .

Определение 23 (А.Т.Фоменко) *Рассмотрим топологическое пространство S^n , точками которого являются:*

- 1) *регулярные торы Лиувилля (из слоения Лиувилля);*
- 2) *связные компоненты множества Z .*

Полученное пространство S^n называется бифуркационным комплексом.

Пространство S^n является хаусдорфовым и почти во всех своих точках имеет структуру n -мерного многообразия. Поэтому без ограничения общности пространство S^n можно рассматривать как стратифицированное многообразие с особенностями.

Отметим, что если функция Гамильтона H нерезонансная (т.е. почти каждый тор Лиувилля является замыканием любой интегральной траектории, принадле-

жащей этому тору), то стратифицированное многообразие C^n с особенностями не зависит от конкретного выбора образующих группы $\mathbb{R}^n$, то есть не меняется, если вместо исходных интегралов $f_1, \dots, f_n$ мы возьмем новый набор функций $g_1, \dots, g_n$, каждая из которых может быть выражена через исходные функции (подробнее см. работу А.Т.Фоменко и А.Ю.Коняева [16]).

Второе определение бифуркационного комплекса является более общим и отражает его важное свойство: инвариантность относительно описанного выше выбора первых интегралов. Однако, так как в нашей задаче первые интегралы фиксированы, то мы можем пользоваться и первым определением бифуркационного комплекса.

Бифуркационный комплекс является удобным инструментом для исследования топологии интегрируемых гамильтоновых систем. Понятие бифуркационного комплекса было использовано в опубликованных работах по исследованию интегрируемых гамильтоновых систем, например, в работе А.Ю.Москвина [32], а также в работе А.В.Болсинова, А.В.Борисова, И.С.Мамаева [11].

Определение 24 *Опишем случай общего положения, то есть те возможности взаимного расположения дуг, которые мы далее будем рассматривать:*

- 1) *число кривых, из которых состоит бифуркационная диаграмма, конечно;*
- 2) *число точек возврата на бифуркационных кривых конечно;*
- 3) *точек, в которых трансверсально пересекаются и самопересекаются бифуркационные кривые, конечное число;*
- 4) *в любой точке на бифуркационной диаграмме могут пересекаться только две бифуркационные дуги, причем пересечение трансверсально (см. лемму 17 ниже);*
- 5) *запрещено полное или частичное наложение бифуркационных кривых.*

Отметим, что пункты 1) и 2) следуют из теорем предыдущих параграфов.

В дальнейшем будем предполагать, что исследуемые нами системы — это системы общего положения (однако, в ситуациях, когда это не затрудняет исследования,

пункты 4) и 5) мы запрещать не будем).

Доказательство следующей леммы является достаточно простым, поэтому мы его опустим.

Лемма 17 *Малым гладким изменением функций $f(r)$ и $V(r)$, задающих систему на многообразии вращения, можно добиться того, чтобы в каждой точке на бифуркационной диаграмме трансверсально пересекались или самопересекались не более, чем две бифуркационные дуги.*

Исследуем подробнее пункт 5). Если на бифуркационной диаграмме возникает наложение двух дуг, то в прообразе точек, где возникает наложение, может происходить две вещи: либо происходит “удвоение атома” (например, в точках, где накладываются друг на друга две дуги типа B , в прообразе мы имеем атом $2B$), либо возникает более сложная особенность — она называется “вилкой” (см. книгу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]). То есть в общем случае по бифуркационной диаграмме с частичным наложением двух дуг невозможно определить, как устроен прообраз накладывающихся друг на друга участков кривых. Однако в системах на многообразиях вращения на этот вопрос всегда можно дать однозначный ответ.

Лемма 18 *Фазовое пространство натуральной механической системы на многообразии вращения не допускает особенности типа “вилка”.*

Доказательство. Эффективный потенциал системы, имеющей особенность типа “вилка”, локально выглядит и ведет себя следующим образом: при некотором $k = k_0$ эффективный потенциал имеет один локальный минимум. Затем при увеличении k до $k = k_1$ этот локальный минимум распадается в три локальных экстремума, идущие в следующем порядке: минимум, максимум и минимум, причем значения в локальных минимумах совпадают. При дальнейшем увеличении k от k_1 до k_2 картинка качественно остается такой же.

Например, эта ситуация описывается функцией следующего вида (ε — параметр):

$$f(x) = x^2 \cdot (x^2 - \varepsilon).$$

Однако, для систем на многообразиях вращения такая ситуация невозможна. Эффективный потенциал $U_k(r)$ должен вести себя так же, как функция из примера. Т.е. уравнение $U'_k(r) = 0$:

$$\frac{f^3(r)V'(r)}{f'(r)} = k^2$$

должно иметь один корень при $k = k_0$, а, начиная с некоторого $k_1 > k_0$ — сразу три корня. Такое невозможно в силу указанной зависимости уравнения от параметра k . $\square$

Следствие 3. *Если две бифуркационные дуги для системы на многообразии вращения частично накладываются друг на друга, это всегда означает, что частично совпадающие дуги дают в прообразе атом $2A$ или $2B$.*

Такую бифуркационную диаграмму можно построить следующим образом: пусть при $r \in (r_1, r_2)$ на бифуркационной диаграмме имеем дугу типа “клюв”; определим при $r \in (r_3, r_4)$ функции $f(r)$ и $V(r)$ так, что при $r \in (r_3, r^*)$, $r^* < r_{min}$, где r_{min} — точка возврата клюва, определенного на интервале (r_1, r_2) , функции $f(r)$ и $V(r)$ совпадают с функциями $f(r)$ и $V(r)$ на первом указанном интервале. Затем доопределим на (r^*, r_4) функции $f(r)$ и $V(r)$ так, чтобы функция $k(r)$ имела единственный локальный минимум на (r_3, r_4) . Тогда получим бифуркационную дугу типа “клюв” и бифуркационную диаграмму типа “вилка”. Исходя из леммы, при наложении бифуркационных дуг имеем атом $2B$.

Замечание. Ситуация, когда на бифуркационной диаграмме системы на многообразии вращения возникает частичное наложение двух дуг, неустойчивая (наложение дуг можно перевести в пересечение дуг малым шевелением функции $U_k(r)$). Однако, в этом случае по бифуркационной диаграмме можно однозначно восстановить бифуркационный комплекс, поэтому, когда это не затрудняет исследования, этот случай мы запрещать не будем.

На рисунке 15 показан пример бифуркационной диаграммы общего вида.

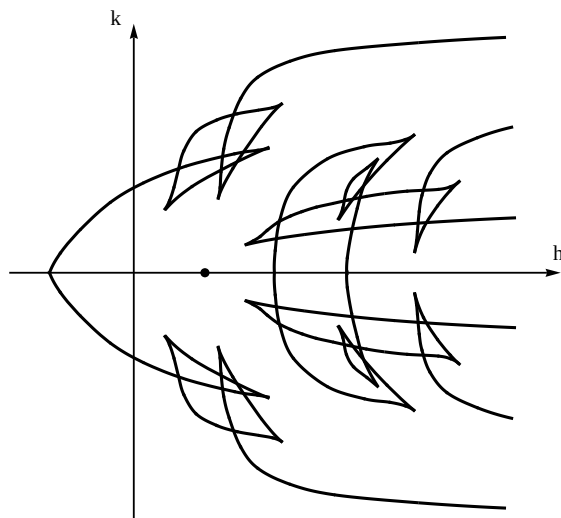


Рис. 15: пример бифуркационной диаграммы общего вида.

1.6 Алгоритм построения бифуркационного комплекса исследуемой системы

Чтобы построить бифуркационный комплекс, анализа только бифуркационной диаграммы недостаточно. Необходимо пользоваться также свойствами эффективного потенциала. Напомним, что эффективный потенциал — это следующая функция:

$$U_k(r) = \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r).$$

Чтобы построить бифуркационный комплекс, а затем меченую молекулу, воспользуемся следующим алгоритмом (пункты алгоритма проиллюстрированы на примере, изображенном на рис.16 и рис.17):

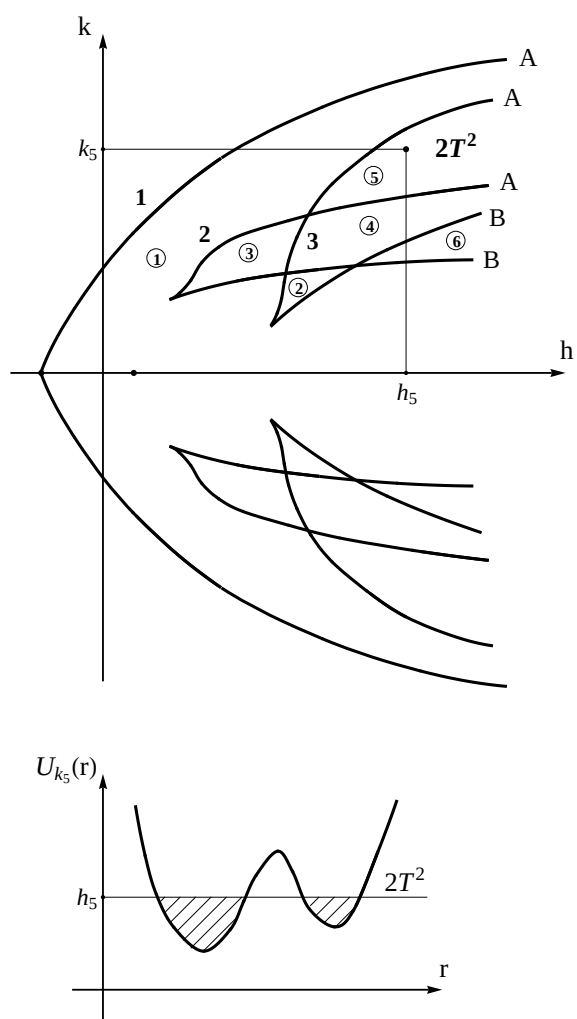


Рис. 16: иллюстрация к алгоритму построения бифуркационного комплекса (начало).

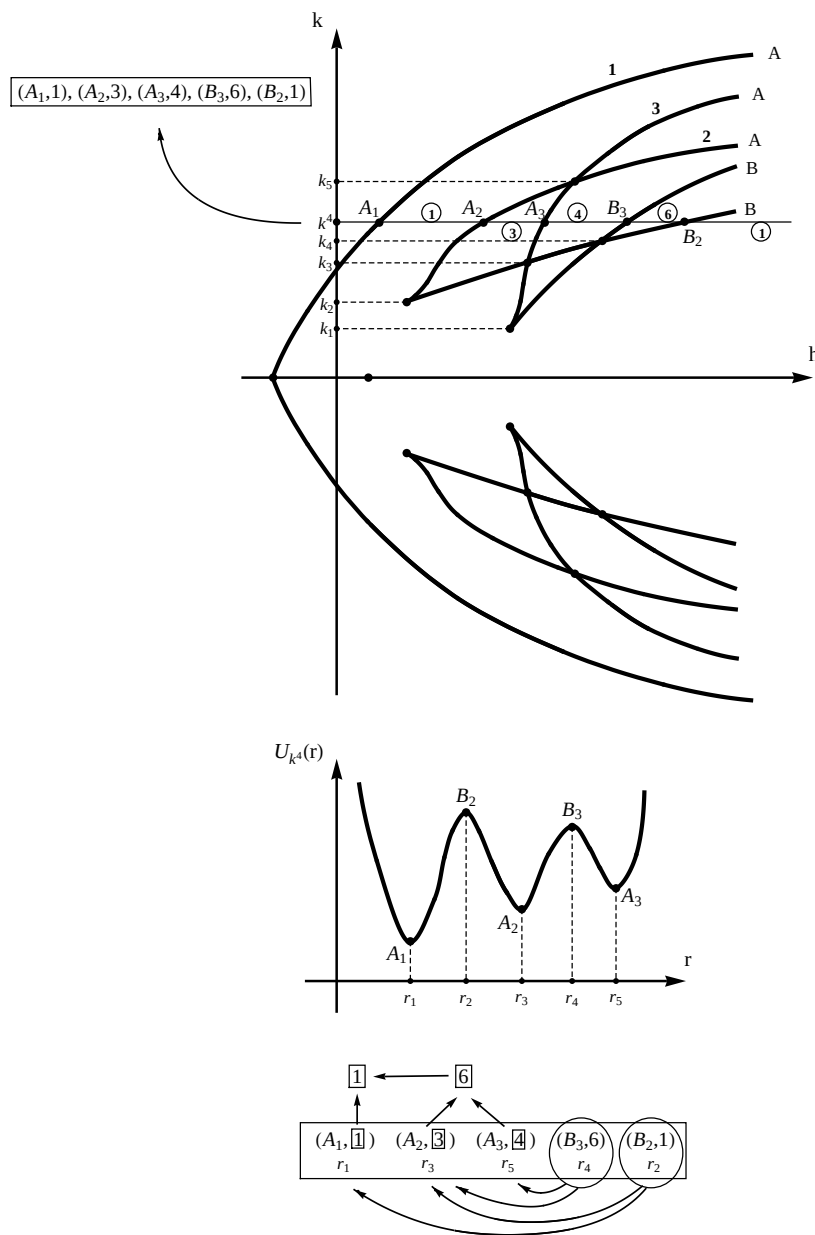


Рис. 17: иллюстрация к алгоритму построения бифуркационного комплекса (конец).

Шаг 1. Строим бифуркационную диаграмму (БД).

Шаг 2. Нумеруем дуги бифуркационной диаграммы следующим образом: дуга, определенная на интервале (r_1^i, r_2^i) имеет номер i . Отмечаем номера дуг на бифур-

кационной диаграмме.

Шаг 3. Определяем типы всех дуг и поддуг (ставим буквы A или B около каждой дуги или поддуги).

Шаг 4. Исследуем, есть ли совпадающие дуги на БД: для каждой дуги БД возьмем по одному регулярному значению k_i , не являющемуся значением интеграла K в точках пересечения дуг БД; строим $U_{k_i}(r)$.

Если для дуги (для соответствующего интервала изменения параметра r) $U_{k_i}(r)$ имеет два (или больше) совпадающих по значению локальных максимума (или минимума), то согласно утверждению 2 (см. ниже) эта дуга наложена на себя два (или, соответственно, больше) раза и имеет тип $2A$ или $2B$ (в общем случае, mA или mB). Отмечаем эти типы на бифуркационной диаграмме.

Шаг 5. Бифуркационная диаграмма разбивает образ отображения момента на конечное число связных областей (здесь *областью* называем часть плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, ограниченную бифуркационными кривыми, внутренность которой состоит из регулярных значений отображения момента). Нумеруем эти области в произвольном порядке (ставим номер в каждую область). Берем произвольное регулярное значение (h_i, k_i) для области с номером i и строим $U_{k_i}(r)$. Отмечаем на графике линию $h_i = \text{const}$ и считаем количество связных областей, лежащих под графиком функции $U_{k_i}(r)$ — это число является числом торov в прообразе области с номером i . Эту операцию проводим для каждой области. В результате нам становится известно число торov, лежащих в прообразе каждой области.

Шаг 6. Если на бифуркационной диаграмме есть дуга или поддуга типа B , это означает, что соответствующий этой дуге лист бифуркационного комплекса приклеен к комплексу по этой поддуге. Необходимо определить, к какому именно листу комплекса приклеивается дуга типа B . Для этого:

а) отметим значения $\{k_i\}$ всех точек пересечения и самопересечения бифуркационных дуг, а также всех точек возврата; пусть эти значения — $k_0, k_1, \dots, k_N$ ($k_0 = 0$);

б) выберем на каждом интервале (k_i, k_{i+1}) произвольное значение $k^i : k^1, k^2, \dots, k^N$

(здесь $k^N = k_N + \varepsilon$ — значение k , для которого существуют точки в образе отображения момента) и построим все функции $U_{k^i}(r)$;

с) проведем прямую $k^i = \text{const}$ и отметим точки пересечения этой прямой с бифуркационными дугами. Пронумеруем эти точки следующим образом: если прямая пересекается с поддугой номер i типа A , то точку пересечения называем A_i (аналогично — B_i);

d) выписываем последовательно эти точки по возрастанию значения энергии h : получаем некоторую последовательность, например, $A_1 A_2 A_3 B_3 B_2$ (эта последовательность означает, что мы пересекли дуги бифуркационной диаграммы с номерами 1, 2, 3, а также их поддуги типов A и B);

e) строим функцию $U_{k^i}(r)$ и обозначаем минимумы и максимумы на графике соответствующим образом: каждому минимуму присваиваем соответствующее обозначение A_i , каждому максимуму — B_j ;

f) на прямой k^i между точками пересечения этой прямой с бифуркационными дугами отметим номера соответствующих связных областей; теперь каждому обозначению дуги A_i (или B_i) ставим в соответствие номер области, лежащий на отрезке справа от точки A_i . Получаем набор пар, состоящих из обозначения дуги и области, например:

$$(A_1, 1), (A_2, 3), (A_3, 4), (B_3, 6), (B_2, 1).$$

g) выпишем значения параметра r для каждого локального экстремума. Нумеруем их по возрастанию $r : r_1 < r_2 < \dots$; таким образом, каждому локальному экстремуму соответствует его обозначение A_i и число r_j ;

h) для каждого k^i мы получили набор троек, например:

$$(A_1, 1); r_1, (A_2, 3); r_3, (A_3, 4); r_5, (B_3, 6); r_4, (B_2, 1); r_2.$$

Теперь рассмотрим каждую тройку, содержащую обозначение B_j : например $(B_j, n); r_k$. Находим тройки $(A_p, a); r_{k-1}$ и $(A_q, b); r_{k+1}$. Это означает, что торы, “родившиеся” в прообразе областей с номерами a и b , при фиксированном

значении k^i и при дальнейшем увеличении энергии h , при переходе через дугу B_j “склеиваются” в тор, находящийся в прообразе области n : например, области 3 и 4 перешли в область 6, т.е. для приведённого примера поддуга B дуги 3 приклеивается к листу комплекса, образованному дугой 2;

i) проделываем пункты а)–h) для каждого значения k^i и в результате узнаём, какие листы комплекса приклеиваются друг к другу по поддугам типа B , то есть полностью восстанавливаем бифуркационный комплекс.

Докажем утверждение 2, которым мы пользуемся в четвертом шаге алгоритма.

Утверждение 2 *Фиксируем значение интеграла $k = k_i$. Если для дуги (для соответствующего интервала изменения параметра r) функция $U_{k_i}(r)$ имеет s совпадающих по значению локальных максимумов (или минимумов), то эта дуга наложена на себя s раз и имеет тип sA или sB .*

Доказательство. Пусть $s = 2$. Если выполнены условия утверждения для значений r_i и r_j параметра r , то в точке $(h(r_i), k(r_i))$ соответствующая дуга бифуркационной диаграммы “удваивается”. В силу гладкости дуги и функции $U_{k_i}(r)$ дуга “удваивается” во всех её регулярных точках (аналогичная ситуация возникает в случае совпадения s локальных максимумов или минимумов).□.

Бифуркационный комплекс (его половина, соответствующая значениям $k > 0$) и его проекция на бифуркационную диаграмму, которая приведена для иллюстрации алгоритма, показаны на рисунке 18.

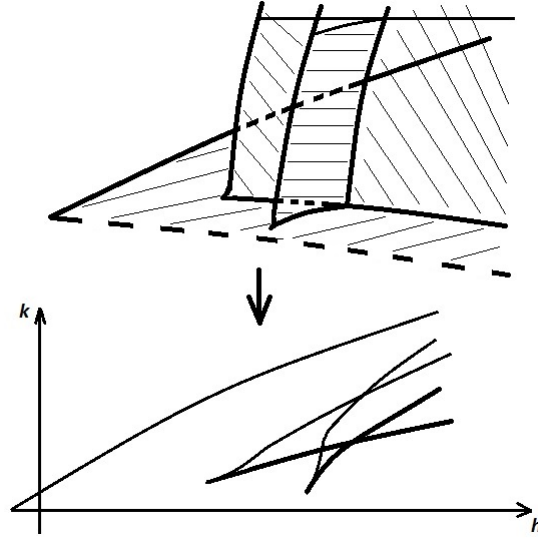


Рис. 18: верхняя часть бифуркационной диаграммы ($k > 0$) для модельного примера системы на многообразии вращения и возможный вид бифуркационного комплекса, отвечающего этой бифуркационной диаграмме (ее верхней части).

1.7 Построение грубой молекулы системы на неособой изоэнергетической поверхности

Если для исследуемой системы построен бифуркационный комплекс, то по нему можно построить грубую молекулу (без меток). Однако, построение молекулы возможно не для каждой изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Напомним, что теория топологической классификации применима только к системам, ограниченным на неособые изоэнергетические поверхности Q_h^3 , т.е. на такие поверхности, где $dH \neq 0$ во всех точках. Изучим подробнее, как записывается условие неособости для исследуемых систем.

Лемма 19 (критерий неособости изоэнергетической поверхности Q_h^3).

Изоэнергетическая поверхность Q_h^3 является неособой тогда и только тогда, когда $h \neq V(0)$, $h \neq V(L)$ и $h \neq V(r_i)$, где $V'(r_i) = 0$.

Доказательство. Обозначим через P множество полюсов, т.е. множество точек $(\bar{x}, \bar{p})$ фазового пространства, таких, что $\bar{x}$ — один из полюсов сферы S^2 .

1) Пусть $k \neq 0$. Запишем dH :

$$dH = \{p_r, \frac{k}{f(r)^2}, -\frac{k^2}{f'(r)f^3(r)} + V'(r), 0\}.$$

Отсюда видно, что вне полюсов $\frac{\partial H}{\partial k} = \frac{k}{f^2(r)} \neq 0$, т.е. поверхность Q_h^3 неособая.

2) Покажем, что в полюсе P любая точка из Q_h^3 неособая, если и только если $h \notin \{V(0), V(L)\}$.

Из предыдущего

$$H|_P = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(0) = E.$$

Тогда при $E > V(0)$ существует окружность полюсов $P \cap Q_h^3$ ($p_x^2 + p_y^2 = E - V(0)$), значит, $dH|_{P \cap Q_h^3} = \{p_x, p_y, 0, 0\} \neq 0$. Значит, Q_h^3 — неособая поверхность в P .

Пусть теперь $E = V(0)$. Тогда существует единственный полюс, являющийся положением равновесия (следовательно, точкой ранга 0), т.е. $P = \{0, 0\}$, и $dH|_{P \cap Q_h^3} = 0$. Следовательно, Q_h^3 — особая поверхность.

Наконец, пусть $E < V(0)$. Тогда $P \cap Q_h^3 = \emptyset$, т.е. Q_h^3 — неособая поверхность в полюсах.

3) Пусть теперь $k = 0$, рассмотрим случай вне полюсов. Имеем $dH = \{p_r, 0, V'(r), 0\}$. Тогда точка $(p_r, k, r, \varphi) \in Q_h^3$ — особая тогда и только тогда, когда $(p_r = 0 \Rightarrow E = V(r) \text{ и } V'(r) = 0)$. Следовательно, Q_h^3 — неособая поверхность в окрестности $Q_h^3 \cap \{k = 0\}$ тогда и только тогда, когда $E \neq V(r_i), V'(r_i) = 0$. Точек r_i конечное число, т.к. $V(r)$ — функция Ботта, $V(r) \neq \text{const}$. $\square$

Лемма 20 Пусть Q_h^3 — неособая изоэнергетическая поверхность. Тогда $k|_{Q_h^3}$ — функция Ботта тогда и только тогда, когда в любой точке $\{0, k_i, r_i, \varphi\}$, лежащей на критической окружности, имеем $U''_{k_i}(r_i) \neq 0$. Это условие эквивалентно следующему: прямая $h = \text{const}$ не проходит через точки возврата.

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием леммы 8, а именно, эквивалентности условий 1) и 4) леммы, так как боттовость ин-

теграла K на Q_h^3 означает, по определению, невырожденность всех критических окружностей на уровне $H = h$. $\square$.

Исходя из доказательства, получаем, что поверхность Q_h^3 неособая тогда и только тогда, когда $U''_{k_i}(r_i) \neq 0$. А это, в свою очередь, означает, что поверхность неособая при $h \neq h^*$, где h^* — значение энергии h для точек излома.

Во всех дальнейших утверждениях мы будем считать, что энергия h изоэнергетической поверхности Q_h^3 удовлетворяет условиям лемм 19 и 20.

Лемма 21 *Пусть при некотором значении энергии h на бифуркационном комплексе пересекаются s дуг типа B . Тогда на Q_h^3 молекула имеет в соответствующей этой точке вершине атом V_s .*

Доказательство. Разрежем Q_h^3 вдоль поверхности $\{k = 0\}$. Тогда Q_h^3 распадется на два куска: $Q_+ := \{k > 0\}$ и $Q_- := \{k < 0\}$. Заметим, что координата φ не определена только в полюсах, но там $k = 0$, а этот уровень мы выкинули. Каждый из кусков имеет тип прямого произведения. В этом легко убедиться, предъявив глобальное трансверсальное сечение: оно задается уравнением $P_{tr} = \{\varphi = \text{const}\}$. В качестве локальных координат на этом сечении возьмем (r, p_r) . Тогда, так как $\frac{p_r^2}{2} + \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r) = h_0$, то

$$k(r) = \pm \sqrt{(2(h_0 - V(r)) - p_r^2)f^2(r)}.$$

На Q_+ берется знак “+”, на Q_- — знак “−”. Слои слоения Зейферта задаются следующим образом:

$$\{r = \text{const}, k = \text{const}, p_r = \text{const}, \varphi \in \mathbb{Z} \bmod 2\pi\},$$

φ — параметр на слое-окружности. Следовательно, слоение Лиувилля получается путем прямого умножения на окружность (слой расслоения Зейферта) одномерного слоения на трансверсальном сечении P_{tr} , задаваемого линиями уровня функции k . Т.е. слоение Лиувилля полностью задается функцией $(2(h_0 - V(r)) - p_r^2)f^2(r)$.

Функция k — функция Ботта на неособых поверхностях Q_h^3 , где прямая $h = \text{const}$ не проходит через точки возврата бифуркационных кривых.

Так как на бифуркационном комплексе в одной точке пересекаются s кривых, то при $r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_s$ значения функции $U_k(r)$ в локальных максимумах совпадают, т.е. $U_k(r_1) = U_k(r_2) = \dots = U_k(r_s)$.

Касательный вектор к бифуркационным дугам всегда лежит в первой или третьей четверти, поэтому неважно, меняем мы координату h или k для построения фазового портрета системы. Будем рассматривать U_k при фиксированном значении интеграла k . Если число максимумов — это s , то пересечение прямой $h \geq h_0$ с надграфиком U_k состоит из одной компоненты связности. При $h < h_0$ пересечение с надграфиком имеет $s + 1$ компоненту связности. Это соответствует перестройке $s + 1$ торов Лиувилля в один тор Лиувилля при переходе через особый слой.

Локально имеем структуру тривиального слоения (с параметром φ на слое-окружности). При фиксированном φ имеем двумерное слоение на плоскости (r, p_r) (см. рисунок 19), которое дает нам атом V_s . $\square$.

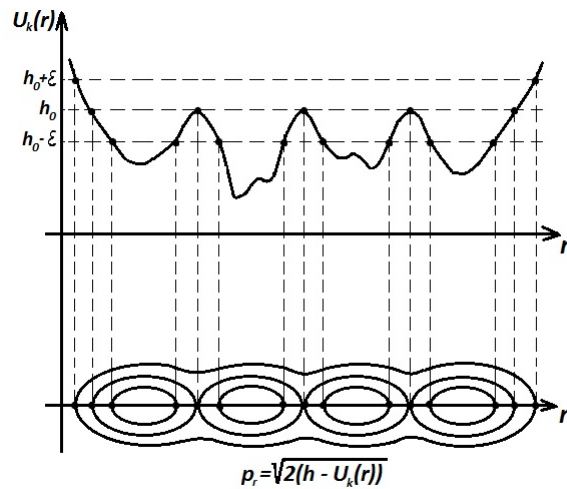


Рис. 19: верхний рисунок: график функции $U_k(r)$; нижний рисунок: график функции $p_r(r) = \sqrt{2(h - U_k(r))}$, задающей двумерное слоение.

Теорема 5 (классификация молекул). Рассмотрим систему на многообразии вращения, заданную парой функций $(f(r), V(r))$. Пусть $Q \subseteq Q_h^3$ — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой k — функция Ботта. Тогда молекула системы на Q симметрична (без учета ориентации на ребрах) относительно оси h , а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания k . Т.е. молекула имеет вид $W - W$, где каждая W — это либо один атом A , либо дерево. Все неконцевые вершины дерева — это седловые атомы V_l , а концевые вершины имеют тип A . При этом при $k > 0$ входящее ребро для каждого атома V_l одно, а исходящих l (при $k < 0$ картина антисимметрична, т.е. без учета ориентации на ребрах молекула $W - W$ симметрична относительно оси h , однако ориентация на кусках $W_+ = W(k > 0)$ и $W_- = W(k < 0)$ противоположна, см.рис.21).

Доказательство. Доказательство вытекает из анализа бифуркационной диаграммы и из леммы 21.□.

Замечание. Атомы $V_l \neq B$ возникают на Q , если при $H = h$ происходит наложение нескольких бифуркационных дуг типа B и пересечение соответствующих листов бифуркационного комплекса.

1.8 Вычисление меток для систем на многообразии вращения

Утверждение 3 Регулярная изоэнергетическая поверхность Q_h^3 имеет структуру локально тривиального расслоения со слоем окружность, согласованного со слоением Лиувилля, т.е. слои-окружности содержатся в слоях слоения Лиувилля.

Доказательство. Напомним, что фазовое пространство T^*S^2 в каждой точке, кроме полюсов, имеет координаты (r, φ, p_r, k) , где (r, φ) — координаты на конфигурационном пространстве S^2 . Слои-окружности вне полюсов задаются следующим

образом: $\{r = \text{const}, p_r = \text{const}, k = \text{const}, \varphi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z}\}$. Очевидно, что каждая такая окружность лежит на одном слое слоения Лиувилля, т.к. первые интегралы не зависят от φ .

Если траектория проходит через полюс, то чтобы получить слой-окружность, вращаем кокасательное пространство в полюсе. Так как S^1 -действие задается вращением конфигурационного пространства, то если точка фазового пространства проектируется в полюс (при этом скорость $v \neq 0$, так как $k = 0, v = 0$ может быть только в особых точках ранга 0, а мы рассматриваем только регулярные поверхности Q_h^3 , т.е. поверхности, не содержащие особых точек ранга 0), то S^1 -действие задает вращение кокасательного пространства в полюсе. $\square$.

Отметим, что локально-тривиальное расслоение со слоем S^1 является расслоением Зейферта без особых слоев.

Теорема 6 (классификация меченых молекул). Пусть Q^3 — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Пусть $W - W$ — молекула системы на Q^3 .

- a) Метки на ребрах типа $A - V_l$ молекулы: $r = 0, \varepsilon = +1$.
- b) Метки на ребрах типа $V_s - V_l$, где оба седловых атома находятся в одной полуплоскости ($k > 0$ или $k < 0$): $r = \infty, \varepsilon = +1$.
- c) Метки на центральном ребре типа $V_l - V_l$ (симметричном относительно прямой $k = 0$): $r = \infty, \varepsilon = -1$.
- d) Если молекула $W - W$ имеет вид $A - A$, то метка r определяется следующим образом: разрежем многообразие M^4 по поверхности Q^3 на два куска M_-^4 и M_+^4 (напомним, что Q^3 — связная компонента Q_h^3). Кусок M_-^4 , который отвечает строго меньшим значениям энергии, чем h , может содержать 2, 1 или 0 особых точек ранга ноль. Тогда соответственно $r = \frac{1}{2}, r = 0$ или $r = \infty$. Во всех трёх случаях $\varepsilon = +1$.
- e) Если молекула $W - W$ отлична от $A - A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A . Метка n в этом случае равна

числу особых точек ранга ноль на многообразии M_-^4 (см. пункт d)).

Доказательство. а) Для вычисления меток нам необходимо выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов. Напомним правила их выбора. Пусть сначала 3-атом имеет тип A , т.е. является полноторием. Тогда в качестве первого базисного цикла λ берётся меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория. В качестве второго цикла μ берётся произвольный цикл, дополняющий λ до базиса. Цикл μ можно считать слоем расслоения Зейферта (его ориентация определяется естественным образом ориентацией гамильтонова потока на критической окружности). Ориентация цикла λ выбирается так, чтобы пара (λ, μ) была положительно ориентирована.

Рассмотрим случай седлового 3-атома V_l . Он имеет структуру тривиального S^1 -расслоения над двумерной поверхностью. В качестве первого базисного цикла λ возьмем слой этого расслоения (с естественной ориентацией). Теперь рассмотрим произвольное сечение 3-атома. Оно высекает на каждом граничном торе некоторый цикл, который мы и возьмем в качестве второго базисного цикла μ .

Вычислим теперь метки r и ε на ребре $A - V_l$. Второй цикл μ_1 около атома A — это слой расслоения Зейферта. Первый (выделенный) цикл λ_2 около седлового атома — это также слой расслоения Зейферта. Так как расслоение Зейферта глобально, то $\lambda_2 = \mu_1$ (оба конца ребра $A - V_l$ соответствуют одной полуплоскости $k > 0$ (или $k < 0$), поэтому вдоль соответствующих атомам особых траекторий значение φ ведёт себя одинаково: либо возрастает, либо убывает в обоих случаях. Следовательно, ориентации циклов λ_2 и μ_1 совпадают). Получаем

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь (λ_1, μ_1) — базис на торе около атома A , а (λ_2, μ_2) — базис на торе около атома V_l . Первый элемент во второй строке матрицы склейки равен 1, т.к. определитель матрицы равен -1 . Отсюда сразу получаем метки: $r = 0$, $\varepsilon = +1$.

б) Вычислим теперь метки на ребре $V_s - V_l$, где оба конца ребра лежат в одной и той же полуплоскости ($k > 0$ или $k < 0$).

Так как первые базисные циклы вблизи седловых атомов — это слои (глобального) расслоения Зейферта, то они совпадают. Получаем матрицу склейки

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что метка r равна ∞ , а метка ε равна $+1$.

На ребре $V_l - A$ матрица склейки является обратной к данной. Метки r и ε для данной матрицы останутся такими же.

с) Вычислим метки на ребре $V_l - V_l$, симметричном относительно прямой $k = 0$.

Так как при $k > 0$ движение по параллелям происходит в сторону возрастания φ , а при $k < 0$ — в сторону убывания φ , то первые базисные циклы вблизи ребер V_l — это слои расслоения Зейферта, однако они направлены в противоположные стороны. Поэтому матрица склейки следующая:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Значит, метки такие: $r = \infty$, $\varepsilon = -1$.

д) Осталось вычислить метку на ребре $A - A$ молекулы. Для доказательства этого пункта нам понадобится несколько вспомогательных фактов. Сформулируем и докажем их и, пользуясь ими, докажем пункт d) теоремы.

Утверждение 4 *Разрежем фазовое пространство T^*S^2 системы на многообразии вращения вдоль связной компоненты Q^3 изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Тогда оно распадется на два связных куска, причем ровно один из них будет соответствовать энергиям, строго меньшим h (назовем его M_-^4 , а второй кусок — M_+^4).*

Доказательство. Рассмотрим сечение бифуркационного комплекса уровнем $\{k = 0\}$. Это сечение является связным графом G_{goriz} , у которого каждое ребро ориен-

тировано по возрастанию энергии. Из анализа графика эффективного потенциала сразу следует, что из каждой вершины этого графа выходит ровно одно ребро.

Разрезание комплекса по неособой связной компоненте Q^3 означает, что мы разрезаем некоторое ребро графа G_{goriz} . Ясно, что при этом граф распадется на два связных куска.

Также рассмотрим связную компоненту сечения бифуркационного комплекса уровнем энергии $\{h = h_0\}$. Она является связным графом $G_{vertic}^{h_0}$, каждая половина которого имеет такую же структуру: если ориентировать его ребра по возрастанию на них абсолютного значения интеграла K , то в каждую вершину будет входить ровно одно ребро.

Возьмем произвольную точку на комплексе и для энергии h_0 этой точки построим граф $G_{vertic}^{h_0}$. Спустим (поднимем) эту точку по построенному графу на уровень $k = 0$, т.е. на граф G_{goriz} . Она попадет на одну из двух связных компонент графа G_{goriz} . Тем самым, на всех точках комплекса без образа Q^3 можно ввести отношение эквивалентности. Две точки эквивалентны, если они после описанной процедуры попадают в одну компоненту разрезанного графа G_{goriz} . Соответственно, и $M^4 \setminus Q^3$ распадается на два связных подмножества: каждое множество состоит из всех тех точек, чьи образы на комплексе эквивалентны.

Однако само $M^4 \setminus Q^3$ при этом не связно. Действительно, рассмотрим по точке из каждого связного куска. Предположим, что их можно соединить каким-то путем. Стянем этот путь по вертикальным графам на горизонтальный граф. Его концы, тем самым, окажутся в разных связных компонентах разрезанного графа G_{goriz} и, следовательно, не могут быть соединены непрерывным путем. $\square$.

Лемма 22 *Топологический тип связной компоненты Q^3 изоэнергетической поверхности Q_h^3 определяется количеством особых точек ранга 0 на M_-^4 .*

Доказательство. Будем проецировать Q_h^3 на сферу S^2 при помощи проекции, определяющей касательное расслоение к сфере. Для изучения проекции нам понадобится график потенциала, т.е. функции $V(r)$.

Напомним, как устроена проекция. Для фиксированного значения энергии $h = h_0$ в точку (r, φ) на сфере при проекции переходят все точки фазового пространства (r, φ, p_r, k) , удовлетворяющие условию

$$\frac{p_r^2}{2} + \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r) = h_0.$$

То есть если хотя бы одна точка (r, φ, p_r, k) удовлетворяет этому условию, то при данном значении $h = h_0$ точка (r, φ) принадлежит проекции.

1 случай. Функция $V(r)$ монотонна (рис.20а).

Пусть $V(r)$ возрастает на $[a; b]$. Тогда, если $h > h(a)$ ($h < h(b)$), тор Лиувилля проектируется в “шапку” на сфере S^2 (так как в данном случае $V(a) = h(a)$ и нам подходят все значения $r \in [a, r_0]$, такие что $r_0 < b$). Значит, в этом случае $Q^3 \approx S^3$, т.е. метка $r = 0$ (см. книгу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]). При $h > h(b)$ тор Лиувилля проектируется во всю сферу. В этом случае $Q^3 \approx \mathbb{R}P^3$, т.е. метка $r = 1/2$.

2 случай. На $(a; b)$ существуют локальные экстремумы функции $V(r)$ (рис.20б).

В этом случае появляется новый вариант проекции тора Лиувилля на S^2 . Пусть энергия h находится между двумя соседними локальными экстремумами функции $V(r)$, а именно, $h_{min} < h < h_{max}$. Тогда проекция тора Лиувилля на сферу — это кольцо (параметр r может изменяться внутри отрезка $[r_1, r_2]$, где r_1, r_2 — корни уравнения $V(r) = h$). Значит, в этом случае $Q^3 \approx S^1 \times S^2$, следовательно, метка $r = \infty$.

Затем, при увеличении уровня энергии h , при $h > h_{max}$ эффект, возникающий от немонотонности потенциала, пропадает. Например, если, как на рисунке 20б, $h(a)$ — глобальный минимум на $[a; b]$ (на бифуркационной диаграмме это точка ранга 0, соответствующая значению $r = a$), т.е. в малой окрестности точки a , а именно, на интервале $(a, a + \varepsilon)$ поверхность Q^3 — это сфера, то при $h > h_{max}$ поверхность Q_h^3 снова является сферой S^3 .

Отсюда, в частности, следует, что тип поверхности Q^3 до “лунки” на бифуркационной диаграмме, не содержащей особых точек ранга 0, и тип поверхности Q^3

после “лунки”, совпадают. Другими словами, “лунки” не влияют на тип изоэнергетической поверхности. На тип Q^3 влияют только особые точки ранга 0. $\square$

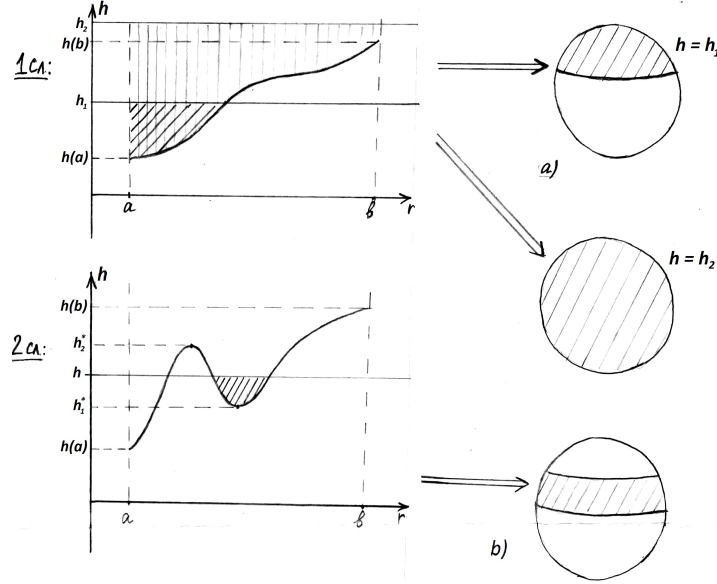


Рис. 20: виды проекций Q_h^3 на сферу S^2 в зависимости от функции $V(r)$.

Вернемся к доказательству пункта d) теоремы.

Метка на ребре $A - A$ полностью определяется топологическим типом поверхности Q_h^3 (см. книгу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]). Напомним, что система на многообразии вращения имеет ровно две особые точки ранга 0 (см. лемму 3). Пусть энергии, соответствующие этим точкам, это h_1 и h_2 , $h_1 < h_2$. Тогда, пользуясь результатами леммы 22, получаем следующее:

если молекула $A - A$ соответствует энергии $h < h_1$, то $Q_h^3 \approx S^1 \times S^2$, значит, метка r равна ∞ ;

при $h_1 < h < h_2$ имеем $Q_h^3 \approx S^3$, поэтому $r = 0$;

при $h > h_2$ изоэнергетическая поверхность $Q_h^3 \approx \mathbb{R}P^3$, а значит, $r = 1/2$.

Во всех случаях можно считать, что метка $\varepsilon = +1$, выбрав подходящую ориентацию Q_h^3 .

Нам осталось доказать пункт е), т.е. вычислить метку n . Для систем на многообразиях вращения метку n можно вычислять только для семьи $V_s - V_l$ ($r = \infty$).

Разрежем многообразие Q_h^3 на две части вдоль поверхности $k = 0$. Оно распадается на два куска: Q_+ и Q_- . Каждый из этих кусков имеет тип прямого произведения (см. книгу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]). Ясно, что склейка Q_+ и Q_- по тору $T_0 = \{H = h, K = 0\}$ дает многообразие Q_h^3 . На конце каждого куска (Q_+ и Q_-) находится седловой атом. Вблизи этого атома первый базисный цикл на торе — это слой расслоения Зейферта. Ясно, что если λ^+ и λ^- — первые базисные циклы на торах в Q_+ и Q_- соответственно, то $\lambda^+ = -\lambda^-$, поэтому матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix},$$

где p — некоторое целое число. Известно, что p полностью определяет фундаментальную группу многообразия Q_h^3 , склеенного из двух полноторий (в данном случае это Q_+ и Q_-), а именно: $\pi_1(Q_h^3) = \mathbb{Z}_p$. Поэтому, если $Q_h^3 \approx S^1 \times S^2$, то $p = 0$. Если $Q_h^3 \approx S^3$, то $p = 1$. Если $Q_h^3 \approx \mathbb{R}P^3$, то $p = 2$.

Теперь, когда мы знаем матрицу склейки на симметричном относительно оси h ребре $V_s - V_l$, мы можем посчитать метку n по определению (см. книгу А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]):

$n = \sum_{\text{исходящие ребра}} \left[\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right] + \sum_{\text{входящие ребра}} \left[-\frac{\delta_i}{\beta_i} \right] + \sum_{\text{внутренние ребра}} \left[-\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right]$. Так как матрица склейки на ребре $A - V_l$ равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix},$$

то матрица склейки на том же ребре $V_l - A$ имеет вид

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что молекула симметрична, но “симметричные” ребра $A - V_l$ и $V_l - A$,

ориентированы противоположным образом, то матрица на ребре $V_l - A$ равна

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, для входящего ребра $A - V_l$ вклад в метку n равен вкладу в метку n от симметричного ему исходящего ребра $V_l - A$, но с противоположным знаком.

Таким образом, вклады в метку n от входящих ребер и от исходящих в сумме дают 0, значит, $n = \sum_{\text{внутренние ребра}} \left[-\frac{\gamma_i}{\alpha_i}\right] = \left[-\frac{p}{-1}\right] = p$. Таким образом, если для Q_h^3 имеем $h < \min\{h_1, h_2\}$, то $n = 0$, если $h_1 < h < h_2$, то $n = 1$, и если $h > \max\{h_1, h_2\}$, то $n = 2$.

Теорема 6 доказана. $\square$.

Мы классифицировали все системы на многообразиях вращения с потенциалом с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Возникает вопрос: все ли системы на многообразиях вращения с потенциалом реализуются в классе систем на поверхностях вращения с потенциалом? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 7 *Для любой системы на многообразии вращения, заданной парой $(f(r), V(r))$, найдется лиувиллево эквивалентная ей система на поверхности вращения. Другими словами, найдутся образующая функция $f_2(r)$, задающая поверхность в $\mathbb{R}^3$, и потенциал $V_2(r)$, такие что система на поверхности вращения, заданная парой $(f_2(r), V_2(r))$, лиувиллево эквивалентна системе, заданной парой $(f(r), V(r))$.*

Доказательство. Рассмотрим систему на многообразии вращения, заданную парой функций $(f(r), V(r))$, $r \in [0; L]$. Согласно лемме 1, $f'(0) = +1$, $f'(L) = -1$. Критерием вложенности многообразия, заданного функцией $f(r)$, в $\mathbb{R}^3$, согласно лемме 2, служит условие $|f'(r)| \leq 1$ на $[0; L]$. Продеформируем функцию $f(r)$ таким образом, чтобы она стала удовлетворять последнему условию с сохранением условия на значения производной в концах отрезка.

1) Нормируем функцию $f(r)$, а именно, поделим функцию на максимальное значение $M = |f'_{\max}|$ ее производной на отрезке $[0; L]$. Получим $f_1(r) = \frac{f(r)}{M}$. Тогда

для функции $f_1(r)$ выполняется условие на модуль производной: $|f_1'(r)| \leq 1$ на $[0; L]$, однако перестает выполняться условие на значения производной в концах отрезка.

2) Так как $f(r)$ и $V(r)$ — функции Морса, то существует $\varepsilon > 0$, такое что в окрестностях $(0, \varepsilon)$ и $(L - \varepsilon, L)$ концов отрезка $[0; L]$ функции $f(r)$ и $V(r)$ монотонны. А именно, $f(r)$ монотонно возрастает на $(0, \varepsilon)$ и монотонно убывает на $(L - \varepsilon, L)$. Заменяем функцию $f_1(r)$ на $[0; L]$ на функцию $f_2(r)$ следующим образом: $f_2(r) = f_1(r)$ на $[\varepsilon, L - \varepsilon]$, $f_2'(0) = +1$, $f_2'(L) = -1$, $f_2(r)$ монотонно возрастает на $(0, \varepsilon)$, причем для всех целых неотрицательных k выполнено: $f_2^{(k)}(\varepsilon) = f_1^{(k)}(\varepsilon)$ (такую функцию $f_2(r)$ можно построить, например, используя склейку с помощью функции e^{-x^2} в окрестности точки $r = \varepsilon$). Аналогичным образом задаем $f_2(r)$ на промежутке $(L - \varepsilon, L)$.

Построенная функция $f_2(r)$ будет удовлетворять обоим требуемым условиям: $|f_2'(r)| \leq 1$ на $[0; L]$ и $f_2'(0) = +1$, $f_2'(L) = -1$.

Однако тип, количество и взаимное расположение бифуркационных кривых определяются поведением эффективного потенциала $U_k(r) = \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r)$ (более точно, поведением его производной, или, что эквивалентно, функцией $\frac{f(r)V'(r)}{f'(r)}$ (см. теорему 4)), т.е. изменив функцию $f(r)$ в окрестностях концов отрезка $[0; L]$, мы могли изменить поведение $U_k(r)$ в этих окрестностях. Поэтому первым шагом нормируем той же константой M потенциал $V(r)$: $V_1(r) = \frac{V(r)}{M}$. Повторим, что так как $f(r)$ и $V(r)$ — функции Морса, то в малых окрестностях $(0, \delta)$, $\delta \leq \varepsilon$ (и $(L - \delta, L)$) концов отрезка поведение функции $U_k(r)$ не изменилось, однако оно могло измениться на промежутках (δ, ε) и $(L - \varepsilon, L - \delta)$. Если это произошло, подправим функцию $V_1(r)$ (получим новую функцию $V_2(r)$) на этих промежутках так, чтобы функции $\frac{f(r)V_1'(r)}{f'(r)}$ и $\frac{f_2(r)V_2'(r)}{f_2'(r)}$ имели одинаковый характер монотонности на этих промежутках.

В результате произведенных изменений над функциями $(f_2(r), V_2(r))$ изменилось расположение кривых, определенных в малых окрестностях концов отрезка, т.е. на промежутках $(0, \varepsilon)$ и $(L - \varepsilon, L)$. Исследуем подробнее эти изменения.

Первый случай: конец отрезка $r = 0$ (и/или $r = L$) — точка типа фокус–фокус. Значит, мы меняли бифуркационную диаграмму в окрестности изолированного особого значения ранга 0. Так как значение изолированное, то при необходимости выберем $\varepsilon_0 < \varepsilon$, такое что на промежутке $(0, \varepsilon_0)$ не определена ни одна бифуркационная дуга. Значит, ни одна бифуркационная дуга (кроме, возможно, дуги на промежутке $(L - \varepsilon, L)$) не изменилась при наших преобразованиях.

Второй случай: конец отрезка $r = 0$ (и/или $r = L$) — точка типа центр–центр. Значит, мы меняли бифуркационную диаграмму в окрестности особого значения ранга 0, соответствующего точке типа центр–центр. Мы знаем, как устроена диаграмма (и комплекс) в окрестности центра: это всегда дуга типа A , содержащая особое значение ранга 0. Поэтому, при наших изменениях в окрестности $(0, \varepsilon)$ могла изменить свое расположение (но не тип) лишь одна бифуркационная дуга — дуга типа A , содержащая изолированное особое значение.

Выясним, как сильно могло измениться местоположение дуги A в случае 2. Бифуркационные дуги задаются параметрическими уравнениями (см. теорему 4). Ключевой функцией в этих уравнениях, как уже было сказано, является $s(r) = f(r)V'(r)/f'(r)$. При нормировке на M поведение этой функции $s(r)$ не меняется, но затем мы подправляем $f'(r)$ — эта функция может сильно изменить поведение функции $s(r)$. Однако на промежутке $(0, \varepsilon)$ имеем следующие ограничения: $f'(0) = +1$, $|f'(r)| \leq 1$ (ясно, что второго условия всегда можно добиться), а также функция $f(r)$ — мала (т.к. мы находимся в малой окрестности ее нуля: $f(0) = 0$), а домножение на близкую к нулю функцию нивелирует возможные изменения функции $s(r)$. Поэтому при изменениях пары $(f(r), V(r))$ на пару $(f_2(r), V_2(r))$ дуга типа A незначительно меняет свое расположение, и можно подобрать такое значение параметра ε , что на интервале $(0, \varepsilon)$ все комбинаторные характеристики диаграммы и комплекса (см. параграф 1.6), т.е. количество и взаимное расположение точек наложения и пересечения бифуркационных дуг, сохранятся, чего мы и добивались.

В результате произведенных изменений мы получили пару $(f_2(r), V_2(r))$, где $f_2(r)$ — образующая поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$, а $V_2(r)$ — потенциал, такую что

система на поверхности вращения, задаваемая этой парой функций, лиувиллево эквивалентна исходной системе $(f(r), V(r))$ на многообразии вращения. $\square$.

Меченая молекула для системы, приведенной для примера в параграфе 6 (алгоритм построения бифуркационного комплекса), показана на рисунке 21.

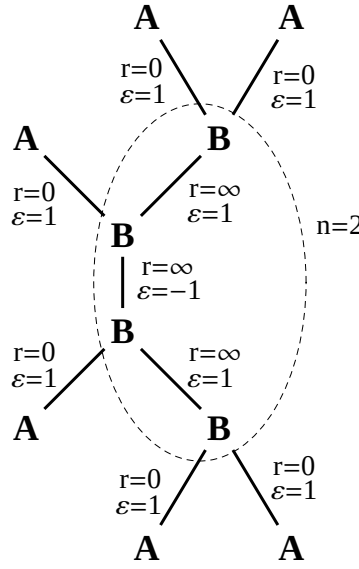


Рис. 21: меченая молекула для системы, приведенной в примере из параграфа 1.6.

Отметим, что часть меток в инварианте Фоменко-Цишанга определяется количеством особых точек ранга 0 на M_-^4 (см. теорему 6, пункты d) и e). Опишем способ, с помощью которого можно определить местонахождение особых точек ранга 0 на бифуркационном комплексе.

Напомним, что особые точки ранга 0 имеют координаты $(h, k) = (V(0), 0)$ и $(h, k) = (V(L), 0)$, т.е. лежат на оси h . Также вспомним, что для определения количества листов комплекса, отвечающих точке (h, k) , необходим анализ графика функции $U_k(r) = \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r)$ (см. параграф 1.6). Следовательно, чтобы определить количество листов бифуркационного комплекса, отвечающих точке $(h, 0)$, лежащей на оси h , нам необходимо изучить поведение функции $U_0(r) = V(r)$, т.е. поведение потенциала.

Напомним, что особые точки ранга 0 для системы на многообразии вращения могут иметь тип фокус-фокус и центр-центр (см. лемму 3). В случае, если точка имеет тип центр-центр, она лежит на бифуркационной дуге в точке, принадлежащей оси h . При этом, так как в точке ранга 0 ($r = 0$ или $r = L$) типа центр-центр выполняется условие $V''(r) = +1$, то в точке r функция $V(r)$ имеет локальный минимум, а потому точка $(V(r), 0)$ лежит на бифуркационной дуге типа А. Теперь сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 5 *Если обе особые точки ранга 0 системы на многообразии вращения имеют тип центр-центр, то эти точки лежат на разных листах бифуркационного комплекса.*

Доказательство. Согласно условию и лемме 3, $V''(0) = V''(L) = +1$, т.е. потенциал имеет в точках $r = 0$ и $r = L$ локальные минимумы. Следовательно, существует точка r_0 локального максимума потенциала на интервале $(0; L)$. А значит, точки ранга 0 находятся в различных областях возможности движения (на рисунке 22 эти области разделены точкой $(r_0, V(r_0))$) и, следовательно, лежат на разных листах бифуркационного комплекса. $\square$.

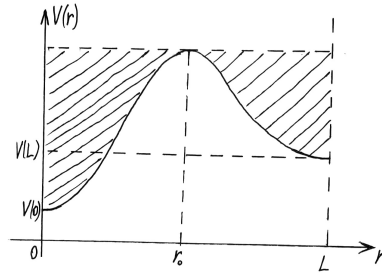


Рис. 22: иллюстрация к утверждению 5.

Сформулируем полезное очевидное утверждение относительно “лунок” и “парабол” на бифуркационной диаграмме.

Лемма 23 Пусть на отрезке $(r_1, r_2) \in [0; L]$ выполнено условие $\operatorname{sgn} V'(r) = \operatorname{const}$, причем $V'(r_1) = V'(r_2) = 0$ (см. рис. 23). Тогда на бифуркационной диаграмме области $[r_1, r_2]$ изменения параметра r соответствуют две бифуркационные дуги: одна — эллиптического типа, одна — гиперболического типа.

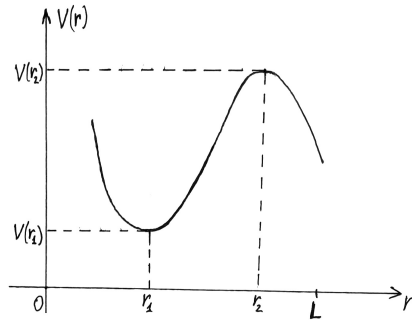


Рис. 23: иллюстрация к лемме 23.

Сформулируем утверждения, напрямую следующие из леммы.

Следствие 1. При возмущении потенциала $V(r)$ методом добавления в него одного локального максимума и одного локального минимума (см. рис. 23), на бифуркационной диаграмме возникают две дуги — дуга типа A и дуга типа B . То есть при указанном возмущении дуги возникают парами. В частности, при малом возмущении потенциала на участке монотонности функции $f(r)$ возникает “лунка”.

Следствие 2. Если на интервале области определения бифуркационных дуг (r_1, r_2) , появившемся при малом возмущении потенциала $V(r)$, имеем $\operatorname{sgn} V'(r) = \operatorname{const}$ и $\operatorname{sgn} f'(r)V'(r) > 0$, то пара возникающих дуг типов A и B образует бифуркационную кривую типа “лунка”.

Следствие 3. Если на интервале области определения бифуркационных дуг (r_1, r_2) , появившемся при малом возмущении потенциала $V(r)$, имеем $\operatorname{sgn} V'(r) = \operatorname{const}$, а функция $f'(r)$ меняет знак на этом интервале, то на бифуркационной диаграмме могут возникнуть следующие наборы дуг: две “параболы” (типов A и

В каждая), “парабола” типа A и дуга “лунки” типа B, либо “парабола” типа B и дуга “лунки” типа A. Типы возникающих дуг определяются поведением функции $f'(r)$ на отрезке $[r_1, r_2]$.

Таким образом, изменяя потенциальную функцию, добавляя в нее бифуркацию, описанную в лемме, а также меняя функцию $f(r)$ (добавляя в нее бифуркации такого же вида), мы можем добавлять в бифуркационную диаграмму дуги всех возможных типов (см. теорему 4). Расположение на диаграмме точек ранга 0 фиксировано. Возникает вопрос: *дают ли точки ранга 0 ограничения на расположение на бифуркационной диаграмме бифуркационных дуг, которые мы можем получить указанными бифуркациями?*

Для ответа на этот вопрос изучим подробнее расположение точек ранга 0 на листах бифуркационного комплекса, а также выясним, дают ли типы точек ранга 0 какие-либо ограничения на расположение бифуркационных дуг на бифуркационной диаграмме. Рассмотрим все возможные случаи.

Сразу отметим, что для того, чтобы получить на бифуркационной диаграмме дугу типа “клюв”, нам необходимо локально изменить только функцию $f(r)$ (например, на отрезке монотонности добавить к функции пару: локальный минимум – локальный максимум, т.к. для наличия клюва на отрезке $[r_1, r_2]$ необходимо выполнение условия $f'(r_1) = f'(r_2) = 0$, см. теорему 4). Следовательно, никаких манипуляций с функцией $V(r)$ для получения “клюва” производить не требуется. Следовательно, “клювы” на бифуркационной диаграмме можно конструировать в любых количествах, а также в любой области образа отображения момента. Далее нас будут интересовать бифуркационные дуги типа “лунка” и “парабола”.

Далее, когда мы будем употреблять словосочетания “возникновение дуги” и “исчезновение дуги”, мы будем иметь в виду возникновение и исчезновение вершины (т.е. точки, лежащей на оси h) соответствующей дуги.

Случай 1. *Точки $(V(0), 0)$ и $(V(L), 0)$ имеют тип центр-центр.*

Точки $r = 0$ и $r = L$ являются локальными минимумами потенциала $V(r)$. Следовательно, существует внутренний локальный максимум $V(r_0)$ потенциала,

$r_0 \in (0; L)$ (см.рис.22). Так как локальному максимуму потенциала отвечает гиперболическая дуга на бифуркационной диаграмме, то получаем следующее утверждение:

Утверждение 6 Пусть система на многообразии вращения имеет две особые точки ранга 0 типа центр-центр. Тогда:

- а) бифуркационная диаграмма содержит по крайней мере две дуги типа А (каждая из которых содержит точку типа центр-центр) и одну дугу типа В;
- б) локально изменяя функции $f(r)$ и $V(r)$ описанным выше способом, мы можем получить бифуркационные дуги типа “лунка” и “парабола” в любой области образа отображения момента (между точками центр-центр (см.рис.24а), правее обеих точек центр-центр (рис.24б) или левее обеих точек центр-центр (рис.24с)).

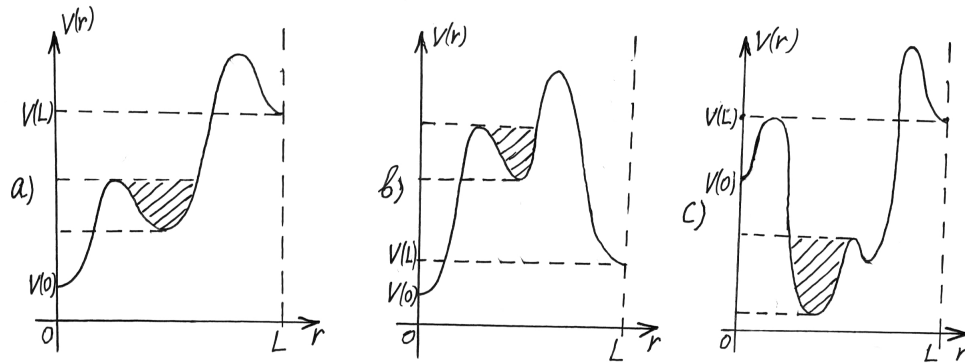


Рис. 24: возможные виды функции $V(r)$ для системы, имеющей две точки типа центр-центр.

Комментарий. Пункт б) утверждения можно переформулировать следующим образом: если система на многообразии вращения содержит две особые точки ранга 0 типа центр-центр, то бифуркационные кривые могут располагаться относительно этих точек любым допустимым (см.теорему 4 и описание случая общего положения в главе 1.5) способом.

Случай 2. Точка $(V(0), 0)$ имеет тип центр-центр, а точка $(V(L), 0)$ имеет тип фокус-фокус.

Если существует значение параметра $r = r_0$, такое что $r_0 \in (0, L)$ и $V(r_0)$ — глобальный максимум потенциала на отрезке $[0; L]$ (см.рис.25), то точки фокус-фокус и центр-центр лежат на разных листах бифуркационного комплекса. Это наблюдение следует из анализа рисунка 25.

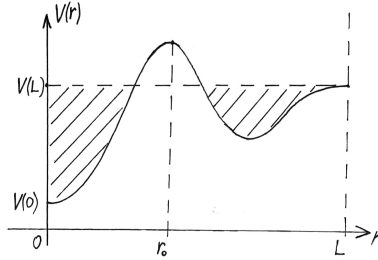


Рис. 25: возможный вид функции $V(r)$ для системы, имеющей одну точку типа центр-центр и одну точку типа фокус-фокус.

Из этого наблюдения вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Если точки центр-центр и фокус-фокус лежат на одном листе бифуркационного комплекса, то все “лунки” и “параболы” возникают (в случае “лунок” — также исчезают) между точками ранга 0 (см.рис.26а, b).

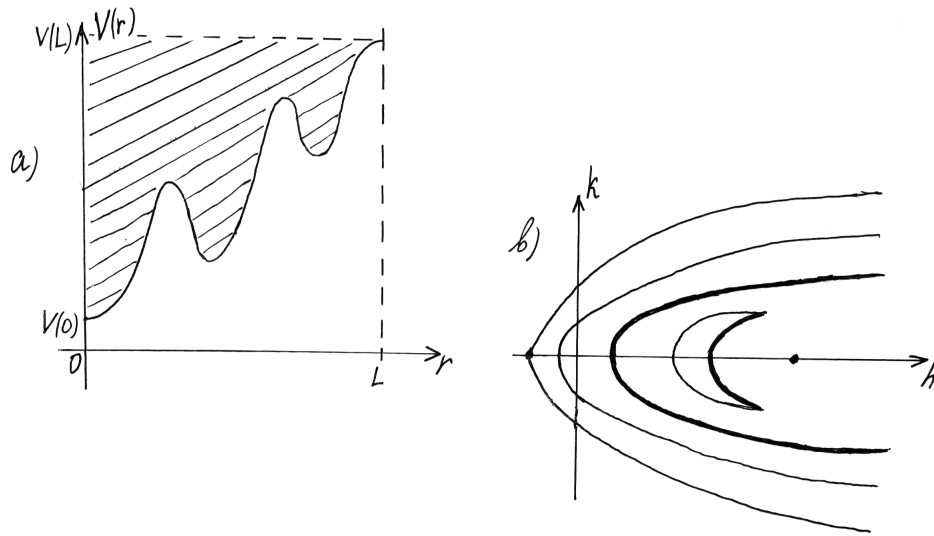


Рис. 26: функция $V(r)$ и бифуркационная диаграмма системы для случая, если точки центр-центр и фокус-фокус лежат на одном листе бифуркационного комплекса.

Следствие 2. Если на бифуркационной диаграмме правее точки фокус-фокус возникают (или исчезают) “лунки” или “параболы”, то точки ранга 0 лежат на разных листах бифуркационного комплекса.

Следствие 3. Если точки ранга 0 лежат на одном бифуркационном листе, то никаким шевелением системы (никакими изменениями функций $f(r)$ и $V(r)$) невозможно получить “лунку” или “параболу”, возникающую (или исчезающую, если соответствующая дуга имеет тип B) правее точки фокус-фокус (другими словами, такую бифуркационную диаграмму не дает никакая пара функций (f, V)) (см. рис. 27).

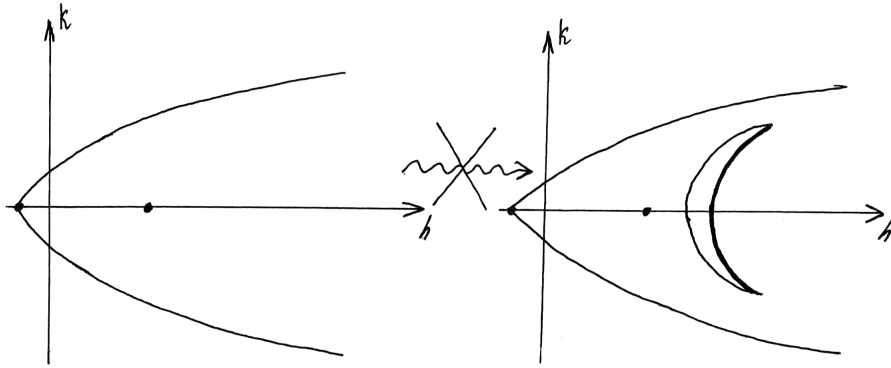


Рис. 27: иллюстрация к следствию 3.

Случай 3. Точки $(V(0), 0)$ и $(V(L), 0)$ имеют тип фокус-фокус.

Так как $V(0)$ и $V(L)$ — локальные максимумы функции $V(r)$ (см.рис.28), то бифуркационная диаграмма системы содержит хотя бы одну “параболу” эллиптического типа (потенциал имеет хотя бы один внутренний локальный минимум на отрезке $[0; L]$).

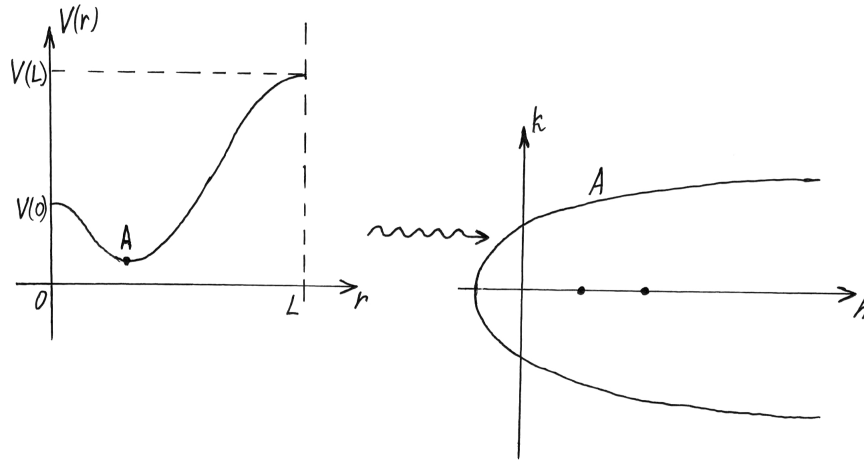


Рис. 28: возможный вид функции $V(r)$ и бифуркационной диаграммы системы, обладающей двумя точками типа фокус-фокус.

Отметим, что точки фокус-фокус могут лежать как на одном, так и на разных

бифуркационных листах.

Сформулируем лемму, содержащую в себе результаты относительно проведенного выше исследования, какие ограничения дают точки ранга 0 на расположение бифуркационных дуг.

Утверждение 7 *Если точки ранга 0 можно соединить на бифуркационном комплексе непрерывным монотонным по h путем, то правее обеих точек ранга 0 отсутствуют дуги "лунок" и "парабол" (т.е. все вершины "лунок" и "парабол" имеют координату $h \leq \max\{V(0), V(L)\}$).*

Изучим случай совпадения на бифуркационной диаграмме двух точек фокус-фокус, т.е. случай, когда на бифуркационной диаграмме изображена одна изолированная особая точка, а исследуемая система имеет две особые точки ранга 0 типа фокус-фокус. В этом случае возможны два варианта:

- 1) *точки фокус-фокус лежат на разных бифуркационных листах, и каждая из них имеет в прообразе тор с одной перетяжкой (см.рис.29;*
- 2) *две точки фокус-фокус склеены в одну точку на бифуркационном комплексе — в прообразе имеем тор с двумя перетяжками (см.рис.30.*

Как следствие, отметим, что в общем случае только по бифуркационной диаграмме невозможно определить сложность фокусной особенности — необходим также анализ графика функции $V(r)$.

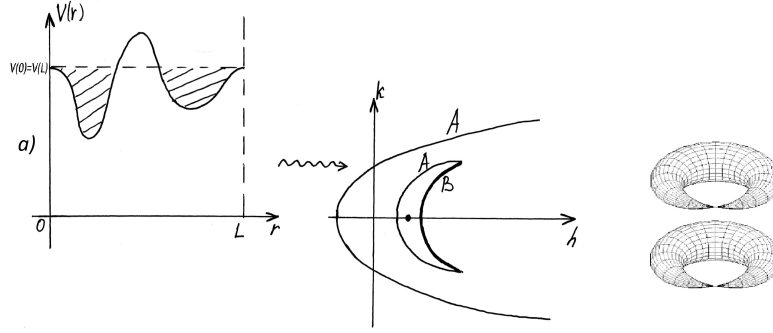


Рис. 29: возможный вид функции $V(r)$ и бифуркационной диаграммы системы, обладающей двумя точками фокус-фокус, совпадающими на бифуркационной диаграмме (первый случай).

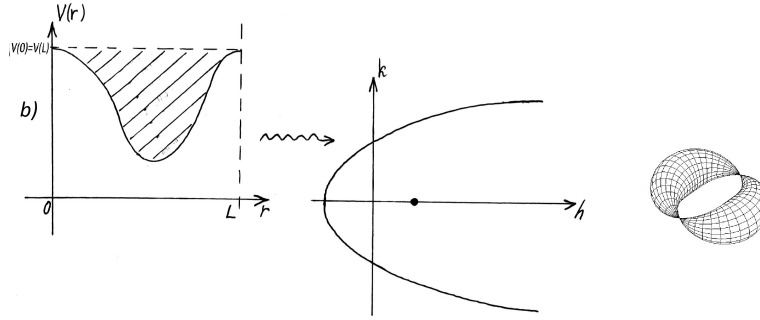


Рис. 30: возможный вид функции $V(r)$ и бифуркационной диаграммы системы, обладающей двумя точками фокус-фокус, совпадающими на бифуркационной диаграмме (второй случай).

1.9 Лиувиллева эквивалентность систем на многообразиях вращения с изученными ранее интегрируемыми гамильтоновыми системами

Согласно теореме Фоменко–Цишанга две интегрируемые гамильтоновы системы лиувиллево эквивалентны на изоэнергетических поверхностях $Q_{h_1}^3$ и $Q_{h_2}^3$ тогда и

только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

Меченая молекула для системы на многообразии вращения может быть одного из двух типов: $A - A$ или $W - W$, при этом метки на центральном ребре $V_l - V_l$ следующие: $r = \infty$, $\varepsilon = -1$. Молекула второго типа как граф встречается во многих интегрируемых системах (случай Жуковского, случай динамики шероховатого эллипсоида на плоскости, система Ковалевской), однако указанный набор меток на ребре $V_l - V_l$ встречается лишь в случае интегрируемых геодезических потоков на многообразиях вращения (формально эта система отличается от исследуемой автором, так как функция $V(r) = 0$ для геодезических потоков, т.е. потенциал не является функцией Морса). Поэтому система на многообразии вращения, обладающая при некотором $H = h$ меченой молекулой второго типа, может оказаться лиувиллево эквивалентной среди изученных систем только геодезическому потоку на некотором многообразии вращения при некоторых значениях энергии $H = h$ (этот вопрос мы обсудим ниже).

Рассмотрим молекулу первого типа: $A - A$. Она обладает метками $r = 0$, $r = 1/2$ или $r = \infty$ в зависимости от значения энергии $H = h$ (см. теорему 6). Такая молекула встречается практически во всех известных системах. Поэтому система на многообразии вращения при тех значениях энергии $H = h$, при которых она имеет меченую молекулу $A - A$, является лиувиллево эквивалентной почти всем классическим интегрируемым системам с такой же молекулой. Опишем подробнее случай лиувиллевой эквивалентности исследуемых систем и геодезических потоков. Напомним, что изоэнергетическая поверхность Q_h^3 системы на многообразии вращения может иметь несколько компонент связности (см. теорему 5).

Утверждение 8 *Для любой системы на многообразии вращения, заданной парой функций $(f(r), V(r))$, для любого регулярного значения энергии $H = h_0$ (кроме значений энергии точек возврата и точек типа $V_l \neq B$ бифуркационных кривых) и для любой связной компоненты в $Q \subseteq Q_{h_0}^3$ существует геодезический поток метрики вращения, задаваемый функцией $F_0(r)$, такой, что система $(f(r), V(r))$*

на Q и система $(F_0(r), 0)$ на любом положительном уровне энергии лиувиллево эквивалентны при $h_0 > \max V(r)$ и грубо лиувиллево эквивалентны при меньших энергиях h_0 (т.е. их молекулы без меток совпадают).

Доказательство. Геодезический поток метрики вращения на многообразии вращения, т.е. поток без потенциала, задается функцией $F_0(r)$, $r \in [0, L]$. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{K^2}{2F_0^2(r)},$$

где K — дополнительный первый интеграл. Из этих выражений получаем, что бифуркационные дуги имеют вид $h = \frac{k^2}{2f^2(r_i)}$, где $f'(r_i) = 0$. Т.е. бифуркационная диаграмма для геодезических потоков состоит из нескольких парабол с общей вершиной. Параболы могут иметь тип A или B , при этом каждая изоэнергетическая поверхность Q_h^3 связна, и ее молекула имеет вид дерева, описанного в теореме классификации меченых молекул на многообразиях вращения, либо она имеет вид $A - A$.

Из принципа Мопертюи следует, что для каждой системы на многообразии вращения, заданной парой функций $(f(r), V(r))$ при $h > V_{\max}$ существует геодезический поток (т.е. существует задающая его функция $F_0(r)$), лиувиллево (и даже траекторно) эквивалентный данной системе с потенциалом. Однако при $h < V_{\max}$ принцип Мопертюи применять нельзя. Опишем подробнее этот случай.

Так как мы исследуем лиувиллеву эквивалентность систем на связных компонентах Q^3 , то для каждой связной компоненты системы с потенциалом можно найти систему без потенциала (геодезический поток) с такой же молекулой. Более подробно: слоение Лиувилля на $Q_{h_0}^3$ полностью определяется функцией $k(r) = \pm \sqrt{(2(h_0 - V(r)))f^2(r)}$ для системы на многообразии вращения с потенциалом, и функцией $\tilde{k}(r) = \pm \sqrt{2hF_0^2(r)}$ для геодезического потока (подробнее см. лемму 21 выше). Отсюда следует, что для данных $(f(r), V(r), h_0)$ и, например, для энергии $h = 1$, функция $F_0(r) = f(r)\sqrt{h_0 - V(r)}$. Тогда грубые молекулы (молекулы без меток) систем совпадают. Однако, как хорошо известно (см. теорему 2 Нгуена и

Поляковой, изоэнергетическая поверхность Q_h^3 для геодезических потоков — это всегда $\mathbb{R}P^3$ (для систем с потенциалом это верно только при $h_0 > V_{max}$). $\square$

Так как бифуркационная диаграмма геодезического потока состоит из парабол с общей вершиной, то в ней нет бифуркационных значений энергии. В исследуемых системах с потенциалом (т.е. не являющихся геодезическим потоком) бифуркационная диаграмма устроена сложнее: на бифуркационной диаграмме (и, следовательно, в топологии) системы может происходить произвольное (но конечное) число перестроек. Поэтому система на Q_h^3 в различных областях изменения энергии h может иметь различные молекулы.

Сформулируем ряд важных следствий из этого утверждения.

Следствия.

1. В целом системы на многообразиях вращения с потенциалом не лиувиллево эквивалентны потокам без потенциала, т.е. в классе лиувиллево эквивалентных систем убрать потенциал нельзя, то есть класс систем с потенциалом существенно шире, чем класс метрик вращения без потенциала.

2. Тем не менее, на больших энергиях (согласно принципу Мопертюи) потенциал можно убрать. Более того, при больших энергиях системы с потенциалом являются траекторно эквивалентными геодезическим потокам.

3. В малых энергиях картина сложнее и интереснее: оказывается, можно разрезать область малых энергий на зоны со следующими свойствами: рассмотрим одну зону энергий. Тогда в общем случае система в этой зоне лиувиллево не эквивалентна потоку без потенциала, так как при данных энергиях типы Q^3 могут не совпадать (для геодезических потоков всегда $Q^3 \approx \mathbb{R}P^3$, а для систем с потенциалом $Q^3 \approx S^1 \times S^2$, S^3 или $\mathbb{R}P^3$, см. лемму 22)

4. Тем не менее, интересно, что в потоках с потенциалом (при малых энергиях h) остается “след” потоков с нулевым потенциалом, поэтому образно можно сказать, что произвольная система с потенциалом распадается в композицию нескольких систем, часть которых грубо (но не тонко!) эквивалентна потокам с нулевым потенциалом, а при больших энергиях — лиувиллево им эквивалентна.

Приведем другой, наглядный способ построения функции $F_0(r)$, задающей геодезический поток, лиувиллево (или грубо лиувиллево) эквивалентный данной системе с потенциалом в фиксированной зоне энергий. Отметим, что при $h > V_{max}$ выбор функции $F_0(r)$ обусловлен принципом Мопертюи, однако приведенные ниже рассуждения верны для всех допустимых энергий h (так как мы не занимаемся исследованием траекторной эквивалентности систем, то рассуждения ниже для каждой зоны энергии дают целый класс подходящих функций $F_0(r)$, а не единственную функцию, как в принципе Мопертюи).

Пусть молекула на $Q^3 \subseteq Q_h^3, h \in [h_i, h_{i+1}]$, построенная для системы на многообразии вращения с потенциалом, имеет вид дерева, т.е. в вершинах графа стоят атомы A и B . Посчитаем количество атомов A и атомов B в одной половине молекулы (пусть мы имеем p атомов A и q атомов B). Тогда, согласно предыдущим рассуждениям, искомая функция $F_0(r)$, задающая многообразие с геодезическим потоком на ней, должна иметь p локальных максимумов и q локальных минимумов, причем для построения функции $F_0(r)$ нам важно только взаимное расположение её значений в локальных минимумах и максимумах.

Число атомов A и B в выбранной зоне энергии для исследуемой системы $(f(r), V(r))$ можно определить по бифуркационной диаграмме следующим образом:

а) вычисляем количество пар бифуркационных поддуг, пересекаемых заданным уровнем энергии и имеющих общую точку возврата — каждая такая пара поддуг добавляет один атом A и один атом B в молекулу;

б) вычисляем количество “парабол”, пересекаемых заданным уровнем энергии, а также определяем их тип — каждая “парабола” типа A (типа B) добавляет в молекулу два атома A (или B).

Таким образом, для молекулы-представителя каждого энергетического “блока” мы строим соответствующую функцию $F_i(r)$, задающую многообразие вращения и, тем самым, эквивалентный (в указанном выше смысле) рассматриваемому “блоку” геодезический поток.

На рисунке 31 показаны энергетические области и соответствующие им функ-

ции $F_0(r)$, а также бифуркационные диаграммы системы $(F_0(r), 0)$ для примера, приведенного в качестве иллюстрации алгоритма построения бифуркационного комплекса (см. параграф 1.6). (Жирными линиями изображены дуги типа B , остальные дуги имеют тип A .) $\square$.

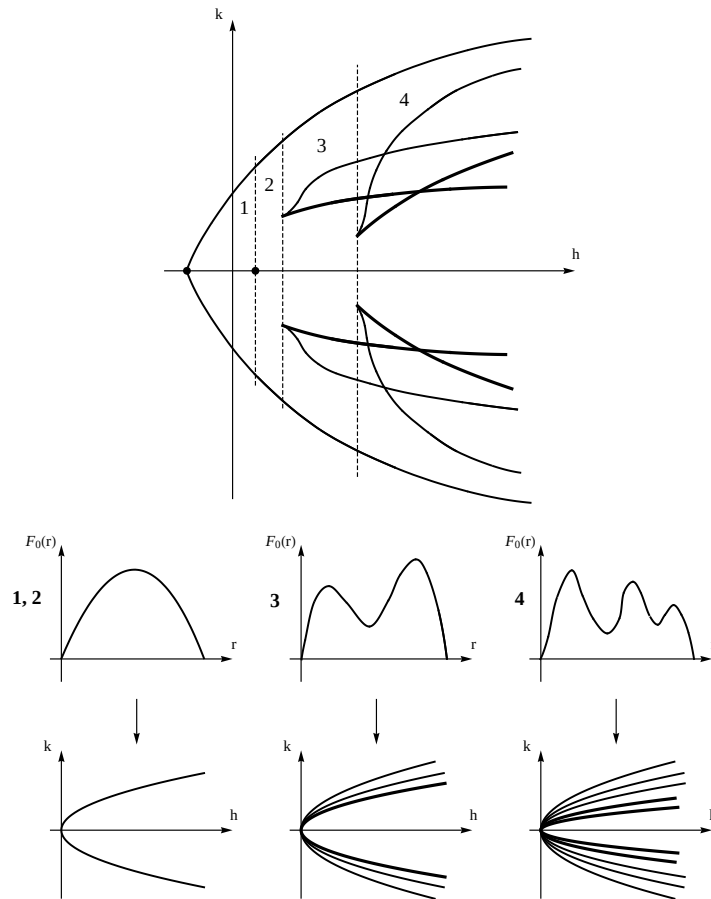


Рис. 31: верхний график: модельный пример бифуркационной диаграммы для системы на многообразии вращения (1, 2, 3, 4 — зоны, разделенные особыми значениями энергии h и значениями энергии h точек возврата); нижние графики: верхний рисунок — график функции $F_0(r)$, задающей геодезический поток в соответствующей зоне, нижний рисунок — бифуркационная диаграмма для соответствующего геодезического потока.

2 Решетки переменных действия интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения

2.1 Решетки переменных действия в квантовых системах и мотивация для их изучения

Во введении к настоящей главе мы сначала неформально расскажем о том, почему интересно исследовать решетки переменных действия. Предварительно изложим мотивацию для изучения решеток неформальным языком.

Под *квантовыми системами* мы будем понимать объекты, образованные конечным числом частиц, обычно атомов или молекул, поведение которых может быть описано с помощью стандартной нерелятивистской квантовой механики (см. работы Б.Жилинского [35]-[37]). Это означает, что система может существовать в счетном числе состояний, характеризуемых дискретными значениями определенных физических величин, или, эквивалентно, набором квантовых чисел. Физическим величинам в квантовой теории сопоставляются операторы, собственные значения которых определяют возможные значения этих величин. Операторы в общем случае не коммутируют. Чтобы охарактеризовать квантовое состояние системы, необходимо использовать собственные значения набора попарно коммутирующих операторов.

Удобно было бы называть *простыми* динамические системы с конечным числом степеней свободы и конечным числом квантовых состояний. Однако, в реальности такие системы встречаются очень редко.

Одна из самых простых реальных квантовых систем — атом водорода. Это динамическая система с полным регулярным (но бесконечным) набором квантовых состояний, образующих сильно вырожденные группы уровней (называемые клетками), которые существуют благодаря динамической симметрии задачи. Каждая

клетка может быть независимо рассмотрена как квантовая динамическая система с двумя степенями свободы. Однако даже легкое возмущение атома водорода постоянными электрическими и магнитными полями ведет к возникновению сложных наборов собственных состояний, сильно зависящих от набора внешних параметров, характеризующих возмущение.

Поэтому системы квантовых состояний мы будем называть *простыми*, если все их состояния могут быть упорядочены в регулярные решетки, характеризующиеся несколькими квантовыми числами, принимающими последовательные целые значения. Такие квантовые системы соответствуют классическим интегрируемым гамильтоновым системам, динамика которых регулярна и связана с торическими расслоениями.

Поясним соответствие на самом простом примере — когда переменные действия глобально определены. Для квантовых систем это означает, что набор квантовых чисел, представляющих совместный спектр квантовых операторов, может быть глобально упорядочен в регулярную решетку, звенья которой характеризуются квантовыми числами, связанными с собственными состояниями попарно коммутирующих квантовых операторов, отвечающих классическим интегралам движения.

Другое естественное поведение динамических систем связано с нерегулярным спектром квантовых систем. Эта хаотическая динамика обычно возникает в более сложном, чем регулярное, движении. Однако, даже в случае регулярного движения интегрируемых систем, сложность динамической системы может возрасти в результате последовательности бифуркаций (и в классическом, и в квантовом случаях). Сложность интегрируемой классической (или квантовой) системы легче всего увидеть, анализируя образ ее отображения момента (и бифуркационную диаграмму).

Таким образом, главной мотивацией для изучения решеток интегрируемых гамильтоновых систем является существование аналогичных решеток в квантовых системах (эти решетки видны в экспериментах).

Дадим сначала неформальное определение решетки переменных действия для

интегрируемых гамильтоновых систем. Если рассмотреть гамильтонову систему с двумя степенями свободы и регулярную часть образа отображения момента, то эта регулярная часть — это некоторое двумерное многообразие с целочисленной аффинной структурой. Эта целочисленная аффинная структура задается переменными действие–угол, которые являются хорошими локальными координатами вне бифуркационной диаграммы. Если нарисовать линии уровня переменных действия с целыми значениями, то их точки пересечения дадут нам *решетку*, которая не будет зависеть от того, каким именно циклам на торе отвечают выбранные переменные действия.

В 2010-2011 годах А.Т.Фоменко сформулировал следующую гипотезу. *В “типичном невырожденном случае” для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы по инвариантам Фоменко–Цишанга можно восстановить структуру решетки переменных действия. С другой стороны, по этой решетке и линиям уровня переменных действия можно вычислить по крайней мере часть инварианта Фоменко–Цишанга, а именно, числовые метки на ребрах соответствующего графа-“молекулы”.*

Отметим, что в общем случае знания только решетки для этого недостаточно — нужно воспользоваться структурой (см. об этом ниже) линий уровня переменных действия (неоднозначность их выбора на результат не влияет).

В работе гипотеза Фоменко будет доказана для интегрируемых гамильтоновых систем с S^1 -симметрией, “молекула” которых состоит только из атомов типа A и V_k .

Также по решеткам переменных действия можно вычислить группу монодромии изолированных особых точек ранга 0.

2.2 Решетки переменных действия. Определения

Для определения решеток переменных действия мы будем использовать утверждения теоремы Лиувилля. Напомним ее.

Теорема 8 (Теорема Лиувилля, см.[1]). Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad}H$, $F_1, \dots, F_n$ — ее первые интегралы, T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов $F_1, \dots, F_n$. Все векторные поля $\text{sgrad}F_i$ предполагаются полными. Тогда:

1) T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $\text{sgrad}F_1, \dots, \text{sgrad}F_n$.

2) Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.

3) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. послойно диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

4) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $(I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, называемых переменными действие–угол, со следующими свойствами:

a) $I_1, \dots, I_n$ — координаты на диске D^n , а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

b) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge dI_i$.

c) Переменные действия I_i являются функциями от первых интегралов, и их можно выразить формулами

$$I_i(\xi) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i(\xi)} \alpha, \quad (4)$$

где $\gamma_1(\xi), \dots, \gamma_n(\xi)$ — 1-циклы на торе Лиувилля T_ξ , образующие базис группы гомологий $H_1(T_\xi)$ и непрерывно зависящие от ξ , α — какая-либо 1-форма в $U(\xi)$, такая, что $d\alpha = \omega$.

d) В переменных действие–угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля в окрестности U , т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{I}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(I_1, \dots, I_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое дви-

жение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Напомним, что через $\Phi(x)$ обозначается образ точки x при отображении момента, а через Σ — бифуркационная диаграмма.

Бифуркационная диаграмма разбивает образ отображения момента на несколько областей (открытых связных множеств). В каждой такой области может существовать несколько решеток переменных действия, поэтому мы будем определять решетки переменных действия на бифуркационном комплексе.

Напомним, что на бифуркационном комплексе критические значения соответствуют особым слоям слоения Лиувилля. Удалим все критические значения (это критические дуги, состоящие из точек ранга 1, а также критические точки ранга 0) из бифуркационного комплекса. В результате комплекс распадется на объединение некоторого количества связных областей, которые будем называть *камерами*.

Отметим, что камеры могут не быть односвязными, а переменные действия могут быть не определены в неодносвязных областях. Поэтому в каждой неодносвязной камере нам необходимо сделать систему разрезов так, чтобы камера без линий разрезов стала односвязной — в полученной области переменные действия будут корректно определены.

Опишем подробнее, какие именно системы разрезов мы можем делать. Неодносвязность возникает в камере из-за наличия в ней изолированных особых точек ранга 0. *Разрезы* — это гладкие дуги, содержащие особые точки ранга 0, лежащие на бифуркационном комплексе. Мы всегда можем сделать разрезы таким образом, что полученная камера с разрезами становится односвязной.

Каждую камеру с разрезами (если они необходимы, чтобы сделать область односвязной) на бифуркационном комплексе будем обозначать $\tilde{P}^n$, а ее образ $\Phi(\tilde{P}^n)$ при отображении момента Φ в $\mathbb{R}^n$ обозначим через P^n . Тогда $\tilde{P}^n = \Phi^{-1}(P^n)$, причем $\tilde{P}^n$ и P^n диффеоморфны. Будем, для простоты, называть P^n тоже “камерой”. Иногда мы будем отождествлять камеру $\tilde{P}^n$ на бифуркационном комплексе с ее

диффеоморфным образом $\Phi(\tilde{P}^n)$ в $\mathbb{R}^n$ при отображении момента Φ .

Определение 25 Пусть существует и фиксирована 1-форма α на $\Phi^{-1}(P^n)$, такая, что $d\alpha = \omega$. Тогда множество точек в $P^n \subset \mathbb{R}^n$, образованное пересечениями n поверхностей уровня $\{\xi \in P^n : I_1(\xi) = c_1/N, \dots, I_n(\xi) = c_n/N, N \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{Z}\}$ функций I_i , определенных по формулам (4), назовем решеткой $\mathcal{R}$ переменных действия (или просто решеткой).

Выбираем N достаточно большим для того, чтобы вблизи бифуркационных дуг (а также вблизи изолированных особых точек ранга 0) количество линий уровня было достаточным для вычисления по полученной решетке меток на ребрах инварианта Фоменко-Цишанга (подробнее см. главу 2.6). Поясним выбор подходящего значения N . Если выбрать N маленьким (например, $N = 1$), то полученная решетка переменных действия может состоять из очень маленького числа линий уровня переменных действия. Для того, чтобы вычислить требующиеся нам метки на ребрах молекулы, а также чтобы вычислить матрицы монодромии изолированных особых значений ранга 0, нам необходимо выбирать базисы на решетке и сравнивать их, а именно, "двигать" их по решетке по определенным правилам (см. подробнее параграф 2.6), а затем записывать матрицу перехода между ними. Если число линий уровня на решетке мало, то мы не можем выполнить описанную процедуру. Поэтому необходимо брать число N достаточно большим, тем самым, обеспечивая достаточное в описанном нами смысле число линий уровня переменных действия, образующих решетку. Другими словами, выбирая большое N , мы добиваемся того, что ячейки решетки становятся "маленькими".

Так определенная решетка в камере P^n не зависит от выбора непрерывного семейства базисных циклов на торах Лиувилля, так как два ориентированных набора базисных циклов на торе T^n связаны унимодулярным целочисленным преобразованием (матрицей из $SL(n, \mathbb{Z})$). В силу формул для переменных действия, последние подвергаются тому же самому преобразованию, что и циклы, а их значения, имеющие вид c/N , $c \in \mathbb{Z}$, очевидно, инвариантны относительно таких замен.

В определении решетки также есть неоднозначность относительно выбора формы α , такой, что $d\alpha = \omega$.

Фиксируем 1-форму α в каждой камере бифуркационной диаграммы. Тогда при замене внутри камеры 1-формы α на 1-форму $\alpha' = \alpha + \beta$, такую что $d\alpha = d\alpha'$ (т.е. $d\beta = 0$) переменные действия изменятся следующим образом:

$$\int_{\gamma_i} \alpha' = \int_{\gamma_i} \alpha + \int_{\gamma_i} \beta,$$

где для каждого i последнее слагаемое является константой, не зависящей от тора (это следует из гомологичности циклов γ_i для соседних торов, замкнутости формы β и формулы Стокса. Подробнее см.[1]).

Новая решетка будет составлена из других линий уровня, несколько смещенных по отношению к исходным. Поскольку N выбиралось достаточно большим, что означает, что линии решетки расположены достаточно плотно, качественный вид решетки не поменяется. А именно, рассмотрим расширенный набор линий уровня переменных действия, образующих решетку, т.е. рассмотрим объединение линий уровня $\{(h, k) : I_i(h, k) = c_i/N, c_i \in \mathbb{Z}\}$, а также линий уровня $\{(h, k) : I_i(h, k) = \tilde{c}_i\}$ (здесь $\tilde{c}_i = c_i/N - \int_{\gamma_i} \beta$). Эти семейства линий уровня не пересекаются в регулярной области, так как это система линий уровня одной функции (функции I_i). Обе решетки (отвечающая первой и отвечающая второй системе линий уровня) вложены в расширенную систему линий уровня, поэтому метки, вычисленные по обеим решеткам, совпадают.

2.3 Монодромия

В дальнейшем мы докажем следующее утверждение.

Утверждение 9 *По решеткам переменных действия можно вычислить матрицы монодромии всех изолированных особых значений отображения момента.*

Перед тем, как дать определение монодромии, необходимо определить несколько вспомогательных понятий.

Базисом на торе далее будем называть базис в группе гомологий (с коэффициентами из $\mathbb{Z}$).

Определение 26 *Ориентацию, введенную указанным способом, будем называть ориентацией, согласованной с данной нумерацией линий уровня переменных действия.*

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (M^4, ω, H) с первыми интегралами H и K . Зафиксируем нумерацию линий уровня переменных действия I_1, I_2 в соответствии с определением 26. Рассмотрим петлю γ в образе отображения момента, обходящую изолированное особое значение в положительном направлении и состоящую только из регулярных значений. Пусть $\gamma(0) = \gamma(1) = \xi_0 = (h_0, k_0)$. По теореме Лиувилля прообразом этой точки является тор или несвязное объединение торов. Пусть T_{ξ_0} — любой регулярный тор из полного прообраза $\Phi^{-1}(h_0, k_0)$. В силу теоремы о неявных функциях при движении точки ξ по петле γ тор T_{ξ_0} порождает однопараметрическое семейство торов T_ξ , при этом при непрерывном изменении параметра на кривой γ торы в прообразе диффеоморфно деформируются в фазовом пространстве (обозначим полученное семейство торов $\Phi_0^{-1}(\gamma(t))$), поэтому, задав базис (γ_1^0, γ_2^0) на торе $T_{\xi_0} = \Phi_0^{-1}(\gamma(0))$, можно естественным образом перенести его на торы из окрестности $U(T_{\xi_0})$. В результате полного обхода по петле γ базис (γ_1^0, γ_2^0) на торе $T_{\xi_0} = \Phi_0^{-1}(\gamma(0))$ перейдет в базис (γ_1^1, γ_2^1) на торе $T_{\xi_0} = \Phi_0^{-1}(\gamma(1))$. Возникает матрица перехода от одного базиса к другому.

Определение 27 *Полученная матрица называется матрицей монодромии изолированного особого значения системы, отвечающей выбранному семейству торов.*

Отметим, что фиксация направления обхода вокруг особого значения существенна, т.к. при вычислении матрицы монодромии без фиксации направления обхода мы можем выбрать любое из двух направлений обхода, и в результате полу-

чим матрицы, несопряженные друг другу в группе $SL(2, \mathbb{Z})$, например, матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В отличие от классической гамильтоновой монодромии, квантовая гамильтонова монодромия имеет недавнюю историю, начало которой датируется статьей J.J.Duistermaat 1980 года “On global action-angle variables” [38]. Приложения монодромии к квантовому спектру были рассмотрены в 2000 году в статье R.Cushman и D.A.Sadovskii “Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields” [39]. Начиная с 1998 года были сделаны основные шаги в этой науке — были выпущены статьи S.Vu Ngoc “Quantum monodromy in integrable systems” (1999) [40] с хорошей квантовой формализацией и статьи с примерами: M.S.Child “Quantum states in a Champagne bottle” (1998) [41], R.Cushman and D.A.Sadovskii “Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields” (2000) [39], L.Grondin, D.Sadovskii, and B.Zhilinskii “Monodromy in systems with coupled angular momenta and rearrangement of bands in quantum spectra” (2001) [42], D.Sadovskii and B.Zhilinskii “Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling” (1999) [43]. После выхода этих статей монодромия стала общим инструментом для анализа спектра во многих математических и физических моделях.

Гамильтонова (Квантовая) монодромия в настоящее время служит демонстрацией несуществования глобальных переменных действия (или хороших квантовых чисел). В квантовых системах она может быть обнаружена как “точечный дефект” в решетке совместных собственных значений квантовых операторов. Аналогичным образом ее можно обнаружить в решетке переменных действия классических интегрируемых гамильтоновых систем.

Далее в работе будут построены решетки переменных действия для нескольких систем на многообразиях вращения (в частности, для системы “сферический маятник”) и по ним вычислены матрицы монодромии изолированных особых значений отображения момента.

2.4 Вычисление переменных действия для систем на многообразиях вращения

По определению многообразие вращения — это многообразие, на котором задано S^1 -действие (см. главу 1.2), следовательно, все нестационарные траектории векторного поля $\text{sgrad}K$ гомеоморфны окружности. Поэтому в качестве циклов интегрирования $\gamma_1 = \gamma_1(h, k)$ можно взять эти траектории. Получаем

$$I_1(h, k) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_1} \alpha = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_1} k d\varphi + p_r dr = \frac{k}{2\pi} \oint_{\gamma_1} d\varphi = k,$$

где форма α — каноническая 1-форма на T^*M^2 , такая что $d\alpha = \omega$.

Выведем формулу для второй переменной действия на области $k > 0$, т.е. в верхней полуплоскости. Для этого выпишем уравнения Гамильтона по переменной φ для гамильтониана H :

$$\dot{\varphi} = \frac{k}{f^2(r)}, \quad \dot{k} = 0. \quad (5)$$

Выберем цикл $\gamma_2(h, k)$ на торе $T_{h,k} = \Phi^{-1}(h, k)$ условием $\varphi|_{\gamma_2} = 0$, причем цикл $\gamma_2(z) = (z, p_r(z))$ согласован с ориентацией цикла $\gamma_2^+ \subset \gamma_2$, для которого $p_r(z) > 0$.

Тогда имеем

$$I_2(h, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} k d\varphi + p_r dr = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} p_r dr.$$

Пусть $\gamma_3 = \gamma_H(h, k, t), t_1 \leq t \leq t_2$ — дуга траектории векторного поля $\text{sgrad}H$ между соседними минимумами функции $z(t)$, $\gamma_4 = \gamma_K(h, k, t), t_1^* \leq t \leq t_2^*$ — дуга траектории векторного поля $-\text{sgrad}K \cdot (\text{sgn}K) = -\text{sgrad}|K|$ (см. уравнение на $\dot{\varphi}$ (5)) от точки $\gamma_H(t_2)$ до точки $\gamma_H(t_1)$, такая, что цикл $\gamma_3 \cdot \gamma_4$ гомологичен циклу γ_2 (см. рисунок 32).

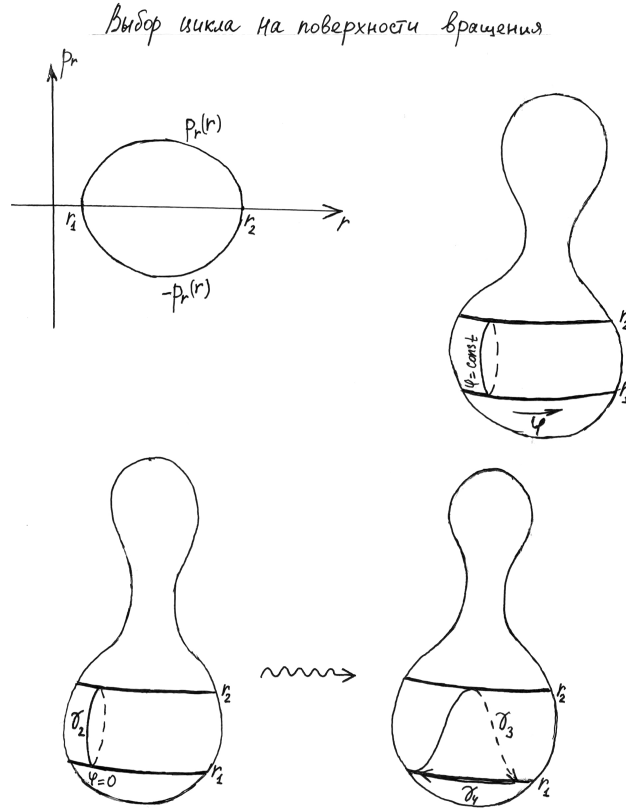


Рис. 32: выбор циклов на поверхности вращения.

Тогда

$$I_2(h, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} p_r dr = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_3 \cdot \gamma_4} p_r dr = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_3} p_r dr$$

Так как $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r) = \frac{p_r^2}{2} + U_k(r)$, то $p_r(r) = \pm \sqrt{2(H - U_k(r))}$, поэтому

$$I_2(h, k) = \frac{1}{\pi} \int_{r_1(h, k)}^{r_2(h, k)} \sqrt{2(H - U_k(r))} dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_1(h, k)}^{r_2(h, k)} \sqrt{2(H - \frac{k^2}{2f^2(r)} - V(r))} dr,$$

где $r_1(h, k), r_2(h, k)$ — два соседних корня подкоренного выражения в последнем интеграле, таких что подкоренное выражение положительно на интервале $(r_1(h, k), r_2(h, k))$.

Таким образом, вне луча переменная действия $I_2(h, k)$, отвечающая указанному

циклу γ_2 , имеет вид: $I_2(h, k) = \frac{1}{\pi} \int_{r_1(h, k)}^{r_2(h, k)} \sqrt{2(H - \frac{k^2}{2f^2(r)} - V(r))} dr$.

В результате мы доказали следующую теорему:

Теорема 9 Для всех пар $(h, k) \in \Phi(M^4)$ переменная действия $I_1(h, k)$ имеет вид $I_1(h, k) = k$. Для всех пар $\{(h, k) \in \Phi(M^4) : k > 0\}$ (аналогично для всех пар $\{(h, k) \in \Phi(M^4) : k < 0\}$) переменную действия $I_2(h, k)$ можно определить по формуле

$$I_2(h, k) = \frac{1}{\pi} \int_{r_1(h, k)}^{r_2(h, k)} \sqrt{2(H - \frac{k^2}{2f^2(r)} - V(r))} dr, \quad (6)$$

где r_1, r_2 — корни уравнения $W(H, k, r) = 2(H - \frac{k^2}{2f^2(r)} - V(r)) = 0$ такие, что $0 < r_1 < r_2 < L$ и $W(H, k, r) > 0$ для $r \in (r_1, r_2)$.

Отметим, что линии уровня переменной действия I_1 определены глобально, т.е. задаются формулой $I_1(h, k) = k$ на всем образе отображения момента. Линии уровня переменной действия I_2 нельзя задать одной формулой на всем образе отображения момента (в частности, если задавать их по формуле (4) на всем образе отображения момента, то в точках, лежащих на оси h , возникает излом, которого быть не должно, так как линии уровня переменных действия — гладкие). Невозможность задать линии уровня всех переменных действия на всем образе отображения момента по одним и тем же формулам связана с наличием особых значений ранга 0, т.е. с наличием монодромии. Поэтому, чтобы задать линии уровня переменных действия на всем образе отображения момента гладким образом, приходится делать систему разрезов.

Мы можем делать систему разрезов любым указанным в параграфе 2.2 способом, поэтому опишем унифицированную систему разрезов, которые нам будет удобно делать в нашей задаче.

Разрезы понадобится делать только в камерах, границами которых являются “лунки” и “параболы”, так как камеры, ограниченные клювами, односвязны. Выберем в камере изолированную особую точку ранга 0 с наименьшей энергией h_0 и сделаем в каждой камере разрез, делящий ее на две части, нулевым уровнем интеграла K . Каждый из двух кусков очевидно будет односвязной областью. В каждом из полученных кусков определим переменную действия по формуле (6)

(результат обозначим соответственно I_2+ при $k > 0$ и I_2- при $k < 0$).

Лемма 24 *Рассмотрим произвольную неособую точку x комплекса на нулевом уровне интервала K (принадлежащую какому-то разрезу). Функции I_2+ и I_2- можно гладким образом продолжить в некоторую малую окрестность точки x . Тогда эти продолжения (которые также обозначим I_2+ и I_2-) в этой окрестности связаны формулой:*

$$I_2'(h, k) = I_2(h, k) - i \cdot k,$$

где i — количество особых точек ранга 0 на $M_-^4(h)$.

Доказательство. Согласно лемме 22 топологический тип Q^3 определяется количеством особых точек ранга 0 на M_-^4 . Зная топологический тип Q^3 , мы можем определить метку r на ребре $A - A$ молекулы на Q^3 (а метка $\varepsilon = +1$, т.к. ориентация базиса не меняется). Выберем базис (e_1, e_2) вблизи дуги типа A на решетке, построенной в области $k > 0$. Мы знаем, что линии уровня переменной действия I_1 глобально определены, поэтому можем выбрать один базисный цикл e_1' на дуге типа A в области $k < 0$. Теперь, зная метку r , мы можем найти выражение для второго базисного цикла e_2' . Пусть, например, для исследуемой Q^3 на M_-^4 есть одна особая точка ранга 0, тогда $Q^3 \approx S^3$, т.е. метка $r = 0$. Используя тот факт, что $e_1' = e_1$, а также определитель матрицы перехода M равен -1 , получаем

$$\begin{pmatrix} e1' \\ e2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \end{pmatrix},$$

следовательно обратная транспонированная матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Так как $r = 0$, а $\varepsilon = +1$, то получаем, что $a = 1$, следовательно $e_2' = e_1 - e_2$, т.е. мы восстановили цикл e_2' .

При вычислении матрицы перехода между базисами по решетке переменных действия с использованием алгоритма из параграфа 2.5 трансформация выбранного базиса происходит в момент пересечения оси h . Поэтому можем считать, что

первый базис выбран вблизи оси h в области $k > 0$, а второй базис получен вблизи оси h в области $k < 0$. Зная оба базиса с обеих сторон от оси h , мы можем гладким образом продолжить линии уровня переменной действия $I_2(h, k)$ в нижнюю полуплоскость. В приведенном примере с одной особой точкой ранга 0 продолжение задается формулой $I'_2(h, k) = I_2(h, k) - k$.

В окрестности минимальной допустимой энергии $h = V_{min}$ молекула всегда имеет тип $A - A$, поэтому в окрестности минимально допустимой энергии решетка однозначно восстанавливается. Далее отметим, что так как бифуркационные кривые не пересекают ось h (см. главу 1.2), то при увеличении энергии h от V_{min} до h^* — энергии изолированной особой точки ранга 0 структура решетки переменных действия в окрестности оси h не изменяется, поэтому для энергий h из промежутка $[V_{min}, h^*]$ линии уровня переменной действия $I_2(h, k)$ будут продолжаться в нижнюю полуплоскость по формуле $I'_2(h, k) = I_2(h, k) - k$.

Следующая перестройка линий уровня переменной действия $I_2(h, k)$ произойдет при переходе энергии h через уровень энергии h^* изолированной особой точки ранга 0. Опишем эту перестройку. Далее (см. лемму 26) будет показано, что при выборе первого базиса указанным в алгоритме способом матрица монодромии при обходе вокруг точки типа фокус–фокус будет иметь вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому для вычисления матрицы перехода между двумя выбранными базисами в случае, если энергия h больше энергии h^* точки типа фокус–фокус, необходимо домножить матрицу перехода между базисами $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, соответствующую энергии $h \in [V_{min}, h^*]$, на матрицу монодромии точки фокус–фокус. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & a + 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для рассмотренного случая $a = 1$, значит, $a + 1 = 2$, поэтому в области $h \geq h^*$ линии уровня переменной действия $I_2(h, k)$, построенные в верхней полуплоскости $k > 0$, будут продолжаться в нижнюю полуплоскость $k < 0$ по формуле $I'_2(h, k) =$

$$I_2(h, k) - 2k. \square.$$

Лемму 24 можно доказать и напрямую, проведя вычисления, а именно, показав, что линии уровня переменной действия $I_2(h, k)$, построенные по формуле (6) в области $k > 0$, гладким образом продолжаются в область $k \leq 0$ по формуле $I_2'(h, k) = I_2(h, k) - i \cdot k$, где i — количество особых точек ранга 0 на M_-^4 . Проведем эти вычисления для модельного примера — системы “сферический маятник” (функция $f(r)$ — образующая сферы, а $V(r)$ — гравитационный потенциал, $r \in [-1; 1]$).

Утверждение 10 *Линии уровня $I_2(h, k) = \text{const}$, построенные по формуле (6) в области $\{(h, k) \in \Phi(M^4) \mid k > 0, h < 1\}$, можно гладко продлить в область $\{(h, k) \in \Phi(M^4) \mid k \leq 0, h < 1\}$ — по формуле $I_2(h, k) - I_1(h, k) = \text{const}$ при $k < 0$ и по непрерывности при $k = 0$.*

Доказательство.

$$1. \text{ Покажем, что } \lim_{k \rightarrow 0+} I_2 = \lim_{k \rightarrow 0-} (I_2 - I_1) = \lim_{k \rightarrow 0-} (I_2 - k) = \lim_{k \rightarrow 0-} I_2.$$

Все подинтегральные функции, определенные на отрезке $[r_1, r_2] \subseteq [-1, h]$, определим нулем на $[-1, r_1]$ и $[r_2, h]$.

Покажем, что $\lim_{k \rightarrow 0} \int_{-1}^h \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-r^2} dr = \int_{-1}^h \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-r^2} dr$. Последний интеграл сходится, т.к. $\int_{-1}^h \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-r^2} dr = \int_{-1}^h \frac{2\sqrt{h-r}}{\sqrt{1-r^2}} dr = C(\arcsinh - \arcsin(-1))$, $C = \text{const}$.

Пусть $f(k, h_0) = \int_{-1+h_0}^{h-h_0} \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-r^2} dr$. Надо доказать, что $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h_0 \rightarrow 0} f(k, h_0) = f(0, 0)$.

а) Так как $f(k, h_0) \rightrightarrows f(0, h_0)$ при $k \rightarrow 0$ на отрезке $[-1 + h_0, h - h_0]$, $h_0 \neq 0$, то по теореме о перестановке предела и интеграла

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} f(k, h_0) &= \int_{-1+h_0}^{h-h_0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-r^2} dr = f(0, h_0) = \int_{-1+h_0}^{h-h_0} \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)}}{1-r^2} dz = \\ &= C(\arcsin(h - h_0) - \arcsin(-1 + h_0)), \quad C = \text{const}. \end{aligned}$$

b) $\lim_{h_0 \rightarrow 0} f(k, h_0) = f(k, 0)$ по определению несобственного интеграла.

Покажем, что $f(k, h_0) \Rightarrow f(k, 0)$ при $h_0 \rightarrow 0$ для любого k , т.е. покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall h_0 < \delta, \forall k : |f(k, h_0) - f(k, 0)| \rightarrow 0, h_0 \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} |f(k, h_0) - f(k, 0)| &= \left| \int_{-1}^{-1+h_0} + \int_{h-h_0}^h \right| \leq \left| \int_{-1}^{-1+h_0} \right| + \left| \int_{h-h_0}^h \right| \leq \\ &\leq \int_{-1}^{-1+h_0} \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)}}{1-r^2} dr + \int_{h-h_0}^h \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)}}{1-r^2} dr \leq \\ &\leq \sqrt{2(h+1)} \left[\int_{-1}^{-1+h_0} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} + \int_{h-h_0}^h \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \right] = \\ &= \sqrt{2(h+1)} [\arcsin(-1+h_0) - \arcsin(-1) + \arcsin h - \arcsin(h-h_0)] \rightarrow 0, h_0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

по непрерывности арксинуса. Значит, по теореме о перестановке пределов

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h_0 \rightarrow 0} f(k, h_0) = \lim_{h_0 \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} f(k, h_0) = \lim_{h_0 \rightarrow 0} f(0, h_0) = f(0, 0).$$

То есть, существует $\lim_{k \rightarrow 0} f(k, 0)$, а значит, существует $\lim_{k \rightarrow 0+} f(k, 0) = \lim_{k \rightarrow 0-} f(k, 0) = f(0, 0)$ (т.е. функция $I_2(h, k)$ непрерывна в точке $k = 0$ и $\lim_{k \rightarrow 0} I_2(h, k) = I_2(h, 0)$).

2. Покажем, что линии уровня гладкие, то есть $k'_{h, 0 < k < \varepsilon} \approx k'_{h, -\varepsilon < k < 0}$ (уравнение $I_2(h, k) = c$ задает зависимость $k = k(h)$).

При $k > 0$ продифференцируем по h уравнение $I_2(h, k) = c$ (штрих — это производная по h):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{2(1-r^2) - 2k \cdot k'}{2\sqrt{2(h-r)(1-r^2)} - k^2(1-r^2)} + r'_1 \cdot 0 - r'_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)} - k^2} - \frac{1}{\pi} k \cdot k' \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)} - k^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &k' = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)} - k^2}}{k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)} - k^2}} = [k \approx \varepsilon] = \frac{A}{B}. \end{aligned}$$

Аналогично при $k < 0$ продифференцируем по h уравнение $I_2(h, k) - k = c$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} - \frac{1}{\pi} k \cdot k' \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} - k' = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k' = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}}{k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} + \pi} = [k \approx -\varepsilon] = \frac{A}{-B + \pi}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\frac{A}{B} \sim \frac{A}{-B+\pi}$. Так как $A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}$ — сходится, то надо показать, что $B = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} \sim \frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} \sim \frac{\pi}{2k}.$$

Лемма 25 При $h < 1$, $|k| \approx \varepsilon$, ε — мало

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} \sim \frac{\pi}{2k}.$$

Доказательство. Разобьем отрезок интегрирования на три части (выделим отрезки, содержащие особенности подинтегральной функции):

$$[r_1, r_2] = [r_1, r_1 + h_0] \cup [r_1 + h_0, r_2 - h_0] \cup [r_2 - h_0, r_2],$$

где h_0 — фиксировано и мало (можно взять, например, $h_0 = \frac{[r_1, r_2]}{10} \approx \frac{h+1}{10}$). Тогда

$$I = \int_{r_1}^{r_1+h_0} + \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} + \int_{r_2-h_0}^{r_2} \quad (9)$$

Рассмотрим первое слагаемое в сумме. Сначала оценим его снизу:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_1+h} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} &> \int_{r_1}^{r_1+h_0} \frac{dr}{2(1+r)\sqrt{2(h-r_1)(1-r_1)(1+r)-k^2}} = \\ = [t = 1+r] &= \int \frac{dr}{2t\sqrt{2(h-r_1)(1-r_1)t-k^2}} = \int \frac{d\sqrt{2(h-r_1)(1-r_1)(1+r)-k^2}}{2t(h-r_1)(1-r_1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [p = \sqrt{2(h-r_1)(1-r_1)(1+r)-k^2}] = \int \frac{dp}{p^2+k^2} = \\
&= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{P}{k} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(h-r_1)(1-r_1)(1+r)-k^2}}{k} \Big|_{r_1}^{r_1+h_0} > \\
&\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r)(1+r)-k^2}}{k} \Big|_{r_1}^{r_1+h_0} = -0 + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{Ch_0}}{k} \sim \frac{\pi}{2k}.
\end{aligned}$$

(так как h_0 — фиксировано, $0 \neq k \approx 0$, поэтому $\frac{\sqrt{Ch_0}}{k} \rightarrow \infty$).

Теперь оценим первое слагаемое сверху:

$$\begin{aligned}
&\int_{r_1}^{r_1+h_0} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} < \\
&< \int_{r_1}^{r_1+h_0} \frac{dr}{(1-(r_1+h_0))(1+r)\sqrt{2(h-(r_1+h_0))(1-(r_1+h_0))(1+r)-k^2}} = \\
&= [t = 1+r] = \int \frac{dt}{(1-(r_1+h_0))t\sqrt{2(h-(r_1+h_0))(1-(r_1+h_0))t-k^2}} = \\
&= \int \frac{d\sqrt{2(h-(r_1+h_0))(1-(r_1+h_0))t-k^2}}{(h-(r_1+h_0))(1-(r_1+h_0))^2t} = \\
&= [p = \sqrt{2(h-(r_1+h_0))(1-(r_1+h_0))t-k^2}] = \int \frac{dp}{(p^2+k^2)^{\frac{1-(r_1+h_0)}{2}}} = \\
&= \frac{2}{1-(r_1+h_0)} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{P}{k} \Big|_{r_1}^{r_1+h_0} < \frac{2}{1-(r_1+h_0)} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{k} \Big|_{r_1}^{r_1+h_0} = \\
&[\text{аналогично оценке снизу}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1-(r_1+h_0)} \frac{\pi}{2k} \sim [k \approx 0 \Rightarrow r_1 \approx -1] \sim \frac{2}{2-h_0} \frac{\pi}{2k} = \\
&= (1 + \frac{h_0}{2} + O(\frac{h_0^2}{4})) \frac{\pi}{2k} < \frac{\pi}{2k} (1+h_0).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{2k} < \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} < \frac{\pi}{2k} (1+h_0).$$

Можно взять h_0 сколь угодно близким к 0, поэтому

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} \sim \frac{\pi}{2k}.$$

Теперь рассмотрим второе и третье слагаемое в сумме (9).

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} < \\ & < \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} \frac{dr}{(1-(r_1+h_0)^2)\sqrt{2(h-r)(1-(r_1+h_0)^2)-k^2}} = C \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} \frac{dr}{\sqrt{A-r}} = \text{const}, \end{aligned}$$

$A, C = \text{const}$.

Третье слагаемое:

$$\begin{aligned} & \int_{r_2-h_0}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} < \int_{r_2-h_0}^{r_2} \frac{dr}{(1-h^2)\sqrt{2(1-h^2)(h-r)-k^2}} = \\ & = - \int_{r_2-h_0}^{r_2} \frac{d\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-h^2} = - \frac{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}{1-h^2} \Big|_{r_2-h_0}^{r_2} = \\ & = \frac{\sqrt{2(1-h^2)h_0}}{1-h^2} = \text{const}. \end{aligned}$$

Значит, второе и третье слагаемое дают незначительный вклад в сумму, поэтому

$$I \sim \frac{\pi}{2k} \cdot \square.$$

Тем самым, мы завершили доказательство утверждения.

Утверждение 11 *Линии уровня $I_2(h, k) = \text{const}$, построенные по формуле (6) в области $\{(h, k) \in \Phi(M^4) \mid k > 0, h > 1\}$, можно гладко продлить в область $\{(h, k) \in \Phi(M^4) \mid k \leq 0, h > 1\}$ — по формуле $I_2(h, k) - 2I_1(h, k) = \text{const}$ при $k < 0$ и по непрерывности при $k = 0$.*

Доказательство. Непрерывность линий уровня, т.е. равенство $\lim_{k \rightarrow 0+} I_2 = \lim_{k \rightarrow 0-} (I_2 - 2k)$ доказывается аналогично утверждению 10.

Проверим гладкость линий уровня, т.е. равенство $k'_{h, 0 < k < \varepsilon} \approx k'_{h, -\varepsilon < k < 0}$.

При $k > 0$ получим аналогично утверждению 10

$$k' = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}}{k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}} = [k \approx \varepsilon] = \frac{A}{B}.$$

При $k < 0$ получаем

$$k' = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}}}{k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} + 2\pi} = [k \approx \varepsilon] = \frac{A}{-B + 2\pi}.$$

Покажем, что

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} \sim \frac{\pi}{k}$$

Представим интеграл в виде суммы: $I = \int_{r_1}^{r_1+h_0} + \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} + \int_{r_2-h_0}^{r_2}$. При $k \approx 0$ имеем $r_1 \approx -1$, $r_1 \approx 1$.

В данном случае и первое, и третье слагаемые эквивалентны $\frac{\pi}{2k}$. Доказательство аналогично доказательству в утверждении 10

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} \frac{dr}{(1-r^2)\sqrt{2(h-r)(1-r^2)-k^2}} < \\ & < \int_{r_1+h_0}^{r_2-h_0} \frac{dr}{(1-(r_1+h_0)^2)\sqrt{2(h-r)(1-(r_1+h_0)^2)-k^2}} = C \int \frac{dr}{\sqrt{A-r}} = \text{const}, \end{aligned}$$

$A, C = \text{const}$. Поэтому $I \sim \frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$. $\square$.

Доказательство для произвольных $f(r)$ и $V(r)$ проводится аналогично.

Решетка, построенная по вычисленным переменным действия для системы на многообразии вращения, заданной функциями $f(r) = \sin r - \varepsilon \sin^3 r$ и $V(r) = \cos r$, показана на рисунке 33. Линии уровня переменной действия I_1 “параллельны” дугам типа A вблизи них. Линии уровня переменной действия I_2 определены глобально и параллельны оси h .

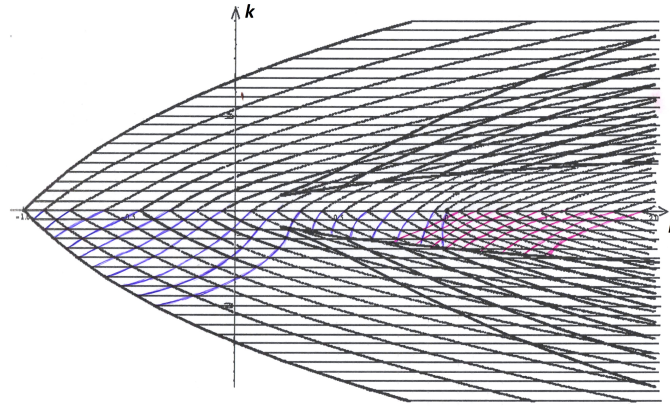


Рис. 33: решетка переменных действия, построенная для модельной системы на многообразии вращения.

2.5 Алгоритм вычисления матрицы склейки по решетке переменных действия

Наша цель — с помощью решетки переменных действия вычислить метки на ребрах молекулы. Это делается следующим образом. Сначала вблизи каждой дуги бифуркационной диаграммы выбирается базис на решетке переменных действия, соответствующий некоторой допустимой системе координат на торах Лиувилля. Далее по матрице C перехода между двумя такими базисами на решетке однозначно восстанавливается матрица склейки на соответствующем ребре молекулы. А именно, она равна обратной транспонированной к матрице C .

В каждой регулярной области образа отображения момента отображение из плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ в плоскость $\mathbb{R}^2(I_1, I_2)$ локально является диффеоморфизмом. Поэтому перейдем от интегралов к переменным действия, то есть рассмотрим образ решетки переменных действия на плоскости $\mathbb{R}^2(I_1, I_2)$. В этих координатах решетка выпрямляется, т.е. линии уровня переменных действия параллельны координатным осям. Будем рассматривать на решетке базис из векторов. Тогда базис

на решетке можно считать базисом на плоскости (т.е. на векторном пространстве), а переменные действия в некоторой точке плоскости — коэффициентами разложения по этому базису вектора с концом в данной точке плоскости. Известно, что закон преобразования базисных векторов получается из закона преобразования координат путем взятия обратной транспонированной матрицы. Но в силу формул для переменных действия последние преобразуются так же, как и базисные циклы на торах Лиувилля.

Таким образом, нам осталось указать правила выбора искомого базиса на решетке вблизи каждой бифуркационной дуги.

Напомним, как определяется допустимая система координат вблизи атома A , а также вблизи седловых атомов без звездочек (у нас это атомы B и V_k).

Первый цикл вблизи атома A — это стягивающийся в точку цикл. Второй цикл — это слой расслоения Зейферта с естественной ориентацией, индуцированной ориентацией гамильтонового потока.

Первый цикл вблизи седлового атома B или V_k — это слой расслоения Зейферта с ориентацией, индуцированной гамильтоновым потоком. Вторые базисные циклы — произвольные, однако они связаны условием существования проходящего через них глобального трансверсального сечения атома.

В обоих случаях первый цикл определен однозначно (с точностью до ориентации в случае атома A и однозначно в случае седлового атома), подробнее см. [1]. Далее будем называть его выделенным циклом.

Вблизи каждой бифуркационной дуги мы хотим выбрать базис, отвечающий некоторой допустимой системе координат на граничном торе соответствующего атома. Пусть e_1 и e_2 — векторы этого базиса, отвечающие соответственно переменным действия I_1, I_2 , вычисленным выше. По решетке переменных действия I_1, I_2 такой базис выбирается однозначно с точностью до порядка и ориентации базисных векторов.

Рассмотрим два случая.

1 случай. Дуга типа A .

Изучим поведение выделенного семейства линий уровня переменных действия вблизи бифуркационной дуги типа A . А именно, рассмотрим семейство линий уровня переменной действия I_1 , в формуле для которой интегрирование ведется по выделенному циклу γ (т.е. при подходе к бифуркационной дуге типа A цикл γ стягивается в точку).

Рассмотрим гладкое семейство стягивающихся циклов γ на торах вблизи атома A . Возьмем γ в качестве одного из двух циклов, образующих базис на торах вблизи атома A . Тогда, согласно формуле для вычисления переменных действия, имеем $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \alpha$. Так как при подходе к бифуркационной дуге цикл γ стягивается в точку, то соответствующая переменная действия I стремится к нулю. Значит, бифуркационная дуга соответствует значению переменной действия $I_1 = 0$, а следовательно, в ее окрестности линии уровня $\{I_1 = c/N, c/N = \text{const}\}$ "параллельны" бифуркационной дуге. Иначе говоря, линии уровня переменной действия I_1 , соответствующие малым значениям c/N , не пересекают бифуркационную дугу.

Как следствие, получаем, что переменная действия I_1 отвечает стягивающемуся циклу, потому что ее линии уровня "параллельны" бифуркационной дуге. Переменная действия I_2 отвечает слою расслоения Зейферта, ориентация которого определяется гамильтоновым потоком.

Поэтому в силу определения допустимой системы координат на торах Лиувилля искомый базис на решетке будет иметь вид: $(\pm e_1, e_2)$. Остается понять ориентацию вектора e_2 .

Из формулы для вычисления I_2 следует, что ориентация цикла (т.е. слоя расслоения Зейферта), соответствующего этой переменной действия, совпадает с ориентацией гамильтонова потока $\text{sgrad}K$.

На критических окружностях $\text{sgrad}K$ и $\text{sgrad}H$ связаны соотношением: $\text{sgrad}H = \lambda \cdot \text{sgrad}K$, и, следовательно, равенство $\text{grad}H = \lambda \cdot \text{grad}K$. Напомним, как выглядят выражения для $\text{grad}H$ и $\text{grad}K$ на бифуркационных дугах (в координатах

$\{p_r, p_\varphi, r, \varphi\}$):

$$\text{grad}H = \{0, \frac{k}{f^2(r)}, 0, 0\}, \text{grad}K = \{0, 1, 0, 0\},$$

следовательно, на бифуркационных дугах $\text{grad}H = \frac{k}{f^2(r)}\text{grad}K$, т.е. $\lambda = \frac{k}{f^2(r)}$, значит, $\text{sgn}\lambda = \text{sgn}k$.

Отсюда следует, что ориентации потоков $\text{sgrad}H$ и $\text{sgrad}K$ одинаковы при $k > 0$ и противоположны при $k < 0$. Поэтому вектор e_2 нужно ориентировать по возрастанию интеграла K при $k > 0$ и по убыванию при $k < 0$.

2 случай. Дуга типа B .

В этом случае первому базисному циклу допустимой системы координат на торе Лиувилля (он же слой расслоения Зейферта) отвечает переменная действия I_2 , второму — переменная I_1 .

Таким образом, искомый базис на решетке будет выглядеть следующим образом: $(e_2, \pm e_1)$.

Как видим, нужно выбрать ориентацию вектора e_2 , что делается точно так же, как и в случае дуги типа A .

Таким образом, мы показали, какие базисы на решетке переменных действия I_1, I_2 будут отвечать допустимым системам координат на граничных торах атомов.

Векторы e_2 , выбранные указанным способом, изображены на рисунке 34.

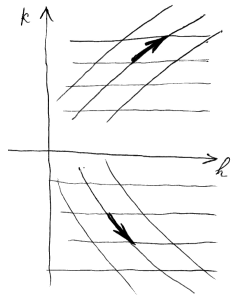


Рис. 34: базисный вектор e_2 , изображенный на решетке.

Однако, в выборе базисов осталась неоднозначность, связанная с неоднозначностью выбора ориентации одного из базисных циклов на торах Лиувилля. Соответ-

ствующие базисные векторы можно выбирать произвольно с тем лишь условием, чтобы матрицы, связывающие два таких базиса, имели определитель, равный -1 . Для определенности укажем способ такого выбора.

Рассмотрим произвольное ребро молекулы. Ему отвечают два базиса вблизи соответствующих бифуркационных дуг. Определим теперь ориентацию вектора e_1 таким образом, чтобы ориентация базиса, отвечающего концу ребра, была положительной (т.е. совпадала с естественной ориентацией плоскости h, k), а базиса, отвечающего началу ребра — отрицательной. Тем самым мы полностью изложили алгоритм выбора искомого базиса на решетке переменных действия.

Выберем пару базисов на решетке переменных действия вблизи двух бифуркационных дуг (это соответствует выбору базисов на регулярных торах вблизи двух концов ребра молекулы). Занумеруем линии уровня переменной действия I_1 последовательными целыми числами так, что если линия уровня $\{(h, k) : I_1(h, k) = c_j/N\}$ имеет номер i , то линия уровня $\{(h, k) : I_1(h, k) = (c_j + 1)/N\}$ имеет номер $i + 1$. Аналогичным образом занумеруем линии уровня переменной действия I_2 . Теперь будем "двигать" один из выбранных базисов по решетке навстречу другому по следующим правилам:

1. на $(i + 1)$ -м шаге выбранный базис (т.е. выбранная ячейка решетки) должна находиться между теми же линиями уровня одного семейства, что и на i -м шаге, и сдвигаться на 1 относительно нумерации другого семейства линий уровня;

2. путь, по которому мы проносим базис, не должен проходить через ячейки решетки, содержащие бифуркационные дуги и особые значения ранга 0.

Данный алгоритм будет применен далее для вычисления меток и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0 для исследуемого класса систем (а также, как приложение, для случая Лагранжа).

2.6 Вычисление меток и матрицы монодромии по решеткам переменных действия

Построим решетку переменных действия для системы на многообразии вращения, заданной функциями $f(r) = \sin r - \varepsilon \sin^3 r$ и $V(r) = \cos r$, где константа ε выбрана таким образом, что функция $f(r)$ имеет два локальных максимума. Отметим, что в предельном случае, а именно, когда $\varepsilon = 0$, получаем систему “сферический маятник”: при стремлении параметра ε к нулю локальный минимум функции в пределе исчезает; в результате два локальных максимума и один локальный минимум склеиваются в один локальный максимум. На бифуркационной диаграмме при стремлении ε к нулю дуги типа “клюв” “схлопываются”, а особенности типа клюв “отодвигаются” на бесконечность).

Отметим также, что для того, чтобы система, заданная парой функций $(f(r), V(r))$, оставалась системой нашего типа (удовлетворяла лемме 1), вместо добавки $-\varepsilon \sin^3 r$ можно было прибавить к функции $f(r) = \sin r$ любую нечетную в точках $r = 0$ и $r = \pi$ функцию $g(r)$, такую что возмущенная функция $\tilde{f}(r) = \sin r + g(r)$ была бы положительна на $r \in (0; \pi)$ и выполнялись бы равенства $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = 0$.

На решётке (см.рис.33) помимо линий уровня переменной действия $I_2(h, k)$, построенной по формуле (6), изображены линии уровня функции $I'_2(h, k) = I_2(h, k) - i \cdot k$, являющиеся гладким продолжением линий уровня функции $I_2(h, k)$ в область $k \leq 0$.

Теперь, применив алгоритм из параграфа 2.5, выберем базисы вблизи бифуркационных дуг и посчитаем матрицу склейки, используя построенную решётку (см.рис.35). Пунктирные векторы — это базис у верхнего ребра молекулы, сплошные векторы — базис у нижнего ребра молекулы. Красным цветом изображены выделенные, первые базисные векторы, оранжевым — вторые базисные векторы.

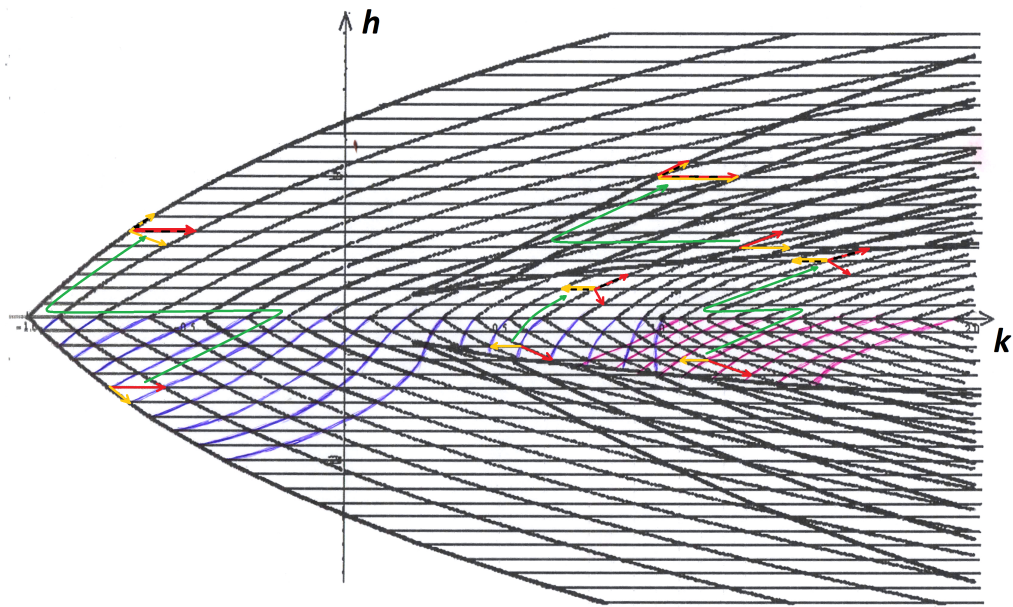


Рис. 35: выбор базисов на решетке вблизи бифуркационных дуг.

По построенной решётке мы можем вычислить матрицы перехода на всех ребрах молекулы, а именно, на ребрах $A - A$, $A - B$ и ребре $B - B$, симметричном относительно оси h . Отметим, что в области, соответствующей внутренности “клюва”, мы имеем три семейства линий уровня переменных действия, т.к. этой области отвечают два листа бифуркационного комплекса, и на каждом листе интегралу, отвечающему переменной действия $I_2(h, k)$, соответствуют различные циклы интегрирования (и, значит, различные пределы интегрирования).

На рисунке 36 изображены пути, по которым мы проносим базисы для вычисления матриц склейки.

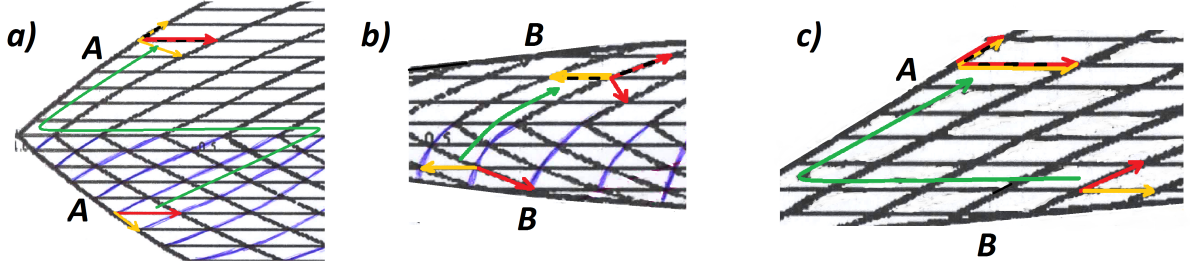


Рис. 36: вычисление матриц склейки по решетке.

На рисунке 36a вычисляем матрицу склейки на ребре $A - A$. Согласно рисунку, получаем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M^{-1})^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда получаем метки: $r = 0, \varepsilon = +1$.

На рисунке 36b вычисляем матрицу склейки на ребре $B - B$, симметричном относительно оси h . Согласно рисунку, получаем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M^{-1})^{tr} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда получаем метки: $r = \infty, \varepsilon = -1$.

На рисунке 36c вычисляем матрицу склейки на ребре $A - B$. Согласно рисунку, получаем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (M^{-1})^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем метки: $r = 0, \varepsilon = +1$.

Вывод. Метки, вычисленные по решётке переменных действия, совпадают с метками, посчитанными с помощью явного выбора циклов на торах (см. теорему 6). Таким образом, по решётке переменных действия полностью восстанавливается инвариант Фоменко–Цишанга.

Лемма 26 Матрица монодромии изолированной особой точки типа фокус–фокус для системы на многообразии вращения принадлежит классу сопряженности матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в группе $SL(2, \mathbb{Z})$ для любой пары функций $(f(r), V(r))$, задающих систему.

Доказательство. Этот факт был известен и ранее, однако нашей целью является его доказательство с использованием решетки переменных действия. Чтобы вычислить матрицу монодромии, выберем на решётке базис и пронесём его по замкнутому контуру в положительном направлении (против часовой стрелки) вокруг изолированной особенности, затем выпишем полученную матрицу перехода между начальным и конечным базисами (см.рисунок 37).

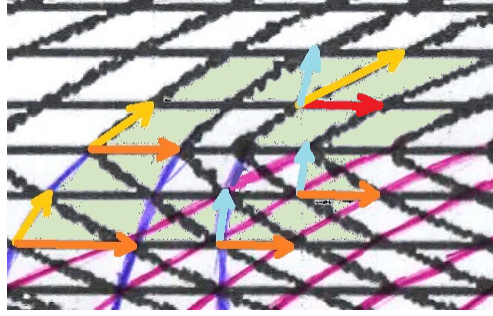


Рис. 37: вычисление матрицы монодромии по решетке.

Красным цветом на рисунке 37 изображен ковектор e_1 , который при обходе по замкнутому контуру переходит в себя, т.е. $e'_1 = e_1$. Оранжевым изображен ковектор e_2 . При обходе по замкнутому контуру он трансформируется в голубой ковектор e'_2 . Получаем матрицу перехода

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, матрица монодромии имеет вид

$$(M^{-1})^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \square.$$

Понятно также, что верно и обратное утверждение.

Утверждение 12 *По матрице монодромии изолированной особой точки типа фокус–фокус для системы на многообразии вращения можно локально восстановить решетку переменных действия в окрестности соответствующего изолированного особого значения.*

Из правил, по которым выбирается выделенный базисный цикл на торе вблизи ребра молекулы (см. книгу [1]) и из алгоритма выбора базиса на решетке (см. параграф 2.5), получаем следствие.

Следствие. *Для системы на многообразии вращения путем анализа бифуркационного комплекса можно получить информацию о решетке, которой достаточно для вычисления меченых молекул и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0 (а именно, знание качественного поведения линий уровня переменных действия вблизи бифуркационных дуг типа A , вблизи оси h , а также тот факт, что одна переменная действия определена глобально и ее линии уровня параллельны оси h , обеспечивают достаточную о решетке информацию для вычисления меченых молекул и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0).*

Следующий параграф будет посвящен интегрируемой гамильтоновой системе “обобщенный случай Лагранжа”, которая является системой с S^1 -симметрией, но не является системой на многообразии вращения. Для случая Лагранжа следствие неприменимо, однако для этой системы по решетке мы можем восстановить все метки и вычислить матрицы монодромии изолированных особых значений ранга 0.

2.7 Решетки переменных действия для обобщенного случая Лагранжа

Симметричным волчком (волчком Лагранжа) называют закрепленное в неподвижной точке O , находящееся в однородном гравитационном поле твердое тело, у ко-

торого эллипсоид инерции в O есть эллипсоид вращения (т.е. два момента инерции равны) и центр тяжести лежит на оси вращения.

Аналогично определяется волчок в обобщенной задаче Лагранжа (*обобщенный волчок Лагранжа*), потенциальное поле которого имеет ось симметрии и задается гладкой функцией $V(x)$ на отрезке $[-1; 1]$. При этом классическому случаю Лагранжа соответствует $V(x) = \tilde{g}x$, где $\tilde{g}$ — ускорение свободного падения.

Систему, описывающую обобщенный волчок Лагранжа, можно рассматривать как гамильтонову систему на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли $e(3)$. Рассмотрим на $e(3)^*$ координаты $(r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3)$, в которых скобка Пуассона имеет вид

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk}s_k, \quad \{s_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk}r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0.$$

Фазовым пространством системы является многообразие (зависящее от параметра g)

$$M_{1,g}^4 = \{(r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3) \mid r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \quad r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 = g\},$$

а симплектическая структура получается ограничением на него скобки Пуассона. Здесь $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — кинетический момент тела; $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3)$ — единичный вектор, направленный по оси симметрии. Отметим, что многообразие $M_{1,g}^4$ диффеоморфно T^*S^2 (и даже симплектоморфно при $g = 0$).

Функция Гамильтона H и дополнительный интеграл F на $M_{1,g}^4$ для обобщенного случая Лагранжа имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + \frac{s_3^2}{\beta}) + V(r_3), \quad F = s_3, \quad (7)$$

где β — параметр системы, а $V(x)$ — гладкая функция на отрезке $[-1; 1]$ (потенциал), характеризующая силовое поле, в котором находится тело (подробнее см. в [44]). Отметим, что слоение Лиувилля и качественный вид решетки не зависят от β , поскольку $H_\beta = H_{\frac{1}{2}} + \frac{1-2\beta}{2\beta}F^2$.

Таким образом, гамильтонова система, соответствующая волчку Лагранжа (обобщенному волчку Лагранжа), имеет два параметра $g > 0$ и $\beta > 0$ и интегрируема при любых значениях g и β .

Определим 2-параметрическое семейство функций на отрезке $[-1; 1]$

$$W_{H,F}(x) = (H - \frac{F^2}{2\beta} - V(x))(1 - x^2) - \frac{1}{2}(g - Fx)^2.$$

Непосредственным вычислением проверяется следующее утверждение.

Лемма 27 *Для обобщенного случая Лагранжа (7) совместная поверхность уровня гамильтониана и интеграла $\{H = h, F = f\}$ связна тогда и только тогда, когда функция $W_{H,F}(x)$ имеет ровно два нуля на отрезке $[-1; 1]$ и положительна в точности между ними.*

В работе О.Е.Орел, Ш.Такахаша [44] был исследован классический случай Лагранжа, однако следующая лемма остается верной и для обобщенного случая Лагранжа.

Лемма 28 *(Орел, Такахаша [44]) Система “обобщенный случай Лагранжа” имеет ровно две особые точки ранга 0. Каждая из этих точек в зависимости от значений параметров g и β , а также в зависимости от функции $V(x)$ имеет тип фокус–фокус или центр–центр. Координаты особых точек ранга 0 имеют вид*

$$P_1 = (\frac{g^2}{2\beta} + V(1), g), P_2 = (\frac{g^2}{2\beta} + V(-1), -g).$$

Теперь сформулируем лемму, описывающую явные формулы для вычисления переменных действия.

Лемма 29 *Пусть для обобщенного случая Лагранжа (7) все совместные поверхности уровня гамильтониана и интеграла связны, т.е. функция $W_{H,F}(x)$ имеет ровно два нуля $a(H, F)$, $b(H, F)$ на отрезке $[-1; 1]$, причем $W_{H,F}(x) > 0$ внутри отрезка $[a(H, F), b(H, F)]$. Тогда переменная действия I_1 определена глобально и имеет вид $I_1(H, F) = F$. Переменная I_2 , определенная в области $\{|F| \leq g\} \cup \{F > g, H \leq \frac{g^2}{2\beta} + V(1)\} \cup \{F < -g, H \leq \frac{g^2}{2\beta} + V(-1)\}$, является гладкой функцией и имеет вид*

$$I_2(H, F) = I(H, F) = \frac{1}{\pi} \int_{a(H,F)}^{b(H,F)} \frac{\sqrt{2W_{H,F}(x)}}{1 - x^2} dx. \quad (8)$$

Доказательство. Вычислим переменные действия по формулам (4). Для этого необходимо выбрать на торах Лиувилля циклы γ_1 и γ_2 , по которым будет вестись интегрирование в формулах (4). Лиувиллев тор хорошо виден в проекции многообразия M^4 в пространство $\mathbb{R}^3(\bar{r})$. При этом проекция тора представляет собой цилиндр $\{a \leq r \leq b\}$ на сфере $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, где $a, b \leq 1$ — нули функции $W_{H,F}(r_3)$, а сама функция W строго больше нуля на интервале (a, b) (см.рис.38).

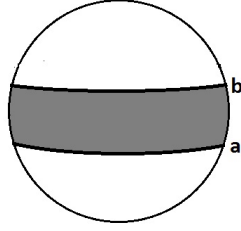


Рис. 38: проекция тора Лиувилля на конфигурационное пространство, т.е. на сферу.

Это наглядное представление демонстрирует выбор циклов на нем

$$\gamma_1 = \{r_3 = c\}, \quad \gamma_2 = \{r_2 = 0, r_1 > 0\}.$$

Затем прямым вычислением из формул (4) получаем выражения для переменных действия.

Объясним теперь, почему переменная I_2 определена формулой (8) только на части образа отображения момента. Система “обобщенный случай Лагранжа” имеет две особые точки ранга 0 (см. лемму 28). В силу наличия изолированных особых точек ранга 0 (точек типа фокус–фокус) система имеет монодромию, а значит, переменные действия не могут быть определены глобально. В частности, если построить линии уровня переменной действия I_2 по формуле (8) на всем образе отображения момента, то на лучах $\{H = \frac{g^2}{2\beta} + V(1), F \geq g\}$ и $\{H \geq \frac{g^2}{2\beta} + V(1), F = g\}$ (если обе особые точки ранга 0 имеют тип фокус–фокус, то еще и на лучах $\{H = \frac{g^2}{2\beta} + V(-1), F \leq -g\}$ и $\{H \geq \frac{g^2}{2\beta} + V(-1), F = -g\}$)

у линий уровня переменной действия I_2 будет наблюдаться излом, т.е. они будут непрерывными, но не гладкими. Повторим, что этот эффект связан с наличием монодромии при обходе вокруг точек типа фокус–фокус, которые имеют координаты $P_1 = (\frac{g^2}{2\beta} + V(1), g)$, $P_2 = (\frac{g^2}{2\beta} + V(-1), -g)$ (см. лемму 28). Из этих рассуждений вытекают ограничения на область определения функции I_2 , заданной формулой (8).□.

Лемма 30 *Линии уровня переменной действия $I_2(H, F)$, определенной в области $\{|F| \leq g\} \cup \{F > g, H \leq \frac{g^2}{2\beta} + V(1)\} \cup \{F < -g, H \leq \frac{g^2}{2\beta} + V(-1)\}$ по формуле (8), гладким образом продолжаются в оставшуюся область образа отображения момента по следующим формулам:*

$$I_2(H, F) = \begin{cases} I(H, F) + F - g, & \text{если } F > g, H > \frac{g^2}{2\beta} + V(1) \\ I(H, F) - F - g, & \text{если } F < -g, H > \frac{g^2}{2\beta} + V(-1) \\ I(H, F), & \text{иначе} \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. В результате детального топологического анализа, выполненного В.С.Матвеевым (см., например, работу [45]), выяснилось, что при обходе вокруг точек типа фокус–фокус цикл γ_1 не изменяется, а цикл γ_2 переходит в цикл $\gamma_2 \pm \gamma_1$ (в зависимости от направления обхода). Отсюда вытекает невозможность глобального выбора пары циклов на всех торах системы одновременно, а также следуют формулы (9).□.

Теперь, когда мы знаем, как ведут себя линии уровня переменных действия для исследуемой системы, мы можем построить решетку переменных действия.

Следующее утверждение было получено на компьютере с использованием языка программирования C++ и пакета Mathematica 7.0.

Утверждение 13 *1) При $V(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, для любых значений параметров $\beta > 0$, $g > 0$ решетка $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2(H, F)$ и бифуркационная диаграмма системы симметричны относительно оси H и имеют вид, показанный на рис.39а) (обе*

особые точки ранга 0 имеют тип фокус-фокус и симметричны относительно оси H).

2) При $V(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, решетка $\mathcal{R}$ и бифуркационная диаграмма системы имеют вид, показанный на рис.39b) (одна особая точка ранга 0 имеет тип фокус-фокус и лежит внутри образа отображения момента, а вторая особая точка ранга 0 имеет тип центр-центр и лежит на границе образа отображения момента).

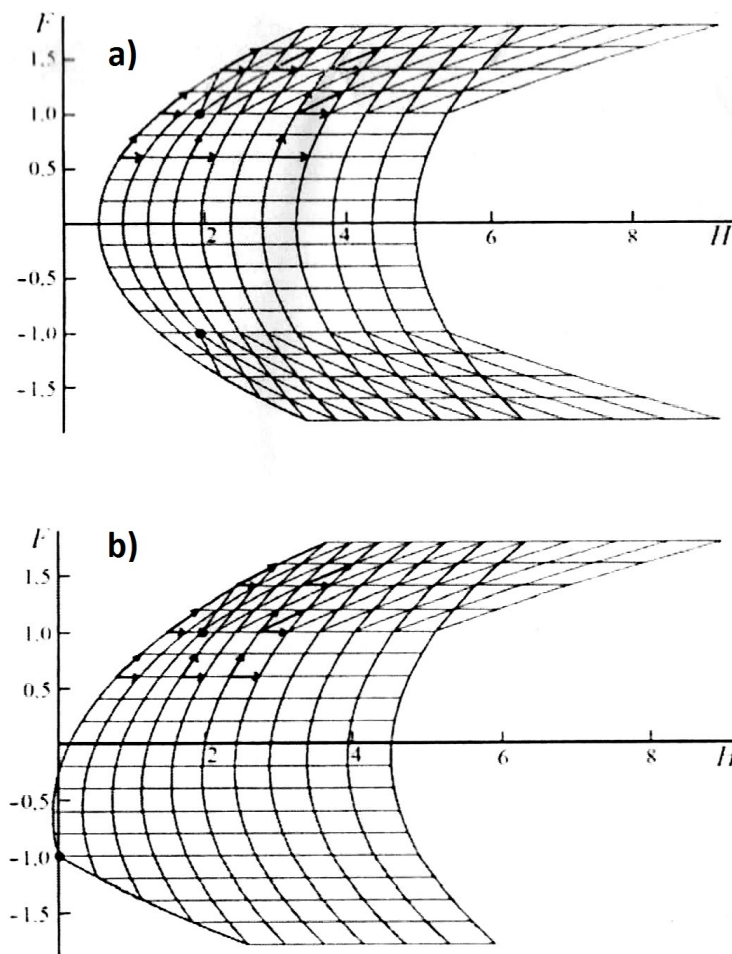


Рис. 39: решетки переменных действия для обобщенного случая Лагранжа: а) $V(x) = x^{2n}$; б) $V(x) = x^{2n+1}$.

Примеры решеток, соответствующих степенному потенциалу $V(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, приведены на рис.37. Эти решетки построены с использованием формул (8) и (9). На рисунках изображены два семейства линий уровня функций I_1 , I_2 : первое состоит из кривых $\{I_2 = c_2, c_2 - \text{константа}\}$, похожих на параболы, а второе — из линий $\{I_1 = c_1, c_1 - \text{константа}\}$, параллельных оси H .

По построенным решеткам переменных действия можно вычислить матрицы монодромии изолированных особых точек ранга 0.

Утверждение 14 *Для любого потенциала вида $V(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, матрица монодромии любого изолированного особого значения ранга 0 в базисе, соответствующем переменным действия I_1 , I_2 , имеет вид $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Доказательство этого утверждения проводится аналогично вычислению матрицы монодромии изолированного особого значения ранга 0 для системы на многообразии вращения (см. лемму 26).

3 Заключение

В заключении перечислены результаты, полученные в диссертации, в соответствии с главами. Также приведены основные результаты данной работы и сформулированы задачи, возникшие в процессе работы над диссертацией.

В первой главе диссертации полностью исследована топология слоения Лиувилля систем на многообразиях вращения $M \approx S^2$ в поле действия потенциала, а именно, доказана теорема классификации инвариантов Фоменко-Цишанга для исследуемого класса систем (теорема 6). Кроме того, изучен образ отображения момента и бифуркационные диаграммы, возникающие в данном классе систем, получена теорема классификации бифуркационных диаграмм (теорема 4).

Также в диссертации найдены случаи лиувиллевой эквивалентности исследуемым системам. Показано, что если молекула системы на многообразии вращения, ограниченной на неособое изоэнергетическое 3-многообразие, имеет вид $A - A$, то практически для каждой классической интегрируемой динамической системы (более точно, для каждой интегрируемой системы, обладающей при некоторых значениях энергии молекулой $A - A$) существуют значения энергии h , такие что система на многообразии вращения, ограниченная на изоэнергетическое 3-многообразие будет лиувиллево эквивалентна данной классической интегрируемой системе, ограниченной на Q_h^3 (для каждой классической интегрируемой системы уровень энергии h свой). В случае, если молекула имеет вид дерева, то система лиувиллево эквивалентна геодезическим потокам на сфере (при больших значениях энергии h) и грубо лиувиллево эквивалентна им при малых значениях энергии h (подробнее см. утверждение 8).

Вторая глава диссертации посвящена изучению решеток переменных действия интегрируемых гамильтоновых систем. Дано формальное определение решетки и доказана его корректность. Затем для систем на многообразиях вращения вычислены переменные действия и по ним построены решетки переменных действия.

Также во второй главе приведен алгоритм вычисления по решеткам переменных действия матриц склеек на ребрах молекулы и матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0. Этот алгоритм применен к системам на многообразиях вращения и, как приложение, к обобщенному волчку Лагранжа — для вычисления меток в инварианте Фоменко-Цишанга, а также матриц монодромии изолированных особых значений ранга 0.

Перечислим основные результаты, полученные автором в настоящей работе.

1. Получена полная классификация систем на многообразиях вращения с потенциалом на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, классифицированы все соответствующие слоения Лиувилля. Эта классификация получена на основе вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга (меченых молекул) исследуемых систем.

2. Получена классификация всех соответствующих изоэнергетических 3-многообразий вместе со слоениями Лиувилля на них.

3. Доказано, что интегрируемые системы на двумерных поверхностях вращения с гладким потенциалом, ограниченные на связные компоненты трехмерных изоэнергетических поверхностей, в некоторых случаях топологически (лиувиллево) эквивалентны различным классическим интегрируемым динамическим системам. А именно, в случае, если молекула исследуемой системы, ограниченной на неособое изоэнергетическое 3-многообразие, имеет вид $A - A$, то практически для каждой классической интегрируемой гамильтоновой системы (а именно, для каждой системы, обладающей молекулой $A - A$, например, для волчка Лагранжа, системы Ковалевской, системы Горячева-Чаплыгина-Сретенского и др.) существуют такие значения энергии h (для каждой системы свои значения энергии), что данная классическая интегрируемая система, ограниченная на Q_h^3 , является лиувиллево эквивалентной системе на многообразии вращения, ограниченной на неособое изоэнергетическое 3-многообразие. Если же молекула системы имеет вид дерева, то при больших значениях энергии система на многообразии вращения с потенциалом

является лиувиллево эквивалентной геодезическому потоку на сфере с подходящей метрикой вращения.

В процессе написания работы были сформулированы новые задачи, которые можно решать, опираясь на текст данной диссертации. Сформулируем основные из них:

1. Провести траекторную классификацию систем на многообразиях вращения в потенциальном поле, а именно: вычислить функции вращения на ребрах молекулы (эта задача была начата автором, вследствие чего возникла гипотеза).

Гипотеза. Существует такая пара функций $(f(r), V(r))$, задающих систему на многообразии вращения и такое значение энергии h , что на выбранном ребре молекулы $(A - A, A - V_k$ или $V_k - V_l)$ системы, ограниченной на 3-многообразие Q_h^3 , реализуется любой симметричный вектор вращения (в случае, если на конце ребра стоит атом A , то соответствующая краевая координата вектора вращения однозначно определяется функциями $f(r)$ и $V(r)$, а в случае, если на конце ребра стоит седловой атом, соответствующая координата равна $\pm\infty$).

Таким образом, интересной задачей является доказательство (или опровержение) этой гипотезы и изучение траекторной эквивалентности в целом для данного класса систем.

2. В диссертации полностью исследована топология слоения Лиувилля для систем на многообразиях вращения, гомеоморфных двумерной сфере. В случае, если многообразие вращения гомеоморфно двумерному тору, система также остается интегрируемой. Поэтому второй интересной задачей является изучение топологии для случая $M \approx T^2$.

3. Мы исследовали системы с потенциалом, другими словами, на точку, движущуюся по многообразию M , действовала потенциальная сила V . Можно обобщить задачу и добавить магнитную силу B в систему. Система останется интегрируемой, и интересно было бы посмотреть, как магнитная добавка повлияет на топологию системы — это является третьей основной задачей.

4. Если удалить из сферы S^2 , являющейся конфигурационным пространством изучаемых систем, полюса, то и конфигурационное, и фазовое пространства будут некомпактными. Следовательно, для изучения топологии слоения Лиувилля, возникающего в таких системах, классическая теорема Лиувилля неприменима, так как регулярные слои в такой задаче могут быть не только торами, но и цилиндрами (согласно теореме К.Алешкина). Соответственно, возникает задача — исследовать топологию полученной некомпактной системы.

5. Важной задачей является дальнейшее изучение решеток переменных действия. В настоящей работе изучены решетки переменных действия только для случаев, когда молекула системы состоит только из атомов A и V_k . Интересно узнать, как ведут себя линии уровня переменных действия (и, соответственно, решетки) в случае, если в молекуле присутствуют и другие атомы. Решетка является удобным инструментом для вычисления меток и матриц монодромии, поэтому было бы полезно придумать наиболее подробный и общий алгоритм построения решеток переменных действия для интегрируемых гамильтоновых систем, не привязанный к конкретной системе. Следует отметить, что в системах с двумя степенями свободы решетки переменных действия двумерные, однако в общем случае, а именно, в системах с n степенями свободы размерность решеток равна n (естественно, не всегда $n = 2$). При изучении и построении решеток и при создании общих алгоритмов работы с ними этот факт следует учитывать.

Список литературы

- [1] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы, т.1, т.2*, изд.дом “Удмурт.ун-т”, 1999.
- [2] А.Т. Фоменко, *Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю*, Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51. English translation: A.T. Fomenko, *Topological invariants of Hamiltonian systems that are integrable in the sense of Liouville*, Functional Anal. Appl. 22 (1988), No.4, pp.286-296.
- [3] A.T. Fomenko, *The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular Table of all integrable systems with two degrees of freedom*, In: Topological Classification of Integrable Systems. - Advances in Soviet Mathematics. v.6, 1991. Amer.Math.Soc. pp.1-36.
- [4] М.Ю.Ивочкин, *Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости*, Матем.Сб., 2008, т.199, стр.85–104
- [5] Г.М.Сечкин, *Топология динамики неоднородного эллипсоида вращения на гладкой плоскости*, дипломная работа, каф.дифф.геом. и прил. МГУ, 2015, Москва
- [6] A.V.Bolsinov, A.T.Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification*, CHAPMAN and HALL/CRC. A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004.
- [7] M.Audin, *Hamiltonian Systems and Their Integrability*, SMF/AMS Texts and Monographs, 2008, vol.15.

- [8] А.Т.Фоменко, *Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем*, Известия АН СССР, серия матем., т.55, №4, 1991, стр.747–779
- [9] А.Т.Фоменко, *Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях*, Функц.анализ и его приложения, 1991, т.25, вып.4, стр.23–25

English translation: Fomenko A.T., *A topological invariant which roughly classifies strictly nondegenerate Hamiltonians on four-dimensional symplectic manifolds*, Functional Analysis and its Applications, 1991, v.25, №4, p.262.
- [10] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, *Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела*, Функц.анализ и его приложения, 1995, том 29, №3, стр.1–15
- [11] А.В.Болсинов, А.В.Борисов, И.С.Мамаев, *Топология и устойчивость интегрируемых систем*, Усп.Матем.Наук, 2010, т.65, вып.2 (392), стр.71–132
- [12] А.Т.Fomenko, P.V.Morozov, *Some new results in topological classification of integrable systems in rigid body dynamics*, Proceedings of the Workshop “Contemporary Geometry and Related Topics”, Belgrade, Yugoslavia, 15–21 May 2002, World Scientific Publishing Co., 2004, pp.201–222.
- [13] A.V.Bolsinov, A.T.Fomenko, A.A.Oshemkov, *Topological Methods in the Theory of Integrable Hamiltonian Systems* (монография), Cambridge Scientific Publishers, 2006.

- [14] Е.А.Кудрявцева, И.М.Никонов, А.Т.Фоменко, *Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия*, Матем.Сб., 2008, т.199, №9, стр.3–96.
- [15] Е.А.Кудрявцева, А.Т.Фоменко, *Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях*, Доклады РАН, серия: математика, 2012, том 446, №6, стр.615–617.
- [16] A.T.Fomenko, A.Yu.Konyaev, *Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems*, In: “Continuous and Disturbed Sytems. Theory and Applications”, vol.211, pp.3–21, Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer, 2014.
- [17] А.Т.Фоменко, Х.Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, 54:3, 546–575
- [18] A.T.Fomenko, S.S.Nikolaenko, *The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid*, Journal of Geometry and Physics, 2015, vol.87, pp.115–133.
- [19] A.T.Fomenko, E.O.Kantonistova, *Topological Classification of Geodesic Flows on Revolution 2-Surfaces with Potential* In: “Continuous and Disturbed Sytems. Theory and Applications”, Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer, 2015.
- [20] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, *Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях*, изд-во УРСС, 1999
- [21] A.V.Bolsinov, B.Jovanovic, *Integrable geodesic flows on Riemannian manifolds: construction and obstructions*, *Contemporary geometry and related topics*, 57–103, World Sci.Publ., River Edge, NJ, 2004.

- [22] Н.В.Коровина, *Траекторная эквивалентность двух классических задач в динамике твердого тела*, Доклады Академии Наук, 2000, т.375, №2, стр.163–165.
- [23] А.Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, изд-во “Мир”, 1981.
- [24] М.В.Новиков, *Бифуркационные диаграммы натуральных механических систем с двумя степенями свободы, инвариантных относительно вращений*, дипломная работа, каф.дифф.геом. и прил. МГУ, 2012, Москва
- [25] М.Engman, *A note on isomorphic embeddings of surfaces of revolution*, The American Mathematical Monthly, 01/2002.
- [26] Е.О.Кантонистова, *Целочисленные решетки переменных действия для обобщенного случая Лагранжа*, Вестн.Моск.Ун-та, Сер.1, Матем.Мех., 2012, №1, стр.54–58.
- [27] Е.О.Кантонистова, *Целочисленные решетки переменных действия для системы “сферический маятник”*, Вестн.Моск.Ун-та, Сер.1, Матем.Мех., 2014, №4, стр.6–17.
- [28] Е.О.Кантонистова, *Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения*, Вестн.Моск.Ун-та, Сер.1, Матем.Мех., 2015, №5, стр.41–44.
- [29] Е.О.Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле*, Матем.сб., 2016, Том 207, №3, стр.47–92.
- [30] Е.А.Кудрявцева, Д.А.Федосеев, *Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения*, Матем.Сб., 2015, том 206, №5, стр.107–126.

- [31] А.Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, Усп.матем.наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173
- [32] А.Ю. Москвин, *Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере*, Матем. сб., т.199, №3, с. 95–132, 2008
- [33] А.Т.Fomenko, A.Yu.Konyaev, *New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems*, Topology and its Applicationsm 2012, vol.159, pp.1964–1975.
- [34] П.К.Рашевский, *Курс дифференциальной геометрии*, гос.изд-во технико-технической литературы, Москва, 1950
- [35] B.Zhilinskii, *Monodromy and complexity of quantum systems*, *The Complexity of Dynamical Systems: A Multi-disciplinary Perspective*, Eds.J.Dubbeldam, K.Green, and D.Lenstra, Wiley, Singapore, 2011, 159–181
- [36] B.Zhilinskii, *Hamiltonian monodromy as lattice defect*, *Topology in Condensed Matter*, Springer Series in Solid-State Sciences, 150, 2006, 165–186
- [37] B.Zhilinskii, *Interpretation of quantum Hamiltonian monodromy in terms of lattice defects*, Acta Appl.Math.2005, 87, 281–307
- [38] J.J.Duistermaat, *On global action-angle variables*, Comm.Pure Appl.Math.,33, 1980, 687–706
- [39] R.Cushman, D.A.Sadovskii, *Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields*, Physica D 142, 2000, 166–196

- [40] S.Vu Ngoc, *Quantum monodromy in integrable systems*, Comm.Math.Phys., 203, 1999, 2, 465–479
- [41] M.S.Child, *Quantum states in a champagne bottle*, J.Phys. A, 31(2), 1998, 657–670
- [42] L.Grondin, D.Sadovskii, B.Zhilinskii, *Monodromy in systems with coupled angular momenta and rearrangement of bands in quantum spectra*, Phys.Rev.A (3)65, 2001, 10–15
- [43] D.A.Sadovskii, *Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling*, Phys.Lett.A 256, 1999, 4, 235–244
- [44] О.Е.Орел, Ш.Такахаша, *Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа*, Матем.сб., 1996, 187, №1, 95–112.
- [45] А.В.Болсинов, С.В.Матвеев, А.Т.Фоменко, *Топологическая классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности*, УМН 1990, т.45, №2, 49–78.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. А.Т.Фоменко, Е.О.Кантонистова, *Topological Classification of Geodesic Flows on Revolution 2-Surfaces with Potential* In: “Continuous and Disturbed Sytems. Theory and Applications”, Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer, 2015.
2. Е.О.Кантонистова, *Целочисленные решетки переменных действие для обобщенного случая Лагранжа*, Вестн.Моск.Ун-та, Сер.1, Матем.Мех., 2012, №1, стр.54–58.
3. Е.О.Кантонистова, *Целочисленные решетки переменных действия для системы “сферический маятник”*, Вестн.Моск.Ун-та, Сер.1, Матем.Мех., 2014, №4, стр.6–17.

4. Е.О.Кантонистова, *Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения*, Вестн.Моск.Ун-та, Сер.1, Матем.Мех., 2015, №5, стр.41–44.

5. Е.О.Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле*, Матем.сб., 2016, Том 207, №3, стр.47–92.