

ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи



Фокичева Виктория Викторовна

Топологическая классификация интегрируемых билиардов

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Фоменко Анатолий Тимофеевич,
доктор физико-математических наук,
академик РАН,
профессор

Официальные оппоненты:

Кушнер Алексей Гурьевич,
доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией №6 “Проблем качественного
исследования нелинейных динамических систем” (ФГБУ
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)

Морозов Павел Валерьевич,
кандидат физико-математических наук,
ООО “РусБио Венчурс”, инвестиционный директор

Ведущая организация:

**ФГБОУ ВПО Челябинский государственный
университет**

Защита диссертации состоится 3 июня 2016 г. в 16⁴⁵ на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВО Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8^й этаж), <http://mech.math.msu.ru/~snark/index.cgi>, <http://istina.msu.ru/dissertations/19274499>.

Автореферат разослан 3 апреля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико–математических наук,
профессор



Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации получена топологическая (лиувиллева) классификация интегрируемых билиардов в плоских и локально-плоских компактных областях, ограниченных дугами софокусных квадрик с помощью методов теории Фоменко-Цишанга об инвариантах интегрируемых систем. Кроме того, исследована топология соответствующих изоэнергетических поверхностей.

Теории математического билиарда – задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой, с абсолютно упругим отражением на границе посвящено множество работ (отметим книгу¹ С. Л. Табачникова, в которой дан обзор современных и классических исследований билиардов). Одними из классических вопросов являются задачи о существовании периодических траекторий и об интегрируемости билиардного движения в области в зависимости от ее границы. К примеру, в любом треугольнике существует периодическая билиардная траектория из трех звеньев, а именно треугольник наименьшего периметра, вершины которого находятся в основании высот исходного треугольника (теорема Фаньяно). В настоящий момент достаточно популярными интегрируемыми билиардами являются плоские билиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

Интегрируемость билиарда в области, ограниченной эллипсом, была замечена в работе² Дж. Д. Биркгофа. Интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде следует из теоремы Якоби-Шаля. При стремлении меньшей полуоси эллипсоида к нулю движение по геодезическим на нём переходит в движение по ломаным, целиком лежащим в образе эллипсоида – плоской области, ограниченной эллипсом. Интегрируемость билиарда сохраняется, если перейти к плоским областям, ограниченным дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства, на границе которых нет точек излома с углами $\frac{3\pi}{2}$. В этом случае все углы в точках излома равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку известно, что софокусные квадрики пересекаются всегда под прямыми углами. В книге³ В. В. Козлов, Д. В. Трещёв заметили, что эти динамические системы являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю (т.е. имеется дополнительный независимый интеграл Λ), а именно, что интегрируемость данных систем эквивалентна малой теореме Понселе. Для системы плоского билиарда в эллипсе были построены координаты, в которых движение представляется в виде периодического движения по торам. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности были подробно (но не полностью) изучены в работах⁴⁵ В. Драгович, М. Раднович.

В диссертации классифицированы все плоские билиардные области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол (при этом не обязательно изометрично вложимые в плоскость), а также области, уже не обязательно являющимися плоскими, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых сегментов границ. В работе исследована топология возникающих изоэнергетических поверхностей интегрируемых билиардов. Кроме того, не только описан топологический тип возникающих 3-поверхностей, но и исследована топология возникающего слоения Лиувилля с помощью вычисления меченых

¹С. Л. Табачников, *Геометрия и билиарды*, М.-Ижевск:НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011

²Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

³В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991

⁴V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН, 2009, 14, 4-5, 479–494

⁵В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые билиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, М.; Ижевск НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

молекул Фоменко-Цишанга – инвариантов лиувиллевой эквивалентности. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости), то лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений (т.е. интегральных траекторий) на трёхмерных уровнях постоянной энергии. Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. книгу⁶ А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко). Далее, для многих интегрируемых случаев динамики твердого тела для ряда изоэнергетических поверхностей вычисление инварианта Фоменко-Цишанга позволило обнаружить лиувиллеву эквивалентность этих систем полученным бильiardным системам с помощью сравнения меченых молекул. Тем самым, образно говоря, локально-плоские интегрируемые бильiardы “наглядно моделируют” многие достаточно сложные случаи интегрируемости в динамике твердого тела.

Также в работе исследована топология некомпактных бильiardов в областях, ограниченных софокусными параболой – для них построены грубые молекулы (без меток) – инварианты грубой лиувиллевой эквивалентности.

Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Классифицировать все плоские компактные области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также локально-плоские области, полученные из них склейками вдоль выпуклых эллиптических граничных дуг и некоторых выпуклых гиперболических граничных дуг, а также описать плоские области, ограниченные дугами софокусных парабол.
2. Вычислить инварианты лиувиллевой эквивалентности – меченые молекулы Фоменко-Цишанга – для бильiardа в каждой из описанных областей.
3. Среди найденных слоений найти слоения Лиувилля, которые эквивалентны ранее известным слоениям Лиувилля, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела, что позволит промоделировать ряд задач динамики твердого тела наглядными бильiardами.
4. Обнаружить “новые” слоения Лиувилля, в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям Лиувилля, возникшим в известных случаях динамики твердого тела.
5. Вычислить некомпактные аналоги инварианта Фоменко-Цишанга для важного примера некомпактных слоений Лиувилля.

Методы исследования

В работе используется теория топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная А.Т.Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым и другими. Активно применяются методы топологии трехмерных многообразий.

⁶ А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т.1,2, Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Классифицированы все компактные плоские области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол. Классифицированы все обобщенные локально-плоские области, полученные из них склейками вдоль выпуклых эллиптических граничных сегментов и некоторых выпуклых гиперболических граничных сегментов, приводящих к образованию так называемых конических точек.
2. Вычислены инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы W^* , описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 – для билиардов в каждой из описанных областей.
3. Вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для билиардов в компактных областях, ограниченных софокусными параболами, а также их некомпактные аналоги – молекулы Фоменко (без меток) – для билиардов в некомпактных областях, ограниченных софокусными параболами.
4. Для локально-плоских билиардов найдены слоения Лиувилля, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Эйлера (все слоения), Лагранжа, Ковалевской, Ковалевской-Яхьи, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Клебша и Соколова, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системе билиарда при подходящем выборе обобщённой билиардной области.
5. Обнаружены слоения Лиувилля, которые описываются инвариантами, ранее не встречавшихся в задачах динамики твердого тела, в том числе молекулы, атомы-бифуркации в которых являются новыми и также не встречались ранее.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем, в том числе для моделирования сложных эффектов поведения решений для сложных и менее наглядных систем, к которым относятся, например, классические случаи динамики твердого тела.

Полученный метод вычисления инвариантов и метод построения билиардных областей позволяет расширять класс билиардных задач и строить интересные примеры интегрируемых систем, топология слоений которых достаточно наглядна.

Вычисленные некомпактные аналоги инвариантов являются важным примером для начала построения теории некомпактных бифуркаций в интегрируемых системах, которая активно начинает развиваться.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 8–13 апреля 2013);

XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 7–11 апреля 2014);

XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 13–17 апреля 2015);

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2012” (Воронеж, 25–30 января 2012);

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2014” (Воронеж, 26–31 января 2014);

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2016” (Воронеж, 25–29 января 2016);

ежегодная научная конференция “Ломоносовские чтения” 2011 года (МГУ), посвященная 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова (Москва, 14–23 ноября 2011);

International Topological Conference “Alexandroff Readings” Lomonosov Moscow State University (Moscow, May 21–25, 2012);

открытый семинар представителей молодежных коллективов и профессоров механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Российская Федерация) и УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ» (Украина) (Москва-Киев, 18 ноября 2015);

Результаты диссертации докладывались на заседании семинара “Гамильтоновы системы и статистическая механика” под рук. акад. В.В. Козлова, проф. С.В. Болотина и чл.-корр. Д.В. Трещева; 2015, а также неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях семинара “Современные геометрические методы” под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, доц. И.М. Никонова, асс. А.Ю. Коняева, асс. А.М. Изосимова; 2010 – 2015 гг.

Публикации

Основные результаты диссертации представлены в пяти работах в журналах их списка ВАК, список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и семи глав. Текст диссертации изложен на 130 страницах. Список литературы содержит 38 наименований.

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной теории интегрируемых систем.

В **первой главе** вводятся основные понятия теории интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе дано описание атомов – бифуркаций тором Лиувилля и построение инварианта Фоменко-Цишанга.

Определение 1. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 , обладающих, соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$,

который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Теорема 1. (А. Т Фоменко, Х. Цишанг) *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на регулярных изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ ливиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Классический бильярд – это динамическая система, описывающая движение (материальной) точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют $\frac{\pi}{2}$. Среди известных нетривиальных классов интегрируемых бильярдных систем – бильярд в компактной плоской области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербола (эллиптико-гиперболический бильярд), бильярд в области, ограниченной дугами софокусных парабол (параболический бильярд), а также класс обобщенных локально-плоских бильярдов, склеенных из областей, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами, путём склеек вдоль выпуклых дуг их границ.

Интегрируемость бильярда в области, ограниченной эллипсом, следует из интегрируемости задачи Якоби о геодезическом потоке на эллипсоиде. Геодезический поток на эллипсоиде интегрируем вследствие теоремы Якоби-Шаля.

Теорема 2. (Якоби, Шаль) *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n - 2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

В двумерном случае при стремлении к нулю наименьшей оси эллипсоида траектории – геодезические на эллипсоиде переходят в ломаные, концы звеньев которых лежат на эллипсе. Эти ломаные в эллипсе являются бильярдными траекториями – на границе верен закон бильярдного движения. При этом, если фиксировать ломаную, то прямые, содержащие ей звенья, являются касательными к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболе), софокусной с граничным эллипсом. Эти эллипсы и гиперболы получаются в результате предельного перехода из однополостных и двуполостных гиперболоидов, которых касались касательные к геодезическим на эллипсоиде. Если в качестве области выбрать область, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербола (углы не больше π), то для траекторий бильярда в ней – ломаных – будет сохраняться то же свойство что и для бильярда в эллипсе, то есть система бильярда останется интегрируемой.

Аналогично можно рассмотреть бильярд в области, ограниченной софокусными параболоми. Параболу можно рассмотреть как эллипс, один из фокусов которого находится на бесконечности. При этом в работе явно проведена проверка интегрируемости – доказано, что для фиксированной бильярдной траектории-ломаной все прямые, содержащие ей звенья, являются касательными к одной и той же параболе.

В работе показано построение так называемого обобщенного бильярда, который также будет интегрируемым. Рассмотрим (локально-плоскую) область, которая получается с помощью изометричных склеек вдоль некоторых границ из плоских областей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербола. Движение в ней определяется следующим образом – если материальная точка совершает движение по плоской области и ударяется о её границу, на которой была определена склейка, то она переходит на другую плоскую область, продолжая движение так, как и при отражении от общей границы, вдоль которой были склеены эти две плоские области.

Во второй главе приведена классификация локально-плоских бильярдных областей для компактных плоских эллиптико-гиперболических, плоских параболических и компактных локально-плоских обобщенных бильярдов с точностью до некоторого отношения

эквивалентности, которое, как показано в дальнейших главах, позволяет сохранить топологию слоения Лиувилля бильярдного движения при переходе от одной бильярдной области к ей эквивалентной.

Дадим определения эллиптико-гиперболических (элементарных), параболических и компактных обобщенных (локально-плоских) бильярдных областей, более подробные определения которых содержатся во второй главе диссертации.

Фиксируем семейство софокусных эллипсов и гипербол на плоскости Oxy

$$x^2(b - \lambda) + y^2(a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda).$$

Здесь числа $a > b > 0$ фиксированные параметры этого семейства, а λ – параметр квадрики.

Определение 2. *Простейшей элементарной (плоской) областью* назовём плоское, компактное, изометрично вложимое в плоскость многообразие с краем, граница которого при этом вложении ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол и не содержит углов, превышающих π . *Составной элементарной (локально-плоской) областью* назовем компактное локально-плоское многообразие, которое получается в результате нескольких склеек из простейших элементарных областей вдоль некоторых граничных дуг гипербол таким образом что, во-первых, склеиваемые области при их вложениях в плоскость локально находятся по разные стороны от дуги склейки (в случае если дуга является прямолинейным отрезком мы опускаем это требование), а во вторых, при этом на границе области не образуются углы, превышающие π . Заметим, что мы не требуем, чтобы существовало изометричное вложение в плоскость составной элементарной области целиком. Простейшие и составные элементарные области для краткости мы будем называть просто *элементарными*.

Определение 3. Элементарная область Ω , ограниченная дугами квадрик из софокусного семейства, называется *эквивалентной* другой элементарной области Ω' , ограниченной дугами квадрик из того же семейства, если Ω' можно получить из Ω композицией следующих преобразований:

- последовательным изменением сегментов границы в образах некоторых простейших элементарных областей, составляющих элементарную область, при их изометричных вложениях в плоскость путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик границы, так, чтобы значение параметра λ изменяемого сегмента границы не принимало значения значения b ; при этом если изменяемый сегмент l_λ лежит в пересечении двух простейших элементарных областей (при их изометричных вложениях в плоскость), входящим в данную составную элементарную область, то при данной деформации одновременно меняются и остаются равными друг другу значения параметра λ этого сегмента границы;
- симметрией относительно оси семейства софокусных квадрик во всех простейших элементарных областях одновременно;
- объединением нескольких простейших элементарных областей в одну или же путем разбиения одной элементарной области на более мелкие.

Теорема 3. *Любая элементарная область эквивалентна области, принадлежащей к одной из следующих трёх серий:*

- конечная серия, состоящая из шести областей, вложимых в плоскость: область A_2 , ограниченная эллипсом, область A_1 ограниченная дугой эллипса и дугой гиперболы, область A_0 , ограниченная дугами двух эллипсов и двумя дугами гипербол, а

также три их верхние половины – области A'_2, A'_1 и A'_0 ограниченные тем же набором квадрик что и соответствующая нештрихованная область (а именно, область A_2, A_1 и A_0 соответственно) и фокальной прямой (нижний индекс обозначает количество фокусов семейства границы, входящих в данную область);

- бесконечная серия областей-колец C_n : область C_2 , ограниченная двумя эллипсами, область C_1 , получающаяся её факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_2$, а также n –листные накрытия над ними (таким образом, число n – это суммарное количество отрезков фокальной прямой, входящих в область);
- серия областей-лент, состоящая из трёх бесконечных подсерий B_n, B'_n и B''_n , являющихся односвязными частями областей C_n , такими что ноль (B_n), один (B'_n) или два (B''_n) сегмента границы лежат на фокальной прямой (здесь число n – это суммарное количество отрезков фокальной прямой, входящих в область).

Определение запрещает сегменту изменяемой границы становиться отрезком фокальной прямой.

В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что у семейства софокусных парабол фокус находится в начале координат, а директрисы параллельны оси Oy . Более точно, мы фиксируем семейство парабол на плоскости Oxy следующим соотношением:

$$y^2 + 4px - 4p^2 = 0.$$

Определение 4. *Параболической бильiardной областью* назовём плоское, изометрично вложимое в плоскость многообразие с краем, граница которого при этом вложении ограничена дугами софокусных парабол и не содержит углов, превышающих π . *Особой параболической бильiardной областью* назовем такую параболическую бильiardную область, часть границы которой при изометричном вложении в плоскость лежит на прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно директрисам.

При этом отношение эквивалентности на множестве параболических бильiardных областей вводится аналогично отношению эквивалентности для элементарных областей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, где вместо запрещения параметру изменяемой квадрики принимать значение b мы запрещаем параметру принимать нулевое значение. Нулевому значению параметра p соответствует так называемая *вырожденная парабола* – прямая, проходящая через фокус семейства перпендикулярно директрисам (ось Ox).

Теорема 4. *Любая параболическая бильiardная область принадлежит одной из четырех серий:*

- Три класса эквивалентности параболических компактных неособых областей Ω , ограниченных софокусными параболой: область Ω_1 , ограниченная двумя параболой, параметры которых имеют разные знаки, область Ω_2 , ограниченная тремя параболой, и область Ω_3 , ограниченная четырьмя параболой с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и двумя отрицательными, не имеющая общих точек с горизонтальной осью Ox .
- Два класса эквивалентности параболических компактных особых областей: область ω_1 , ограниченная двумя невырожденными и одной вырожденной параболой и область ω_2 , ограниченная тремя невырожденными и одной вырожденной параболой.

- Четыре класса эквивалентности параболических некомпактных неособых областей Θ , ограниченных софокусными параболой: области Θ_1 и Θ_2 , ограниченные одной и двумя параболой соответственно и области Θ_3 и Θ_4 , ограниченные тремя параболой с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и одной отрицательной, причем сегмент отрицательной параболы для области Θ_3 является выпуклым, а для Θ_4 невыпуклым.
- Два класса эквивалентности параболических некомпактных особых областей: области θ_1 и θ_2 , ограниченные одной вырожденной параболой и одной и двумя невырожденными параболой соответственно.

Введем понятия склеек элементарных областей друг с другом, а именно, изометричных склеек вдоль выпуклых сегментов границ, так что склеиваемые области находятся по одну сторону от данного выпуклого сегмента при любом вложении этих элементарных областей в плоскость (более подробно см. в третьем параграфе второй главы текста диссертации). Полученное в результате такой операции многообразие (с краем или без) будем называть *обобщенной (локально-плоской) областью*. Биллиардное движение при этом определяется так – совершая движение по одной элементарной области и попадая на сегмент склейки, материальная точка продолжает движение уже по другой элементарной области так, как будто бы она отразилась от сегмента склейки. Введем понятие *конической точки*, возникающей при склейке двух элементарных областей вдоль двух сегментов, имеющих общую точку – вершину угла в склеиваемых элементарных областях. При этом если материальная точка при движении попадает в коническую точку, то она продолжает движение по тому же экземпляру элементарной области что и до удара – это условие возникает из требования непрерывности биллиардного движения. При этом в работе рассматриваются области, в которых склейки вдоль выпуклых гиперболических сегментов обязательно приводят к образованию конических точек.

Определение 5. Обобщенная область Δ , склеенная из элементарных областей Ω_i вдоль ребер склейки f_{ij} называется *эквивалентной* другой обобщенной области Δ' , склеенной из Ω'_i вдоль ребер склейки f'_{ij} , если Δ' можно получить из Δ путем замены элементарных областей Ω_i на им эквивалентные.

Для удобства описания обобщенных областей мы придерживаемся следующих обозначений. Обозначим обобщенные области без конических точек через Δ_α . В скобках будем указывать элементарные области, образующие область Δ , причём если эквивалентные области склеиваются друг с другом последовательно в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например $\Delta_\alpha(kA_0)$, а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например $\Delta_\alpha(\Omega + kA_0 + \Omega)$ – две эквивалентные области Ω склеены не друг с другом, а с областями A_0 . Введём специальное обозначение $\Delta_\alpha(kA_0)^2$ для области, склеенной из k экземпляров A_0 склейкой вдоль всех эллиптических границ в область, гомеоморфную кольцу.

Обобщенные области с коническими точками обозначим через Δ_β . Введём типы конических точек. Как легко видеть, конические точки делятся на три типа. Конические точки типа x – это конические точки образованные склейкой вдоль выпуклого эллиптического сегмента l и горизонтального сегмента m . Конические точки типа y образованы склейкой выпуклого или вертикального гиперболического сегмента m и выпуклого эллиптического сегмента l . Конические точки типа c , иначе говоря центральные конические точки, образованы склейкой вдоль выпуклого или вертикального гиперболического сегмента m и горизонтального сегмента l — отвечающего квадрату с параметром b .

Введём обозначения склеек, показывающих какие именно конические точки образовались: $\Delta_\beta(\Omega)_c^2$ обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области

Ω с образованием центральной конической точки типа c , $\Delta_\beta(\Omega)_y^2$ обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области Ω с образованием конической точки типа y , $\Delta_\beta(\Omega)_x^2$ обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области Ω с образованием конической точки типа x . Удвоенные индексы показывают, что склейка произошла с образованием двух конических точек, например $\Delta_\beta(\Omega)_{2y}^2$ – область, склеенная из двух экземпляров области Ω с образованием двух конических точек типа y .

Теорема 5. *Любая обобщенная область принадлежит к одному из четырех классов:*

- класс областей, склеенных из элементарных областей одинаковых типов без конических точек: 5 “простейших удвоенных” областей вида $\Delta_\alpha(2\Omega)$, где Ω эквивалентна A'_0 , A'_1, A_1 , A_2 , A'_2 и 4 бесконечных серии $\Delta_\alpha(kA_0)$, $k > 1$, $\Delta_\alpha(kA_0)^2$, $k > 0$, $\Delta_\alpha(2B_k)$, $\Delta_\alpha(2C_k)$;
- класс областей, склеенных из элементарных областей разных типов без конических точек: 4 области $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$, где Ω_1 содержит фокусы семейства и эквивалентна A'_1 , A'_2 , A_1 , A_2 , а область Ω_2 не содержит фокусы семейства и эквивалентна B'_1 , B''_2 , B_1 , C_2 соответственно и 5 бесконечных серий $\Delta_\alpha(kA_0 + B_0)$, $\Delta_\alpha(kA_0 + A'_0)$, $\Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + B_0)$, $\Delta_\alpha(B_0 + kA_0 + B_0)$ и $\Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + A'_0)$, $k > 0$;
- класс областей, склеенных из элементарных областей одинаковых типов с образованием конических точек: 13 областей $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$, $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$, $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$, $\Delta_\beta(A'_1)_{cy}^2$, $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$, $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$, $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$, $\Delta_\beta(A'_0)_{cy}^2$, $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + (A'_0)_c^2)$, $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2A'_0)$, $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$, $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ и $\Delta_\beta(A_0)_{2y}^2$ и 9 бесконечных серий $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0)$, $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + (A_0)_y^2)$, $\Delta_\beta(B_k)_y^2$, $\Delta_\beta(B_k)_{2y}^2$, $\Delta_\beta(B'_k)_{yx}^2$, $\Delta_\beta(B'_k)_y^2$, $\Delta_\beta(B'_k)_x^2$ и $\Delta_\beta(B''_k)_x^2$ и $\Delta_\beta(B''_k)_{2x}^2$;
- класс областей, склеенных из элементарных областей разных типов с образованием конических точек: область $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ и 7 бесконечных серий $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0)$, $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0 + 2B_0)$, $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + 2B_0)$, $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0 + 2A'_0)$, $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + 2A'_0)$, $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0 + (A'_0)_c^2)$ и $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + (A'_0)_c^2)$.

В третьей главе исследована топология изоэнергетического многообразия Q^3 , которое получается при ограничении системы с фазового пространства M^4 билиарда на уровень постоянного модуля скорости – первого интеграла системы. Показано, как именно введение конических точек усложняет топологию. Фактически доказано следующее

Предложение 1. *Пусть Δ – компактная билиардная область, принадлежащая к одному из трех классов билиардных областей (эллиптико-гиперболическому, параболическому, обобщенному). Тогда изоэнергетическая поверхность $Q^3 = \{x \in M^4 : |v(x)| = \text{const} > 0\}$ гомеоморфна*

- S^3 , если область Δ односвязна и не содержит конических точек;
- $S^1 \times S^2$, если область Δ не односвязна;
- $\mathbb{R}P^3$, если область Δ ограничена кусочно-гладкой кривой и содержит одну коническую точку;
- $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$, если область Δ ограничена кусочно-гладкой кривой и содержит две конических точки;

В четвёртой, пятой и шестой главах дана полная лиувиллева классификация плоских эллиптико-гиперболических, плоских параболических и локально-плоских обобщенных билиардов соответственно. Оказалось, что эллиптико-гиперболические билиарды описываются с помощью трех неэквивалентных друг другу слоений Лиувилля, соответствующих инвариантам с конечными метками и двух бесконечных серий слоений Лиувилля, одна или две метки инвариантов которых бесконечны. Компактные параболические билиарды оказываются лиувиллево эквивалентными соответствующим компактным эллиптико-гиперболическим билиардам, тогда как некомпактные описываются тремя типами атомов: компактными, некомпактными атомами с компактной базой и некомпактным слоем (билиард в области, ограниченной одной параболой) и некомпактными атомами с некомпактной базой и компактным слоем (билиард в области, заключенной между двух непересекающихся софокусных парабол). В слоениях Лиувилля изоэнергетических поверхностей обобщенных билиардов в некоторых областях возникают перестройки, не наблюдавшиеся ранее – а именно, серии атомов с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (с одной и двумя звездочками).

Теорема 6. *Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула W^* , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для билиардного движения в элементарной области Ω , имеет вид $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$, если область Ω не содержит (внутри области или на границе) отрезков фокальной прямой, т.е. если область Ω эквивалентна A'_0 , A'_1 , A'_2 , B_0 , B'_1 или B''_2 . Если область Ω содержит отрезки фокальной прямой, то молекула имеет указанный в таблице вид (см. рис. 1).*

Обозначение элементарной области	Элементарная область	Инвариант Фоменко-Цишанга	Обозначение элементарной области	Элементарная область	Инвариант Фоменко-Цишанга
A_0		$A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} B$	B_n B'_{n+1} B''_{n+2}		$A \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} B_n \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ $\vdots$
A_1		$A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1, n=0} A^* \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$			
A_2		$A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1, n=1} B \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ $\vdots$	C_n		$A \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} D_n \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ $\vdots$

Рис. 1: Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 билиардного движения в элементарных областях, внутренность которых имеет непустое пересечение с фокальной прямой.

Теорема 7. *Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула W^* , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для билиардного движения в параболической билиардной компактной области Ω может быть описана следующим образом.*

- Если область Ω эквивалентна области Ω_1 , молекула имеет вид $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A^* \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$, метка n в единственной семье равна 0.

- Если область Ω эквивалентна области Ω_2 , молекула имеет вид $A \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} B \Rightarrow \frac{A}{A}$, где метки $r = 0, \varepsilon = 1$ на правых ребрах.
- Если область Ω эквивалентна области ω_1, ω_2 или Ω_3 , т.е. не содержит внутри себя отрезков прямой, проходящей через фокус перпендикулярно директрисам, то молекула имеет вид $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$.

Для бильярдного движения в некомпактной области, ограниченной параболой, топология слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 описывается следующей молекулой:

- $\frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow \bar{B} \rightarrow C_\infty$ для области Θ_1 ; многообразие Q^3 расслоено на цилиндры, два минимаксных особых слоя, гомеоморфных прямой $\mathbb{R}$, а седловая бифуркация описывается атомом $\bar{B}$,
- $\frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow B'' \Rightarrow \frac{C_\infty}{C_\infty}$ для области Θ_2 ; многообразие Q^3 расслоено на цилиндры, два минимаксных особых слоя, гомеоморфных прямой $\mathbb{R}$, а седловая бифуркация описывается атомом B'' с некомпактной базой,
- $\bar{A} \rightarrow B' \Rightarrow \frac{A}{C_\infty}$ для области Θ_3 ; многообразие Q^3 расслоено на цилиндры и торы, один минимаксный особый слой, гомеоморфный прямой $\mathbb{R}$, один особый минимаксный слой, гомеоморфный окружности S^1 , а седловая бифуркация описывается атомом B' с некомпактной базой,
- $\bar{A} \rightarrow C_\infty$ для областей Θ_4, θ_1 и θ_2 , т.е. для областей не содержащих внутри себя отрезков прямой, проходящей через фокус перпендикулярно директрисам; многообразие Q^3 расслоено на цилиндры и особый слой, гомеоморфный прямой $\mathbb{R}$.

Замечание. Поясним обозначения некомпактных атомов, использующиеся в теореме 7. Атомы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ гомеоморфны прямым произведениям соответствующих двумерных атомов A и B на прямую $\mathbb{R}$. Атомы B' и B'' гомеоморфны прямым произведением двумерных некомпактных атомов B' и B'' на окружность S^1 . Бифуркация C_∞ не является атомом в стандартном смысле. Она описывает пустой предел цилиндров – некомпактных слоев Лиувилля, т.е. гомеоморфна прямому произведению цилиндра на полуинтервал $[0, 1)$. Подробнее описание этих некомпактных атомов изложено в первой главе диссертации (пункт 1.2.3).

Теорема 8. Пусть обобщенная область Δ состоит из элементарных областей Ω , причем хотя бы одна элементарная область Ω содержит (внутри области или же на границе) фокус семейства границы. Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы W^* , описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 в таких обобщенных областях Δ , разбиваются на девять неэквивалентных между собой типов. Если область Δ не содержит внутри области или же в качестве ребёр склейки отрезков фокальной прямой, то тогда инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$, если область Δ не содержит конических точек, и вид $A \xrightarrow{r=\frac{1}{2}, \varepsilon=1} A$, если область Δ содержит конические точки. Инварианты для всех остальных областей приведены в таблице (см. рис. 2).

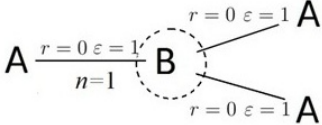
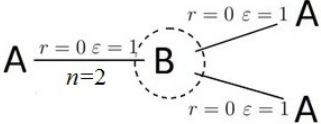
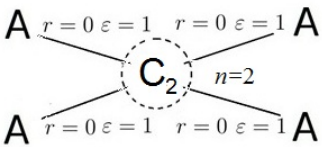
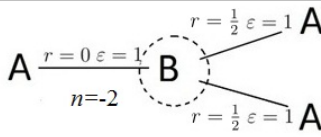
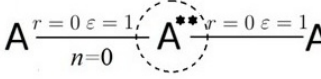
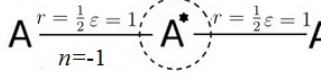
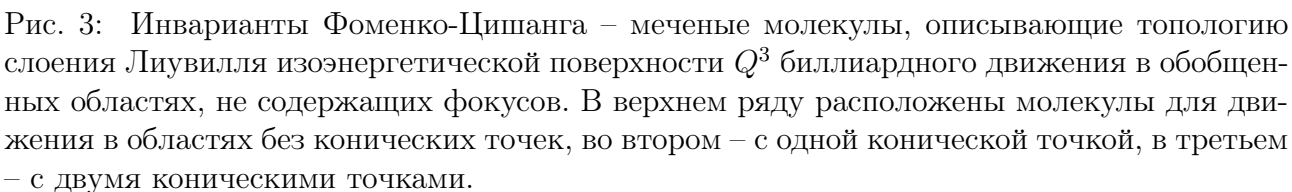
Обобщенная область	Инвариант Фоменко-Цишанга	Обобщенная область	Инвариант Фоменко-Цишанга
$\Delta_\alpha(2A_1)$ $\Delta_\alpha(A_2 + C_1)$		$\Delta_\beta(A_1)_c^2$ $\Delta_\beta((A_1)_c^2 + C_1)$ $\Delta_\beta(A_1)_x^2$	
$\Delta_\alpha(2A_2)$		$\Delta_\beta(A_2')_{2x}^2$ $\Delta_\beta((A_1')_c^2 + (A_1')_c^2)$	
$\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$		$\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$	
		$\Delta_\beta(A_1')_{xyc}^2$	

Рис. 2: Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 бильярдного движения в обобщенных областях, содержащих фокусы.

Теорема 9. Пусть обобщенная область Δ состоит из элементарных областей Ω , причем любая элементарная область Ω не содержит фокусов. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула W^* , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 бильярдного движения в такой обобщенной области Δ имеет следующий вид (см. подробнее рис. 3):

- молекула содержит одно или два нижних ребра (два ребра, только если область гомеоморфна кольцу), эти ребра бесконечные $r = \infty$, $\varepsilon = \pm 1$;
- если область гомеоморфна кольцу, то бифуркация на уровне интеграла $\Lambda = b$ описывается атомом D_n , где n это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω ;
- если область односвязна, то бифуркация на уровне интеграла $\Lambda = b$ описывается атомом B_n , где n это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω , причем атом имеет столько звездочек, сколько конических точек типа s или x имеет область Δ (конические точки типа s и x расположены на оси Ox);
- на верхних ребрах молекулы стоят метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$ или $r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, причем количество дробных меток в молекуле совпадает с количеством конических точек, имеющих тип y .

В седьмой главе приведены случаи интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова) оказавшиеся лиувиллево эквивалентными эллиптико-гиперболическим и обобщенным бильярдам. Приведён полный список лиувиллево эквивалентных слое-ний и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, которые соответствуют этим



Теорема 10. Следующие случаи динамики твердого тела “моделируются” (т.е. лиувиллево эквивалентны) следующим обобщенным бильярдам:

- случай Эйлера⁷, полностью моделируется билиярдами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4а, з, и, соответствующих зонам I, II, III энергии H, соответственно;
- случай Лагранжа⁸, моделируется билиярдами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4а – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4б – зона энергии 3, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;
- случай Ковалевской⁹, моделируется билиярдами в обобщенных областях, указанных на рисунке 4в – зона энергии 5;

⁹ А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т.1,2. Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999

- случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского¹⁰ моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4б – зона энергии 4, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4ж – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$;
- случай Жуковского¹¹ моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4б – зона энергии 11, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$, 4в – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4г – зона энергии 8, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4е – зона энергии 12, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;
- случай Ковалевской-Яхьи¹² моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4б – зона энергии h_{16} , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4д – зона энергии h_{18} , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$;
- случай Клебша¹³ моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4д – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4з – зоны энергии 10, 12, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4и – зона энергии 5, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;
- случай Соколова¹⁴ моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4д – зона энергии B , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4и – зона энергии I , изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$.

Заключение

В диссертации получена полная классификация элементарных (плоских) компактных областей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также классификация так называемых обобщенных (локально-плоских) областей, полученных из элементарных склейками вдоль выпуклых эллиптических сегментов и некоторых выпуклых гиперболических сегментов, приводящих к образованию так называемых конических точек. Также проведена классификация плоских областей (в том числе некомпактных), ограниченных дугами софокусных парабол.

Для билиарда в каждой из описанных областей вычислен инвариант лиувиллевой эквивалентности – меченая молекула Фоменко-Цишанга, описывающая топологию слое-ния Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 , а также вычислена грубая молекула с использованием некомпактных атомов-бифуркаций для билиардов в некомпактных областях.

Как оказалось, некоторые возникающие слоения Лиувилля для билиарда эквивалентны ряду ранее известных слоений Лиувилля, возникающим в случаях интегрируемости

¹⁰О. Е. Орел, *Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина.* // Матем. сборник, **186**:2(1995), 105-128

¹¹А. А. Ошемков, *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.* // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. **23**, Москва, изд-во МГУ, 1988, 122-132.

¹²Н. С. Славина, *Классификация системы Ковалевской-Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности* Доклады РАН, серия: математика **452**:3(2013), 252-255

¹³П. В. Морозов, *Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша*, Матем. сб., **193**:10 (2002), 113-138

¹⁴П. В. Морозов, *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа*, Матем. сб., **195**:3 (2004), 69-114

	Обобщенная бильярдная область	Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий бильярд в этой области	Эквивалентные известные случаи интегрируемости для твердого тела
а		$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$	Лагранж, Эйлер
б		$A \xrightarrow{r=1/2 \ \varepsilon=1} A$	Лагранж, Жуковский,
в		$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A \\ \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Ковалевская, Горячев-Чаплыгин-Сретенский, Жуковский, Ковалевская-Яхья
г		$A \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Жуковский
д		$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \xrightarrow{n=1} A \\ \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Клебш, Соколов, Ковалевская-Яхья
е		$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \xrightarrow{n=2} A \\ \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Жуковский
ж		$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A^* \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $n=0$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский
з		$A \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$	Эйлер, Клебш
и		$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $n=2$	Эйлер, Клебш, Соколов

Рис. 4:

Эйлера (все слоения), Лагранжа, Ковалевской, Ковалевской-Яхьи, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Клебша и Соколова, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системам бильярда при подходящем выборе бильярдных областей.

Также удалось обнаружить слоения Лиувилля, которые описываются инвариантами, ранее не встречавшихся в задачах динамики твердого тела, в том числе молекулы, атомы-бифуркации в которых являются новыми и также не встречались ранее.

В качестве новых направлений исследования интегрируемых бильярдов стоит отметить следующие.

- Изучение траекторной эквивалентности интегрируемых бильярдов системам динамики твердого тела. Для этого необходимо вычислить функцию вращения на ребрах молекул, вычисленных в настоящей работе. В случаях, где лиувиллева эквивалентность уже установлена, сравнить полученные результаты с функциями вращения соответствующих задач динамики твердого тела.
- Изучение топологии бильярдов в некомпактных областях, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, в том числе некомпактных обобщенных бильярдов.
- Изучение топологии обобщенных бильярдов в областях, полученных склейками вдоль невыпуклых участков границ элементарных областей. В тексте диссертации показано, что в этом случае не удастся задать бильярдное движение на всех поверхностях уровня дополнительного интеграла – софокусной квадрики. Воспользовавшись результатами диссертации можно, однако, показать, что эти слои будут гомеоморфны особым слоям известных трехмерных атомов-бифуркаций, что позволяет в случае такой не вполне определённой бильярдной системы вычислить аналог молекулы Фоменко-Цишанга с метками.
- Изучение топологии интегрируемых бильярдов в плоских (а также обобщенных) областях, имеющих углы $\frac{3\pi}{2}$ на границе. В этом случае бильярдное движение нельзя доопределить по непрерывности при попадании материальной точки в вершину угла $\frac{3\pi}{2}$. В этом случае на каждом слое необходимо удалить несколько точек, которые при естественной этого слоя на бильярдную область переходят в вершину угла $\frac{3\pi}{2}$. При этом слои в общем случае будут гомеоморфны не торами, а сферам с несколькими ручками, в которых сделано несколько проколов. Используя результаты диссертации, можно показать, как именно будут устроены слои для каждой области.

Благодарность

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю А.Т.Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор искренне признателен Е.А.Кудрявцевой за множество ценных замечаний, способствовавших улучшению изложения, А.А.Ошемкову за ряд существенных разъяснений и комментариев, относящихся к теории инвариантов Фоменко-Цишанга, и С.В.Матвееву за помощь в вопросах трехмерной топологии. Также хочется выразить благодарность всему коллективу кафедры Дифференциальной геометрии и приложений за творческую атмосферу и постоянную научную поддержку.

Публикации автора по теме работы

1. В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., М.: Издательство Московского университета, №5(2012), 31–34
2. В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18–27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.
3. В. В. Фокичева, *Классификация бильiardных движений в областях, ограниченных софокусными парабололами*, Матем. сб., **205**:8 (2014), 139-160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas Sb. Math., 205:8 (2014), 1201-1221.
4. В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильiardов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127-176
5. В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко. *Интегрируемые бильiardы моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела*, ДАН, **465**:2(2015), 1-4