

## Отзыв

научного руководителя на диссертационную работу Фокичевой Викторнии Викторовны «топологическая классификация интегрируемых билиардов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Диссертационная работа В.В.Фокичевой «Топологическая классификация интегрируемых билиардов» является исследованием в области геометрии и топологии. Математический билиард это классическая задача о движении материальной точки внутри плоской области, ограниченной некоторой кусочно-гладкой кривой, с абсолютно упругим отражением на границе. Последнее позволяет установить, что система билиарда обладает первым интегралом, т.к. модуль скорости при движении сохраняется. В настоящее время достаточно популярными являются интегрируемые билиарды, в частности, билиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Билиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, ранее изучались в работах Дж.Д.Биркгофа, В.В.Козлова, Д.В.Трещева. К таким билиардам В.Драгович и М.Раднович применили методы теории Фоменко-Цишанга об инвариантах интегрируемых гамильтоновых систем: для ряда плоских билиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол ими были вычислены меченые молекулы Фоменко-Цишанга – инварианты лиувиллевой эквивалентности. В своей диссертации автор завершает лиувиллеву классификацию плоских билиардов, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами, полностью классифицируя все подходящие билиардные области и вычисляя меченые молекулы. Также автор рассматривает билиардные области, на которых можно ввести глобальную плоскую метрику, которые, однако, нельзя вложить и даже погрузить в плоскость. При этом требование того, чтобы граница такой области состояла из дуг софокусных эллипсов и гипербол, позволяет сохранить интегрируемость билиардного движения. Далее, автор продолжает расширять понятие билиардной области, рассматривая кусочно-плоские области, полученные склейками из плоских областей. Для каждой из таких обобщенных билиардных областей автор вычисляет инвариант Фоменко-Цишанга лиувиллевой эквивалентности. Вычисление этих инвариантов позволило установить, что для ряда локально-плоских билиардов полученные слоения Лиувилля эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Эйлера (все слоения), Лагранжа. Ковалевской. Ковалевской-Яхьи, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Клебша и Соколова, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системе билиарда при подходящем выборе обобщенной билиардной области. Тем самым, образно говоря, локально-плоские интегрируемые билиарды «наглядно моделируют» многие достаточно сложные случаи интегрируемости в динамике твердого тела. Также в работе исследована топология некомпактных билиардов в областях, ограниченных софокусными параболами — для них построены грубые молекулы (без меток) — инварианты грубой лиувиллевой эквивалентности. Последнее исследование особенно интересно тем, поскольку показывает, что некомпактные билиардные системы представляют собой простой и наглядный пример гамильтоновых систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля, общая классификационная теория для которых пока не построена.

Диссертация состоит из введения, семи глав и библиографии.

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной теории интегрируемых систем. В первой главе вводятся основные понятия теории интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе дано описание атомов -- бифуркаций торов Лиувилля и построение инварианта Фоменко-Цишанга. Также введены понятия интегрируемых компактных плоских эллиптическо-гиперболических, плоских параболических и компактных локально-плоских обобщенных билиардов.

Во второй главе приведена классификация локально-плоских билиардных областей для эллипτικο-гиперболических, параболических и обобщенных билиардов с точностью до некоторого отношения эквивалентности, которое, как показано в дальнейших главах, позволяет сохранить топологию слоения Лиувилля билиардного движения при переходе от одной билиардной области к ей эквивалентной.

В третьей главе исследована топология изоэнергетического 3-многообразия, которое получается при ограничении системы с фазового пространства системы билиарда на уровень постоянного модуля скорости -- первого интеграла системы.

В четвертой, пятой и шестой главах дана полная лиувиллева классификация плоских эллипτικο-гиперболических, плоских параболических и компактных локально-плоских обобщенных билиардов соответственно. Оказалось, что эллипτικο-гиперболические билиарды описываются с помощью трех неэквивалентных друг другу слоений Лиувилля, соответствующих инвариантам с конечными метками и двух бесконечных серий слоений Лиувилля, одна или две метки инвариантов которых бесконечны. Компактные параболические билиарды оказываются лиувиллево эквивалентными соответствующим компактным эллипτικο-гиперболическим билиардам, тогда как некомпактные описываются тремя типами атомов: компактными, некомпактными атомами с компактной базой и некомпактным слоем (билиард в области, ограниченной одной параболой) и некомпактными атомами с некомпактной базой и компактным слоем (билиард в области, заключенной между двух непересекающихся софокусных парабол). В слоениях Лиувилля изоэнергетических поверхностей обобщенных билиардов в некоторых областях возникают перестройки, не наблюдавшиеся ранее в задачах динамики твердого тела, а именно, серии атомов с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (с одной и двумя звездочками).

В седьмой главе приведены случаи интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова) оказавшиеся лиувиллево эквивалентными эллипτικο-гиперболическим и обобщенным билиардам. Приведён полный список лиувиллево эквивалентных слоений Лиувилля и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, которые соответствуют этим изоэнергетическим поверхностям. Для каждого инварианта указаны области, билиард в которых моделирует поведение решений на данных изоэнергетических поверхностях.

Все полученные результаты диссертанта являются новыми, интересными, важными. Они своевременно опубликованы в центральной печати и доложены на многих семинарах и нескольких конференциях.

Диссертационная работа «Топологическая классификация интегрируемых билиардов» соответствует п.9, 10, 11, 13 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемых российским ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Автор диссертации Фокичева Виктория Викторовна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Хочу добавить, что Виктория Викторовна является творческим человеком, ярким специалистом в области геометрии и топологии, искренне увлечена математикой и, надеюсь, продолжит успешно начатую научную карьеру.

Академик РАН

Подпись академика РАН А.Т. Фоменко



Фоменко А.Т.  
21.01.16г