Отзыв

официального оппонента о диссертации Виктории Викторовны Фокичевой «Топологическая классификация интегрируемых биллиардов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертационная работа В.В. Фокичевой посвящена развитию теории математических биллиардов.

Математический биллиард – это механическая система, представляющая собой материальную точку, движущуюся в отсутствии внешних сил внутри некоторой связной области плоскости. Граница области считается кусочно-гладкой, а удары о границу считаются абсолютно упругими.

В диссертации рассматриваются биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик, а также локально-плоские биллиардные области, полученные склейками вдоль таких дуг.

Изучение биллиардов началось, видимо, в работе Дж. Биркгофа 1927 года. В ней он рассматривал движение материальной точки внутри биллиардной области как предел задачи о геодезических линиях поверхности, непрерывно деформирующейся в плоскую область.

Так описание движения точки внутри эллипса он сводит к задаче Якоби о движении по геодезическим линиям на поверхности трехосного эллипсоида когда одна из его полуосей стремится к нулю. Помимо интеграла энергии уравнения геодезических на эллипсоиде имеют еще дополнительный интеграл, функционально независимый с ним.

Этот факт является следствием известной теоремы Якоби–Шаля, согласно которой касательные к геодезическим на квадрике в $(n+1)$-мерном пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще n-1 конфокальных с ней квадрик. Интеграл энергии и этот дополнительный интеграл находятся в инволюции и, таким образом, гамильтонова система, описывающая движение точки по эллипсоиду, является вполне интегрируемой.

Заметим, что интегрируемые биллиарды являются редким исключением – в общем случае их фазовые траектории не укладываются на поверхности уровня интегралов, отличных от интеграла энергии.

Неинтегрируемыми являются, например, биллиарды Синая. Их граница состоит из дуг кривых, обращенных выпуклостями внутрь билииарда. В этих биллиардах вначале близкие траектории со временем расходятся. Биллиарды Синая применяются для исследовании многих задач статистической физики.

Однако В.В. Фокичевой удалось найти целые серии интегрируемых биллиардов. Эти биллиарды оказались связанными с динамиками твердых тел с закрепленной точкой.

Автором была выявлена неожиданная связь таких биллиардов с классическими интегрируемыми моделями движения твердого тела: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева–Чаплыгиа–Сретенского, Жуковского, Ковалевской–Яхьи, Клебша, Соколова. Была обнаружена лиувиллева эквивалентность таких серий биллиардов и перечисленных моделей.

Поэтому задачи, рассматриваемые в диссертации В.В. Фокичевой, являются **актуальными**.

Коротко опишем **структуру** диссертации и важнейшие **новые результаты**, полученные автором.

Первая глава является вспомогательной. В ней приводятся основные понятия теории интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем, а также описание инвариантов Фоменко–Цишанга.

Во второй главе приводится классификация локально-плоских биллиардных областей для компактных плоских эллиптико-гиперболических, плоских параболических и компактных локально-плоских обобщенных биллиардов. Вводятся понятия простейшей и составной элементарных биллиардных областей и понятие эквивалентности таких областей. Доказывается, что существует ровно три класса эквивалентности элементарных областей. Также вводится понятие параболической биллиардной области и приводится их классификация. Как оказалось, такие области принадлежат одной из четырех серий. Далее вводятся правила склеек элементарных биллиардных областей.

В третьей главе изучается топология изоэнергетического многообразия, которое получается при ограничении системы с фазового пространства биллиарда на уровень постоянного модуля скорости – первого интеграла системы. Показано, как именно введение конических точек усложняет топологию. Приводится классификация изоэнергетических многообразий для биллиардов в компактной области с коническими точками и без них. Основные результаты сформулированы в предложениях 3.1.1, 3.1.3, 3.2.1, 3.2.2.

В четвертой главе приводится лиувиллева классификация плоских эллиптико-гиперболических биллиардов. Доказано, что такие биллиарды описываются с помощью трех неэквивалентных друг другу слоений Лиувилля, соответствующих инвариантам с конечными метками и двух бесконечных серий слоений Лиувилля, одна или две метки инвариантов которых бесконечны. Дается описание инварианта Фоменко–Цишанга. Основные результаты сформулированы в предложениях 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3.

В пятой главе приводится лиувиллева классификация плоских параболических биллиардов. Доказано, что компактные параболические биллиарды лиувиллево эквивалентны соответствующим компактным эллиптико-гиперболическим биллиардам, тогда как некомпактные описываются тремя типами атомов.

В шестой главе приводится лиувилева классифкация обобщенных биллиардов. Рассматриваются регулярные и сингулярные случаи и строится инвариант Фоменко–Цишанга.

В седьмой, последней, главе изучаются связь между интегрируемыми биллиардами и интегрируемыми уравнениями Эйлера–Пуассона, описывающими движение твердого тела с закрепленной точкой. Доказывается лиувиллева эквивалентности таких механических систем и вычисляются соответствующие инварианты Фоменко–Цишанга.

В диссертации применяются **методы** симплектической геометрии, топологии и классической механики.

Все утверждения диссертации, выносимые на защиту, **четко сформулированы и доказаны**. Формулировки теорем и выводы **достоверны** и обоснованы.

Материалы диссертации **опубликованы** в пяти печатных работах в журналах из списка ВАК и докладывались на семинарах и конференциях разного уровня. Содержание автореферата полностью **соответствует** содержанию диссертации.

Результаты работы могут быть использованы при **теоретических** исследованиях в топологии и классической механике.

Диссертационная работа производит хорошее впечатление. Однако не могу не сделать некоторые замечания.

На стр. 20 в определении 1.1.1 симплектического многообразия написано: «... гладкое многообразие называется симплектическим, если на нем *можно ввести* симплектическую структуру...», то есть постулируется возможность *введения* структурной формы, а не сама форма.

На стр. 29 написано: «Изменение *ориентации векторного поля* не меняет меток». Видимо имеется в виду умножение векторного поля на минус единицу.

Видимо на стр. 34 в 10-й строке снизу опечатка: $\hat{}(y) = 0$. Не ясно, что это значит.

На стр. 35 во второй строке написано: $(v - w, tan) = 0$. Что означает tan□ ?

На стр. 36 в пятой строке снизу вводится дополнительный интеграл Λ как «параметр софокусной квадрики, которой касается биллиардная траектория». Не совсем ясно, какой параметр.

На стр. 38 и 39 используется одно и то же обозначение f для разных объектов – количества фокусов и отображения.

Однако перечисленные недостатки не умаляют ценности диссертации.

Диссертация является цельным исследованием, содержащим глубокие результаты, допускающие развитие и обобщение.

Диссертационная работа Виктории Викторовны Фокичевой «Топологическая классификация интегрируемых биллиардов» является законченной научно-квалификационной работой и соответствует «Положению о порядке присуждения ученых степеней». Работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Виктория Викторовна Фокичева несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией №6 Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук»

Алексей Гурьевич Кушнер

13.05.16 г.

Подпись А.Г. Кушнера заверяю
Вед. инженер
Афанасьева Н. С.