ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Бирюков Олег Николаевич

Топологическая энтропия кос Артина

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математических дисциплин ГОУ ВО МО «Государственный социально-гуманитарный университет».

Научный руководитель: **Лексин Владимир Павлович**,
доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Жиров Алексей Юрьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,
кафедра прикладной математики, информационных технологий и электротехники,
профессор;

Кудрявцева Елена Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»,
кафедра дифференциальной геометрии и приложений, доцент.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана».

Защита состоится 30 сентября 2016 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А) и на сайтах
http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi,
http://istina.msu.ru/dissertations/19160835.

Автореферат разослан 30 августа 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.84
на базе ФГБОУ ВО МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор — Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность и история вопроса

Рассматривается группа кос из n нитей как группа гомеотопий (изотопических классов сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) стандартного двумерного диска, из внутренности которого удалены n открытых дисков, где внешняя граница диска остаётся поточечно неподвижной. Итерации гомеоморфизма, представляющего косу, задают топологическую динамическую систему с дискретным временем.

Одной из важнейших количественных характеристик любой динамической системы является топологическая энтропия. Минимум топологической энтропии, взятый по всем гомеоморфизмам, представляющим некоторую косу, называется энтропией косы. Энтропия кос и составляет основной предмет исследования.

Топологическая энтропия — это величина, равная неотрицательному вещественному числу или $+\infty$, отражающая хаотичность поведения траекторий в динамической системе. В случае если траектории «не перемешиваются» и их поведение периодическое, топологическая энтропия равна нулю. Если же топологическая энтропия отлична от нуля, то поведение траекторий точек достаточно сложное, при этом расстояние между близко расположенными точками экспоненциально возрастает со временем. И чем больше энтропия, тем быстрее «разбегаются» близкие траектории. В силу компактности пространства расстояние между траекториями не может возрастать бесконечно, и траектории начинают хаотично перемешиваться. Кроме того, ненулевая энтропия делает невозможным практические предсказания поведения в динамической системе, поскольку любые измерения допускают некоторую погрешность, а в системе с ненулевой энтропией погрешность экспоненциально возрастает со временем.

В связи со сказанным для любого класса динамических систем важными являются задачи вычисления топологической энтропии, её оценки сверху и снизу, поиска минимальной и максимальной топологической энтропии в данном классе систем, выяснения необходимых и/или достаточных условий нулевой энтропии.

Для класса динамических систем, порождаемых косами на 2-диске с «дырками», перечисленные задачи активно исследуются.

В 1986 году Т. Мацуока[1] показал, что в группе кос из трёх нитей коса $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ имеет наименьшую положительную энтропию.

[1]Matsuoka T. Braids of periodic points and 2-dimensional analogue of Shorkovskii's ordering // In Ed. G. Ikegami, editor, Dynamical systems and Nonlinear Oscillations, pages 58–72. World Scientific Press, 1986.

В 1986 году Д. Фрайд[2] и в 1989 году Б. Колев[3] указали нижнюю оценку энтропии кос через спектральный радиус матрицы Бурау, где параметр t матрицы пробегает всевозможные значения на единичной окружности $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Оценка энтропии косы снизу позволяет установить минимально возможный хаос в поведении траекторий в динамической системе, которую задаёт коса. В 2007 году Г. Банд и Ф. Бойланд[4] получили некоторые результаты, связанные с точностью оценки Фрайда-Колева.

В 1994 году А.Ю. Жиров[5] показал, что существуют гомеоморфизмы сферы (а следовательно, и косы) со сколь угодно близкой к нулю энтропией.

В 2002 году К. Х. Ко, Ж. Е. Лос и В. Т. Сонг[6] показали, что в группе кос из четырёх нитей коса $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$ имеет наименьшую положительную энтропию.

В 2005 году Ж. Хэм и В. Т. Сонг[7] показали, что в группе кос из пяти нитей коса $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2$ имеет наименьшую положительную энтропию.

В 2006 году Ж.-О. Муссафир[8] выразил энтропию косы как предел некоторой последовательности, связанной с количеством точек пересечений одного семейства дуг на 2-диске с «дырками» (при действии на это семейство итераций косы) с другим фиксированным семейством дуг на этой поверхности. Построить на основе этого выражения алгоритм вычисления энтропии кос в настоящее время не представляется возможным, поскольку ещё не исследовано, как быстро сходится к пределу рассматриваемая в данном выражении последовательность.

Таким образом, в настоящее время по-прежнему актуальными остаются задачи нахождения точных оценок энтропии кос, а также алгоритмы либо формулы для вычисления энтропии. С этими задачами тесно связана проблема классификации кос по Нильсену-Тёрстону. В соответствии с этой классификацией различают три типа кос: периодические, приводимые и псевдоаносовские. Периодические косы, а также приводимые, все составляющие которых являются периодическими, имеют нулевую энтропию. Соответственно возникает задача эффективного распознавания типа косы, а также разложения приводимых кос на составляющие.

---

[2] Fried D. Entropy and twisted cohomology // Topology 25 (1986), no. 4, 455–470.

[3] Kolev B. Entropie topologique et représentation de Burau // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 (1989), vol. 309, no. 13, 835–838.

[4] Band G., Boyland P. The Burau estimate for the entropy of a braid // Algebraic & Geometric Topology, 7 (2007), 1345–1378.

[5] Жиров А.Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей // Матем. сб., 185:9 (1994), 29–80.

[6] Ko K. H., Los J. E., Song W. T. Entropies of Braids // J. of Knot Theory and its Ramifications 11 (2002), 647–666.

[7] Ham J.-Y., Song W. T. The minimum dilatation of pseudo-Anosov 5-braids // Experiment. Math. 16 (2007), no. 2, 167–179.

[8] Moussafir J.-O. On the entropy of braids // Funct. Anal. Other Math. 1 (2006), no. 1, 37–46.

Первые примеры псевдоаносовских гомеоморфизмов на сфере (а значит, и псевдоаносовских кос) появились в 1974 и 1984 гг. в работах Р.В. Плыкина[9] [10].

В 1995 году М. Бествина и М. Хэндл[11] предложили алгоритм для распознавания типа гомеоморфизма компактной поверхности по классификации Нильсена-Тёрстона в случае, когда внешний автоморфизм свободной группы, соответствующий гомеоморфизму, является неприводимым. Этот алгоритм основан на понятии железнодорожного пути (train-track) и может быть применён для вычисления энтропии кос, которым отвечает (в соответствии с представлением Артина) неприводимый внешний автоморфизм свободной группы. Сложность этого алгоритма в настоящее время не известна, при этом существует его компьютерная реализация[12].

В 1995 году Д. Бернадет, З. Нитецки и М. Гутиэррес[13] предложили алгоритм для распознавания периодических кос и разложения приводимых кос на составляющие. В этом алгоритме использовались саммит-множества (summit sets), эффективность вычисления которых пока неизвестна.

В 2012-14 гг. М. Калвеш[14] и Б. Виест[15] описали эффективные (по длине входного слова) алгоритмы распознавания типа косы, основанные на использовании саммит-множеств. Время выполнения этих алгоритмов оценивается как $O(l^2)$ для четырёх нитей и $O(l^3)$ для произвольного числа нитей, где l есть длина входного слова в классических образующих Артина. Эти алгоритмы эффективно определяют тип косы, но не позволяют разложить приводимую косу на составляющие.

Цель диссертационной работы

Исследовать связь между топологическими и алгебраическими характеристиками кос, в частности, вопрос классификации кос по Нильсену-Тёрстону, а также способы оценки и вычисления энтропии кос.

[9]Плыкин Р.В. Источники и стоки АА-диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб., 94(136):2(6) (1974), 243–264.

[10]Плыкин Р.В. О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН, 39:6(240) (1984), 75–113.

[11]Bestvina M., Handel M. Train-tracks for surface homeomorphisms // Topology, 34 (1), 109–140, 1995.

[12]Brinkmann P. Pseudo-Anosov automorphisms of free groups // Experiment. Math. 9 (2000), no. 2, 235–240.

[13]Bernardete D., Nitecki Z., Gutierrez M. Braids and the Nielsen-Thurston classification // J. Knot Theory and its Ramifications, 4 (1995), 549–618.

[14]Calvez M. Fast Nielsen-Thurston classification of braids // Algebraic & Geometric Topology 14 (2014), 1745–1758.

[15]Calvez M., Wiest B. Fast algorithmic Nielsen-Thurston classification of four-strand braids // Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 21, No. 05, (2012).

Научная новизна

- получена нижняя оценка энтропии кос с произвольным числом нитей через спектральный радиус матрицы Бурау для всех ненулевых комплексных значений параметра;
- получена явная формула для энтропии кос из трёх нитей;
- описаны свойства многочленов, возникающих в явной формуле для энтропии кос из трёх нитей, и, в частности, описана связь между этими многочленами и циклическими многогранниками.
- указан алгоритм распознавания типа косы из трёх нитей по Нильсену-Тёрстону, имеющий линейную сложность и не использующий никакие разновидности железнодорожных путей либо саммит-множеств.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты в первую очередь касаются группы кос, но могут также оказаться полезными в теории двумерных динамических систем и в теории циклических многогранников.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 12 — в тезисах докладов.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах:

– семинар «Алгебраическая топология и ее приложения» (механико-математический факультет ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», 2006–2014 гг.);

– семинар «Современные геометрические методы» под руководством акад. РАН А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.С. Мищенко, А.А. Ошемкова, Е.А. Кудрявцевой, И.М. Никонова (механико-математический факультет ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», 2015 г.);

– семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений под руководством акад. РАН Д.В. Аносова и В.П. Лексина (МИАН, 2006–2014 гг.);

а также на следующих всероссийских и международных конференциях:

– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 27 июня - 2 июля 2008 г., 2-7 июля 2010 г., 29 июня - 4 июля 2012 г., 4-9 июля 2014 г.);

– Всероссийская математическая школа-конференция «Понтрягинские чтения» (г. Воронеж, 3-9 мая 2008 г., 3-9 мая 2012 г., 3-9 мая 2014 г.);

– Международная конференция "Knots and Links in Fluid Flows — from helicity to knot energies" (НМУ, г. Москва, 27-30 апреля 2015 г.)

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения и трёх глав. Полный объём диссертации — **108** страниц текста. Список литературы содержит **64** наименования.

Содержание работы

В **первой главе** излагаются необходимые сведения из теории кос. Начинается глава с определения группы кос.

Рассмотрим ориентированный замкнутый двумерный диск с граничной окружностью γ_0. Во внутренности этого диска выберем n попарно непересекающихся замкнутых дисков с граничными окружностями $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Удалим внутренности n выбранных дисков. Получим компактную ориентированную поверхность M рода нуль с краем $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$.

Группой кос B_n из n нитей называется группа гомеотопий поверхности M, оставляющих поточечно неподвижной компоненту края γ_0.

Далее определяется понятие скручивания Дэна вдоль простой замкнутой кривой на поверхности M. Для кривой, которая охватывает ровно две компоненты края, вводится понятие полускручивания Дэна. Последнее используется для указания образующих $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ группы кос, посредством которых получается стандартное задание группы кос с помощью образующих и соотношений:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| \geqslant 2, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n-1;$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2.$$

Вводится понятие группы крашеных кос как ядра гомоморфизма $B_n \to S_n$, где S_n — группа перестановок n элементов. Каждой косе данный гомоморфизм сопоставляет перестановку на множестве граничных компонент $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Далее рассматриваются представления Артина и Бурау группы кос. Представление Артина есть гомоморфизм $B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$, который сопоставляет косе индуцированный автоморфизм фундаментальной группы поверхности M. Фундаментальная группа $\pi_1(M, x_0)$, где x_0 — некоторая точка на граничной компоненте γ_0, изоморфна свободной группе F_n с n образующими $x_1, \ldots, x_n$. Фиксируется такой изоморфизм $\pi_1(M, x_0) \sim F_n$, чтобы коса σ_i индуцировала следующий автоморфизм свободной группы

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i & \mapsto \quad x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} & \mapsto \quad x_i, \\ x_j & \mapsto \quad x_j, \qquad\qquad j \neq i, i+1. \end{cases}$$

Представлением Бурау называется гомоморфизм

$$B_n \to GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]), \qquad \sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1},$$

где I_k обозначает единичную $k \times k$-матрицу.

Описывается связь между представлениями Артина и Бурау с помощью свободного дифференциального исчисления Фокса:

$$b_{ij} = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}((x_i)\beta)\right),$$

где b_{ij} — элементы матрицы Бурау, коса β действует на x_i в соответствии с представлением Артина, и гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}F_1\langle t\rangle$ действует по правилу $\varphi(x_i) = t$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В следующих параграфах рассматриваются каноническая форма косы и существующее решение проблемы сопряжённости в группе кос, использующее саммит-множества (summit sets и super summit sets).

Далее рассматривается классификация изотопических классов автоморфизмов (сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) гиперболических поверхностей по Нильсену-Тёрстону, т. е. разделение классов изотопии автоморфизмов на периодические, псевдоаносовские и приводимые. Используя эту классификацию, все косы также разделяются на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Описывается алгоритм распознавания периодических кос и разложения приводимых кос на составляющие, который в 1995 году предложили Д. Бернадет, З. Нитецки и М. Гутиэррес[16].

В следующем параграфе излагается теория Перрона-Фробениуса. И в конце первой главы рассматривается алгоритм М. Бествины и М. Хэндла[17] для

[16] Bernardete D., Nitecki Z., Gutierrez M. Braids and the Nielsen-Thurston classification // J. Knot Theory and its Ramifications, 4 (1995), 549–618.

[17] Bestvina M., Handel M. Train-tracks for surface homeomorphisms // Topology, 34 (1), 109–140, 1995.

определения типа гомеоморфизма компактной поверхности по классификации Нильсена-Тёрстона в случае, когда внешний автоморфизм свободной группы, соответствующий гомеоморфизму, является неприводимым.

Во **второй главе** рассматривается понятие энтропии. В начале главы вводится понятие *показателя экспоненциального роста* последовательности положительных вещественных чисел $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\mathrm{GR}(a_n) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln a_n.$$

Далее вводятся понятия топологической и алгебраической энтропии.

Топологической энтропией непрерывного отображения $f : X \to X$ компактного пространства X в себя называется величина

$$h(f) = \sup_{\alpha\in I} \left\{ \mathrm{GR}\left(N\left(\vee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha\right)\right)\right\},$$

где I — семейство всех открытых покрытий X, и $N\left(\vee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha\right)$ — наименьшая мощность подпокрытия в покрытии

$$\begin{aligned} \vee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha &= \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \ldots \vee f^{-(n-1)}\alpha \\ &= \{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \mid A_0, \ldots, A_{n-1} \in \alpha\}. \end{aligned}$$

Алгебраической энтропией эндоморфизма $f : G \to G$ конечно порождённой группы G называется число

$$h_a(f) = \sup_{g\in G_f} \left\{ \mathrm{GR}\left(L_S(f^n(g))\right)\right\},$$

где $L_S(g)$ — длина элемента $g \in G$ в образующих семейства $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ и $G_f = \{g \in G \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^n(g) \neq e\}$.

Затем формулируется определение энтропии косы, для чего рассматривается естественный гомоморфизм $f : B_n \to \mathrm{Homeot}(M)$, где M — поверхность из определения группы кос.

Энтропией косы $\beta \in B_n$ называется точная нижняя грань топологической энтропии гомеоморфизмов, отвечающих косе при гомоморфизме f:

$$h(\beta) = \inf\{h(\varphi) \mid \varphi \in f(\beta)\}.$$

Приводятся известные в настоящее время оценки энтропии косы сверху и снизу (нижнюю оценку получил в 1986 году Д. Фрайд[18] и передоказал в 1989 году Б. Колев[19]):

$$\ln \sup_{t\in S^1}\{R(B_\beta(t))\} \leqslant h(\beta) \leqslant \ln R(A_\beta).$$

[18] Fried D. Entropy and twisted cohomology // Topology 25 (1986), no. 4, 455–470.

[19] Kolev B. Entropie topologique et représentation de Burau // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 (1989), vol. 309, no. 13, 835–838.

Здесь через A_β обозначена матрица автоморфизма свободной группы, отвечающего косе β в соответствии с представлением Артина, $B_\beta(t)$ — матрица Бурау, а $R(B_\beta(t))$ и $R(A_\beta)$ обозначают спектральные радиусы этих матриц. Матрица A_β конструируется следующим образом: элемент a_{ij} этой матрицы есть количество букв $x_j^{\pm 1}$ в редуцированном слове $(x_i)\beta$.

Показано, как можно расширить нижнюю оценку энтропии косы на все ненулевые комплексные значения параметра t. Для косы $\beta \in B_n$ обозначим через $M(\beta)$ множество таких $k \in \mathbb{Z}$, что t^k встречается хотя бы в одном элементе матрицы Бурау $B_\beta(t)$ с ненулевым коэффициентом. Положим также:

$$m(\beta, |t|) = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{p\to+\infty}} \frac{\max M(\beta^p)}{p}, & \text{если } |t| \geqslant 1, \\ \underline{\lim\limits_{p\to+\infty}} \frac{\min M(\beta^p)}{p}, & \text{если } 0 < |t| < 1. \end{cases}$$

Теорема 2.12. *Для косы $\beta \in B_n$ имеет место следующая нижняя оценка энтропии:*

$$h(\beta) \geqslant \ln \sup \left\{ R(B_\beta(t)) \cdot |t|^{-m(\beta,|t|)} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

Далее во второй главе рассматривается формула Ж.-О. Муссафира, согласно которой энтропия косы β может быть представлена как показатель экспоненциального роста последовательности пересечений с вещественной осью образов $\beta^k(L)$ для некоторой ламинации L:

$$h(\beta) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln c(\beta^k(L)).$$

Третья глава посвящена группе кос из трёх нитей. Рассматривается представление группы B_3/Δ^2 в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\psi : B_3/\Delta^2 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \qquad \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью этого представления получается явная формула для энтропии кос из трёх нитей. Для записи этой формулы вводятся многочлены

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \ldots x_n^{f(n)},$$

где $\mathcal{F}_n$ есть семейство двоичных функций $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0; 1\}$, для каждой из которых прообраз единицы непустой и в упорядоченном, дважды повторяющемся наборе её значений $f(1), f(2), \ldots, f(n), f(1), f(2), \ldots, f(n)$ между любыми двумя единицами расположено чётное число нулей.

Теорема 3.7. *Энтропия псевдоаносовской косы β из трёх нитей вида*

$$\beta = \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{-m_1}\sigma_1^{k_2}\sigma_2^{-m_2}\ldots\sigma_1^{k_s}\sigma_2^{-m_s}$$

может быть вычислена по формуле:

$$h(\beta) = \ln\frac{|2+P| + \sqrt{(2+P)^2-4}}{2},$$

где $P = P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \ldots, k_s, m_s)$.

Далее перечисляются свойства многочленов P_n, возникающих в явной формуле для энтропии, а также многочленов P_n^{odd} и P_n^{even}, которые определяеются так же, как и P_n, только суммирование идёт не по всему семейству $\mathcal{F}_n$, а по соответственно подсемействам $\mathcal{F}_n^{\mathrm{odd}}$ и $\mathcal{F}_n^{\mathrm{even}}$. К подсемейству $\mathcal{F}_n^{\mathrm{odd}}$ относятся те функции из $\mathcal{F}_n$, у которых минимальный элемент полного прообраза единицы нечётный, а к подсемейству $\mathcal{F}_n^{\mathrm{even}}$ — все остальные функции из $\mathcal{F}_n$.

Теорема 3.8. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место следующие равенства:*

$$P_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) = P_n(x_2, \ldots, x_n, x_1);$$
$$P_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) = P_n(x_n, \ldots, x_2, x_1);$$
$$P_{n+2}^{\mathrm{even}}(x_1, \ldots, x_{n+2}) = P_n^{\mathrm{odd}}(x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Теорема 3.9. *Для любых $n, k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство:*

$$P_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) = P_{n+2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2k}).$$

Теорема 3.10. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место следующее равенство:*

$$\frac{\partial P_n}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_{n-1}^{\mathrm{odd}}(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1}) + (n \bmod 2),$$

где последнее слагаемое $(n \bmod 2)$ есть вычет по модулю 2 числа n.

Описывается связь между многочленами P_n и циклическими многогранниками. А именно, условие чётности Гейла, которому должны удовлетворять вершины циклического многогранника, принадлежащие одной гиперграни, совпадает с условием, которому должны удовлетворять переменные, принадлежащие одному моному полинома P_n.

В последнем параграфе третьей главы рассматривается алгоритм распознавания типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона, имеющий линейную сложность и не использующий никакие разновидности железнодорожных путей либо саммит-множеств. Основная идея заключается в представлении косы из трёх нитей как движения одной нити вокруг двух других и определённом кодировании такого движения, по которому тип косы эффективно распознаётся.

Теорема 3.18. *Для кос группы B_3 существует алгоритм распознавания их типа по классификации Нильсена-Тёрстона со временем выполнения $O(l)$, где l есть длина входного слова в классических образующих Артина.*

Заключение

На защиту выносятся следующие основные результаты.

1. Получена нижняя оценка энтропии кос с произвольным числом нитей через спектральный радиус матрицы Бурау для всех ненулевых комплексных значений параметра.

2. Получена явная формула для энтропии кос из трёх нитей.

3. Описаны свойства многочленов, возникающих в явной формуле для энтропии кос из трёх нитей, и, в частности, описана связь между этими многочленами и циклическими многогранниками.

4. Указан алгоритм распознавания типа косы из трёх нитей по Нильсену-Тёрстону, имеющий линейную сложность и не использующий никакие разновидности железнодорожных путей либо саммит-множеств.

Полученные автором результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях топологической энтропии динамических систем на двумерных поверхностях. Описанная связь между формулой для энтропии кос и строением циклических многогранников может послужить более глубокому пониманию обоих вопросов.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы дисертации можно предложить обобщение полученных результатов на косы из четырёх и более нитей.

Благодарности

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Павловичу Лексину за постановку задачи и внимание к работе.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Бирюков О.Н. Оценка топологической энтропии гомеоморфизмов проколотого двумерного диска // Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, №5, с.47–55. English transl.: A bound for the topological entropy of homeomorphisms of a punctured two-dimensional disk // Journal of Mathematical Sciences, vol. 146, 2007, p. 5483–5489.

2. Бирюков О.Н. Явная формула для вычисления энтропии кос в группе B_3 // Математические заметки, 2015, том 97, №4, с. 629–631.

3. Бирюков О.Н. Эффективное распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону в случае трёх нитей // Проблемы математического анализа, Выпуск 79, 2015, с. 53–61. English transl.: Efficient algorithm for recognizing the Nielsen-Thurston type of a three-strand braid // Journal of Mathematical Sciences, New York, 208, No. 1, 2015, 49-58.

Публикации в других изданиях

1. Бирюков О.Н. Оценка энтропии гомеоморфизмов 2-диска // Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения. Материалы международной научной конференции. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2005, с. 20.

2. Бирюков О.Н. Оценка топологической энтропии кос // Начало: сборник научных статей аспирантов и соискателей. — Вып. 5. Под ред. А. В. Кулагина. — Коломна: КГПИ, 2006, 180–186.

3. Бирюков О.Н. О топологической энтропии кос // Александровские чтения — 2006: тез. докл. — М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2006, 66–67.

4. Бирюков О.Н. Представления группы кос и оценка топологической энтропии гомеоморфизмов диска // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир: Владимирский государственный университет, 2006, 43–44.

5. Бирюков О.Н. Алгоритм вычисления энтропии кос // Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”: Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2007, 39–40.

6. Бирюков О.Н. Об одном алгоритме вычисления энтропии псевдоаносовских кос. // Вестник КГПИ. — Коломна: КГПИ, 2007.

7. Бирюков О.Н. Об энтропии приводимых кос // Международная конференция “Анализ и особенности”, Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2007, 31–32.

8. Бирюков О.Н. Алгоритмы вычисления и перечисления энтропии кос // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2008. Тезисы докладов. — 2008, 22–23.

9. Бирюков О.Н. Представления группы кос и энтропия // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семёновича Понтрягина (1908-1988). Тезисы докладов. — М. 2008, 461–462.

10. Бирюков О.Н. О связи представлений группы кос и энтропии действия кос на проколотой 2-сфере // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов. — Владимир: Владимирский государственный университет, 2008, 45–47.

11. Бирюков О.Н. Железнодорожные сети в задачах двумерной динамики // Труды конференции, посвящённой 70-летию математического образования в КГПИ, 2009.

12. Бирюков О.Н. Алгоритмы классификации Нильсена-Тёрстона для кос // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Суздаль, 2010, 45–46.

13. Бирюков О.Н. Эффективное распознавание типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона в группе кос B_3 // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXIII». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012, 30–31.

14. Бирюков О.Н. О распознавании типа косы по Нильсену-Тёрстону в группе кос из трёх нитей // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Материалы IV научной конференции молодых учёных Москвы и Коломны. – Коломна, 2012, 15–17.

15. Бирюков О.Н. Эффективное распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону в случае трёх нитей // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Суздаль, 2012, 32–33.

16. Бирюков О.Н. Классификация гомеоморфизмов по Нильсену-Тёрстону и SU(2)-ТКТП // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXV». – Воронеж: Научная книга, 2014, с. 18.

17. Бирюков О.Н. Эффективный алгоритм распознавания типа косы по Нильсену-Тёрстону в группе B_3 // Препринт ПОМИ РАН, 7, 2014.