

ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА»

---

На правах рукописи

БИРЮКОВ ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ КОС АРТИНА**

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор В. П. Лексин

Москва – 2016

# Оглавление

|                                                                                               |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Введение</b>                                                                               | <b>3</b>   |
| <b>1 Группа кос и её представления</b>                                                        | <b>13</b>  |
| 1.1 Определение группы кос . . . . .                                                          | 13         |
| 1.2 Представление Артина группы кос . . . . .                                                 | 21         |
| 1.3 Представление Бурау группы кос и свободное<br>дифференциальное исчисление Фокса . . . . . | 24         |
| 1.4 Каноническая форма косы . . . . .                                                         | 27         |
| 1.5 Распознавание сопряжённости кос . . . . .                                                 | 31         |
| 1.6 Классификация автоморфизмов гиперболических поверхностей                                  | 35         |
| 1.7 Классификация кос по Нильсену-Тёрстону . . . . .                                          | 41         |
| 1.8 Теория Перрона-Фробениуса . . . . .                                                       | 49         |
| 1.9 Железнодорожные пути . . . . .                                                            | 52         |
| <b>2 Энтропия кос</b>                                                                         | <b>63</b>  |
| 2.1 Показатель экспоненциального роста последовательности . . . . .                           | 63         |
| 2.2 Топологическая энтропия . . . . .                                                         | 64         |
| 2.3 Алгебраическая энтропия . . . . .                                                         | 69         |
| 2.4 Определение энтропии кос . . . . .                                                        | 72         |
| 2.5 Оценка энтропии кос . . . . .                                                             | 73         |
| 2.6 Вычисление энтропии кос . . . . .                                                         | 77         |
| <b>3 Косы из трёх нитей</b>                                                                   | <b>79</b>  |
| 3.1 Группа гометопий двумерного тора . . . . .                                                | 79         |
| 3.2 Представление $B_3$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . . . . .                              | 80         |
| 3.3 Явная формула для энтропии кос из трёх нитей . . . . .                                    | 82         |
| 3.4 Свойства многочленов $P_n$ . . . . .                                                      | 86         |
| 3.5 Распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону из трёх нитей .                              | 89         |
| <b>Заключение</b>                                                                             | <b>101</b> |
| <b>Литература</b>                                                                             | <b>102</b> |

# Введение

## Актуальность и история вопроса

Рассматривается группа кос из  $n$  нитей как группа гомеотопий (изотопических классов сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) стандартного двумерного диска, из внутренности которого удалены  $n$  открытых дисков, где внешняя граница диска остаётся поточечно неподвижной. Итерации гомеоморфизма, представляющего косу, задают топологическую динамическую систему с дискретным временем.

Одной из важнейших количественных характеристик любой динамической системы является топологическая энтропия. Минимум топологической энтропии, взятый по всем гомеоморфизмам, представляющим некоторую косу, называется энтропией косы. Энтропия кос и составляет основной предмет исследования.

Топологическая энтропия — это неотрицательное вещественное число или  $+\infty$ , отражающее хаотичность поведения траекторий в динамической системе. В случае если траектории «не перемешиваются» и их поведение периодическое, топологическая энтропия равна нулю. Если же топологическая энтропия отлична от нуля, то поведение траекторий точек достаточно сложное, при этом расстояние между близко расположенными точками экспоненциально возрастает со временем. И чем больше энтропия, тем быстрее «разбегаются» близкие траектории. В силу компактности пространства расстояние между траекториями не может возрастать бесконечно, и траектории начинают хаотично перемешиваться. Кроме того, ненулевая энтропия делает невозможным практические предсказания поведения в динамической системе, поскольку любые

измерения допускают некоторую погрешность, а в системе с ненулевой энтропией погрешность экспоненциально возрастает со временем.

В связи со сказанным для любого класса динамических систем важными являются задачи вычисления топологической энтропии, её оценки сверху и снизу, поиска минимальной и максимальной топологической энтропии в данном классе систем, выяснения необходимых и/или достаточных условий нулевой энтропии.

Для класса динамических систем, порождаемых косами на 2-диске с «дырками», перечисленные задачи активно исследуются.

В 1986 году Т. Мацуока ([40]) показал, что в группе кос из трёх нитей коса  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  имеет наименьшую положительную энтропию.

В 1986 году Д. Фрайд ([31]) и в 1989 году Б. Колев ([36]) указали нижнюю оценку энтропии кос через спектральный радиус матрицы Бурау, где параметр  $t$  матрицы пробегает всевозможные значения на единичной окружности  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Оценка энтропии косы снизу позволяет установить минимально возможный хаос в поведении траекторий в динамической системе, которую задаёт коса. В 2007 году Г. Банд и Ф. Бойланд ([17]) получили некоторые результаты, связанные с точностью оценки Фрайда-Колева.

В 1994 году А.Ю. Жиров ([2]) показал, что существуют гомеоморфизмы сферы (а следовательно, и косы) со сколь угодно близкой к нулю энтропией.

В 2002 году К. Х. Ко, Ж. Е. Лос и В. Т. Сонг ([35]) показали, что в группе кос из четырёх нитей коса  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$  имеет наименьшую положительную энтропию.

В 2005 году Ж. Хэм и В. Т. Сонг ([33]) показали, что в группе кос из пяти нитей коса  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2$  имеет наименьшую положительную энтропию.

В 2006 году Ж.-О. Муссафир ([41]) выразил энтропию косы как предел некоторой последовательности, связанной с количеством точек пересечений одного семейства дуг на 2-диске с «дырками» (при действии на это семейство итераций косы) с другим фиксированным семейством дуг на этой поверхности. Построить на основе этого выражения алгоритм вычисления энтропии кос в настоящее время не представляется возможным, поскольку ещё не исследо-

вано, как быстро сходится к пределу рассматриваемая в данном выражении последовательность.

Таким образом, в настоящее время по-прежнему актуальными остаются задачи нахождения точных оценок энтропии кос, а также алгоритмы либо формулы для вычисления энтропии. С этими задачами тесно связана проблема классификации кос по Нильсену-Тёрстону. В соответствии с этой классификацией различают три типа кос: периодические, приводимые и псевдоаносовские. Периодические косы, а также приводимые, все составляющие которых являются периодическими, имеют нулевую энтропию. Соответственно возникает задача эффективного распознавания типа косы, а также разложения приводимых кос на составляющие.

Первые примеры псевдоаносовских гомеоморфизмов на сфере (а значит, и псевдоаносовских кос) появились в 1974 и 1984 гг. в работах Р.В. Плыкина ([11], [12]).

В 1995 году М. Бествина и М. Хэндл ([20]) предложили алгоритм для распознавания типа гомеоморфизма компактной поверхности по классификации Нильсена-Тёрстона в случае, когда внешний автоморфизм свободной группы, соответствующий гомеоморфизму, является неприводимым. Этот алгоритм основан на понятии железнодорожного пути (train-track) и может быть применён для вычисления энтропии кос, которым отвечает (в соответствии с представлением Артина) неприводимый внешний автоморфизм свободной группы. Сложность этого алгоритма в настоящее время не известна, при этом существует его компьютерная реализация ([26]).

В 1995 году Д. Бернадет, З. Нитецки и М. Гутиэррес ([18]) предложили алгоритм для распознавания периодических кос и разложения приводимых кос на составляющие. В этом алгоритме использовались саммит-множества (summit sets), эффективность вычисления которых пока неизвестна.

В 1990-е и 2000-е гг. было предложено ещё несколько подходов к решению этой задачи: см. [20], [32], [37], [38]. Каждый из этих подходов основан на использовании либо железнодорожных путей, либо некоторых разновидностей саммит-множеств, и ни про один из них ещё не доказана его эффективность

(т. е. полиномиальная сложность) как по длине входного слова в классических образующих Артина  $\sigma_i$ , так и по количеству нитей.

В 2012-14 гг. М. Калвеш и Б. Виест ([27], [28]) описали эффективные (по длине входного слова) алгоритмы распознавания типа косы, основанные на использовании саммит-множеств (а именно, super summit sets). Время выполнения этих алгоритмов оценивается как  $O(l^2)$  для четырёх нитей и  $O(l^3)$  для произвольного числа нитей, где  $l$  есть длина входного слова в классических образующих Артина. Эти алгоритмы эффективно определяют тип косы, но не позволяют разложить приводимую косу на составляющие.

## Цель диссертационной работы

Исследовать связь между топологическими и алгебраическими характеристиками кос, в частности, вопрос классификации кос по Нильсену-Тёрстону, а также способы оценки и вычисления энтропии кос.

## Научная новизна

- получена нижняя оценка энтропии кос с произвольным числом нитей через спектральный радиус матрицы Бурау для всех ненулевых комплексных значений параметра;
- получена явная формула для энтропии кос из трёх нитей;
- исследованы свойства многочленов, возникающих в явной формуле для энтропии кос из трёх нитей, и, в частности, описана связь между этими многочленами и циклическими многогранниками;
- указан алгоритм распознавания типа косы из трёх нитей по Нильсену-Тёрстону, имеющий линейную сложность и не использующий никакие разновидности железнодорожных путей либо саммит-множеств.

# Содержание работы

Работа состоит из трёх глав.

В первой главе излагаются необходимые сведения из теории кос. Начинается глава с определения группы кос.

Рассмотрим ориентированный замкнутый двумерный диск с граничной окружностью  $\gamma_0$ . Во внутренности этого диска выберем  $n$  попарно непересекающихся замкнутых дисков с граничными окружностями  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Удалим внутренности  $n$  выбранных дисков. Получим компактную ориентированную поверхность  $M$  рода нуль с краем  $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ .

**Определение 1.2.** *Группой кос  $B_n$  из  $n$  нитей* называется группа гомеотопий поверхности  $M$ , оставляющих поточечно неподвижной компоненту края  $\gamma_0$ .

Далее определяется понятие скручивания Дэна вдоль простой замкнутой кривой на поверхности  $M$ . Для кривой, которая охватывает ровно две компоненты края, вводится понятие полускручивания Дэна. Последнее используется для указания образующих  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  группы кос, посредством которых получается стандартное задание группы кос с помощью образующих и соотношений:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad 1 \leq i, j \leq n - 1;$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2.$$

Вводится понятие группы крашенных кос как ядра гомоморфизма  $B_n \rightarrow S_n$ , где  $S_n$  — группа перестановок  $n$  элементов. Каждой косе данный гомоморфизм сопоставляет перестановку на множестве граничных компонент  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ .

Далее рассматриваются представления Артина и Бурау группы кос. Представление Артина есть гомоморфизм  $B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ , который сопоставляет косе индуцированный автоморфизм фундаментальной группы поверхности  $M$ . Фундаментальная группа  $\pi_1(M, x_0)$ , где  $x_0$  — некоторая точка на граничной компоненте  $\gamma_0$ , изоморфна свободной группе  $F_n$  с  $n$  образующими  $x_1, \dots, x_n$ . Фиксируется такой изоморфизм  $\pi_1(M, x_0) \sim F_n$ , чтобы коса  $\sigma_i$  индуцировала

следующий автоморфизм свободной группы

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} & \mapsto x_i, \\ x_j & \mapsto x_j, \end{cases} \quad j \neq i, i+1. \quad (1.4)$$

Представлением Бурау называется гомоморфизм

$$B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]), \quad \sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1},$$

где  $I_k$  обозначает единичную  $k \times k$ -матрицу.

Описывается связь между представлениями Артина и Бурау с помощью свободного дифференциального исчисления Фокса:

$$b_{ij} = \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_j} ((x_i)\beta) \right),$$

где  $b_{ij}$  — элементы матрицы Бурау, коса  $\beta$  действует на  $x_i$  в соответствии с представлением Артина, и гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_1\langle t \rangle$  действует по правилу  $\varphi(x_i) = t$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В следующих параграфах рассматриваются каноническая форма косы и существующее решение проблемы сопряжённости в группе кос, использующее саммит-множества (summit sets и super summit sets).

Далее рассматривается классификация изотопических классов автоморфизмов (сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) гиперболических поверхностей по Нильсену-Тёрстону, т. е. разделение классов изотопии автоморфизмов на периодические, псевдоаносовские и приводимые. Используя эту классификацию, все косы также разделяются на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Описывается алгоритм распознавания периодических кос и разложения приводимых кос на составляющие, который в 1995 году предложили Д. Бернадет, З. Нитецки и М. Гутиэррес ([18]).

В следующем параграфе излагается теория Перрона-Фробениуса. И в конце первой главы рассматривается алгоритм М. Бествины и М. Хэндла ([20]) для определения типа гомеоморфизма компактной поверхности по классификации Нильсена-Тёрстона в случае, когда внешний автоморфизм свободной группы, соответствующий гомеоморфизму, является неприводимым.



Во второй главе рассматривается понятие энтропии. В начале главы вводится понятие *показателя экспоненциального роста* последовательности положительных вещественных чисел  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\text{GR}(a_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln a_n.$$

Далее вводятся понятия топологической и алгебраической энтропии.

**Определение 2.5.** *Топологической энтропией* непрерывного отображения  $f : X \rightarrow X$  компактного пространства  $X$  в себя называется величина

$$h(f) = \sup_{\alpha \in I} \left\{ \text{GR} \left( N \left( \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha \right) \right) \right\},$$

где  $I$  — семейство всех открытых покрытий  $X$ , и  $N \left( \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha \right)$  — наименьшая мощность подпокрытия в покрытии

$$\begin{aligned} \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha &= \alpha \vee f^{-1} \alpha \vee \dots \vee f^{-(n-1)} \alpha \\ &= \{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \mid A_0, \dots, A_{n-1} \in \alpha\}. \end{aligned}$$

**Определение 2.11.** *Алгебраической энтропией* эндоморфизма  $f : G \rightarrow G$  конечно порождённой группы  $G$  называется число

$$h_a(f) = \sup_{g \in G_f} \left\{ \text{GR} (L_S(f^n(g))) \right\},$$

где  $L_S(g)$  — длина элемента  $g \in G$  в образующих семейства  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  и  $G_f = \{g \in G \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^n(g) \neq e\}$ .

В [30] доказывается, что алгебраическая энтропия не зависит от выбора семейства  $S$ .

Затем формулируется определение энтропии косы, для чего рассматривается естественный гомоморфизм  $f : B_n \rightarrow \text{Homeot}(M)$ , где  $M$  — поверхность из определения группы кос.

*Энтропией косы*  $\beta \in B_n$  называется точная нижняя грань топологической энтропии гомеоморфизмов, отвечающих косе при гомоморфизме  $f$ :

$$h(\beta) = \inf \{h(\varphi) \mid \varphi \in f(\beta)\}.$$

Приводятся известные в настоящее время оценки энтропии косы сверху и снизу (нижнюю оценку получил в 1986 году Д. Фрайд [31] и передоказал в 1989 году Б. Колев [36]):

$$\ln \sup_{t \in S^1} \{R(B_\beta(t))\} \leq h(\beta) \leq \ln R(A_\beta). \quad (2.7)$$

Здесь через  $A_\beta$  обозначена матрица автоморфизма свободной группы, отвечающего косе  $\beta$  в соответствии с представлением Артина,  $B_\beta(t)$  — матрица Бурау, а  $R(B_\beta(t))$  и  $R(A_\beta)$  обозначают спектральные радиусы этих матриц. Матрица  $A_\beta$  конструируется следующим образом: элемент  $a_{ij}$  этой матрицы есть количество букв  $x_j^{\pm 1}$  в редуцированном слове  $(x_i)\beta$ .

Показано, как можно расширить нижнюю оценку энтропии косы на все ненулевые комплексные значения параметра  $t$ . Для косы  $\beta \in B_n$  обозначим через  $M(\beta)$  множество таких  $k \in \mathbb{Z}$ , что  $t^k$  встречается хотя бы в одном элементе матрицы Бурау  $B_\beta(t)$  с ненулевым коэффициентом. Положим также:

$$m(\beta, |t|) = \begin{cases} \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\max M(\beta^p)}{p}, & \text{если } |t| \geq 1, \\ \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\min M(\beta^p)}{p}, & \text{если } 0 < |t| < 1. \end{cases}$$

**Теорема 2.12.** *Для косы  $\beta \in B_n$  имеет место следующая нижняя оценка энтропии:*

$$h(\beta) \geq \ln \sup \left\{ R(B_\beta(t)) \cdot |t|^{-m(\beta, |t|)} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

Далее во второй главе рассматривается формула Ж.-О. Муссафира, согласно которой энтропия косы  $\beta$  может быть представлена как показатель экспоненциального роста последовательности пересечений с вещественной осью образов  $\beta^k(L)$  для некоторой ламинации  $L$ :

$$h(\beta) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln c(\beta^k(L)).$$

Третья глава посвящена группе кос из трёх нитей. Рассматривается представление группы  $B_3/\Delta^2$  в  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ :

$$\psi : B_3/\Delta^2 \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z}), \quad \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

С помощью этого представления получается явная формула для энтропии кос из трёх нитей. Для записи этой формулы вводятся многочлены

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)}, \quad (3.5)$$

где  $\mathcal{F}_n$  есть семейство двоичных функций  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\}$ , для каждой из которых прообраз единицы непустой и в упорядоченном, дважды повторяющемся наборе её значений  $f(1), f(2), \dots, f(n), f(1), f(2), \dots, f(n)$  между любыми двумя единицами расположено чётное число нулей.

**Теорема 3.7.** *Энтропия псевдоаносовской косы  $\beta$  из трёх нитей вида*

$$\beta = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}$$

*может быть вычислена по формуле:*

$$h(\beta) = \ln \frac{|2 + P| + \sqrt{(2 + P)^2 - 4}}{2},$$

где  $P = P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s)$  — многочлен вида (3.5).

Далее перечисляются свойства многочленов  $P_n$ , возникающих в явной формуле для энтропии, а также многочленов  $P_n^{\text{odd}}$  и  $P_n^{\text{even}}$ , которые определяются так же, как и  $P_n$ , только суммирование идёт не по всему семейству  $\mathcal{F}_n$ , а по соответственно подсемействам  $\mathcal{F}_n^{\text{odd}}$  и  $\mathcal{F}_n^{\text{even}}$ . К подсемейству  $\mathcal{F}_n^{\text{odd}}$  относятся те функции из  $\mathcal{F}_n$ , у которых минимальный элемент полного прообраза единицы нечётный, а к подсемейству  $\mathcal{F}_n^{\text{even}}$  — все остальные функции из  $\mathcal{F}_n$ .

**Теорема 3.8.** *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеют место следующие равенства:*

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_2, \dots, x_n, x_1);$$

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_n, \dots, x_2, x_1);$$

$$P_{n+2}^{\text{even}}(x_1, \dots, x_{n+2}) = P_n^{\text{odd}}(x_2, \dots, x_{n+1}).$$

**Теорема 3.9.** *Для любых  $n, k \in \mathbb{N}$  имеет место равенство:*

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{n+2k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2k}).$$

**Теорема 3.10.** *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место следующее равенство:*

$$\frac{\partial P_n}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{n-1}^{\text{odd}}(x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{k-1}) + (n \bmod 2),$$

где последнее слагаемое  $(n \bmod 2)$  есть вычет по модулю 2 числа  $n$ .

Описывается связь между многочленами  $P_n$  и циклическими многогранниками. А именно, условие чётности Гейла, которому должны удовлетворять вершины циклического многогранника, принадлежащие одной гиперграни, совпадает с условием, которому должны удовлетворять переменные, принадлежащие одному моному полинома  $P_n$ .

В последнем параграфе третьей главы рассматривается алгоритм распознавания типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона, имеющий линейную сложность и не использующий никакие разновидности железнодорожных путей либо саммит-множеств. Основная идея заключается в представлении косы из трёх нитей как движения одной нити вокруг двух других и определённом кодировании такого движения, по которому тип косы эффективно распознаётся.

**Теорема 3.18.** *Для кос группы  $B_3$  существует алгоритм распознавания их типа по классификации Нильсена-Тёрстона со временем выполнения  $O(l)$ , где  $l$  есть длина входного слова в классических образующих Артина.*

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Павловичу Лексину за постановку задачи и внимание к работе.

# Глава 1

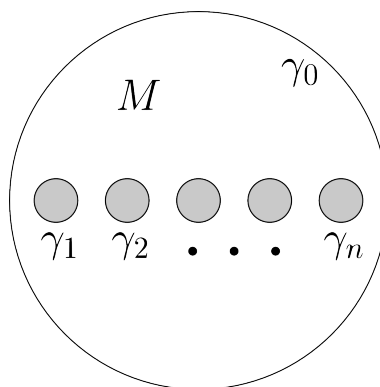
## Группа кос и её представления

### 1.1 Определение группы кос

В данной работе речь идёт о классической группе кос Артина, которую всюду далее будем называть просто группой кос.

Существует множество эквивалентных определений группы кос как алгебраических, так и топологических (см., например, [21] и [22]). В данной работе нам будет удобно в качестве исходного взять определение группы кос как группы классов отображений компактной ориентированной поверхности рода нуль.

Рассмотрим ориентированный замкнутый двумерный диск с граничной окружностью  $\gamma_0$ . Во внутренности этого диска выберем  $n$  попарно непересекающихся замкнутых дисков с граничными окружностями  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Удалим внутренности  $n$  выбранных дисков. Получим компактную ориентированную связную поверхность  $M$  рода нуль с краем  $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ .



**Определение 1.1.** Группой классов отображений (или группой гомеотопий,

или также *модулярной группой*) компактной ориентированной поверхности называется группа изотопических классов сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов этой поверхности. Элементы группы гомеотопий будем называть *гомеотопиями*.

**Определение 1.2.** *Группой кос  $B_n$  из  $n$  нитей* называется группа гомеотопий поверхности  $M$ , оставляющих поточечно неподвижной компоненту края  $\gamma_0$ . Другими словами, это группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхности  $M$ , поточечно неподвижных на  $\gamma_0$  и рассматриваемых с точностью до изотопии, каждое промежуточное отображение в которой также поточечно неподвижно на  $\gamma_0$ .

Это топологическое определение группы кос. В соответствии с ним существует естественный гомоморфизм

$$B_n \rightarrow \text{Homeot}(M),$$

где  $\text{Homeot}(M)$  есть группа гомеотопий поверхности  $M$ .

Для того, чтобы разобраться в этом гомоморфизме и дать эквивалентное алгебраическое определение группы кос, рассмотрим понятия скручивания Дэна и полускручивания Дэна вдоль простой замкнутой кривой.

Пусть  $\gamma$  — простая (без самопересечений) замкнутая кривая на  $M$ , т. е. образ стандартной окружности  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  при её вложении в поверхность  $M$ .

Поскольку поверхность  $M$  ориентированная, то у кривой  $\gamma$  существует замкнутая окрестность  $U$ , гомеоморфная некоторому кольцу  $A$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Кольцо  $A$  в полярных координатах  $(r, \theta)$  может быть задано следующим образом:

$$A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2\}.$$

Зафиксируем гомеоморфизм  $\varphi : U \rightarrow A$ , переводящий выбранную ориентацию поверхности  $M$  в стандартную ориентацию  $\mathbb{R}^2$ . Определим отображение  $\tau : A \rightarrow A$  по формуле

$$(r, \theta) \mapsto (r, \theta + 2\pi(2 - r)).$$

**Определение 1.3.** Гомеоморфизм  $\tau_\gamma : M \rightarrow M$ , действующий по правилу

$$\tau_\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in M \setminus U; \\ \varphi^{-1} \tau \varphi(x) & \text{при } x \in U; \end{cases}$$

называется *скручиванием Дэна вдоль кривой  $\gamma$* .

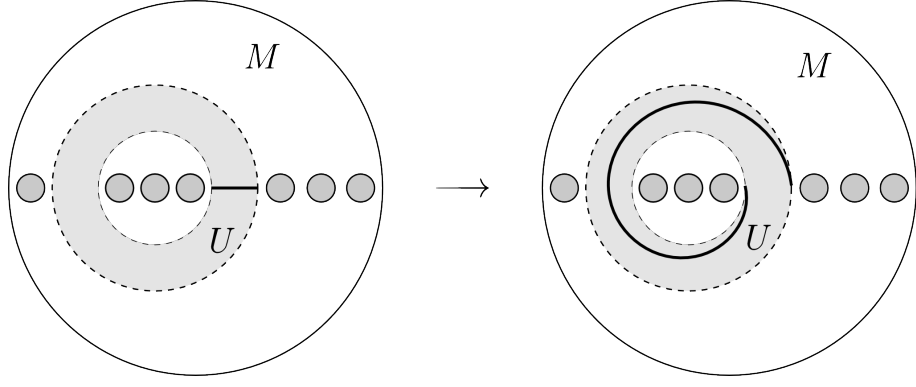
Другой выбор окрестности  $U$  кривой  $\gamma$  и сохраняющего ориентацию гомеоморфизма  $\varphi : U \rightarrow A$ , как и замена кривой  $\gamma$  на изотопную, приводят к изотопным скручиваниям. Существенен только выбор направления скручивания. Так если в определении отображения  $\tau : A \rightarrow A$  следующим образом изменить знак:

$$(r, \theta) \mapsto (r, \theta - 2\pi(2 - r)),$$

то получим скручивание в противоположном направлении. Скручивания в противоположных направлениях определяют взаимно обратные элементы группы гомеотопий. Противоположное скручивание получится также, если в отображении  $\tau$  оставить знак «плюс», но при этом в качестве  $\varphi$  выбрать гомеоморфизм, меняющий ориентацию.

Менее формально скручивание можно представлять себе как разрезание поверхности  $M$  вдоль граничных окружностей окрестности  $U$ , деформация окрестности  $U$  путём перекручивания одной из её граничных окружностей на  $360^\circ$  в одном из двух возможных направлений (зависит от ориентации окрестности  $U$  и того, какое скручивание требуется получить — положительное или отрицательное) и склеивание разрезов.

Для большей наглядности расположим поверхность  $M$  на плоскости и будем смотреть на неё со стороны внешней нормали, которая собственно и задаёт ориентацию поверхности  $M$ . При положительном скручивании Дэна «радиальный» отрезок «кольцевой» окрестности  $U$  деформируется так, как показано на рисунке.



Такая деформация окрестности  $U$  может быть получена путём перекручивания одной из её граничных окружностей на  $360^\circ$  — либо внутренней окружности против часовой стрелки, либо внешней по часовой.

Перейдём теперь к определению полускручивания Дэна.

Поскольку поверхность  $M$  является двумерным диском с удалёнными из его внутренности открытыми дисками, то любая кривая  $\gamma$  на  $M$  разрезает эту поверхность на две компоненты связности. Поэтому и поверхность  $M \setminus U$ , где  $U$  есть гомеоморфная кольцу замкнутая окрестность кривой  $\gamma$ , состоит из двух компонент — внутренней  $M_1$  и внешней  $M_2$  (внешней признаётся та, что содержит компоненту края  $\gamma_0$ ).

Выберем  $\gamma$  так, чтобы в  $M_1$  оказались только две компоненты края исходной поверхности —  $\gamma_{i_1}$  и  $\gamma_{i_2}$  для некоторых  $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , а все остальные компоненты края  $M$  оказались в  $M_2$ . Будем говорить, что кривая  $\gamma$  *охватывает* компоненты  $\gamma_{i_1}$  и  $\gamma_{i_2}$  края  $M$ .

Пусть  $A$  есть, как и раньше, кольцо на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Зафиксируем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $\varphi_1 : U \rightarrow A$ , отображающий граничную окружность окрестности  $U$ , которая граничит с  $M_1$ , в граничную окружность кольца  $A$  меньшего радиуса.

Определим отображение  $\tau_1 : A \rightarrow A$  по формуле

$$(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \pi(2 - r)).$$

Замыкание поверхности  $M_1$  гомеоморфно поверхности  $D$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , полученной из замкнутого диска  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$  удалением двух



открытых дисков

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 2)^2 + y^2 < 1\} \quad \text{и} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 < 1\}.$$

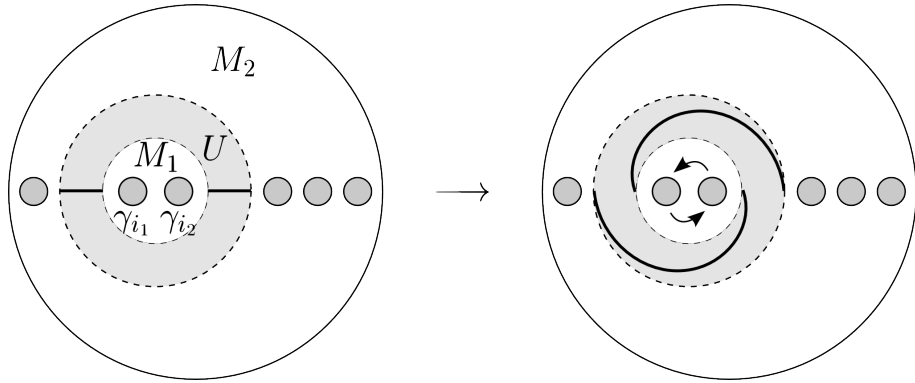
Зафиксируем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $\varphi_2 : \overline{M}_1 \rightarrow D$ , отображающий окружности  $(x + 2)^2 + y^2 = 1$  и  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  в  $\gamma_{i_1}$  и  $\gamma_{i_2}$  соответственно. Обозначим через  $\tau_2$  поворот поверхности  $D$  на  $180^\circ$  с центром в начале координат.

**Определение 1.4.** Гомеоморфизм  $\tilde{\tau}_\gamma : M \rightarrow M$ , действующий по правилу

$$\tilde{\tau}_\gamma(x) = \begin{cases} \varphi_1^{-1} \tau_1 \varphi_1(x) & \text{при } x \in U; \\ \varphi_2^{-1} \tau_2 \varphi_2(x) & \text{при } x \in M_1; \\ x & \text{при } x \in M_2; \end{cases}$$

называется *полускручиванием (или половинным скручиванием) Дэна вдоль кривой  $\gamma$* .

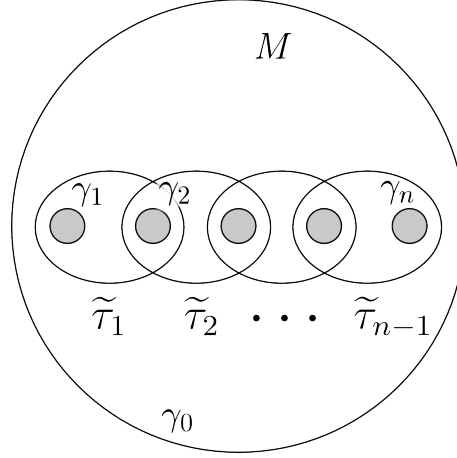
Наглядно полускручивание Дэна можно представлять как жёсткий поворот компоненты  $M_1$  на пол оборота ( $180^\circ$ ) против часовой стрелки. При этом близлежащие точки окрестности  $U$  увлекаются вслед за этим поворотом, а компоненты края  $\gamma_{i_1}$  и  $\gamma_{i_2}$  меняются местами. Компонента же  $M_2$  остаётся поточечно неподвижной.



Название данного гомеоморфизма легко объясняется тем, что квадрат полускручивания Дэна вдоль кривой  $\gamma$ , очевидно, даёт обычное скручивание Дэна вдоль этой кривой.

Подчеркнём, что полускручивание Дэна определяется здесь только для кривых  $\gamma$ , охватывающих ровно две компоненты края  $M$ .

Обозначим через  $\tilde{\tau}_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , полускручивание Дэна вдоль кривой, охватывающей компоненты края  $\gamma_i$  и  $\gamma_{i+1}$ , как указано на рисунке ниже.



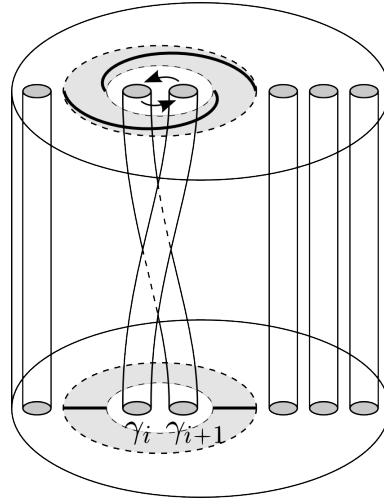
Можно доказать ([22]), что косы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ , определяемые соответственно гомеоморфизмами  $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \dots, \tilde{\tau}_{n-1}$ , порождают всю группу  $B_n$ , при этом возникает два семейства соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad 1 \leq i, j \leq n - 1; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

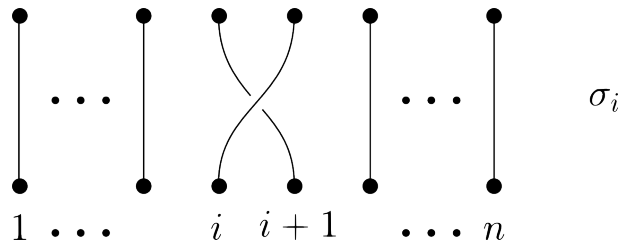
образующих полный набор соотношений. Таким образом, получается эквивалентное алгебраическое определение группы кос с помощью образующих и соотношений.

Рассмотрим теперь схематичное изображение кос, с помощью которого легко проверяется справедливость соотношений (1.1).

Заклеим граничные окружности  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  поверхности  $M$  дисками. Получим обычный двумерный диск, любой гомеоморфизм  $f$  которого изотопен тождественному. Эту изотопию  $f_t$ , где  $t \in [0, 1]$ , можно изобразить в виде вертикального цилиндра. Нижнее основание цилиндра будет соответствовать тождественному отображению  $f_0$ , верхнее — гомеоморфизму  $f = f_1$ . Каждая из окружностей  $\gamma_i$  при прохождении снизу вверх по цилиндру сама «рисует» некоторый цилиндр. Для полускручивания Дэна, соответствующего косе  $\sigma_i$ , картина будет следующей.

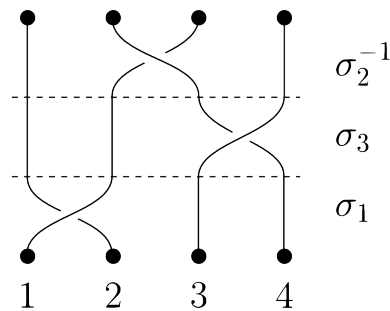


Эту же картину можно схематично изобразить, заменив окружности  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  точками, а «рискуемые» этими окружностями цилиндры заменить переплетающимися восходящими кривыми линиями, соединяющими точки. В частности, для полускручивания Дэна, соответствующего косе  $\sigma_i$ , получается такое изображение.

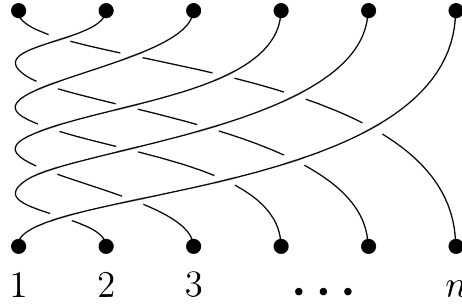


Схематичное изображение композиции гомеоморфизмов будет, очевидно, получаться присоединением изображения второго гомеоморфизма поверх первого. Это и есть операция произведения кос. Алгебраически ей соответствует операция конкатенации (объединения) слов в образующих  $\sigma_i$ .

Вот пример косы  $\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1}$ .



Особую роль в группе кос играет *коса Гарсайда*  $\Delta$  — положительное скручивание всех нитей на поворотота.



В образующих  $\sigma_i$  коса  $\Delta$  записывается следующим образом:

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1.$$

Квадрат косы Гарсайда  $\Delta^2$ , очевидно, является скручиванием Дэна вдоль кривой, гомотопной компоненте края  $\gamma_0$ . В группе гомеотопий поверхности  $M$  коса  $\Delta^2$  задаёт тривиальный элемент. Однако в группе кос, состоящей из гомеотопий, оставляющих поточечно неподвижной компоненту края  $\gamma_0$ , коса  $\Delta^2$  не будет тривиальной. И можно показать, что только целочисленные степени косы  $\Delta^2$  представляют собой те нетривиальные косы, которым соответствуют тривиальные гомеотопии поверхности  $M$ .

Другими словами, множество целочисленных степеней косы  $\Delta^2$  есть ядро естественного гомоморфизма

$$B_n \rightarrow \text{Homeot}(M).$$

Если взять фактор группы  $B_n$  по косе  $\Delta^2$ , то получим подгруппу в группе гомеотопий поверхности  $M$ , состоящую из классов отображений, переводящих компоненту края  $\gamma_0$  в себя

$$B_n / \{\Delta^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \text{Homeot}(M, \gamma_0) \subset \text{Homeot}(M).$$

Заметим здесь, что порождаемая косой  $\Delta^2$  бесконечная циклическая подгруппа группы  $B_n$  является при  $n \geq 3$  центром этой группы. Группа  $B_2$  является коммутативной, и поэтому её центр совпадает со всей группой. Группа  $B_1$  тривиальна.

Рассмотрим теперь один, часто используемый гомоморфизм группы кос в симметрическую группу и дадим определение крашенных кос.

Каждая коса индуцирует перестановку на множестве граничных компонент  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , что приводит к гомоморфизму

$$B_n \rightarrow S_n, \quad (1.2)$$

где  $S_n$  есть группа перестановок  $n$  элементов.

Например, косе Гарсайда  $\Delta$  соответствует перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Определение 1.5.** Ядро гомоморфизма (1.2) называется *группой крашенных кос из  $n$  нитей*.

## 1.2 Представление Артина группы кос

Зафиксируем точку  $x_0$  на граничной компоненте  $\gamma_0$  поверхности  $M$ . Фундаментальная группа  $\pi_1(M, x_0)$  изоморфна свободной группе  $F_n$  с  $n$  образующими  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Зафиксируем изоморфизм  $\varphi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow F_n$ .

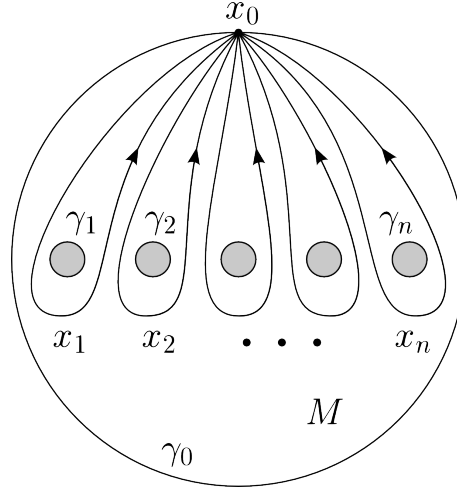
Каждая коса естественным образом индуцирует автоморфизм фундаментальной группы  $\pi_1(M, x_0)$ , что с учётом изоморфизма  $\varphi$  даёт автоморфизм свободной группы  $F_n$ .

Получаем гомоморфизм группы кос из  $n$  нитей в группу автоморфизмов свободной группы  $F_n$ :

$$B_n \rightarrow \text{Aut } F_n. \quad (1.3)$$

**Определение 1.6.** Гомоморфизм (1.3) называется *представлением Артина группы кос*.

Представление Артина зависит от выбора точки  $x_0$  и изоморфизма  $\varphi$ . Выберем их так, как показано на рисунке.



Здесь указано, какие петли, представляющие элементы фундаментальной группы  $\pi_1(M, x_0)$ , должны при изоморфизме  $\varphi$  соответствовать образующим  $x_1, \dots, x_n$ . На поверхность  $M$  смотрим, как и ранее, со стороны внешней нормали.

При таком выборе точки  $x_0$  и изоморфизма  $\varphi$  косе  $\sigma_i$  соответствует автоморфизм свободной группы  $F_n$ , который выглядит так (будем обозначать его так же, как и саму косу):

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} & \mapsto x_i, \\ x_j & \mapsto x_j, \end{cases} \quad j \neq i, i+1. \quad (1.4)$$

Несложно отсюда установить, что для косы  $\sigma_i^{-1}$  автоморфизм выглядит следующим образом:

$$\sigma_i^{-1} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} & \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}, \\ x_j & \mapsto x_j, \end{cases} \quad j \neq i, i+1.$$

Всюду в дальнейшем, когда речь идёт о фундаментальной группе  $\pi_1(M, x_0)$ , будем иметь в виду именно такой изоморфизм  $\varphi$ , что позволит представлять элементы группы  $\pi_1(M, x_0)$  как слова в алфавите  $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$ .

Представление Артина является мономорфизмом и тем самым решает алгоритмическую проблему равенства слов в группе кос, т. е. проблему определения с помощью алгоритма, задают ли два слова из букв  $\sigma_i^{\pm 1}$  одну и ту же косу.

Представление Артина не является эпиморфизмом. В дальнейшем, говоря о представлении Артина, мы всегда будем иметь в виду те автоморфизмы свободной группы, которые соответствуют косам согласно (1.4). Кроме того, мы не будем различать косы и их образы (*косовые автоморфизмы*) в группе  $\text{Aut } F_n$ . Так что можно написать, что  $B_n \subset \text{Aut } F_n$ , и говорить, что коса из  $n$  нитей задаёт автоморфизм свободной группы с  $n$  образующими. И ещё одно соглашение: поскольку косы перемножаются слева направо, условимся, что группа кос задаёт правое действие на свободной группе.

В связи с представлением Артина возникает задача распознавания косового автоморфизма и его запись в образующих  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ . Следующая теорема даёт ответ (см. [21] стр. 30–32).

**Теорема 1.1.** (Артин, 1925) *Пусть задан автоморфизм  $\beta : F_n \rightarrow F_n$  свободной группы  $F_n$  ранга  $n$ . Тогда  $\beta \in B_n \subset \text{Aut } F_n$  тогда и только тогда, когда выполняются два условия*

$$1) \forall i \in \overline{1, n}, \quad (x_i)\beta = A_i x_{\mu_i} A_i^{-1},$$

$$2) (x_1 x_2 \dots x_n)\beta = x_1 x_2 \dots x_n,$$

где  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  — некоторая перестановка первых  $n$  натуральных чисел, и  $A_i$  есть некоторые слова из  $F_n$ .

Пусть задан произвольный автоморфизм  $\beta : F_n \rightarrow F_n$ , т. е. задан набор слов  $(x_1)\beta, \dots, (x_n)\beta$  (символ автоморфизма  $\beta$  справа, поскольку действие правое). Если для автоморфизма  $\beta$  выполняются оба условия из теоремы 1.1 (что можно проверить алгоритмически), то  $\beta$  является косовым автоморфизмом. В этом случае перестановка  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , о которой идёт речь в теореме, является перестановкой, соответствующей косе при гомоморфизме (1.2).

Если перестановка тривиальная  $(\mu_1, \dots, \mu_n) = (1, \dots, n)$ , то коса *крашенная*. Так что проверка того факта, что коса крашенная, также легко устанавливается алгоритмически.

### 1.3 Представление Бурау группы кос и свободное дифференциальное исчисление Фокса

Для группы кос из  $n$  нитей ( $n \geq 2$ ) существует матричное представление Бурау (см. [44])

$$B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]),$$

сопоставляющее косе из  $n$  нитей  $(n \times n)$ -матрицу, элементы которой принадлежат кольцу полиномов Лорана от одной переменной  $t$  с целыми коэффициентами  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ .

Косе  $\sigma_k$ , где  $k \in \overline{1, n-1}$ , сопоставляется следующая матрица

$$I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k-1},$$

где  $I_k$  обозначает единичную  $(k \times k)$ -матрицу.

Представление Бурау — первое известное линейное представление группы кос. Оно является точным для  $B_2$  и  $B_3$  и не является точным, начиная с количества нитей  $n = 5$  (см. [24]). Для  $B_4$  вопрос точности представления Бурау остаётся открытым.

Представление Бурау, рассматриваемое как правое действие на модуле  $(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^n$ , является приводимым. В самом деле, при действии представления Бурау остаётся инвариантным  $(n-1)$ -мерный подмодуль  $W$ , определяемый уравнением

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 0,$$

где  $w_i$  обозначает  $i$ -ю координату вектора из  $(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^n$ . Кроме того, при действии представления Бурау остаётся неподвижным вектор  $(1, t, t^2, \dots, t^{n-1})$ , не принадлежащий подмодулю  $W$ .

Так что представление Бурау разбивается на прямую сумму тривиального одномерного представления и  $(n-1)$ -мерного представления, которое называется *редуцированным представлением Бурау*.

Если в подмодуле  $W$  выбрать следующий базис



$$\begin{aligned}
e_1 &= (-1, 1, 0, 0, \dots, 0), \\
e_2 &= (0, -1, 1, 0, \dots, 0), \\
&\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
e_{n-1} &= (0, 0, \dots, 0, -1, 1),
\end{aligned}$$

то редуцированное представление Бурау примет вид

$$(e_j)\sigma_i = \begin{cases} te_i + e_{i-1}, & j = i - 1, \\ -te_i, & j = i, \\ e_i + e_{i+1}, & j = i + 1, \\ e_j & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Представление Бурау тесно связано с представлением Артина и исчислением Фокса. Рассмотрим эту связь подробнее.

Пусть  $\mathbb{Z}F_n$  – групповое кольцо группы  $F_n$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ , т. е. кольцо всевозможных конечных линейных комбинаций элементов  $F_n$  с целыми коэффициентами:

$$\mathbb{Z}F_n = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i w_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, w_i \in F_n \right\}.$$

Для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  рассмотрим кольцевой гомоморфизм

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_n,$$

действующий по правилам:

1.  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}F_n, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(z_1 + z_2) = \frac{\partial}{\partial x_i}(z_1) + \frac{\partial}{\partial x_i}(z_2);$
2.  $\forall w_1, w_2 \in F_n, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(w_1 w_2) = \frac{\partial}{\partial x_i}(w_1) + w_1 \frac{\partial}{\partial x_i}(w_2);$
3.  $\forall j \in \overline{1, n}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}.$

Здесь  $\delta_{ij}$  есть символ Кронекера, т. е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Семейство гомоморфизмов  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , где  $i = 1, \dots, n$ , называется *свободным дифференциальным исчислением* (или *исчислением Фокса*).

Обозначим через  $\mathbb{Z}\langle t \rangle$  свободную группу с одной образующей и рассмотрим гомоморфизм:

$$\varphi : F_n \rightarrow \mathbb{Z}\langle t \rangle, \quad \varphi(x_i) = t.$$

Тогда несложно проверить, что матрицу представления Бурау  $B = (b_{ij})$ , отвечающую косе  $\beta$ , можно получить следующим образом:

$$b_{ij} = \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_j} ((x_i)\beta) \right),$$

где коса  $\beta$  действует на  $x_i$  в соответствии с представлением Артина.

**Лемма 1.2.** Пусть задана коса  $\beta \in B_n$ . Обозначим через  $a_{ij}$  количество букв  $x_j^{\pm 1}$  в редуцированном слове  $(x_i)\beta$ , а через  $b_{ij}(t)$  элементы матрицы Бурау косы  $\beta$ . Тогда для любого  $t \in \mathbb{C}$ ,  $|t| = 1$ , имеет место неравенство:

$$a_{ij} \geq |b_{ij}(t)|.$$

*Доказательство.* Всякое редуцированное слово  $w \in F_n$  может быть записано в виде:

$$w = x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} x_{\mu_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\mu_s}^{\varepsilon_s}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s = \pm 1.$$

Известно (см. [21]), что:

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^s \varepsilon_k \delta_{\mu_k, j} x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} x_{\mu_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\mu_k}^{(\varepsilon_k-1)/2}.$$

Отсюда следует, что количество букв  $x_j^{\pm 1}$  в редуцированном слове  $(x_i)\beta$  равно количеству слагаемых в  $\frac{\partial}{\partial x_j} ((x_i)\beta)$ . С другой стороны, если

$$b_{ij}(t) = \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_j} ((x_i)\beta) \right) = \sum c_n t^n,$$

то количество слагаемых в  $\frac{\partial}{\partial x_j} ((x_i)\beta)$  не меньше, чем  $\sum |c_n|$ . Отсюда для  $t \in \mathbb{C}$ ,  $|t| = 1$ , имеем:

$$|b_{ij}(t)| = \left| \sum c_n t^n \right| \leq \sum |c_n| \leq a_{ij}.$$

□

## 1.4 Каноническая форма косы

В этом параграфе рассматривается запись кос в каноническом виде, что даёт ещё одно алгоритмическое решение проблемы равенства слов (первое решение давало представление Артина, см. §1.2), а также используется при решении проблемы сопряжённости в группе кос.

В группе  $B_n$  кос из  $n$  нитей существует моноид  $B_n^+$  положительных кос, т. е. кос, которые могут быть получены только с помощью неотрицательных степеней образующих  $\sigma_i$ .

Моноид  $B_n^+$  может быть задан теми же образующими и соотношениями (1.1), что и сама группа кос.

Моноид  $B_n^+$  естественно вкладывается в  $B_n$  в том смысле, что два слова эквивалентны в  $B_n^+$  тогда и только тогда, когда они эквивалентны в  $B_n$ .

Рассмотрим отображение (не гомоморфизм!) группы перестановок  $n$  элементов  $S_n$  во множество  $B_n^+$ :

$$r : S_n \rightarrow B_n^+, \quad (1.5)$$

сопоставляющее перестановке  $x \in S_n$  положительную косу  $r(x)$ , у которой

- каждая пара нитей пересекается максимум один раз;
- $i$ -я и  $j$ -я нити ( $i < j$ ) пересекаются тогда и только тогда, когда  $(i)x > (j)x$  (чтобы перемножать перестановки слева направо, условимся, что группа  $S_n$  задаёт правое действие на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ );
- пересечение любой пары  $i$  и  $j$  нитей ( $i < j$ ) положительное, т. е.  $i$ -я нить проходит над  $j$ -й.

Тривиальной перестановке соответствует тривиальная коса.

Перестановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует косе Гарсайда  $\Delta$ . У неё каждая пара нитей пересекается.

**Определение 1.7.** Косы, являющиеся образами перестановок при действии отображения (1.5), называются *перестановочными косами*.

Обозначим множество перестановочных кос через  $\Omega$ :

$$\Omega = r(S_n).$$

Пусть дана перестановка  $x \in S_n$ . Чтобы найти перестановочную косу  $\beta = r(x)$ , надо представить перестановку  $x$  в виде произведения транспозиций  $x = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_p}$ , где каждое  $s_{i_k}$  есть элементарная транспозиция, меняющая местами  $i_k$ -й и  $(i_k + 1)$ -й элементы, и  $(i_k)(s_{i_{k-1}} \dots s_{i_1} x) > (i_k + 1)(s_{i_{k-1}} \dots s_{i_1} x)$  для каждого  $k = 1, 2, \dots, p$ . И далее в произведении  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_p}$  надо формально заменить каждое  $s_{i_k}$  на  $\sigma_{i_k}$ :

$$\beta = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_p}.$$

Рассмотрим внутренний автоморфизм  $\tau : B_n \rightarrow B_n$ ,

$$\tau(\beta) = \Delta \beta \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \beta \Delta,$$

который является инверсией, отображает косу  $\Delta$  в себя, а косу  $\sigma_i$  в  $\sigma_{n-i}$ , тем самым оставляя инвариантным моноид  $B_n^+$ .

Коса Гарсайда обладает следующим свойством: для каждого  $i = 1, \dots, n-1$  существуют такие положительные косы  $L_i$  и  $R_i$ , что  $\Delta = L_i \sigma_i = \sigma_i R_i$ . Отсюда  $\sigma_i^{-1} = \Delta^{-1} L_i = R_i \Delta^{-1}$ .

Используя последние соотношения для  $\sigma_i^{-1}$ , произвольную косу  $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_j = \pm 1$ , можно записать в виде слова, состоящего только из положительных степеней образующих, за исключением наличия конечного числа  $\Delta^{-1}$ . Теперь, используя соотношение  $\beta \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \tau(\beta)$ , все  $\Delta^{-1}$  могут быть сдвинуты влево. Таким образом, коса  $\beta$  приобретёт вид  $\Delta^k \beta'$ , где  $\beta' \in B_n^+$ .

Представление косы  $\beta$  в виде  $\Delta^k \beta'$ , где  $\beta' \in B_n^+$ , очевидно, не является однозначным. Так, например, косу  $\Delta^{-5} \beta'$  можно также представить в виде  $\Delta^{-6} \beta''$ , где  $\beta'' = \Delta \beta'$ .

**Определение 1.8.** *Степенью* косы  $\beta$  называется максимальный (не по модулю) показатель степени  $\Delta$  среди всех представлений косы в виде  $\Delta^k \beta'$ , где

$\beta' \in B_n^+$ . Степень косы  $\beta$  обозначается  $\inf \beta$ . В разложении  $\beta = \Delta^{\inf \beta} \beta'$  положительная коса  $\beta'$  определена однозначно и называется *хвостом* косы  $\beta$ .

Хвост  $\beta'$  косы  $\beta$  не может быть представлен в виде  $\beta_1 \Delta \beta_2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  есть положительные косы. В самом деле, в противном случае из равенства  $\beta_1 \Delta = \Delta \tau(\beta_1)$  следует, что  $\beta = \Delta^{\inf \beta + 1} \tau(\beta_1) \beta_2$ , что противоречит определению степени косы.

Пусть для положительной косы  $\beta$  существуют такие положительные косы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , что  $\beta = \beta_1 \beta_2$ . Тогда  $\beta_1$  и  $\beta_2$  называются *левым* и *правым делителем* косы  $\beta$  соответственно.

Можно доказать следующий факт.

**Предложение 1.3.** *Множество левых делителей косы  $\Delta$ , множество правых делителей косы  $\Delta$  и множество перестановочных кос (см. определение 1.7) совпадают.*

Для положительной косы  $\beta$  обозначим

$$\text{St}(\beta) = \{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \mid \sigma_i \text{ является левым делителем косы } \beta\},$$

$$\text{Fin}(\beta) = \{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \mid \sigma_i \text{ является правым делителем косы } \beta\}.$$

Множества  $\text{St}(\beta)$  и  $\text{Fin}(\beta)$  называются *стартовым* и *финальным* множеством положительной косы  $\beta$  соответственно.

Для перестановочной косы  $\beta$  её стартовое и финальное множества могут быть найдены из следующих условий:

$$\begin{aligned} i \in \text{St}(\beta) &\Leftrightarrow (i)s_\beta > (i+1)s_\beta, \\ i \in \text{Fin}(\beta) &\Leftrightarrow (i)s_\beta^{-1} > (i+1)s_\beta^{-1}, \end{aligned}$$

где через  $s_\beta$  обозначена перестановка, соответствующая косе  $\beta$ .

Для произвольной косы  $\beta = \Delta^{\inf \beta} \beta'$  разложим её хвост  $\beta'$  в произведение перестановочных кос следующим образом. Вначале каждую образующую  $\sigma_i$  в косе  $\beta'$  обозначим за отдельную перестановочную косу. Далее будем преобразовывать разложение  $\beta'$  на перестановочные косы до тех пор, пока не будет

выполнено условие: для любой пары соседних перестановочных кос  $\beta_k$  и  $\beta_{k+1}$  в разложении  $\beta'$  имеем  $\text{St}(\beta_{k+1}) \subseteq \text{Fin}(\beta_k)$ .

Если для некоторой пары кос  $\beta_k$  и  $\beta_{k+1}$  это условие не выполняется, т. е. существует такое  $i \in \text{St}(\beta_{k+1})$ , что  $i \notin \text{Fin}(\beta_k)$ , то коса  $\beta_{k+1}$  может быть представлена в виде  $\sigma_i \beta'_{k+1}$ , где  $\beta'_{k+1}$  является перестановочной косой, и, кроме того, коса  $\beta_k \sigma_i$  также является перестановочной. Перекинем  $\sigma_i$  из  $\beta_{k+1}$  в  $\beta_k$ . Можно показать, что за конечное число таких «перекидываний» получим требуемое разложение  $\beta' = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l$ .

**Определение 1.9.** Разложение косы

$$\beta = \Delta^{\inf \beta} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l, \quad (1.6)$$

где каждое  $\beta_i$  является перестановочной косой и для всех  $k = 1, 2, \dots, l-1$  справедливо условие  $\text{St}(\beta_{k+1}) \subseteq \text{Fin}(\beta_k)$ , называется *левой канонической формой* (*left-greedy normal form*) косы  $\beta$ . Число  $l$  называется *канонической длиной* косы  $\beta$ .

Сумма степени и канонической длины обозначается через  $\text{sup } \beta$ :

$$\text{sup } \beta \stackrel{\text{def}}{=} \inf \beta + l.$$

Условие  $\text{St}(\beta_{k+1}) \subseteq \text{Fin}(\beta_k)$ , которому должны удовлетворять перестановочные косы, составляющие хвост канонической формы косы, можно записать несколько иначе, рассмотрев на множестве  $B_n^+$  отношение частичного порядка:

$$\beta \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \in \beta B_n^+.$$

Относительно этого отношения во множестве  $B_n^+$  существует единственный минимальный элемент — тривиальная коса. Рассматривая ограничение этого отношения на множество  $\Omega$ , получаем, что в  $\Omega$  существует единственный максимальный элемент — коса Гарсайда  $\Delta$ .

Можно показать, что для любого  $\beta \in B_n^+$  множество  $\{\gamma \in \Omega \mid \gamma \leq \beta\}$  имеет единственный максимальный элемент. Обозначим его через  $\text{LF}(\beta)$  (Left most Factor):

$$\text{LF}(\beta) = \max \{ \gamma \in \Omega \mid \gamma \leq \beta \}.$$

Несложно увидеть, что перестановочная коса  $LF(\beta)$  есть первый сомножитель в левой канонической форме положительной косы  $\beta$ .

С учётом введённых понятий условие  $St(\beta_{k+1}) \subseteq Fin(\beta_k)$  можно заменить на эквивалентное:

$$LF(\beta_k \beta_{k+1}) = \beta_k.$$

Как уже было сказано, нахождение левой канонической формы косы позволяет решить проблему слов в группе  $B_n$ . Тёрстон показал, что сложность алгоритма поиска левой канонической формы равна  $m^2 n \ln n$ , где  $m$  есть длина входного слова в образующих  $\sigma_i$ .

## 1.5 Распознавание сопряжённости кос

**Определение 1.10.** Говорят, что коса  $\beta_1$  получена из косы  $\beta_2$  путём *сопряжения* косой  $\gamma$ , если  $\beta_1 = \gamma^{-1} \beta_2 \gamma$ . В этом случае косы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  называются *сопряжёнными*, а коса  $\gamma$  *сопрягающей*.

Проблема распознавания сопряжённости кос состоит в конструировании алгоритма, который по двум заданным косам  $\beta_1$  и  $\beta_2$  определял бы, сопряжены они или нет. С этой проблемой тесно связана проблема конструирования алгоритма, который искал бы сопрягающую косу  $\gamma$ .

Алгоритм решения проблемы сопряжённости в группе кос был предложен Ф. Гарсайдом в 1969 году и заключался в нахождении для каждой косы так называемого *представительного множества* (*summit set*), которое состояло из некоторых кос, сопряжённых данной. При этом для сопряжённых кос представительные множества совпадали, а для несопряжённых — не пересекались. Так что каждое представительное множество состояло из конечного числа представителей соответствующего класса сопряжённости и представляло этот класс.

В 1994 году алгоритм Гарсайда был улучшен Элрифам и Мортоном, которые вместо представительного множества ввели *сверхпредставительное множество* (*super summit set*), являющееся собственным подмножеством представительного множества. В 2003 году Гебхард уменьшил сверхпредставительное

множество до *ультрапредставительного множества* (*ultra summit set*). Но даже после этих двух улучшений сложность алгоритма поиска ультрапредставительного множества остаётся экспоненциальной как по числу нитей исходной косы, так и по длине входного слова в образующих  $\sigma_i$ .

Рассмотрим подробнее этот алгоритм.

Для заданной косы  $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$ , рассмотрим алгебраическую сумму показателей  $\varepsilon_i$

$$\varepsilon(\beta) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i.$$

Величина  $\varepsilon(\beta)$  является инвариантом класса сопряжённости.

**Определение 1.11.** *Представительным множеством  $S(\beta)$  косы  $\beta$  называется множество кос, сопряжённых косе  $\beta$  и имеющих максимальную в классе сопряжённости степень.*

Обозначим максимальную степень кос в классе сопряжённости косы  $\beta$  через  $\text{Inf}(\beta)$ . Хвост каждой косы из  $S(\beta)$  является положительной косой  $\beta_+$ , для которой  $\varepsilon(\beta_+) = \varepsilon(\beta) - \frac{n(n-1)}{2} \text{Inf}(\beta)$ . Количество положительных кос  $\beta_+$  с фиксированной величиной  $\varepsilon(\beta_+)$  конечно, поэтому конечно и множество  $S(\beta)$ .

**Определение 1.12.** *Сверхпредставительным множеством  $\widehat{S}(\beta)$  косы  $\beta$  называется подмножество в  $S(\beta)$ , состоящее из кос, имеющих минимальную в  $S(\beta)$  каноническую длину.*

Как представительное, так и сверхпредставительное множества являются полными инвариантами класса сопряжённости. Для сопряжённых кос представительные и сверхпредставительные множества совпадают, для несопряжённых — не пересекаются.

Рассмотрим алгоритм Элрифая-Мортонна нахождения сверхпредставительного множества. Он состоит из двух этапов: поиск одного элемента из  $\widehat{S}(\beta)$ ; вычисление всех остальных элементов из  $\widehat{S}(\beta)$  путём сопряжения найденного элемента перестановочными косами.

На первом этапе к косе  $\beta$  необходимо сначала некоторое число раз применить операцию *циклического сдвига* (*cycling*), в результате чего будет найден



элемент из  $S(\beta)$ , а затем конечное число раз операцию *обратного циклического сдвига* (*decycling* или *inverse-cycling*), в результате чего будет найден элемент  $\widehat{\beta} \in \widehat{S}(\beta)$ .

Операция циклического сдвига состоит в нахождении канонической формы косы  $\beta = \Delta^{\inf \beta} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l$  и сопряжении косой  $\tau^{\inf \beta}(\beta_1)$ :

$$c(\beta) = \tau^{\inf \beta}(\beta_1^{-1}) \beta \tau^{\inf \beta}(\beta_1) = \Delta^{\inf \beta} \beta_2 \dots \beta_l \tau^{\inf \beta}(\beta_1).$$

Заметим, что

$$\tau^{\inf \beta}(\beta_1) = \begin{cases} \beta_1, & \text{если } \inf \beta \text{ — чётное;} \\ \tau(\beta_1), & \text{если } \inf \beta \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

В результате операции циклического сдвига степень косы может разве лишь возрасти, а каноническая длина — разве лишь уменьшиться.

Дж. Бирман, К. Ко и С. Ли ([23]) показали, что если коса имеет не максимальную в классе сопряжённости степень, то после применения операции циклического сдвига  $n(n-1)/2$  раз степень обязательно возрастет.

Операция обратного циклического сдвига состоит в нахождении канонической формы косы  $\beta = \Delta^{\inf \beta} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l$  и сопряжении косой  $\beta_l^{-1}$ :

$$d(\beta) = \beta_l \beta \beta_l^{-1} = \Delta^{\inf \beta} \tau^{\inf \beta}(\beta_l) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{l-1}.$$

Можно показать, что  $d(\beta) = (c(\beta^{-1}))^{-1}$ .

В результате операции обратного циклического сдвига степень косы может разве лишь возрасти, а каноническая длина — разве лишь уменьшиться.

Если применять операцию обратного циклического сдвига к найденной в результате циклического сдвига косе из  $S(\beta)$ , то степени расти уже некуда.

Дж. Бирман, К. Ко и С. Ли ([23]) показали, что если коса из  $S(\beta)$  имеет не минимальную в  $S(\beta)$  каноническую длину, то после применения операции обратного циклического сдвига  $n(n-1)/2$  раз каноническая длина обязательно уменьшится.

На втором этапе полученную косу  $\widehat{\beta} \in \widehat{S}(\beta)$  необходимо сопрягать всевозможными перестановочными косами, чтобы получить всё множество  $\widehat{S}(\beta)$ . Действия на втором этапе основаны на следующих наблюдениях.

Пусть коса  $\beta$  получена из  $\alpha$  сопряжением с помощью косы  $\gamma = \Delta^{\inf \gamma} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_l$ :

$$\beta = \gamma^{-1} \alpha \gamma = \gamma_l^{-1} \dots \gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1} \Delta^{-\inf \gamma} \alpha \Delta^{\inf \gamma} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_l.$$

Поскольку  $\Delta^2$  порождает центр группы кос, то

$$\beta = \begin{cases} \gamma_l^{-1} \dots \gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1} \Delta^{-1} \alpha \Delta \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_l, & \text{если } \inf \gamma \text{ — нечётное;} \\ \gamma_l^{-1} \dots \gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1} \alpha \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_l, & \text{если } \inf \gamma \text{ — чётное.} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что  $\beta$  может быть получена из  $\alpha$  сопряжением с помощью косы степени ноль или один, т. е. с помощью положительной косы.

Таким образом, множество  $\widehat{S}(\beta)$  состоит из всех кос вида  $\gamma^{-1} \widehat{\beta} \gamma$ , где  $\gamma \in B^+(n)$ , и степень и каноническая длина косы  $\gamma^{-1} \widehat{\beta} \gamma$  совпадают с таковыми у косы  $\widehat{\beta}$ . Однако положительных кос бесконечно много, и получить множество  $\widehat{S}(\beta)$  так не удастся.

Пусть коса  $\beta$  получена из  $\alpha$  сопряжением с помощью положительной косы  $\gamma$ . Разложим  $\gamma$  на перестановочные косы произвольным образом:  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_p$ . Имеем

$$\beta = \gamma_p^{-1} \dots \gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1} \alpha \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_p.$$

Элрифай и Мортон показали ([29]), что если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют степень не меньше  $r$  и каноническую длину не больше  $l$ , то и коса  $\gamma_1^{-1} \alpha \gamma_1$  также имеет степень не меньше  $r$  и каноническую длину не больше  $l$ . Поэтому каждая коса из  $\widehat{S}(\beta)$  может быть получена из косы  $\widehat{\beta}$  конечной последовательностью сопряжений с помощью перестановочных кос, причём после каждого сопряжения степень и каноническая длина косы не должны меняться.

Таким образом, второй этап алгоритма Элрифая-Мортоня заключается в вычислении следующей рекурсивной последовательности множеств  $A_0, A_1, A_2, \dots$ :

$$A_0 = \left\{ \widehat{\beta} \right\},$$

$$A_{i+1} = \left\{ \gamma^{-1} \beta \gamma \mid \beta \in A_i, \gamma \in \Omega, \inf(\gamma^{-1} \beta \gamma) = \inf \widehat{\beta}, \sup(\gamma^{-1} \beta \gamma) = \sup \widehat{\beta} \right\}.$$

Вычисления продолжаются до тех пор, пока для некоторого  $k$  не окажется выполненным равенство  $A_k = A_{k+1}$ . В этом случае  $\widehat{S}(\beta) = A_k$ . То, что ра-

венство  $A_k = A_{k+1}$  будет достигнуто за конечное число шагов, справедливо в силу того, что множество  $\widehat{S}(\beta)$  конечно.

## 1.6 Классификация автоморфизмов гиперболических поверхностей

Всюду далее под поверхностью будем понимать связное двумерное топологическое многообразие (возможно, с непустым краем).

**Определение 1.13.** Компактная поверхность называется *гиперболической*, если на ней можно задать такие гладкую структуру и гиперболическую метрику (т. е. риманову метрику постоянной кривизны  $-1$ ), в которой край поверхности будет состоять из геодезических, и вся поверхность имеет конечную площадь.

Среди компактных поверхностей гиперболическими являются в точности те, которые имеют отрицательную эйлерову характеристику. Другими словами, гиперболическими являются все компактные поверхности за исключением семи следующих: сфера, диск, кольцо, тор, лента Мёбиуса, проективная плоскость и бутылка Клейна.

Рассматриваемая в параграфах 1.1 и 1.2 поверхность  $M$  (компактная ориентированная поверхность рода нуль с  $n + 1$  компонентами края) в случае  $n \geq 2$  является гиперболической, поскольку её эйлерова характеристика отрицательна:

$$\chi(M) = 1 - n < 0.$$

Далее в этом параграфе под  $M$  можно понимать любую компактную ориентированную гиперболическую поверхность.

**Определение 1.14.** *Автоморфизмом* ориентированной поверхности будем называть сохраняющий ориентацию гомеоморфизм этой поверхности на себя.

Рассмотрим классификацию автоморфизмов гиперболических поверхностей по Нильсену и Тёрстону. На самом деле, речь пойдёт о классификации

элементов группы классов отображений поверхности  $M$  и о выделении в каждом классе канонических представителей — периодических, псевдоаносовских и приводимых автоморфизмов.

**Определение 1.15.** Гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  называется *периодическим*, если существует такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $f^n$  — тождественный.

**Определение 1.16.** Гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  называется *приводимым*, если он не изотопен периодическому и существует  $f$ -инвариантное замкнутое одномерное непустое подмногообразие (*приводящая система окружностей*), каждая компонента которого не стягивается ни в точку, ни на какую компоненту края поверхности  $M$ .

В случае гиперболической поверхности всегда можно добиться того, чтобы компоненты приводящей системы окружностей были попарно неизотопны. Разрезав поверхность  $M$  по приводящей системе окружностей, можно получить гомеоморфизмы (вообще говоря, несвязных) поверхностей, которые устроены в определённом смысле проще, чем  $M$ : они либо имеют меньший род, либо меньшее число компонент края. Это позволяет раскладывать приводимый гомеоморфизм на неприводимые компоненты.

Прежде чем формулировать определение псевдоаносовского автоморфизма, напомним понятия, связанные с трансверсальными измеренными слоениями поверхности.

**Определение 1.17.** *Неособым координатным слоением* плоскости  $\mathbb{R}^2$  называется семейство всех горизонтальных прямых. Каждая прямая называется *координатным слоем*.

Пусть  $d$  — натуральное число.

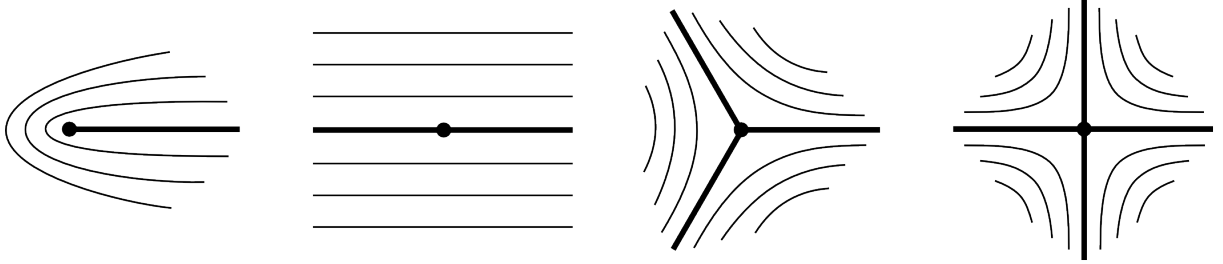
**Определение 1.18.** *Особым координатным слоением* валентности  $d$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  называется семейство подмножеств двух типов, которые в полярных координатах  $(r, \theta)$  задаются следующими уравнениями:

1.  $r \geq 0$ ,  $\theta = \frac{2\pi k}{d}$ , где  $k = 0, 1, \dots, d-1$ ;

2.  $r = \frac{\rho}{|\sin(\theta d/2)|^{2/d}}$ ,  $\theta \in (\frac{2\pi k}{d}, \frac{2\pi(k+1)}{d})$ , где  $\rho > 0$  и  $k = 0, 1, \dots, d-1$ .

Каждое из указанных подмножеств называется *координатным слоем*, причём слои первого типа называются *особыми*, а второго типа — *неособыми*. Точка  $(0, 0)$  называется *особой точкой* координатного слоения.

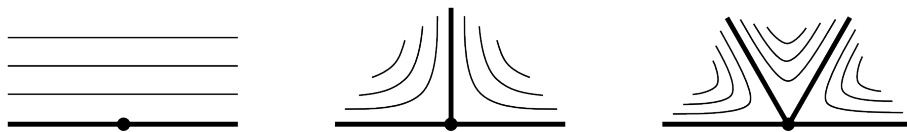
На следующем рисунке слева направо схематично изображены особые координатные слоения валентностей от 1 до 4 плоскости  $\mathbb{R}^2$  в окрестности начала координат (начало координат обозначено жирной точкой, особые слои выделены жирными линиями).



Особое координатное слоение валентности 2 выглядит почти так же, как и неособое, за исключением двух особых слоёв, исходящих из особой точки, которые в случае неособого слоения представляют один слой.

**Определение 1.19.** *Неособым координатным слоением* полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$  называется ограничение на эту полуплоскость неособого координатного слоения плоскости  $\mathbb{R}^2$ . *Особым координатным слоением* валентности  $d \in \mathbb{Z}_+$  полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  называется ограничение на эту полуплоскость особого координатного слоения валентности  $2(d+1)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

На следующем рисунке слева направо схематично изображены особые координатные слоения валентностей 0, 1 и 2 полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  в окрестности начала координат (начало координат обозначено жирной точкой, особые слои выделены жирными линиями).



Неособое координатное слоение выглядит почти так же, как и особое валентности 0, только два особых слоя и начало координат в неособом слоении образуют один слой.

Пусть  $S$  — конечное подмножество поверхности  $M$ .

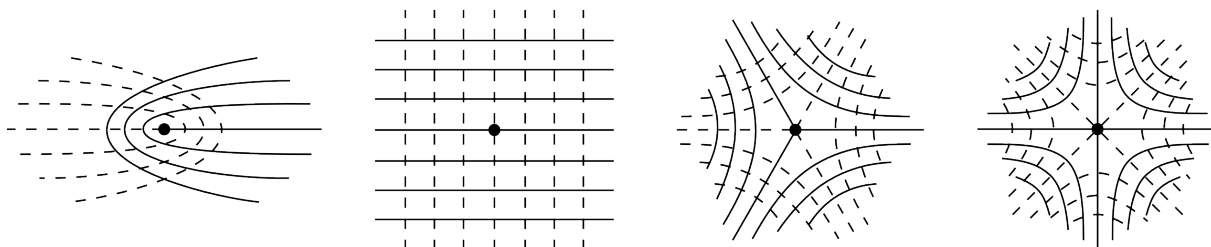
**Определение 1.20.** *Слоением  $\mathcal{W}$  поверхности  $M$  со множеством особенностей  $S$  называется семейство линейно связных подмножеств  $M$ , называемых слоями, удовлетворяющее следующим условиям:*

- $M$  есть объединение всех слоёв;
- пересечение любых двух слоёв либо пусто, либо содержится в  $S$ ;
- точки подмножества  $S$  называются *особыми*; для каждой точки  $x \in S$  зафиксировано положительное целое число  $d_x$ , называемое *валентностью* точки  $x$ ;
- для каждой точки  $x \in M \setminus S$  (соответственно  $x \in S$ ) существует окрестность  $U$  и её гомеоморфизм  $\varphi$  на окрестность начала координат на плоскости  $\mathbb{R}^2$  или полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  такой, что  $\varphi(x) = (0, 0)$  и для каждого слоя  $W \in \mathcal{W}$  каждая компонента пересечения  $W \cap U$  отображается при действии  $\varphi$  в некоторый слой неособого (соответственно особого валентности  $d_x$ ) координатного слоения. Гомеоморфизм  $\varphi$  называется *координатным отображением*.

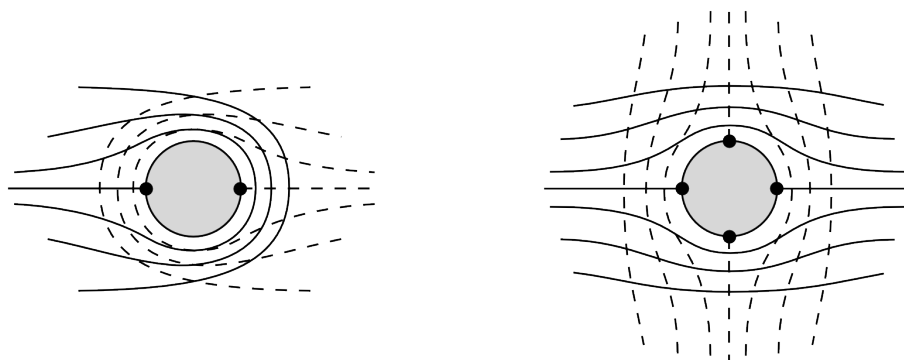
**Определение 1.21.** Простая (без самопересечений) дуга  $\alpha \subset M$  называется *трансверсальной слоению  $\mathcal{W}$* , если для каждой точки  $x \in \alpha$ , которая является неособой точкой слоения  $\mathcal{W}$ , существует окрестность в  $\alpha$ , которую координатное отображение переводит в дугу на  $\mathbb{R}^2$ , пересекающую каждый координатный слой (горизонтальную прямую) не более чем в одной точке.

**Определение 1.22.** Два слоения называются *трансверсальными друг другу*, если внутренние (не лежащие на границе поверхности) особые точки слоений совпадают и всякая дуга любого внутреннего (неграничного) слоя одного из слоений трансверсальна другому слоению.

В окрестности внутренней неособой точки всегда найдётся координатное отображение, которое переводит трансверсальные слоения в семейства горизонтальных и вертикальных прямых на плоскости. В окрестности внутренней особой точки трансверсальные слоения выглядят так, как изображено на следующем рисунке (одно слоение изображено сплошными линиями, другое — пунктирными; слева направо валентность особой точки изменяется от 1 до 4).



В окрестности компоненты края трансверсальные слоения выглядят следующим образом (на левом рисунке у каждого слоения на компоненте края по одной особой точке валентности 1, на правом — по две):



**Определение 1.23.** Две кривые  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  на  $M$ , трансверсальные слоению  $\mathcal{W}$ , называются *послойно гомотопными*, если существуют их параметризации  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , и гомотопия  $\alpha_\tau(t)$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , такая, что при каждом фиксированном  $t$  точки  $\alpha_\tau(t)$  принадлежат одному и тому же слою.

**Определение 1.24.** Трансверсальной мерой  $\mu$  слоения  $\mathcal{W}$  называется семейство борелевских мер  $\mu_\alpha$ , заданных на всех кривых  $\alpha$ , трансверсальных  $\mathcal{W}$ , так, что выполняются следующие условия:

1.  $\mu_\alpha(\beta) > 0$  для любой кривой  $\beta \subset \alpha$ , состоящей не из одной точки;
2. если  $\beta \subset \alpha$ , то  $\mu_\beta = \mu_\alpha|_\beta$ ;

3. если кривые  $\alpha$  и  $\beta$  послойно гомотопны, то  $\mu_\alpha = \mu_\beta$ .

**Определение 1.25.** Измеренным слоением называется пара  $(\mathcal{W}, \mu)$ , где  $\mu$  есть трансверсальная мера слоения  $\mathcal{W}$ .

По заданной трансверсальной мере  $\mu$  для любого вещественного  $\lambda > 0$  можно определить трансверсальную меру  $\lambda\mu$ , умножив каждую из мер  $\mu_\alpha$  на  $\lambda$ .

**Определение 1.26.** Слоение называется *инвариантным* относительно гомеоморфизма поверхности, если он переводит особые точки в особые и слои в слои.

Для слоения  $\mathcal{W}$ , инвариантного относительно гомеоморфизма  $f$ , и его трансверсальной меры  $\mu$  определим трансверсальную меру  $f\mu$ , полагая для любой кривой  $\alpha$ , трансверсальной  $\mathcal{W}$ , и любой дуги  $\beta \subset \alpha$

$$(f\mu)_\alpha(\beta) := \mu_{f^{-1}(\alpha)}(f^{-1}(\beta)).$$

Несложно заметить, что если  $f\mu = \lambda\mu$ , то кривые, трансверсальные слоению  $\mathcal{W}$ , при действии  $f$  сжимаются в  $\lambda$  раз (по мере  $\mu$ ).

Теперь всё готово для того, чтобы сформулировать определение псевдоаносовского гомеоморфизма и классификационную теорему для элементов группы гомеотопий.

**Определение 1.27.** Гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  называется *псевдоаносовским*, если:

- существуют два трансверсальных инвариантных относительно  $f$  измеренных слоения  $(\mathcal{W}^s, \mu^s)$  и  $(\mathcal{W}^u, \mu^u)$  с непустым множеством особенностей; каждая внутренняя особая точка имеет валентность не меньше 3;
- все граничные особые точки имеют валентность 1; каждое слоение имеет хотя бы одну особую точку на каждой компоненте края; на каждой компоненте края относительно естественного циклического порядка особые точки одного и другого слоений расположены поочерёдно;



- существует вещественное число  $\lambda > 1$  такое, что

$$f\mu^s = \lambda^{-1}\mu^s \quad \text{и} \quad f\mu^u = \lambda\mu^u.$$

Число  $\lambda$  называется *коэффициентом растяжения* (дилатацией) автоморфизма  $f$ . Слоения  $\mathcal{W}^s$  и  $\mathcal{W}^u$  называются соответственно *сжимающимися* и *растягивающимися*.

**Теорема 1.4.** (Thurston, [43]) *В каждом изотопическом классе автоморфизмов гиперболической поверхности  $M$  существует представитель **ровно одного** из следующих трёх типов — периодический, псевдоаносовский или приводимый, причём приводимый автоморфизм и приводящую систему окружностей  $L$  для него можно выбрать так, что:*

- для  $L$  существует  $f$ -инвариантная открытая окрестность  $U$ , представляющая собой семейство попарно не пересекающихся цилиндров;
- каждая компонента  $M_j$  поверхности  $M \setminus U$  является гиперболической и отображается в себя при действии некоторой итерации  $f^{n_j}$ ;
- каждое ограничение  $f^{n_j}|_{M_j}$  является либо периодическим, либо псевдоаносовским автоморфизмом.

В зависимости от наличия соответствующего представителя элементы группы гомеотопий гиперболической поверхности  $M$  также называются периодическими, псевдоаносовскими и приводимыми. В каждом приводимом классе гомеотопии существует представитель, который является приводимым автоморфизмом и раскладывается на неприводимые составляющие:  $f^{n_1}|_{M_1}, \dots, f^{n_s}|_{M_s}$ . Число  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , называется *периодом* составляющей  $f^{n_j}|_{M_j}$ .

## 1.7 Классификация кос по Нильсену-Тёрстону

Пусть  $M$  есть поверхность, рассмотренная в §1.1, т. е. ориентированный замкнутый двумерный диск, из внутренности которого удалены  $n$  открытых дисков.

Группа  $B_1$  тривиальна, так что будем считать, что  $n \geq 2$ , и поверхность  $M$  гиперболическая.

**Определение 1.28.** Косу  $\beta \in B_n$  будем называть *периодической*, *псевдоаносовской* или *приводимой* в зависимости от того, какому классу принадлежит её образ при естественном гомоморфизме

$$B_n \rightarrow \text{Homeot}(M). \quad (1.7)$$

В этом смысле в группе кос будут существовать периодические косы, несмотря на то, что в этой группе нет кручения. Периодическими будут в точности те косы  $\beta$ , для которых существует такое натуральное  $k$ , что  $\beta^k$  принадлежит ядру гомоморфизма (1.7). Так, например, коса  $\sigma_1\sigma_2 \in B_3$  является периодической, поскольку  $(\sigma_1\sigma_2)^3 = \Delta^2 \in B_3$ .

В [18] приведены алгоритмы распознавания периодических и приводимых кос и разложения приводимой косы на составляющие. Рассмотрим эти алгоритмы.

Для нетривиальной косы  $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$ , обозначим через  $\varepsilon(\beta)$  алгебраическую сумму показателей  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon(\beta) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i.$$

Для тривиальной косы положим  $\varepsilon(\beta) = 0$ .

Также введём обозначение  $k(\beta)$ . Положим  $k(\beta) = 1$ , если у перестановки  $s(\beta)$ , которую индуцирует коса  $\beta$  в соответствии с гомоморфизмом (1.2), есть хотя бы две неподвижные точки. В противном случае положим  $k(\beta)$  есть наименьший порядок нетривиального цикла в перестановке  $s(\beta)$ .

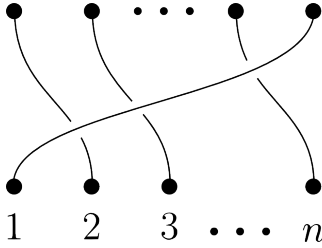
**Теорема 1.5** (см. [18]). *Коса  $\beta$  является периодической тогда и только тогда, когда справедливы два условия:*

$$k' = \frac{k(\beta) \cdot \varepsilon(\beta)}{n(n-1)} \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \beta^{k(\beta)} = \Delta^{2k'}.$$

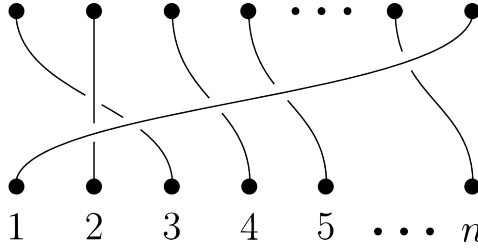
Данная теорема задаёт алгоритмический способ проверки периодичности косы.

Для более подробной характеристики периодических кос рассмотрим в группе  $B_n$  две перестановочные косы  $\alpha_n$  и  $\delta_n$ , заданные соответственно перестановками

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ n & 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$



$\alpha_n$



$\delta_n$

В образующих  $\sigma_i$  данные косы могут быть записаны следующим образом:

$$\alpha_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}, \quad \delta_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \sigma_1.$$

Легко видеть, что

$$\alpha_n^n = \delta_n^{n-1} = \Delta^2,$$

т. е. косы  $\alpha_n$  и  $\delta_n$  периодические.

Оказывается, что каждая периодическая коса с точностью до сопряжения является некоторой степенью либо косы  $\alpha_n$ , либо косы  $\delta_n$ , а именно имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.6** (см. [18]). Пусть коса  $\beta$  является периодической с наименьшим периодом  $k > 1$ . Тогда у перестановки  $s(\beta)$  может быть максимум одна неподвижная точка, а все остальные циклы имеют длину  $k$ .

Если у перестановки  $s(\beta)$  нет неподвижных точек, то  $k$  является делителем  $n$  и существуют такие  $m, r \in \mathbb{Z}$ , что числа  $m$  и  $k$  взаимно просты, а коса  $\beta$  с точностью до сопряжения есть

$$\alpha_n^{(\frac{m}{k}+r)n}.$$

Если у перестановки  $s(\beta)$  есть неподвижная точка, то  $k$  является делителем  $n-1$  и существуют такие  $m, r \in \mathbb{Z}$ , что числа  $m$  и  $k$  взаимно просты, а коса  $\beta$  с точностью до сопряжения есть

$$\delta_n^{(\frac{m}{k}+r)(n-1)}.$$

*Замечание 1.1.* Иногда из определения приводимого автоморфизма исключают требование неизотопности периодическому, и приводимыми автоморфизмами называют те, для которых существует приводящая система окружностей. В этом случае классы гомеотопии периодических и приводимых автоморфизмов, а вместе с ними и кос, пересекаются. В частности, тождественный автоморфизм тогда становится не только периодическим (с периодом 1), но и приводимым. Что же касается кос, то существует хорошее дополнение к теореме 1.6.

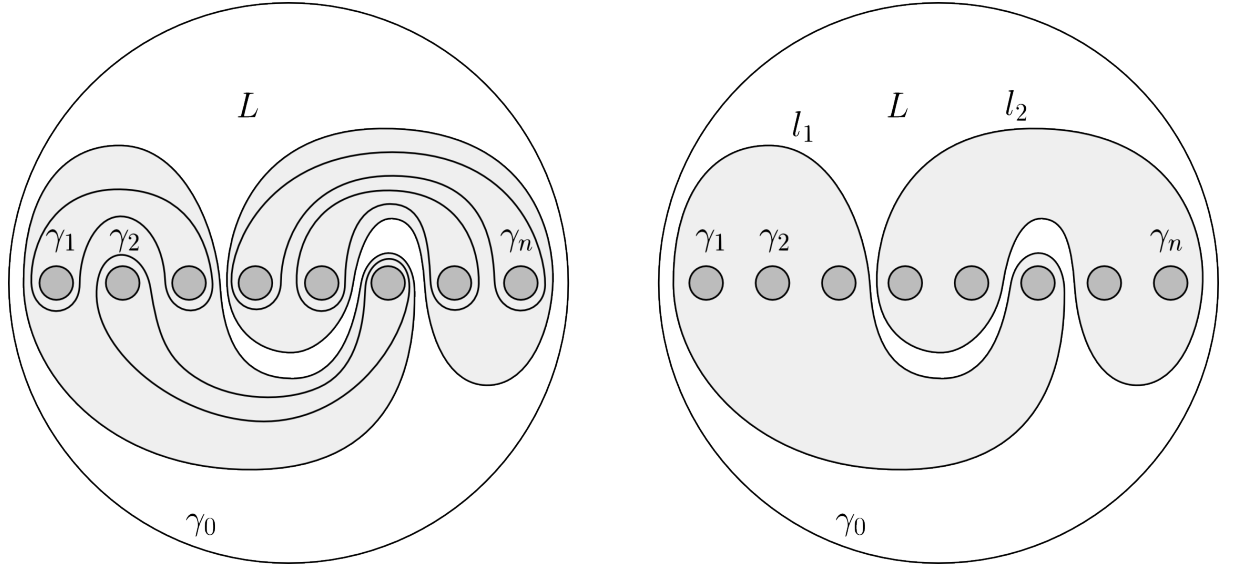
**Теорема 1.7** (см. [18]). *Для периодической косы  $\beta$  с наименьшим периодом  $k > 1$  существует приводящая система окружностей тогда и только тогда, когда у перестановки  $s(\beta)$  существует более чем один цикл порядка  $k$ .*

Перейдём теперь к распознаванию приводимых кос и их разложению на составляющие. Но прежде введём понятия внутренней и внешней составляющих косы.

Для любой приводимой косы  $\beta \in B_n$  существуют приводимый гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$ , отвечающий косе  $\beta$ , и приводящая система окружностей  $L$  для него. Каждая окружность  $l \in L$  охватывает некоторые компоненты края из семейства  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  и, возможно, другие окружности системы  $L$  (по поводу термина «охватывает» см. §1.1).

Удалим из приводящей системы  $L$  те окружности, которые охватываются другими окружностями этой системы. Несложно заметить, что полученная система, которую снова будем обозначать через  $L$ , также является приводящей системой для исходной косы  $\beta$ .

На следующем рисунке изображен возможный вид системы  $L$  до и после удаления окружностей, которые охватываются другими окружностями этой системы (для удобства восприятия некоторые области закрашены серым).



Каждая окружность  $l_i \in L$  разрезает поверхность  $M$  на две части — внутреннюю  $U_i$  и внешнюю (внешней считается та, что содержит компоненту края  $\gamma_0$ ). Поверхность  $U_i$  отображается в себя при действии некоторой степени  $f^{m_i}$ . Класс гомеотопии ограничения  $f^{m_i}|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$  называется *внутренней компонентой косы  $\beta$  с периодом  $m_i$* . Класс гомеотопии ограничения  $f$  на  $M \setminus (\bigcup_i U_i)$  называется *внешней компонентой косы  $\beta$* .

При фиксировании определённой нумерации граничных компонент поверхностей  $U_i$  внутренние и внешняя компоненты косы становятся классами гомеотопии, которым также соответствуют некоторые косы, определённые с точностью до сопряжения и умножения на квадрат косы Гарсайда  $\Delta^2$ . Для внешней компоненты косы в качестве неподвижной компоненты края возьмём  $\gamma_0$ , а для  $i$ -й внутренней компоненты косы неподвижной компонентой края будет  $l_i$ .

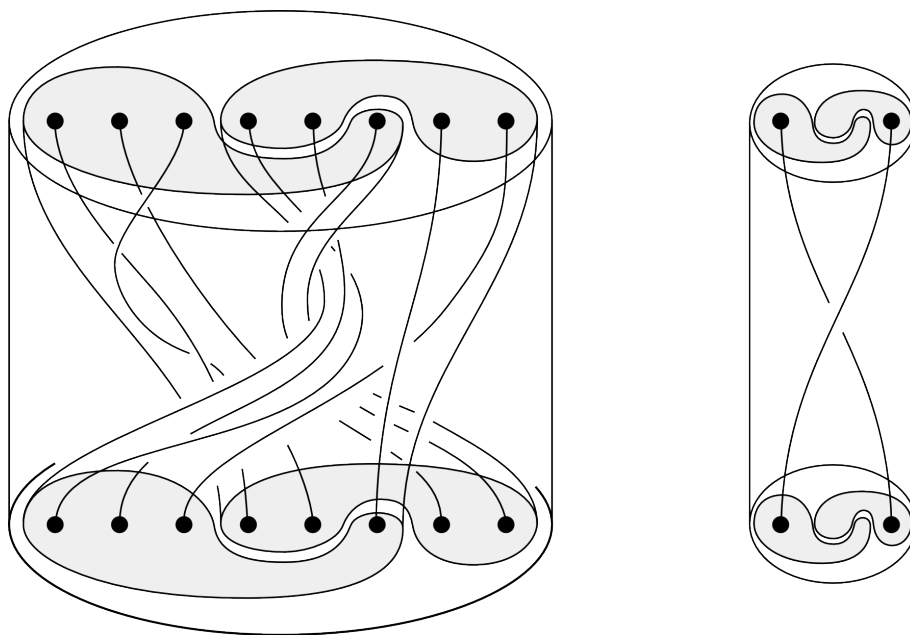
Наглядно разложение косы на внешнюю и внутренние компоненты достаточно легко представить, используя конструкцию, с помощью которой в §1.1 было получено схематичное изображение кос.

Заклеим граничные окружности  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  поверхности  $M$  дисками и рассмотрим изотопию от тождественного гомеоморфизма до некоторого гомеоморфизма, отвечающего косе. Эту изотопию можно представлять себе расположенной в некотором цилиндре, в котором окружности приводящей системы  $L$  будут заметать более узкие цилиндры.

Косы, расположенные внутри цилиндров, отвечающих окружностям  $l_i \in L$ ,

и есть внутренние компоненты косы  $\beta$ . Если же все цилиндры, отвечающие окружностям  $l_i \in L$ , сжать до обычных нитей, то получим внешнюю компоненту косы  $\beta$ .

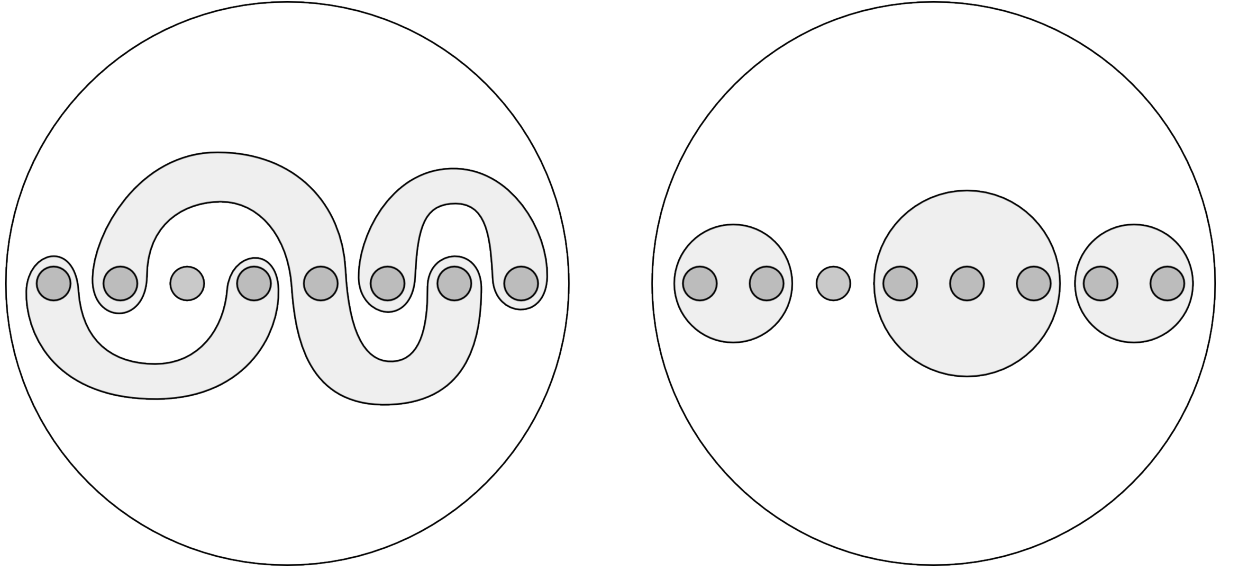
На следующем рисунке изображена приводимая коса с двумя внутренними компонентами периода 2 (для удобства цилиндры, отвечающие компонентам края  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  сжаты до обычных нитей). Области  $U_1$  и  $U_2$  циклически переходят друг в друга. Внешняя компонента исходной косы есть коса из двух нитей, изображённая справа (до нитей теперь сжаты два цилиндра, отвечающие внутренним компонентам исходной косы).



Несложно заметить, что переходом от данной косы к ей сопряжённой всегда можно добиться того, чтобы окружности приводящей системы  $L$  располагались некоторым каноническим образом, а именно удовлетворяли следующим условиям:

- компоненты края  $\gamma_i$  с меньшим индексом содержатся в областях  $U_i$  с меньшим индексом;
- если поверхность  $M$  представлять выпукло вложенной в  $\mathbb{R}^2$ , то окружности системы  $L$  с точностью до гомотопии ограничивают выпуклые подмножества в  $\mathbb{R}^2$ .

На следующем рисунке изображена некоторая система  $L$  и правее её канонический вид, которого можно добиться переходом к сопряжённой косе.



Подобный канонический вид полезен тем, что расположенные подряд нити можно объединять в блоки, которые не распадаются при действии косы.

Занумеруем нити косы числами от 1 до  $n$  в соответствии с нумерацией компонент края  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ .

**Определение 1.29.** Подмножество  $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  называется *блоком*, если оно содержит все числа, начиная с некоторого  $a$  и до  $b$  включительно:

$$B = [a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Определение 1.30.** Семейство блоков  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  называется *блочным разбиением*, если  $\cup_{i=1}^k B_i = \{1, 2, \dots, n\}$  и блоки попарно не пересекаются.

**Определение 1.31.** Блочное разбиение множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется *тривиальным*, если оно состоит из одного блока, содержащего  $n$  элементов, или из  $n$  блоков по одному элементу в каждом.

Любая перестановка  $s \in S_n$  естественным образом действует на любое блочное разбиение, отображая его в некоторое семейство непересекающихся подмножеств (необязательно блоков) множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Пример 1.1.** Если на блочное разбиение  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$  множества  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  подействовать перестановкой

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

то получится блочное разбиение  $s_1(\mathcal{B}) = \{\{1, 2\}, \{5\}, \{3, 4\}\}$ .

Если же подействовать перестановкой

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

то получится семейство подмножеств  $s_2(\mathcal{B}) = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}\}$ , не являющееся блочным разбиением, поскольку подмножество  $\{1, 3\}$  не является блоком.  $\square$

Произвольная коса  $\beta \in B_n$  также может действовать на любое блочное разбиение множества своих нитей  $\{1, 2, \dots, n\}$  с помощью перестановки  $s(\beta)$ .

Пусть коса  $\beta \in B_n$  задана в канонической форме:

$$\beta = \Delta^p \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l.$$

Для блочного разбиения  $\mathcal{B}$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  введём следующие обозначения:

$$\mathcal{B}_\beta^0 = (\mathcal{B})\Delta^p, \quad \mathcal{B}_\beta^i = (\mathcal{B}_\beta^{i-1})\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Таким образом, получаем последовательность:

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\Delta^p} \mathcal{B}_\beta^0 \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{B}_\beta^1 \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_l} \mathcal{B}_\beta^l. \quad (1.8)$$

Обозначим через  $\widehat{S}(\beta)$  сверхпредставительное множество косы  $\beta$ .

**Теорема 1.8** (см. [18]). *Непериодическая коса  $\beta \in B_n$  является приводимой тогда и только тогда, когда существуют коса  $\beta' \in \widehat{S}(\beta)$  и нетривиальное блочное разбиение  $\mathcal{B}$  такие, что в последовательности (1.8), построенной для косы  $\beta'$ , каждое семейство  $\mathcal{B}_\beta^i$  ( $i = 0, 1, \dots, l$ ) является блочным разбиением и  $\beta'(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ .*



*Замечание 1.2.* Равенство  $(\mathcal{B})\beta' = \mathcal{B}$  в последней теореме означает всего лишь равенство двух семейств подмножеств и вовсе не означает, что перестановка  $(\beta')_s$  должна переводить каждый блок из  $\mathcal{B}$  в себя. Блоки равных размеров могут переходить друг в друга.

Теорема 1.8 задаёт алгоритм распознавания приводимости косы: надо перебрать все косы из конечного множества  $\widehat{S}(\beta)$  и для каждой косы, перебирая все нетривиальные блочные разбиения, проверить указанные условия. Если такие коса  $\beta' \in \widehat{S}(\beta)$  и нетривиальное блочное разбиение  $\mathcal{B}$  будут найдены, то  $\mathcal{B}$  задаёт разбиение косы  $\beta'$  на составляющие. Нити косы, принадлежащие  $i$ -му блоку, образуют  $i$ -ю внутреннюю составляющую косы. А «переплетение» самих блоков определяет внешнюю составляющую косы. В результате, правда, получится разложение на составляющие не для исходной косы  $\beta$ , а для её сопряжённой косы  $\beta'$ .

Ясно, что данный алгоритм распознавания приводимости косы и её разложения на неприводимые составляющие на данный момент не является эффективным, поскольку не известно эффективного алгоритма получения сверхпредставительного множества  $\widehat{S}(\beta)$  косы  $\beta$ .

Указанные в этом параграфе алгоритмы позволяют для любой косы определить, какому из трёх классов — периодическому, псевдоаносовскому или приводимому — она принадлежит. В самом деле сначала для косы можно применить алгоритм распознавания периодичности. Далее если она непериодическая, применить алгоритм распознавания приводимости. Если она неприводимая, то в силу теоремы 1.4 она псевдоаносовская. Если же коса является приводимой, то можно дополнительно разложить её на неприводимые составляющие и определить, каким классам они принадлежат.

## 1.8 Теория Перрона-Фробениуса

Прежде всего введём понятие спектрального радиуса матрицы и сформулируем теорему, содержащую фактически эквивалентное определение данного понятия.

Пусть  $A$  — квадратная матрица над полем  $\mathbb{C}$ .

**Определение 1.32.** *Нормой* матрицы  $A$  назовём число

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq 1 \}.$$

**Определение 1.33.** *Спектральным радиусом* матрицы  $A$  называется число

$$R(A) = \inf_{p \in \mathbb{N}} \left\{ \|A^p\|^{1/p} \right\}.$$

**Теорема 1.9** ([8]). *Справедлива формула Гельфанда:*

$$R(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|A^p\|^{1/p}.$$

*Замечание 1.3.* Хорошо известно, что в конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны. Поэтому, вообще говоря, не имеет значения, какая именно норма используется в данном определении спектрального радиуса. Равно и формула Гельфанда справедлива для любой нормы.

**Теорема 1.10** ([8]). *Для любого ограниченного оператора  $A$  в комплексном банаховом пространстве имеет место формула Бёрлинга-Гельфанда:*

$$R(A) = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \text{ — собственное значение матрицы } A \},$$

*т. е. спектральный радиус оператора совпадает с радиусом его спектра.*

**Определение 1.34.** Матрица  $A$  называется *неотрицательной*, если все её элементы являются неотрицательными целыми числами.

Рассмотрим теорию Перрона-Фробениуса, описывающую спектральные свойства неотрицательных матриц.

**Определение 1.35.** Неотрицательная квадратная матрица называется *разложимой*, если перестановкой строк и столбцов (одинаковой для строк и столбцов) её можно привести к блочно-треугольному виду

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где блоки  $A$  и  $C$  квадратные.

Неразложимая матрица, очевидно, не имеет нулевых строк и столбцов.

Для степени  $A^r$  матрицы  $A$  её элементы будем обозначать  $a_{ij}^{(r)}$ .

**Теорема 1.11** ([1]). *Если неотрицательная  $n \times n$ -матрица  $A$  является неразложимой, то для любой пары индексов  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  существует такое  $r \in \mathbb{N}$ , что  $a_{ij}^{(r)} > 0$ .*

**Определение 1.36.** Неотрицательная  $n \times n$ -матрица  $A$  называется *примитивной*, если существует такое  $r \in \mathbb{N}$ , что  $A^r$  не имеет нулевых элементов.

Ясно, что если  $A^r$  не имеет нулевых элементов, то для любого  $l > r$  матрица  $A^l$  также не имеет нулевых элементов.

Следующая теорема принадлежит Фробениусу, обобщившему теорему Перрона (см. [1]).

**Теорема 1.12.** *Неразложимая неотрицательная  $n \times n$ -матрица  $A$  всегда имеет положительное характеристическое число  $\lambda \geq 1$ , которое является простым корнем характеристического уравнения и которому соответствует собственный вектор с положительными координатами. Модули всех других характеристических чисел не превосходят (а если матрица  $A$  примитивная, то строго меньше) числа  $\lambda$ . Если  $\lambda = 1$ , то матрица  $A$  задаёт транзитивную перестановку компонент векторов (транзитивность перестановки в группе  $S_n$  означает, что перестановка состоит из одного цикла длины  $n$ ).*

**Определение 1.37.** Число  $\lambda$  из последней теоремы называется *собственным числом Перрона-Фробениуса* матрицы  $A$ .

Из определения 1.37 и теорем 1.10 и 1.12, с очевидностью следует следующее предложение.

**Предложение 1.13.** *Собственное число Перрона-Фробениуса неразложимой неотрицательной матрицы совпадает с её спектральным радиусом.*

## 1.9 Железнодорожные пути

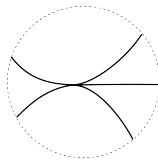
Пусть  $M$  — компактная поверхность, и  $x_1, \dots, x_n$  — точки на границе  $\partial M$ .

**Определение 1.38.** Поверхность  $M$  называется *гиперболической с каспами*  $x_1, \dots, x_n$ , если на ней можно задать такую гиперболическую метрику, в которой компоненты множества  $\partial M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  являются геодезическими, и вся поверхность имеет конечную площадь.

Диск, кольцо и лента Мёбиуса являются гиперболическими поверхностями с каспами. При этом на границе диска должно быть минимум три каспа, а на границе кольца и ленты Мёбиуса — минимум один.

Пусть теперь  $M$  — компактная ориентированная гиперболическая поверхность (возможно, с каспами). И положим, на  $M$  задана такая гладкая гиперболическая метрика, в которой компоненты границы являются геодезическими, и вся поверхность имеет конечную площадь.

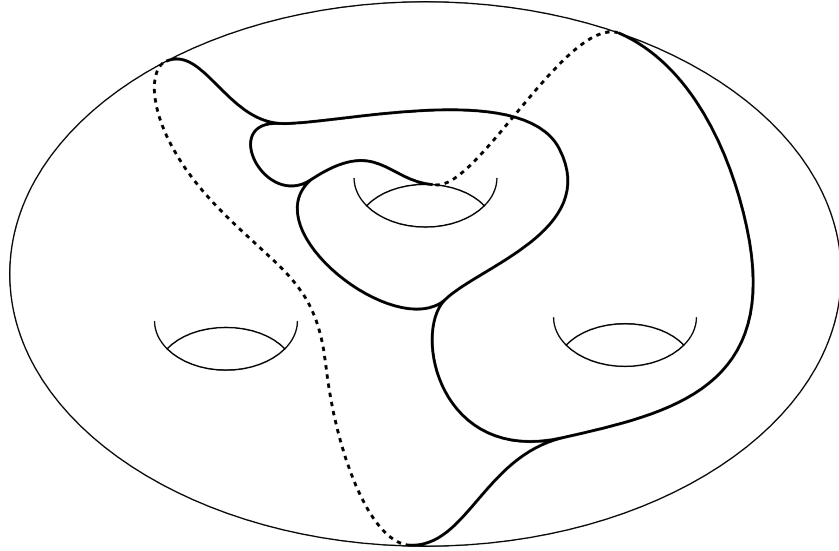
**Определение 1.39.** Подпространство  $\tau \subset M$  называется *разветвлённым 1-подмногообразием*, если окрестность любой точки из  $\tau$  (за исключением конечного числа точек  $t_1, \dots, t_k$ ) диффеоморфна фрагменту прямой на гиперболической плоскости, а для каждой из точек  $t_1, \dots, t_k$  существует окрестность на поверхности  $M$  такая, что подпространство  $\tau$  с точностью до диффеоморфизма выглядит в этой окрестности как несколько кривых, сходящихся по касательной в данной точке:



Точки  $t_1, \dots, t_k$  называются *точками ветвления*.

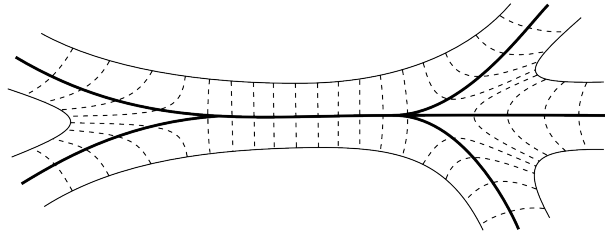
**Определение 1.40.** *Железнодорожным путём* поверхности  $M$  называется разветвлённое 1-подмногообразие  $\tau$  в  $M$  такое, что каждая компонента поверхности  $M \setminus \tau$  является гиперболической поверхностью (возможно, с каспами), т. е. не является гладким кольцом либо диском с нулём, одним или двумя каспами.

Вот пример железнодорожного пути.



**Определение 1.41.** *Расслоенной окрестностью железнодорожного пути  $\tau$  называется окрестность  $N(\tau) \subset M$ , снабжённая слоением, слоями которого являются отрезки трансверсальные  $\tau$ , причём через разные точки множества  $\tau$  проходят разные слои.*

Расслоенная окрестность железнодорожного пути выглядит следующим образом (полужирной линией изображен фрагмент железнодорожного пути, прерывистыми линиями — слои слоения):



Пусть задан гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$ .

**Определение 1.42.** Железнодорожный путь  $\tau$  называется *инвариантным* при действии  $f$ , если существует такая расслоенная окрестность  $N(\tau)$ , что  $f(N(\tau)) \subseteq N(\tau)$ , множество  $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}_+, x \text{ — точка ветвления}\}$  конечное, и  $f(\tau)$  расположен трансверсально слоям в  $N(\tau)$ .

**Определение 1.43.** *Ветвью* железнодорожного пути  $\tau$ , инвариантного при действии гомеоморфизма  $f : M \rightarrow M$ , называется замыкание каждой компоненты множества  $\tau \setminus \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}_+, x \text{ — точка ветвления}\}$ .

Для гомеоморфизма  $f$  и инвариантного при его действии железнодорожного пути  $\tau$ , состоящего из  $k$  ветвей, можно определить  $k \times k$ -матрицу  $M(f, \tau)$  следующим образом. Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ветви железнодорожного пути  $\tau$ . Для каждой ветви выберем некоторый слой  $t_i$ , трансверсально её пересекающий. Тогда по определению

$$\{M(f, \tau)\}_{i,j} = \#(t_i \cap f(x_j)).$$

Важной для дальнейшего является следующая теорема.

**Теорема 1.14** ([20]). *Для железнодорожного пути  $\tau$ , инвариантного при действии псевдоаносовского гомеоморфизма  $f : M \rightarrow M$ , спектральный радиус матрицы  $M(f, \tau)$  равен коэффициенту растяжения  $\lambda$  псевдоаносовского гомеоморфизма  $f$ .*

Пусть гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  задан путём указания автоморфизма фундаментальной группы  $f_{\#} : \pi_1(M, v_0) \rightarrow \pi_1(M, v_0)$ , где  $v_0$  есть неподвижная точка отображения  $f$  (если неподвижной точки нет, то её всегда можно получить изотопией отображения  $f$ ).

В 1995 году М. Бествина и М. Хэндел предъявили алгоритм, который по заданному  $f_{\#}$  определяет тип гомеоморфизма  $f$  (периодический, псевдоаносовский или приводимый). И если  $f$  псевдоаносовский, то алгоритм дополнительно позволяет построить соответствующий ему железнодорожный путь.

Рассмотрим этот алгоритм подробнее.

Фундаментальная группа  $\pi_1(M, v_0)$  может быть задана как группа с образующими  $x_1, \dots, x_n$  и, возможно, одним соотношением (если край поверхности пуст). Каждая образующая  $x_i$  есть класс гомотопных (с закреплёнными концами) петель с началом в точке  $v_0$ . Из каждого класса  $x_1, \dots, x_n$  выберем по представителю так, чтобы они попарно не пересекались как петли на поверхности  $M$ . Получим вложенный в поверхность граф  $G$  с одной вершиной  $v_0$  и  $n$  рёбрами, которые будем также обозначать через  $x_1, \dots, x_n$ . Фактически буквами  $x_i$  здесь обозначены ориентированные рёбра. Рёбра с противоположной ориентацией будем обозначать с чертой наверху  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ .

Автоморфизм  $f_{\#}$  естественным образом задаёт некоторое отображение графа  $G$ . Другими словами, для любого ребра  $x_i$  графа  $G$  определён его образ  $f_{\#}(x_i)$  как слово в алфавите  $E_G = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ , состоящем из ориентированных рёбер графа  $G$ .

Рассматриваемый алгоритм Бествины и Хэндела состоит в последовательных преобразованиях графа  $G$  и отображения  $f_{\#} : G \rightarrow G$ . При этом у графа  $G$  могут образовываться новые вершины и рёбра. Перед изложением собственно шагов алгоритма введём несколько определений.

По отображению  $f_{\#} : G \rightarrow G$  можно построить отображение  $Df_{\#} : E_G \rightarrow E_G$ , действующее по правилу:  $\forall x \in E_G$  образ  $Df_{\#}(x)$  есть первая буква в слове  $f_{\#}(x)$ .

**Определение 1.44.** *Линком*  $Lk(G_0, G)$  подграфа  $G_0$  графа  $G$  назовём множество ориентированных рёбер подграфа  $G \setminus G_0$ , каждое из которых начинается в вершине, лежащей в  $G_0$ .

**Определение 1.45.** *Ростком* подграфа  $G_0$  графа  $G$  будем называть семейство ориентированных рёбер, принадлежащих  $Lk(G_0, G)$  и имеющих одинаковые образы при действии некоторой степени отображения  $Df_{\#}$ .

Поверхность  $M \setminus G$  состоит из нескольких компонент связности, максимум одна из которых есть диск, а остальные — кольца. У каждого такого кольца одна из граничных окружностей есть компонента края поверхности  $M$ , а другая есть некоторый цикл графа  $G$ .

При действии  $f$  компоненты края поверхности  $M$  переходят друг в друга. При этом может образовываться несколько орбит. Произвольным образом выберем одну орбиту (этот выбор осуществляется один раз в начале алгоритма). Циклы графа  $G$ , соответствующие всем остальным орбитам, образуют некоторый подграф  $P$ , который будем называть *периферийным подграфом*.

Для периферийного подграфа  $P$  понадобится понятие его деформационного ретракта.

**Определение 1.46.** Говорят, что подграф  $G_0$  графа  $G$  *деформационно ретрагируется на  $P$* , если он представляет собой объединение  $P$  вместе с набором

попарно непересекающихся деревьев, каждое из которых имеет с  $P$  ровно одну общую точку.

Обозначим через  $\text{pre-}P$  множество рёбер графа  $G$ , образ которых при действии некоторой положительной степени отображения  $f_{\#}$  целиком содержится в  $P$ , а через  $H$  — множество рёбер графа  $G$ , не вошедших ни в  $P$ , ни в  $\text{pre-}P$ .

Для отображения  $f_{\#} : G \rightarrow G$  можно определить матрицу  $M = (m_{i,j})$  следующим образом: элемент  $m_{i,j}$  есть количество букв  $x_i$  и  $\bar{x}_i$  в слове  $f_{\#}(x_j)$ . Матрица  $M$  квадратная, её порядок равен количеству рёбер графа  $G$ .

Легко заметить, что матрица  $M$  имеет блочно-треугольный вид:

$$M = \begin{pmatrix} N & A & B \\ 0 & C & D \\ 0 & 0 & M_H \end{pmatrix},$$

где первый столбец соответствует рёбрам из периферийного подграфа  $P$ , второй — рёбрам из множества  $(\text{pre-}P) \setminus P$ , и третий — рёбрам из множества  $H$ .

Можно показать, что спектральные радиусы матриц  $M$  и  $M_H$  совпадают.

Рассмотрим теперь шаги алгоритма.

**Шаг 1.** Сокращение образов рёбер.

Данная операция состоит, во-первых, в удалении шипов из образов всех рёбер, а именно в удалении двухбуквенных подслов вида  $x_i \bar{x}_i$  или  $\bar{x}_i x_i$ . И, во-вторых, если для всех ориентированных рёбер, исходящих из одной и той же вершины, их  $Df_{\#}$ -образ совпадает, то из  $f_{\#}$ -образов всех этих рёбер надо удалить общее начальное ребро.

**Шаг 2.** Если существует инвариантный лес, то выполнить стягивание инвариантного леса и вернуться к шагу 1.

При стягивании инвариантного леса каждое дерево графа, входящее в инвариантный лес, стягивается в точку, образуя вершину нового графа, и из образа каждого ребра удаляются все буквы, соответствующие рёбрам из инвариантного леса.

**Шаг 3.** Если есть вершины валентности 1, то удалить их и вернуться к шагу 1.

Вместе с каждой вершиной валентности 1 удаляется ребро, инцидентное

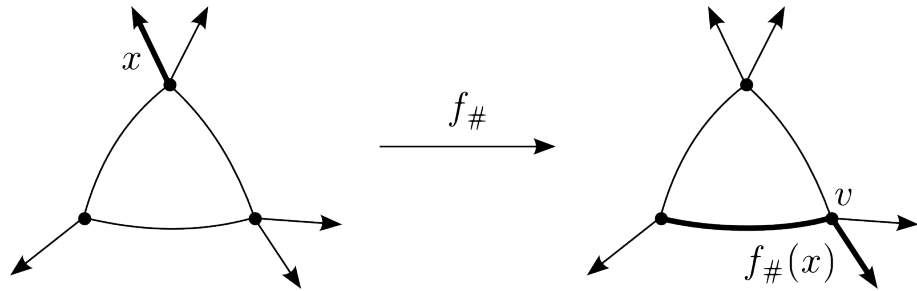


этой вершине, причём удаляется оно не только из графа, но и из образа каждого другого ребра.

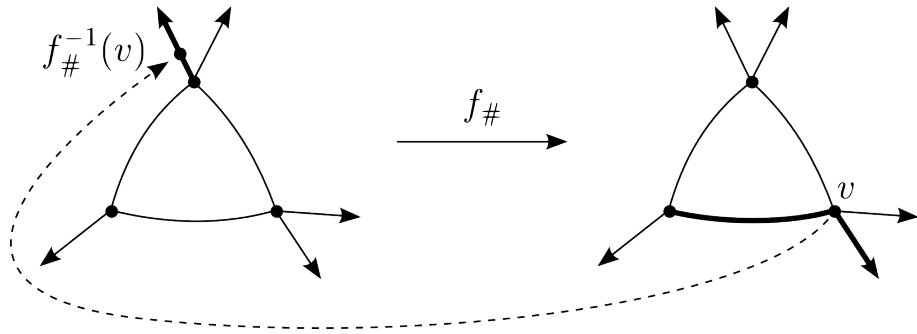
**Шаг 4.** Если существует  $f_{\#}$ -инвариантный подграф  $G_0$ , который содержит  $P$  и деформационно ретрагируется на  $P$ , или  $Df_{\#}(Lk(P, G)) \not\subseteq Lk(P, G)$ , или  $P$  содержит вершину валентности 2, то выполнить перестройку периферийного подграфа и вернуться к шагу 1.

Перестройка периферийного подграфа  $P$  состоит в следующем. Во-первых, находим максимальный  $f_{\#}$ -инвариантный подграф  $G_0$ , который содержит  $P$  и деформационно ретрагируется на  $P$ , и каждое дерево найденного подграфа  $G_0$ , пересекающееся с  $P$  ровно в одной точке, стягиваем в эту точку.

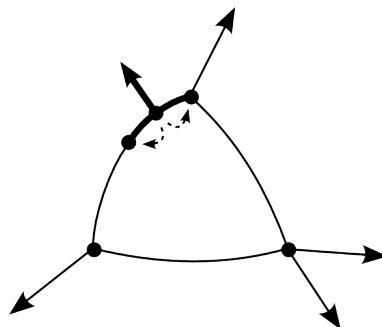
Во-вторых, для каждого ориентированного ребра  $x \in Lk(P, G)$ , для которого  $Df_{\#}(x) \notin Lk(P, G)$ , т. е. ситуация выглядит, к примеру, так, как изображено на следующем рисунке



необходимо найти прообраз вершины  $v$  на ребре  $x$



и разбить начальный отрезок ориентированного ребра  $x$  на две части



Далее если у периферийного подграфа  $P$  есть вершины валентности 2, то надо удалить каждую из них путём стягивания в точку любого из двух рёбер, инцидентных данной вершине.

Наконец, необходимо стянуть в точку рёбра периферийного подграфа  $P$ , образы которых при действии некоторой степени отображения  $f_{\#}$ , стягиваются в точку (при гомотопии с закреплёнными концами). В результате ориентированные рёбра из  $Lk(P, G)$ , принадлежащие одному ростку периферийного подграфа  $P$ , будут начинаться в одной вершине, а рёбра, принадлежащие разным росткам — в разных вершинах.

Естественным образом меняются и  $f_{\#}$ -образы рёбер графа  $G$ . Единственная сложность — это возможная неоднозначность при разделении начального отрезка ребра  $x$  на две части. К примеру, в  $f_{\#}$ -образе некоторого ребра содержится буква  $\bar{x}$ , и при разделении начального отрезка  $x$  на две части оказывается возможным выбрать любую из частей. В этом случае можно выбирать любую из двух частей.

**Шаг 5.** Если  $M_H$  разложима, то  $f$  изотопен приводимому гомеоморфизму.

**Шаг 6.** Если есть вершины валентности 2, то удалить их и вернуться к шагу 1.

Удаление вершин валентности 2 состоит в следующем. Если хотя бы одно из рёбер, инцидентных вершине валентности 2, лежит в  $\text{pre-}P$ , то надо стянуть его в точку. Если оба ребра лежат в  $H$  и спектральный радиус  $\lambda$  матрицы  $M_H$  больше 1, то надо стянуть в точку то из рёбер, инцидентных вершине валентности 2, которому соответствует бóльшая координата положительного собственного вектора неразложимой матрицы  $M_H$ . Если  $\lambda = 1$ , то надо стянуть в точку оба ребра, инцидентных вершине валентности 2.

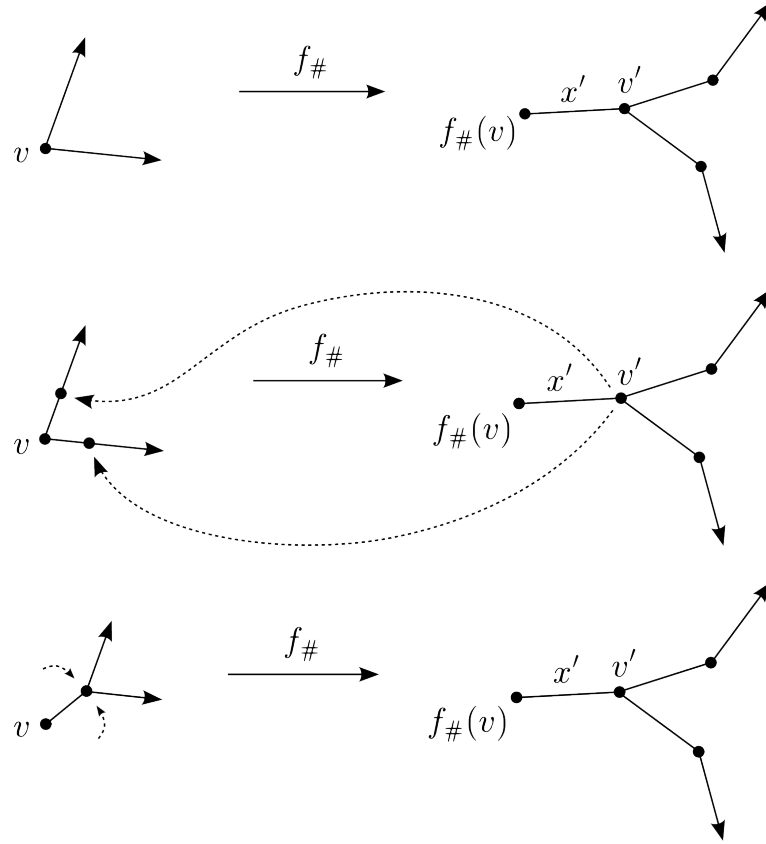
**Шаг 7.** Если есть участки вырождаемости, то избавиться от них и вернуться к шагу 1.

Вырождаемость бывает двух типов. Сначала надо избавиться от вырождаемости I-го типа, которая состоит в следующем: для двух ориентированных рёбер с общей начальной вершиной их  $Df_{\#}$ -образ совпадает и не содержится в  $H$ .

Положим  $P_0 = P$ , и для  $i \in \mathbb{N}$  индуктивно определим  $P_i$  как объединение

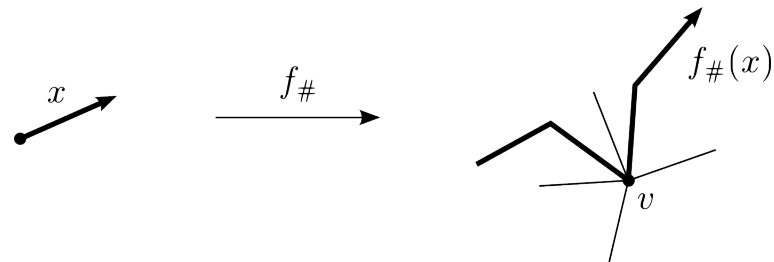
компонент  $\text{pre-}P$  такое, что  $f_{\#}(P_i) \subseteq P_{i-1}$ .

Положим  $i = 0$ . Для двух ориентированных рёбер с общей начальной вершиной и одинаковым  $Df_{\#}$ -образом, лежащем в  $P_i$ , необходимо соединить их начальные участки в одно ребро.

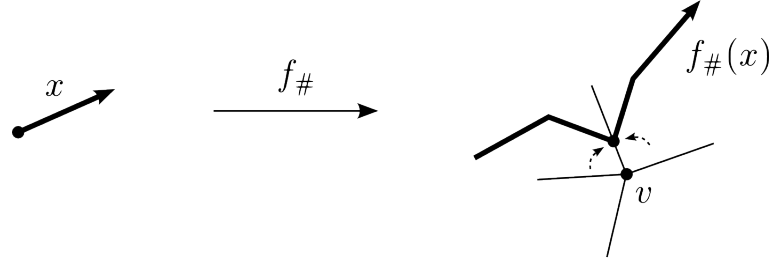


Проделав это для всех таких пар рёбер, увеличим  $i$  на 1. И поскольку, начиная с некоторого  $i$ , все  $P_i = \emptyset$ , от всех участков вырождаемости I-го типа можно избавиться за конечное число шагов.

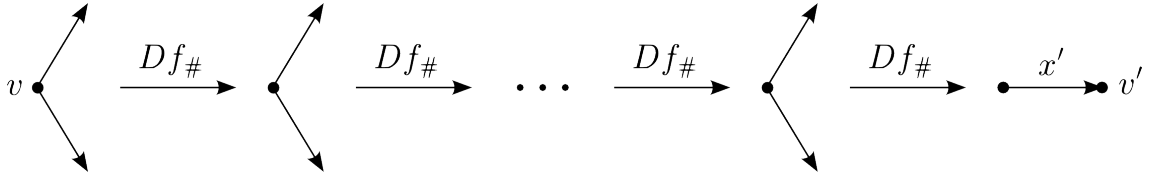
Вырождаемость II-го типа состоит в том, что  $f_{\#}$ -образ некоторого ребра  $x$  есть путь, заходящий в некоторую вершину  $v$  и выходящий из неё по рёбрам, принадлежащим одному и тому же ростку этой вершины.



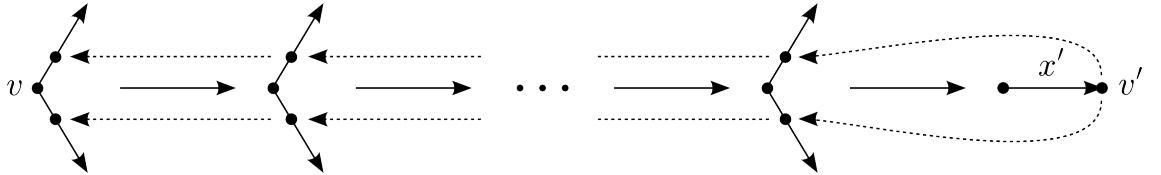
Удаление вырождаемости II-го типа состоит в соединении начальных участков рёбер ростка вершины  $v$  в одно ребро. В результате удаления этой вырождаемости и последующего сокращения образов рёбер на шаге 1, путь  $f_{\#}(x)$  вообще не будет заходить в вершину  $v$ .



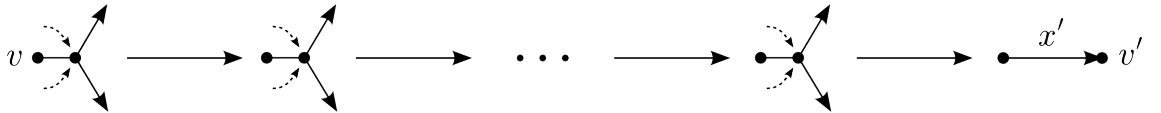
Для определения размера начальных участков рёбер ростка вершины  $v$ , которые должны соединяться в одно ребро, действуют следующим образом. По определению ростка эти рёбра имеют одинаковый образ при действии  $(Df_{\#})^k$  для некоторого  $k$ .



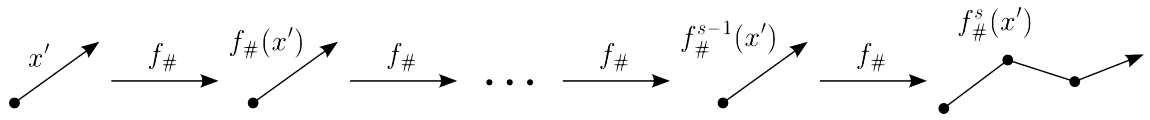
Необходимо, двигаясь назад, начиная с вершины  $v'$ , найти все её прообразы (вплоть до  $k$ -го)



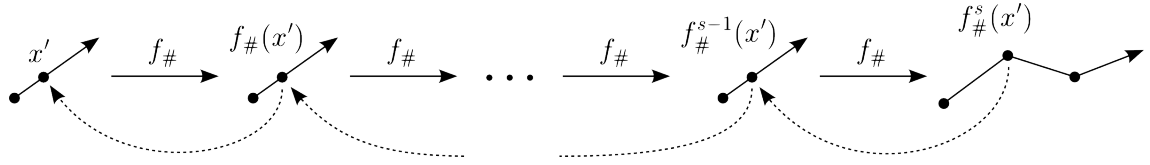
и соединить начальные участки рёбер.



При устранении вырождаемостей обоих типов необходимо следить, чтобы ни один из прообразов вершины  $v'$  не совпал с вершиной  $v$ . В противном случае надо уменьшить длину ребра  $x'$ . Для этого ищут наименьшее  $s \in \mathbb{N}$  такое, что  $f_{\#}^s(x')$  состоит хотя бы из двух рёбер.



Далее берут любую промежуточную вершину в пути  $f_#^s(x')$ , находят её прообразы (вплоть до  $s$ -го) и разбивают все рёбра вплоть до  $x'$  на две части.

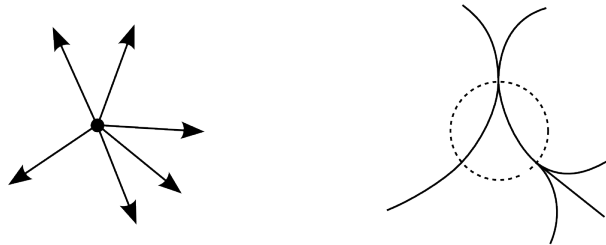


### Шаг 8. Построение железнодорожного пути.

Каждую вершину  $v$  графа  $G$  заменяют небольшой окружностью. Каждому ростку вершины  $v$  ставят в соответствие точку на окружности. Рёбра, принадлежащие линку вершины  $v$ , деформируют так, чтобы они начинались в соответствующих точках на окружности и были расположены перпендикулярно окружности.

Две точки на окружности, соответствующие двум росткам, соединяют дугой, расположенной внутри окружности, в том и только том случае, если найдётся ребро графа  $G$ , образ которого при действии некоторой степени отображения  $f_#$  заходит в вершину  $v$  через один из данных ростков, а выходит через другой. В точках пересечения с окружностью дуги должны быть перпендикулярны ей.

На следующем рисунке изображён возможный пример преобразования графа  $G$  в железнодорожный путь в окрестности некоторой вершины  $v$ .



По построенному железнодорожному пути  $\tau$  можно определить тип гомеоморфизма  $f : M \rightarrow M$ . Положим  $\lambda$  есть спектральный радиус матрицы  $M(f, \tau)$ .

**Теорема 1.15** ([20]). Пусть внутри каждой окружности внутренние дуги соединяют все точки, соответствующие росткам. Тогда если  $\lambda = 1$ , то  $f$  принадлежит периодическому классу изотопии, а если  $\lambda > 1$ , то псевдоаносовскому. Если же хотя бы для одной окружности не все точки соединены дугами, расположенными внутри окружности, то  $f$  обладает приводящей системой окружностей и принадлежит либо периодическому, либо приводимому классу.

## Глава 2

# Энтропия кос

### 2.1 Показатель экспоненциального роста последовательности

Пусть  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность вещественных чисел.

**Определение 2.1.** *Частичным пределом* последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  называется предел некоторой её подпоследовательности.

Для любой последовательности вещественных чисел множество всех её частичных пределов (конечных и бесконечных) на расширенной числовой прямой (т. е. во множестве  $\mathbb{R}$ , пополненном символами  $+\infty$  и  $-\infty$ ) не пусто, замкнуто и, следовательно, имеет наибольший элемент (конечный или бесконечный).

**Определение 2.2.** Наибольший элемент множества всех частичных пределов последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  называется *верхним пределом* этой последовательности и обозначается

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{или} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

**Пример 2.1.**

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n = +\infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n - n) = 0.$$

**Определение 2.3.** *Показатель экспоненциального роста* последовательности положительных вещественных чисел  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  определим равенством

$$\text{GR}(a_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln a_n.$$

**Пример 2.2.** Если  $a_n$  — арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел, то  $\text{GR}(a_n) = 0$ . Если же  $a_n = q^n$  — геометрическая прогрессия, где  $q > 0$ , то  $\text{GR}(a_n) = \ln q$ .

Некоторые важные свойства показателя экспоненциального роста последовательности сформулируем в лемме (доказательства см. в [30] Exposé 10).

**Лемма 2.1.** Пусть  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — две последовательности положительных вещественных чисел и пусть  $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ . Тогда:

- 1)  $\text{GR}(ka_n) = \text{GR}(a_n)$ ;
- 2)  $\text{GR}(a_n + b_n) = \max \{ \text{GR}(a_n), \text{GR}(b_n) \}$ ;
- 3)  $\text{GR}(a_n) \leq \text{GR}(a_1 + \dots + a_n) \leq \max \{ 0, \text{GR}(a_n) \}$ ;
- 4) если  $\forall n, m \in \mathbb{N}, a_{n+m} \leq a_n a_m$ , то

$$\text{GR}(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \ln a_n \right\}.$$

## 2.2 Топологическая энтропия

Пусть  $f : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение компактного топологического пространства  $X$  в себя. Итерации отображения  $f$  определяют дискретную топологическую динамическую систему, одной из важнейших количественных характеристик которой является топологическая энтропия.

Топологическая энтропия представляет собой неотрицательное вещественное число или  $+\infty$ , отражающее поведение траекторий точек в динамической системе.

Дать определение топологической энтропии можно различными способами. Все они проходят по следующей схеме. Рассматривается некоторое семейство последовательностей положительных вещественных чисел

$$H = \{ (h_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha \in I \},$$

где  $I$  — некоторое множество индексов. При каждом  $\alpha \in I$  для последовательности  $(h_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$  находят показатель экспоненциального роста:

$$h_\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln h_{n,\alpha}.$$



Далее для элементов множества  $\{h_\alpha \mid \alpha \in I\}$  находят точную верхнюю грань:

$$h = \sup_{\alpha \in I} \{h_\alpha\}.$$

Полученную величину  $h$  можно назвать *энтропией семейства последовательностей  $H$* .

Для определения топологической энтропии отображения  $f : X \rightarrow X$  семейство  $H$  можно выбирать по-разному. Приведём три различных способа выбора этого семейства, все приводящие к одному и тому же значению топологической энтропии отображения  $f$ .

**Определение 2.4.** Для открытых покрытий  $\alpha$  и  $\beta$  пространства  $X$  *измельчением* этих покрытий назовём открытое покрытие

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Операция измельчения естественным образом обобщается на произвольное конечное семейство открытых покрытий  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

$$\bigvee_{r=1}^n \alpha_r = \{A_1 \cap \dots \cap A_n \mid A_1 \in \alpha_1, \dots, A_n \in \alpha_n\}.$$

Для открытого покрытия  $\alpha$  его прообраз  $f^{-1}\alpha = \{f^{-1}(A) \mid A \in \alpha\}$  также представляет открытое покрытие пространства  $X$ .

Для  $n \geq 1$  рассмотрим следующее покрытие

$$\begin{aligned} \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha &= \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-(n-1)}\alpha = \\ &= \{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \mid A_0, \dots, A_{n-1} \in \alpha\}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $N(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha)$  наименьшую мощность подпокрытия в данном покрытии. Эта величина конечна в силу компактности пространства  $X$ . Её и выберем в качестве элемента  $h_{n,\alpha}$ .

В соответствии с указанной выше схемой формулируем определение топологической энтропии.

**Определение 2.5.** Топологической энтропией отображения  $f : X \rightarrow X$  называется величина

$$h(f) = \sup_{\alpha \in I} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N \left( \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha \right) \right\},$$

где  $I$  — семейство всех открытых покрытий  $X$ .

Если на компактном пространстве  $X$  задана метрика  $\rho$ , то в качестве  $h_{n,\alpha}$  можно взять более удобные для вычисления объекты.

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .

**Определение 2.6.** Конечное подмножество  $S \subset X$  называется  $(n, \varepsilon)$ -отделённым, если  $\forall x, y \in S$ ,  $x \neq y$ ,  $\exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  такое, что  $\rho(f^k(x), f^k(y)) \geq \varepsilon$ .

Обозначим  $s(n, \varepsilon)$  — максимальную мощность  $(n, \varepsilon)$ -отделённого множества. Величина  $s(n, \varepsilon)$  характеризует максимальное число отрезков орбит длины  $n$ , различимых с точностью  $\varepsilon$ .

**Определение 2.7.** Конечное подмножество  $R \subset X$  называется  $(n, \varepsilon)$ -покрытием, если  $\forall x \in X$ ,  $\exists y \in R$  такое, что  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $\rho(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$ .

Обозначим  $r(n, \varepsilon)$  — минимальную мощность  $(n, \varepsilon)$ -покрытия. Величина  $r(n, \varepsilon)$  характеризует минимальное число отрезков орбит длины  $n$ , аппроксимирующих любую орбиту вплоть до длины  $n$  с точностью  $\varepsilon$ .

В силу следующего предложения (см. [42], §3.3) обе величины  $s(n, \varepsilon)$  и  $r(n, \varepsilon)$  конечны.

**Предложение 2.2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$  — открытое покрытие пространства  $X$ ,  $\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq k} \{\text{diam}(A_i)\}$ . Тогда

$$r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq N(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha).$$

В качестве  $\{(h_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha \in I\}$  можно теперь взять одно из двух семейств последовательностей — либо  $\{(s(n, \varepsilon))_{n \in \mathbb{N}} \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\}$ , либо  $\{(r(n, \varepsilon))_{n \in \mathbb{N}} \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\}$ . В любом случае получим топологическую энтропию, определённую выше, что и сформулируем в следующей теореме.

**Теорема 2.3.**

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon).$$

Доказательство теоремы см. в [42], §3.3. Кроме того, доказательство левого равенства имеется в [10], §5.4, а доказательство правого можно также найти в [5], §3.1.

*Замечание 2.1.* На самом деле, если строго следовать указанной схеме определения топологической энтропии, равенства в теореме 2.3 должны выглядеть так:

$$h(f) = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon) \right\} = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon) \right\}.$$

Однако, можно показать ([42], §3.3), что точная верхняя грань достигается именно при стремлении  $\varepsilon$  к нулю.

*Замечание 2.2.* Поскольку по определению 2.5 топологическая энтропия  $h(f)$  зависит только от топологии пространства  $X$ , то в теореме 2.3, в частности, утверждается, что определение топологической энтропии с помощью величины  $s(n, \varepsilon)$  или  $r(n, \varepsilon)$  не зависит от выбора метрики. Так, если взять другую метрику  $\rho'$  на пространстве  $X$ , порождающую ту же самую топологию, что и  $\rho$ , то значение топологической энтропии не изменится.

**Определение 2.8.** Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — компактные гомеоморфные топологические пространства. Два непрерывных отображения  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$  и  $f_2 : X_2 \rightarrow X_2$  называются *топологически сопряжёнными*, если существует такой гомеоморфизм  $\tilde{f} : X_1 \rightarrow X_2$ , что  $f_1 = \tilde{f}^{-1} \circ f_2 \circ \tilde{f}$ , т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \end{array} \quad (2.1)$$

**Определение 2.9.** Непрерывное отображение  $f_2 : X_2 \rightarrow X_2$  называется (*топологическим*) *фактором* непрерывного отображения  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$ , если существует такое сюръективное непрерывное отображение  $\tilde{f} : X_1 \rightarrow X_2$ , что

$\tilde{f} \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{f}$ , т. е. коммутативна диаграмма (2.1). Отображение  $\tilde{f}$  называется *полусопрягающим*.

Рассмотрим некоторые свойства топологической энтропии ([5], §3.1).

1. Если непрерывные отображения  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$  и  $f_2 : X_2 \rightarrow X_2$  топологически сопряжены, то  $h(f_1) = h(f_2)$ . Другими словами, топологическая энтропия — инвариант топологического сопряжения.
2. Если отображение  $f_2$  является фактором  $f_1$ , то  $h(f_2) \leq h(f_1)$ .
3. Если  $\Lambda$  — замкнутое  $f$ -инвариантное множество, то  $h(f|_{\Lambda}) \leq h(f)$ .
4. Если  $X = \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i$ , где  $\Lambda_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — замкнутые  $f$ -инвариантные множества, то  $h(f) = \max_{1 \leq i \leq m} h(f|_{\Lambda_i})$ .
5. Если  $f$  — гомеоморфизм и  $m \in \mathbb{Z}$ , то  $h(f^m) = |m| \cdot h(f)$ .

Пусть теперь  $X$  — компактная ориентированная гиперболическая поверхность. Рассмотрим значения топологической энтропии для различных типов сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов поверхности  $X$  (см. §1.6).

Во-первых, очевидно, что для тождественного гомеоморфизма  $f : X \rightarrow X$  топологическая энтропия равна нулю, поскольку в этом случае для любого открытого покрытия  $\alpha$  имеем равенство  $\alpha = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \alpha$ , а показатель экспоненциального роста постоянной последовательности равен нулю. Отсюда, а также из свойства 5 топологической энтропии следует следующее предложение.

**Предложение 2.4.** *Для периодического гомеоморфизма топологическая энтропия равна нулю.*

**Теорема 2.5** ([30], Exposé 10). *Топологическая энтропия псевдоаносовского гомеоморфизма с коэффициентом растяжения  $\lambda$  равна  $\ln \lambda$ .*

Обобщая утверждения предложения 2.4 и теоремы 2.5, а также свойств 4 и 5 топологической энтропии, получаем следующее предложение.

**Предложение 2.6.** Если  $f$  является приводимым автоморфизмом и его псевдоаносовские составляющие  $f^{n_1}|_{X_1}, \dots, f^{n_s}|_{X_s}$  имеют коэффициенты растяжения  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  соответственно, то

$$h(f) = \ln \max \left\{ 1, \sqrt[n_1]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[n_s]{\lambda_s} \right\}.$$

Периодические составляющие приводимого автоморфизма не влияют на топологическую энтропию.

## 2.3 Алгебраическая энтропия

Пусть  $f : G \rightarrow G$  — эндоморфизм конечно порождённой группы  $G$  и  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  — конечное семейство образующих.

**Определение 2.10.** Длиной  $L_S(g)$  элемента  $g \in G$  в образующих  $S$  называется минимальная длина слова в алфавите  $\{s_1, \dots, s_k, s_1^{-1}, \dots, s_k^{-1}\}$ , представляющего элемент  $g$ .

Обозначим через  $e$  единицу в группе  $G$ . Положим  $L_S(e) = 0$ .

Для заданного эндоморфизма  $f : G \rightarrow G$  рассмотрим множество  $G_f = \{g \in G \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^n(g) \neq e\}$  и семейство последовательностей  $\{(L_S(f^n(g)))_{n \in \mathbb{N}} \mid g \in G_f\}$ , в котором каждая последовательность состоит из натуральных чисел. Алгебраическая энтропия эндоморфизма  $f$  определяется по той же схеме, что и топологическая энтропия непрерывного отображения, а именно, для каждого  $g \in G_f$  находим показатель роста последовательности  $(L_S(f^n(g)))_{n \in \mathbb{N}}$  и далее переходим к точной верхней грани по всем  $g \in G_f$ .

**Определение 2.11.** Алгебраическую энтропию  $h_a(f)$  эндоморфизма  $f$ , для которого  $G_f \neq \emptyset$ , определим равенством

$$h_a(f) = \sup_{g \in G_f} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln L_S(f^n(g)).$$

Если же  $G_f$  — пустое множество, то положим  $h_a(f) = 0$ .

**Определение 2.12.** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — конечно порождённые группы. Два эндоморфизма  $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$  и  $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$  называются сопряжёнными,

если существует такой изоморфизм  $\tilde{f} : G_1 \rightarrow G_2$ , что  $f_1 = \tilde{f}^{-1} \circ f_2 \circ \tilde{f}$ , т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_2 \end{array} \quad (2.2)$$

**Определение 2.13.** Эндоморфизм  $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$  называется *фактор-эндоморфизмом* для эндоморфизма  $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ , если существует такой эпиморфизм  $\tilde{f} : G_1 \rightarrow G_2$ , что  $\tilde{f} \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{f}$ , т. е. коммутативна диаграмма (2.2). Эпиморфизм  $\tilde{f}$  называется *полусопрягающим*.

Свойства алгебраической энтропии ([30] Exposé 10).

1. Выражение для  $h_a(f)$  в определении 2.11 можно упростить: поменять местами порядок выполнения операций нахождения точной верхней грани и показателя роста, точную верхнюю грань по всем элементам группы заменить на максимум по всем образующим, а верхний предел заменить обычным пределом или точной нижней гранью по всем натуральным числам, т. е.

$$h_a(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \max_{s \in S_f} \{L_S(f^n(s))\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \ln \max_{s \in S_f} \{L_S(f^n(s))\} \right\},$$

где  $S_f = S \cap G_f$ .

2. Алгебраическая энтропия эндоморфизма конечно порождённой группы  $G$  не зависит от выбора семейства образующих  $S$  в этой группе.
3.  $0 \leq h_a(f) < +\infty$ .
4. Если  $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$  и  $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$  — эндоморфизмы конечно порождённых групп  $G_1$  и  $G_2$  и  $p : G_1 \rightarrow G_2$  — эпиморфизм, причём  $pf_1 = f_2p$ , то  $h_a(f_1) \geq h_a(f_2)$ . Если же  $p$  — изоморфизм, то  $h_a(f_1) = h_a(f_2)$ . Другими словами, алгебраическая энтропия совпадает для сопряжённых эндоморфизмов, а при переходе к фактор-эндоморфизму алгебраическая энтропия может разве лишь уменьшиться.

5. Если  $f_1 : G \rightarrow G$  — внутренний автоморфизм, то  $h_a(f) = h_a(f_1 f)$ , т. е. алгебраическая энтропия совпадает для эндоморфизмов, различающихся лишь на внутренний автоморфизм.

Между топологической и алгебраической энтропией существует следующая связь.

Пусть  $f : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение компактного связного многообразия  $X$  в себя и  $x \in X$ . Зафиксируем путь  $\gamma$  из точки  $x$  в  $f(x)$ .

Тогда отображение  $f$  индуцирует эндоморфизм  $f_\# : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  фундаментальной группы, действующий по правилу:

$$f_\#[\alpha] = [\gamma \cdot (f \circ \alpha) \cdot \gamma^{-1}].$$

Если выбрать другую точку  $x' \in X$  и путь из  $x'$  в  $f(x')$ , то полученный эндоморфизм группы  $\pi_1(X, x')$  будет отличаться от исходного на внутренний автоморфизм группы  $\pi_1(X, x)$ . По свойству 5 выше его алгебраическая энтропия не изменится, и имеет смысл говорить об алгебраической энтропии индуцированного эндоморфизма фундаментальной группы  $h_a(f_\#)$ .

Имеет место следующая теорема (см. [5]).

**Теорема 2.7.** *Топологическая энтропия непрерывного отображения компактного многообразия не меньше алгебраической энтропии индуцированного эндоморфизма фундаментальной группы:*

$$h(f) \geq h_a(f_\#).$$

Известно, что факторгруппа фундаментальной группы по коммутанту есть группа одномерных гомологий. В силу 4-го свойства алгебраической энтропии и теоремы 2.7 получаем следующую теорему.

**Теорема 2.8.** (Э. Мэннинг, [39]) *Топологическая энтропия непрерывного отображения  $f$  компактного многообразия  $X$  не меньше алгебраической энтропии индуцированного эндоморфизма  $f_*$  группы одномерных гомологий  $H_1(X)$ :*

$$h(f) \geq h_a(f_*).$$

## 2.4 Определение энтропии кос

Рассмотрим естественный гомоморфизм  $f : B_n \rightarrow \text{Homeot}(M)$ .

**Определение 2.14.** Энтропией косы  $\beta \in B_n$  называется точная нижняя грань топологической энтропии гомеоморфизмов, отвечающих косе при гомоморфизме  $f$ :

$$h(\beta) = \inf\{h(\varphi) \mid \varphi \in f(\beta)\}.$$

Согласно классификации Нильсена-Тёрстона (см. §1.6) все косы делятся на периодические, псевдоаносовские и приводимые.

Если коса  $\beta$  периодическая, то в классе  $f(\beta)$  существует периодический представитель с нулевой топологической энтропией, и поскольку меньше уже быть не может, то энтропия любой периодической косы равна нулю.

Если коса  $\beta$  псевдоаносовская, то её энтропия равна  $\ln \lambda$ , где  $\lambda$  — коэффициент растяжения псевдоаносовского гомеоморфизма в классе  $f(\beta)$ . Этот факт является следствием теоремы 2.5 и следующей теоремы.

**Теорема 2.9** ([30], Exposé 10). *Псевдоаносовский гомеоморфизм  $f$  имеет минимальную топологическую энтропию среди всех изотопных ему гомеоморфизмов, причём  $h(f) = h_a(f_\#)$ , где  $f_\#$  — индуцированный автоморфизм фундаментальной группы.*

Из этой же теоремы следует, что если коса приводимая, то её энтропия вычисляется по формуле в предложении 2.6:

$$h(\beta) = \ln \max \left\{ 1, \sqrt[n_1]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[n_s]{\lambda_s} \right\}, \quad (2.3)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  — коэффициенты растяжения псевдоаносовских составляющих косы с периодами  $n_1, \dots, n_s$  соответственно.

Напомним, что каждая коса  $\beta \in B_n$  задаёт некоторый автоморфизм свободной группы  $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , который мы условились также обозначать через  $\beta$  (см. §1.2).

В силу определения энтропии косы и теорем 2.7 и 2.9 получаем следующее равенство:

$$h(\beta) = h_a(\beta). \quad (2.4)$$



Здесь  $h(\beta)$  обозначает энтропию косы  $\beta$ , а  $h_a(\beta)$  — алгебраическую энтропию косового автоморфизма свободной группы.

**Определение 2.15.** Матрицей автоморфизма  $\beta : F_n \rightarrow F_n$  будем называть  $n \times n$ -матрицу  $A_\beta = (a_{ij})$ , где  $a_{ij}$  — неотрицательное целое число, равное количеству букв  $x_j^{\pm 1}$  в редуцированном слове  $(x_i)\beta$ .

**Определение 2.16.** Норму матрицы  $A_\beta = (a_{ij})$  определим следующим равенством

$$\|A_\beta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Обозначив через  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  семейство образующих свободной группы  $F_n$ , в обозначениях §2.3 получаем

$$\|A_\beta\| = \max_{1 \leq i \leq k} \{L_S((x_i)\beta)\}.$$

Откуда по свойству 1 алгебраической энтропии и равенству (2.4) приходим к следующему выражению для энтропии косы:

$$h(\beta) = \ln \lim_{p \rightarrow +\infty} \|A_{\beta^p}\|^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

## 2.5 Оценка энтропии кос

Для вещественных матриц  $A$  и  $B$  введём отношение частичного порядка, а именно, будем считать, что  $A \leq B$  тогда и только тогда, когда эти матрицы имеют одинаковый размер  $m \times n$

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

и каждый элемент матрицы  $A$  не больше соответствующего элемента  $B$

$$a_{ij} \leq b_{ij} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Аналогично, строгое неравенство  $A < B$  означает, что для всех соответствующих элементов этих матриц выполняется строгое неравенство.

Напомним, что матрица автоморфизма  $\beta : F_n \rightarrow F_n$  обозначается  $A_\beta$ . Кроме того, для соответствия тем соглашениям, которые были установлены для

косовых автоморфизмов в §1.2, будем считать, что в композиции  $\beta_1\beta_2$  первым действует автоморфизм  $\beta_1$ , а уже потом  $\beta_2$ .

**Предложение 2.10.** Пусть  $A_{\beta_1} = (a'_{ij})$  и  $A_{\beta_2} = (a''_{ij})$  — матрицы автоморфизмов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  свободной группы  $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Тогда

$$A_{\beta_1\beta_2} \leq A_{\beta_1}A_{\beta_2}.$$

*Доказательство.* Будем обозначать элементы матрицы  $A_{\beta_1\beta_2}$  через  $\tilde{a}_{ij}$ . Для фиксированных  $i$  и  $j$  элемент  $\tilde{a}_{ij}$  равен количеству букв  $x_j^{\pm 1}$  в редуцированном слове  $(x_i)\beta_1\beta_2$ .

Количество букв  $x_k^{\pm 1}$  в редуцированном слове  $(x_i)\beta_1$  равно  $a'_{ik}$ . При действии автоморфизма  $\beta_2$  на каждую такую букву получаем  $a''_{kj}$  букв  $x_j^{\pm 1}$ . Так что за счёт букв  $x_k^{\pm 1}$  в слове  $(x_i)\beta_1$  имеем  $a'_{ik}a''_{kj}$  букв  $x_j^{\pm 1}$  в слове  $(x_i)\beta_1\beta_2$ . Суммируя теперь по  $k$ , получаем, что общее число букв  $x_j^{\pm 1}$  в слове  $(x_i)\beta_1\beta_2$  равно

$$\sum_{k=1}^n a'_{ik}a''_{kj}.$$

Часть этих букв может сократиться в результате редукции, поэтому

$$\tilde{a}_{ij} \leq \sum_{k=1}^n a'_{ik}a''_{kj}.$$

□

**Следствие 2.11.** Для матрицы  $A_\beta$  автоморфизма  $\beta : F_n \rightarrow F_n$  справедливо неравенство  $A_{\beta^p} \leq A_\beta^p$  для любого  $p \in \mathbb{N}$ .

Объединяя следствие 2.11 и определение 2.16, получаем следующее неравенство для нормы матрицы  $A_\beta$ :

$$\|A_{\beta^p}\| \leq \|A_\beta^p\|,$$

откуда с учётом выражения (2.5) для энтропии косы и формулы Гельфанда (см. теорему 1.9 и после неё замечание 1.3) выводим:

$$h(\beta) \leq \ln \lim_{p \rightarrow +\infty} \|A_\beta^p\|^{\frac{1}{p}} = \ln R(A_\beta),$$

где  $R(A_\beta)$  — спектральный радиус матрицы  $A_\beta$ .

Полученное неравенство даёт верхнюю оценку энтропии косы:

$$h(\beta) \leq \ln R(A_\beta). \quad (2.6)$$

Обозначим через  $B_\beta(t)$  матрицу Бурау косы  $\beta$  (см. §1.3). Напомним, что элементы матрицы  $B_\beta(t)$  являются полиномами Лорана от переменной  $t$ .

Из леммы 1.2 для  $t \in \mathbb{C}$ ,  $|t| = 1$  с очевидностью следует справедливость следующего неравенства (здесь норма матриц понимается в соответствии с определением 2.16):

$$\|B_{\beta^p}(t)\| \leq \|A_{\beta^p}\|.$$

Отсюда с учётом равенства  $B_{\beta^p}(t) = B_\beta^p(t)$  получается нижняя оценка энтропии косы:

$$h(\beta) \geq \ln \sup_{t \in S^1} \{R(B_\beta(t))\}, \quad (2.7)$$

где  $R(B_\beta(t))$  — спектральный радиус матрицы Бурау. Данная оценка была получена в 1986 году Д. Фрайдом ([31]) и в 1989 году Б. Колевым ([36]).

Объединяя (2.6) и (2.7), получаем двойную оценку:

$$\ln \sup_{t \in S^1} \{R(B_\beta(t))\} \leq h(\beta) \leq \ln R(A_\beta).$$

Нижняя оценка энтропии косы может быть расширена на все ненулевые комплексные значения параметра  $t$  следующим образом.

Для косы  $\beta \in B_n$  обозначим через  $M_{ij}(\beta)$  множество таких  $k \in \mathbb{Z}$ , что  $t^k$  встречается в элементе  $b_{ij}$  матрицы Бурау  $B_\beta(t) = (b_{ij})$  с ненулевым коэффициентом. Положим также:

$$M(\beta) = \bigcup_{1 \leq i, j \leq n} M_{ij}(\beta)$$

и

$$m(\beta, |t|) = \begin{cases} \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\max M(\beta^p)}{p}, & \text{если } |t| \geq 1, \\ \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\min M(\beta^p)}{p}, & \text{если } 0 < |t| < 1. \end{cases}$$

**Теорема 2.12** ([45]). *Для косы  $\beta \in B_n$  имеет место следующая нижняя оценка энтропии:*

$$h(\beta) \geq \ln \sup \left\{ R(B_\beta(t)) \cdot |t|^{-m(\beta, |t|)} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $|t| \geq 1$ . Случай  $0 < |t| < 1$  рассматривается аналогично. Для элемента  $b_{ij}$  матрицы  $B_\beta(t)$  имеем:

$$|b_{ij}| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \cdot |t|^k.$$

Так как лишь конечное число  $c_k \neq 0$  и  $|t| \geq 1$ , то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \cdot |t|^k \leq |t|^{\max M_{ij}(\beta)} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|.$$

Из доказательства леммы 1.2 следует, что для матрицы  $A_\beta = (a_{ij})$  справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \leq a_{ij}.$$

Объединяя три последних неравенства, получаем:

$$|b_{ij}| \leq |t|^{\max M_{ij}(\beta)} \cdot a_{ij}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \|B_\beta(t)\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |t|^{\max M_{ij}(\beta)} \cdot a_{ij} \right\} \leq \\ &\leq |t|^{\max M(\beta)} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = |t|^{\max M(\beta)} \cdot \|A_\beta\|. \end{aligned}$$

Заменяем  $\beta$  на  $\beta^p$ :

$$\|B_{\beta^p}(t)\| \leq |t|^{\max M(\beta^p)} \cdot \|A_{\beta^p}\|.$$

Так как  $B_{\beta^p}(t) = B_\beta^p(t)$ , то, извлекая корень степени  $p$  и устремляя  $p \rightarrow +\infty$ , получаем:

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \|B_\beta^p(t)\|^{\frac{1}{p}} \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \left\{ |t|^{\frac{\max M(\beta^p)}{p}} \cdot \|A_{\beta^p}\|^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Отсюда

$$R(B_\beta(t)) \leq |t|^{\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\max M(\beta^p)}{p}} \cdot \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \|A_{\beta^p}\|^{\frac{1}{p}} \right\},$$

что и завершает доказательство нижней оценки энтропии.  $\square$

**Теорема 2.13.** *Оценка энтропии кос из теоремы 2.12 усиливает оценку Фрайда-Колева (2.7) для тех кос, для которых справедливо одно из следующих соотношений:*

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\max M(\beta^p)}{p} < 0 \quad \text{или} \quad \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\min M(\beta^p)}{p} > 0.$$

*Доказательство.* Ясно, что усиление этой оценки по сравнению с (2.7) будет для тех  $t \in \mathbb{C}$ , для которых выполняется одно из следующих условий:

- $|t| > 1$  и  $m(\beta, |t|) < 0$ ,
- $0 < |t| < 1$  и  $m(\beta, |t|) > 0$ ,

другими словами, когда справедливо одно из следующих неравенств:

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\max M(\beta^p)}{p} < 0 \quad \text{или} \quad \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{\min M(\beta^p)}{p} > 0.$$

□

## 2.6 Вычисление энтропии кос

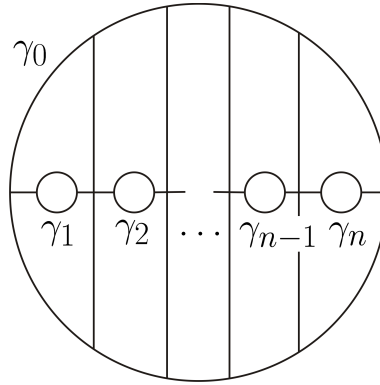
Для энтропии кос существует формула (2.5), однако она не подходит для вычисления энтропии. В то же время, объединяя все рассмотренные выше алгоритмы, несложно сконструировать алгоритм вычисления энтропии кос. Он будет состоять из следующих шагов.

1. Используя описанные в параграфе 1.7 алгоритмы, проверить, является ли заданная коса  $\beta$  периодической или приводимой, и если коса приводимая, то разложить её на неприводимые составляющие.
2. Если коса периодическая или приводимая, все составляющие которой периодические, то её энтропия равна нулю.
3. Если коса псевдоаносовская или приводимая, у которой есть псевдоаносовские составляющие, то с помощью алгоритма из параграфа 1.9 вычислить коэффициенты растяжения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  всех псевдоаносовских составляющих, и далее энтропия косы находится по формуле (2.3).

Описанный алгоритм вычисления энтропии кос, очевидно, не является эффективным.

В 2006 году Ж.-О. Муссафир ([41]) предложил другой способ нахождения энтропии кос. Пусть, как и ранее в первой главе,  $M$  — замкнутый двумерный диск, из внутренности которого удалены  $n$  открытых дисков,  $n \geq 2$ .

Рассмотрим два семейства дуг (одно состоит из горизонтальных дуг, другое — из вертикальных) с концами на компонентах края поверхности  $M$ , расположенных так, как показано на рисунке.



Обозначим через  $L$  множество вертикальных дуг, рассматриваемых с точностью до изотопии, неподвижной на  $\gamma_0$ .

Для косы  $\beta \in B_n$  образ  $(L)\beta$  представляет собой множество дуг на поверхности  $M$  с теми же концами, что и у  $L$ . Множество  $(L)\beta$  также определено с точностью до неподвижной на  $\gamma_0$  изотопии.

Через  $c((L)\beta)$  обозначим минимальное (в классе неподвижной на  $\gamma_0$  изотопии множества  $(L)\beta$  число трансверсальных пересечений  $(L)\beta$  с семейством горизонтальных дуг, изображённым на рисунке.

Ж.-О. Муссафир ([41]) показал, что энтропия косы  $\beta$  совпадает с показателем экспоненциального роста последовательности  $(c((L)\beta^k))_{k \in \mathbb{N}}$ :

$$h(\beta) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln c((L)\beta^k).$$

Заметим, что построить на основе данного выражения алгоритм вычисления энтропии невозможно, поскольку не исследовано, как быстро сходится к пределу рассматриваемая в данном выражении последовательность.

## Глава 3

# Косы из трёх нитей

### 3.1 Группа гомеотопий двумерного тора

Рассмотрим ориентированный двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  как факторповерхность ориентированной двумерной плоскости  $\mathbb{R}^2$  по целочисленной решётке  $\mathbb{Z}^2$ . Известно ([13], [7]), что группа гомеотопий тора  $\mathbb{T}^2$  изоморфна  $SL_2(\mathbb{Z})$ :

$$MCG(\mathbb{T}^2) \sim SL_2(\mathbb{Z}).$$

Всякая гомеотопия (изотопический класс сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) тора  $\mathbb{T}^2$  имеет представитель, который задаётся матрицей  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Характеристическое уравнение матрицы  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  имеет вид:

$$\lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + 1 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{\text{tr}^2 A - 4}}{2}. \quad (3.1)$$

В зависимости от следа матрицы  $A$  различают три типа гомеоморфизмов тора:

1. периодические, для которых  $|\text{tr} A| < 2$ ;
2. приводимые, для которых  $|\text{tr} A| = 2$ ;
3. гиперболические (или гомеоморфизмы Аносова), для которых  $|\text{tr} A| > 2$ .

Несложно проверить, что для периодического гомеоморфизма некоторая его степень тождественна. Для приводимого гомеоморфизма существует инвариантная простая замкнутая кривая на торе, которой на плоскости  $\mathbb{R}^2$  соответствует прямая, проходящая через начало координат в направлении собственного вектора матрицы  $A$ . И приводимый гомеоморфизм тора с точностью до изотопии есть скручивание Дэна вдоль этой кривой.

Для гиперболического гомеоморфизма у матрицы  $A$  существует два вещественных собственных значения  $\lambda$  и  $\lambda^{-1}$  и два неколлинеарных собственных вектора  $v_1$  и  $v_2$ , определяющих на плоскости  $\mathbb{R}^2$  два семейства параллельных прямых, которым на торе соответствуют два трансверсальных слоения. При этом вдоль одного из этих слоений при действии гомеоморфизма все расстояния увеличиваются в  $|\lambda|$  раз, а вдоль другого слоения — во столько же раз уменьшаются.

### 3.2 Представление $B_3$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Рассмотрим гомеоморфизм двумерного тора  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  на себя, определяемый матрицей  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Этот гомеоморфизм, очевидно, коммутирует с отображением  $-\mathrm{Id}$  и поэтому корректно задаёт гомеоморфизм факторповерхности  $M = \mathbb{T}^2/(-\mathrm{Id})$ . Поверхность  $M$  диффеоморфна сфере с четырьмя особыми точками  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , которым на торе соответствуют точки с координатами  $(0, \frac{1}{2})$  и  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (0; 0)$ .

Обозначим  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  и  $\mathrm{MCG}(M, P, p_4)$  — группа классов отображений сферы  $M$ , оставляющих инвариантным множество  $P$  и неподвижной точку  $p_4$ . Получаем естественный гомоморфизм группы классов отображений 2-тора  $\mathbb{T}^2$  в группу  $\mathrm{MCG}(M, P, p_4)$ :

$$\mathrm{MCG}(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathrm{MCG}(M, P, p_4). \quad (3.2)$$

Обозначим через  $h_1$  и  $h_2$  классы отображений поверхности  $M$ , соответствующие гомеоморфизмам тора  $\mathbb{T}^2$ , определяемым соответственно матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Рассмотрим две прямые на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , определяемые уравнениями  $y = \frac{1}{4}$  и  $x = \frac{1}{4}$ . Этим прямым соответствуют две замкнутые кривые на торе  $\mathbb{T}^2$  и сфере  $M$ . Обозначим эти кривые на сфере  $M$  через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Несложно заметить, что представителем класса отображений  $h_1$  является полускручивание Дэна вдоль кривой  $\gamma_1$ , которое меняет местами проколотые точки  $p_1$  и  $p_2$ . Представителем класса  $h_2$  является полускручивание Дэна вдоль  $\gamma_2$ , меняющее  $p_2$  и  $p_3$ .

Группа  $\text{MCG}(M, P, p_4)$ , очевидно, изоморфна группе  $B_3/\Delta^2$ . Зафиксируем такой изоморфизм, при котором гомеотопиям  $h_1$  и  $h_2$  соответствуют косы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\text{MCG}(M, P, p_4) \sim B_3/\Delta^2, \quad h_1 \sim \sigma_1, \quad h_2 \sim \sigma_2.$$

Таким образом, определённым выше матрицам  $A_1$  и  $A_2$  соответствуют косы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . И поскольку эти косы порождают всю группу  $B_3/\Delta^2$ , то всякой косе соответствует некоторая матрица из  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . В частности, косе  $\Delta^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$  соответствует матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда возникает представление группы  $B_3/\Delta^2$  в группе  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , которое каждой косе (заданной с точностью до умножения на  $\Delta^2$ ) ставит в соответствие матрицу, которая задаёт эту косу посредством гомоморфизма (3.2):

$$\psi : B_3/\Delta^2 \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Z}), \quad \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

**Теорема 3.1** ([4]). *Отображение (3.3) является изоморфизмом.*

**Теорема 3.2.** *При изоморфизме (3.3) нетривиальная периодическая, псевдоаносовская и приводимая коса отображается соответственно в периодический, аносовский и приводимый диффеоморфизм тора. При этом коэффициент дилатации  $\lambda$  псевдоаносовской косы равен аналогичному коэффициенту аносовского гомеоморфизма тора.*

*Доказательство.* В соответствии с теоремой 1.7 для кос из трёх нитей только тривиальная коса является периодической косой, которая имеет приводящую

систему окружностей. Нетривиальная периодическая коса  $\beta$  в некоторой степени совпадает с  $\Delta^{2k}$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, соответствующая косе  $\beta$  матрица из  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  в некоторой степени даёт плюс-минус единичную матрицу, и значит, задаёт периодический гомеоморфизм тора. Для приводимой косы на сфере  $M$  существует приводящая окружность, которая поднимается до простой замкнутой кривой на торе  $\mathbb{T}^2$ . Следовательно, соответствующая матрица задаёт приводимый гомеоморфизм тора. Наконец, псевдоаносовская коса определяет два трансверсальных инвариантных слоения на сфере  $M$ , которые поднимаются до аналогичных слоений на торе.  $\square$

**Теорема 3.3.** *Для нетривиальной периодической косы  $\beta$  из трёх нитей след матрицы  $\psi(\beta)$  по абсолютной величине меньше 2, для приводимой косы — равен 2, для псевдоаносовской косы — больше 2.*

*Доказательство.* Данная теорема является простым следствием теоремы 3.2 и классификации гомеотопий тора, описанной в параграфе 3.1.  $\square$

**Теорема 3.4.** *Энтропия псевдоаносовской косы  $\beta \in B_3$  может быть вычислена через след матрицы  $\psi(\beta)$ :*

$$h(\beta) = \ln \frac{|\mathrm{tr} \psi(\beta)| + \sqrt{\mathrm{tr}^2 \psi(\beta) - 4}}{2}. \quad (3.4)$$

*Доказательство.* Данная теорема является простым следствием теоремы 3.2, формулы 3.1 и описания аносовского гомеоморфизма тора в параграфе 3.1.  $\square$

### 3.3 Явная формула для энтропии кос из трёх нитей

Для  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\mathcal{F}_n$  семейство двоичных функций

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\},$$

у которых прообраз единицы непустой и в упорядоченном, дважды повторяющемся наборе её значений  $f(1), f(2), \dots, f(n), f(1), f(2), \dots, f(n)$  между любыми двумя единицами расположено чётное число нулей.

**Пример 3.1.** При  $n \geq 3$  функция  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\}$  такая, что  $f(1) = f(2) = 1$  и  $f(x) = 0$  для всех  $x > 2$ , принадлежит семейству  $\mathcal{F}_n$ , если  $n$  — чётное, и не принадлежит семейству  $\mathcal{F}_n$ , если  $n$  — нечётное.

Обозначим через  $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  многочлен следующего вида:

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)}. \quad (3.5)$$

Для  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  многочлен  $P_n$  выглядит следующим образом:

$$P_1(x_1) = x_1,$$

$$P_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$P_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3,$$

$$P_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$P_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_5 + x_1 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5,$$

$$P_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_1 x_6 + x_2 x_3 + x_2 x_5 + x_3 x_4 + x_3 x_6 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6.$$

Разобьём семейство  $\mathcal{F}_n$  на два подсемейства:  $\mathcal{F}_n^{\text{odd}}$  и  $\mathcal{F}_n^{\text{even}}$ . К подсемейству  $\mathcal{F}_n^{\text{odd}}$  отнесём те функции, у которых минимальный элемент полного прообраза единицы нечётный, а к подсемейству  $\mathcal{F}_n^{\text{even}}$  — все остальные функции из  $\mathcal{F}_n$ . Определим многочлены  $P_n^{\text{odd}}$  и  $P_n^{\text{even}}$ :

$$P_n^{\text{odd}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n^{\text{odd}}} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)},$$

$$P_n^{\text{even}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n^{\text{even}}} x_1^{f(1)} x_2^{f(2)} \dots x_n^{f(n)}.$$

Ясно, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место равенство:

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n^{\text{odd}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + P_n^{\text{even}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для  $n = 1, 2, 3, 4$  многочлены  $P_n^{\text{odd}}$  и  $P_n^{\text{even}}$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1^{\text{odd}}(x_1) &= x_1, & P_1^{\text{even}}(x_1) &= 0; \\ P_2^{\text{odd}}(x_1, x_2) &= x_1x_2, & P_2^{\text{even}}(x_1, x_2) &= 0; \\ P_3^{\text{odd}}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_3 + x_1x_2x_3, & P_3^{\text{even}}(x_1, x_2, x_3) &= x_2; \\ P_4^{\text{odd}}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_2x_3x_4, \\ P_4^{\text{even}}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2x_3. \end{aligned}$$

**Лемма 3.5.** Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеют место следующие рекуррентные соотношения (для краткости вместо  $P_n(x_1, \dots, x_n)$  будем писать просто  $P_n$ ):

$$\begin{aligned} P_{2n+2}^{\text{odd}} &= P_{2n}^{\text{odd}} \cdot (1 + x_{2n+1}x_{2n+2}) + x_{2n+1}x_{2n+2} + P_{2n-1}^{\text{odd}} \cdot x_{2n+2}; \\ P_{2n+1}^{\text{odd}} &= P_{2n}^{\text{odd}} \cdot x_{2n+1} + x_{2n+1} + P_{2n-1}^{\text{odd}}; \\ P_{2n+3}^{\text{even}} &= P_{2n+1}^{\text{even}} \cdot (1 + x_{2n+1}x_{2n+2}) + x_{2n+2} + P_{2n}^{\text{even}} \cdot x_{2n+2}; \\ P_{2n+2}^{\text{even}} &= P_{2n+1}^{\text{even}} \cdot x_{2n+1} + P_{2n}^{\text{even}}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Докажем первое равенство. Остальные доказываются аналогично.

Из определения многочленов  $P_n$  и  $P_n^{\text{odd}}$  непосредственно следует, что каждое слагаемое многочлена  $P_{2n+2}^{\text{odd}}$  получается из монома  $x_1x_2 \dots x_{2n+2}$  путём удаления чётного числа (возможно, и нуля) переменных, причём переменные удаляются парами, расположенными рядом относительно циклического порядка. Поэтому в каждом мономе из  $P_{2n+2}^{\text{odd}}$  содержится чётное количество переменных, и наименьший номер переменной является нечётным. Ясно, что для получения всех таких мономов нужно взять все мономы из  $P_{2n}^{\text{odd}}$ . Также нужно взять все эти же мономы и добавить к ним пару множителей  $x_{2n+1}x_{2n+2}$ . Кроме того, в  $P_{2n+2}^{\text{odd}}$  содержится моном  $x_{2n+1}x_{2n+2}$ , которого нет в  $P_{2n}^{\text{odd}}$ . Наконец, в  $P_{2n+2}^{\text{odd}}$  ещё войдут все мономы из  $P_{2n-1}^{\text{odd}}$  с добавленным к ним множителем  $x_{2n+2}$ . Добавлять этот множитель нужно, так как в мономах из  $P_{2n-1}^{\text{odd}}$  нечётное количество переменных, и добавлять нужно именно  $x_{2n+2}$ , а не  $x_{2n+1}$ , так как в каждом мономе из  $P_{2n-1}^{\text{odd}}$  наименьший номер переменной нечётный.  $\square$

**Теорема 3.6.** Для косы из трёх нитей вида  $\beta = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}$  след матрицы представления (3.3) может быть вычислен по формуле:

$$\mathrm{tr} \psi(\beta) = 2 + P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s),$$

где  $P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s)$  — многочлен вида (3.5).

*Доказательство.* Рассмотрим косу из трёх нитей

$$\beta_n = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_n} \sigma_2^{-m_n}.$$

Введём обозначения для элементов матрицы  $\psi(\beta_n)$ :

$$\psi(\beta_n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Тогда прямыми вычислениями получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + k_1 m_1, & b_1 &= k_1, & c_1 &= m_1, & d_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n + a_n k_{n+1} m_{n+1} + b_n m_{n+1}, & b_{n+1} &= a_n k_{n+1} + b_n, \\ c_{n+1} &= c_n + c_n k_{n+1} m_{n+1} + d_n m_{n+1}, & d_{n+1} &= c_n k_{n+1} + d_n. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму 3.5, имеем:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + P_{2n}^{\mathrm{odd}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n), \\ b_n &= P_{2n-1}^{\mathrm{odd}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_{n-1}, m_{n-1}, k_n), \\ c_n &= P_{2n+1}^{\mathrm{even}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n, k_{n+1}), \\ d_n &= 1 + P_{2n}^{\mathrm{even}}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_n, m_n). \end{aligned}$$

И так как  $\mathrm{tr} \psi(\beta_n) = a_n + d_n$ , теорема доказана. □

*Замечание 3.1.* Объединение теорем 3.3 и 3.6 даёт эффективный способ определения типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона в случае трёх нитей за время порядка  $O(l)$ , где  $l$  есть длина задающего косу входного слова в образующих  $\sigma_i$ .

Энтропия периодических и приводимых кос из трёх нитей, очевидно, равна нулю. Энтропия псевдоаносовской косы из трёх нитей, согласно теореме 3.4, может быть вычислена через след матрицы представления (3.3). Отсюда теорема.

**Теорема 3.7.** *Энтропия псевдоаносовской косы  $\beta$  из трёх нитей вида*

$$\beta = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}$$

*может быть вычислена по формуле:*

$$h(\beta) = \ln \frac{|2 + P| + \sqrt{(2 + P)^2 - 4}}{2},$$

где  $P = P_{2s}(k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s)$  — многочлен вида (3.5).

*Доказательство.* Данная теорема получается как следствие из теорем 3.4 и 3.6. □

### 3.4 Свойства многочленов $P_n$

Рассмотрим свойства многочленов  $P_n$ , определённых в предыдущем параграфе.

**Теорема 3.8.** *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеют место следующие равенства:*

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_2, \dots, x_n, x_1);$$

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_n, \dots, x_2, x_1);$$

$$P_{n+2}^{\text{even}}(x_1, \dots, x_{n+2}) = P_n^{\text{odd}}(x_2, \dots, x_{n+1}).$$

*Доказательство.* Первые два равенства справедливы в силу того, что определение многочленов  $P_n$  симметрично относительно циклической перестановки переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а также относительно перестановки переменных вида:  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_n, \dots, x_1)$ .

Третье равенство напрямую следует из определения многочленов  $P_n^{\text{odd}}$  и  $P_n^{\text{even}}$ . Все мономы полинома  $P_{n+2}^{\text{even}}(x_1, \dots, x_{n+2})$  получаются из монома  $x_1 x_2 \dots x_{n+2}$  путём удаления из него чётного числа переменных, причём среди

оставшихся переменных наименьший номер должен быть чётным. Поэтому в  $P_{n+2}^{\text{even}}$  не может быть мономов, содержащих  $x_1$  или  $x_{n+2}$ . С другой стороны, в каждом мономе полинома  $P_n^{\text{odd}}(x_2, \dots, x_{n+1})$  наименьший номер переменной также должен быть чётным, поскольку номера переменных начинаются с 2. Отсюда и следует справедливость третьего равенства.  $\square$

*Замечание 3.2.* Первые два равенства из последней теоремы можно с учётом теоремы 3.7 переписать как равенства на энтропию кос:

$$\begin{aligned} h(\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}) &= h(\sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s} \sigma_1^{k_1}), \\ h(\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_2} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}) &= h(\sigma_2^{-m_s} \sigma_1^{k_s} \dots \sigma_2^{-m_2} \sigma_1^{k_2} \sigma_2^{-m_1} \sigma_1^{k_1}). \end{aligned}$$

Здесь первое равенство фактически означает, что энтропия псевдоаносовских кос не меняется при сопряжении.

**Теорема 3.9.** *Для любых  $n, k \in \mathbb{N}$  имеет место равенство:*

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{n+2k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2k}).$$

*Доказательство.* Среди мономов полинома  $P_{n+2k}(x_1, x_2, \dots, x_{n+2k})$ , очевидно, присутствуют все мономы полинома  $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а также мономы, содержащие переменные с номерами, начиная с  $n+1$ . Но поскольку все такие переменные полагаются равными нулю, то всё доказано.  $\square$

*Замечание 3.3.* Равенство из последней теоремы также можно с учётом теоремы 3.7 переписать как почти очевидное равенство на энтропию кос:

$$h(\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s}) = h(\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{-m_1} \dots \sigma_1^{k_s} \sigma_2^{-m_s} \underbrace{\sigma_1^0 \sigma_2^0 \dots \sigma_1^0 \sigma_2^0}_{2k}).$$

**Теорема 3.10.** *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место следующее равенство:*

$$\frac{\partial P_n}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{n-1}^{\text{odd}}(x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{k-1}) + (n \bmod 2),$$

где последнее слагаемое есть вычет по модулю 2 числа  $n$ .

*Доказательство.* Частная производная  $\partial P_n / \partial x_k$  представляет собой многочлен, который получается из многочлена  $P_n$ , если взять все слагаемые, содержащие  $x_k$  и убрать из них  $x_k$ . Все мономы полинома  $P_n$  получаются из монома  $x_1 x_2 \dots x_n$  путём удаления из него чётного числа переменных, причём переменные удаляются парами, расположенными рядом относительно циклического порядка. В силу последнего свойства для каждого содержащего  $x_k$  монома полинома  $P_n$  следующая в циклическом порядке номеров переменная, которую содержит этот моном, должна быть той, которая стоит на нечётной позиции в списке  $(x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{k-1})$ . Ясно, что многочлен  $\partial P_n / \partial x_k$  содержит все возможные мономы, которые получаются таким путём из мономов полинома  $P_n$ , т.е. содержит все мономы из  $P_{n-1}^{\text{odd}}(x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{k-1})$ . Кроме того, при нечётном  $n$  полином  $P_n$  содержит также моном из одной переменной  $x_k$ , производная от которого по  $x_k$  равна 1. Поэтому к правой части равенства надо ещё добавить  $(n \bmod 2)$ .  $\square$

Опишем теперь связь многочленов  $P_n$  с циклическими многогранниками.

**Определение 3.1.** *Циклическим многогранником  $C_d(n)$  называется выпуклая оболочка  $n$  точек в  $d$ -мерном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^d$ , лежащих на кривой  $x(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ .*

Известно ([14]), что  $n$  точек из определения циклического многогранника являются его вершинами. Каждой вершине отвечает некоторое вещественное значение параметра  $t$ . Соответственно на множестве вершин возникает естественный линейный порядок — по возрастанию параметра  $t$ . И вершины можно пронумеровать числами от 1 до  $n$ .

Также известно, что каждая гипергрань циклического многогранника содержит ровно  $d$  вершин, и для номеров этих вершин выполняется так называемое “условие чётности Гейла”.

**Теорема 3.11** (условие чётности Гейла, [14]). *Пусть  $n > d \geq 2$ . Будем обозначать множество  $\{1, \dots, n\}$  через  $[n]$ . Выберем вещественные параметры  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Циклический многогранник  $C_d(n) = \text{conv}\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$  является симплицальным  $d$ -многогранником, причём  $d$ -подмножество  $S \subseteq$*



$[n]$  образует его гипергрань, если и только если выполнено следующее “условие чётности”: если  $i < j$  не входят в  $S$ , то количество чисел  $k \in S$  между  $i$  и  $j$  чётно.

Видим, что условие чётности Гейла, которому удовлетворяют вершины циклического многогранника, принадлежащие одной гипергранни, совпадает с условием, которому удовлетворяют переменные, принадлежащие одному монному полиному  $P_n$ . Это совпадение можно описать следующим образом.

Пусть  $n > d \geq 2$ . Для каждой гипергранни циклического многогранника  $C_d(n)$  определим *характеристическую функцию*  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\}$ , где  $f(x) = 0$ , если  $x$  является номером вершины, принадлежащей данной гипергранни, и  $f(x) = 1$  в противном случае. Тогда функция  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0; 1\}$  является характеристической для некоторой гипергранни циклического многогранника  $C_d(n)$  тогда и только тогда, когда полный прообраз нуля состоит из  $d$  элементов и  $f \in \mathcal{F}_n$ , где  $\mathcal{F}_n$  — семейство двоичных функций, введённое в предыдущем параграфе.

### 3.5 Распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону из трёх нитей

Пусть  $\beta$  есть приводимая коса из трёх нитей. Приводящая система окружностей для такой косы состоит, очевидно, всего из одной компоненты, охватывающей две из трёх граничных компонент. Третью компоненту границы коса оставляет инвариантной. Отсюда теорема.

**Теорема 3.12.** *Непериодическая коса из трёх нитей, порождающая на множестве нитей транзитивную перестановку (т. е. перестановку, состоящую из одного цикла длины 3), является псевдоаносовской.*

Заметим, что транзитивность перестановки является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы коса была псевдоаносовской.

Предположим для определённости, что у приводимой косы  $\beta$  приводящая окружность охватывает граничные компоненты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Покажем, что тогда

косу  $\beta$  можно представлять как движение нити, которая отвечает инвариантной компоненте  $\gamma_3$ , вокруг двух других нитей, которые можно считать неподвижными.

Представим поверхность  $M$  в виде двумерного диска на евклидовой плоскости, причём условимся, что компоненты границы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  расположены горизонтально в ряд (см. рис. 3.1).

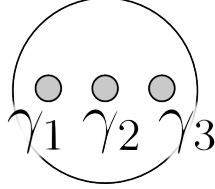


Рис. 3.1:

Соответственно будем говорить, что нить, отвечающая компоненте  $\gamma_1$ , расположена слева, компоненте  $\gamma_2$  — по центру и компоненте  $\gamma_3$  — справа. Таким образом, изначально нить, движение которой отслеживается, расположена справа. Будем кодировать это движение следующим образом.

Если отслеживаемая нить расположена справа, то обозначим

$$u := \sigma_2 \sigma_1, \quad r := \sigma_2 \sigma_2.$$

Схематично движение отслеживаемой нити при действии данных кос показано на рис. 3.2.

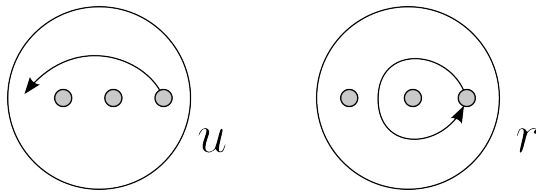


Рис. 3.2:

В результате применения косы  $u$  нить сместится влево, в случае же косы  $r$  — останется справа.

Если нить расположена слева, то обозначим

$$d := \sigma_1 \sigma_2, \quad l := \sigma_1 \sigma_1.$$

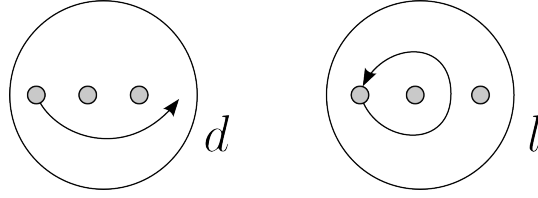


Рис. 3.3:

Схематично движение отслеживаемой нити при действии данных кос показано на рис. 3.3.

В результате применения косы  $d$  нить сместится вправо, в случае же косы  $l$  — останется слева.

Далее если отслеживаемая нить находится справа и применяется коса  $\sigma_1^{\pm 1}$ , то это означает движение первых двух нитей, находящихся внутри приводящей окружности. Будем кодировать эту ситуацию следующим образом:

$$\sigma_1 = d^{-1}\Delta, \quad \sigma_1^{-1} = u\Delta^{-1}.$$

Цель подобного кодирования в том, что и здесь движется нить, расположенная вне приводящей окружности, только при этом будут возникать дополнительные сомножители  $\Delta$ .

Аналогично, если отслеживаемая нить находится слева, то:

$$\sigma_2 = u^{-1}\Delta, \quad \sigma_2^{-1} = d\Delta^{-1}.$$

Введём ещё следующие обозначения:

$$a := \sigma_2\sigma_1^{-1}, \quad b := \sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

Схематично движение отслеживаемой нити при действии данных кос показано на рис. 3.4.

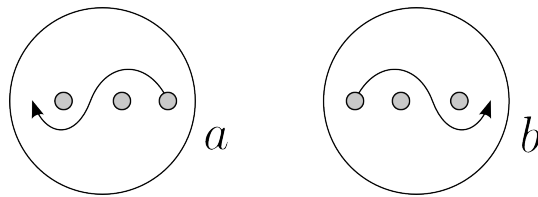


Рис. 3.4:

В процессе кодирования косы будем отслеживать позицию инвариантной нити, отмечая её нижним индексом «л» (означающим, что инвариантная нить расположена слева) или «п» (инвариантная нить расположена справа). Изначально индекс «л» или «п» находится в слове перед первой буквой. Например, если инвариантная нить вначале расположена справа, то:

$$\beta = {}_{\text{п}}\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}.$$

Перемещаясь по образующим, будем записывать косу в виде слова в алфавите  $\mathcal{F} = \{u^{\pm 1}, d^{\pm 1}, r^{\pm 1}, l^{\pm 1}, a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \Delta^{\pm 1}\}$  с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} {}_{\text{п}}\sigma_1 &= d^{-1}\Delta_{\text{п}}, & {}_{\text{п}}\sigma_1^{-1} &= u\Delta_{\text{п}}^{-1}, \\ {}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1 &= u_{\text{л}}, & {}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1^{-1} &= a_{\text{л}}, & {}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_2 &= r_{\text{п}}, \\ {}_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_1 &= b_{\text{л}}^{-1}, & {}_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} &= d_{\text{л}}^{-1}, & {}_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1} &= r_{\text{п}}^{-1}, \\ {}_{\text{л}}\sigma_2 &= u^{-1}\Delta_{\text{л}}, & {}_{\text{л}}\sigma_2^{-1} &= d\Delta_{\text{л}}^{-1}, \\ {}_{\text{л}}\sigma_1\sigma_2 &= d_{\text{п}}, & {}_{\text{л}}\sigma_1\sigma_2^{-1} &= a_{\text{п}}^{-1}, & {}_{\text{л}}\sigma_1\sigma_1 &= l_{\text{л}}, \\ {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_2 &= b_{\text{п}}, & {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} &= u_{\text{п}}^{-1}, & {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1} &= l_{\text{л}}^{-1}. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что данные преобразования исчерпывают все возможные варианты расположения букв  $\sigma_1^{\pm 1}$  и  $\sigma_2^{\pm 1}$  и инвариантной нити. В самом деле, если текущая позиция этой инвариантной нити — «справа», в косе не может остаться одна буква  $\sigma_2^{\pm 1}$ . Аналогично, если эта нить слева, то не может остаться одна буква  $\sigma_1^{\pm 1}$ .

**Пример 3.2.** Представим косу  $\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$  в виде слова в алфавите  $\mathcal{F}$ . Эта коса меняет местами левую и центральную нити, оставляя инвариантной правую нить. Поэтому будем записывать косу в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение правой нити.

Вначале имеем

$${}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

В соответствии с перечисленными выше преобразованиями  ${}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1$  меняется на  $u_{\text{л}}$ :

$$u_{\text{л}}\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

Затем  ${}_l\sigma_1^2$  меняется на  $l_l$  и так далее:

$$ul_l\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2 = ulu^{-1}\Delta_l\sigma_1^{-1}\sigma_2 = ulu^{-1}\Delta b_\Pi.$$

**Теорема 3.13.** *Любая коса из трёх нитей может быть за время  $O(l)$  записана как слово в алфавите  $\mathcal{F} = \{u^{\pm 1}, d^{\pm 1}, r^{\pm 1}, l^{\pm 1}, a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \Delta^{\pm 1}\}$ , где  $l$  есть длина входного слова в классических образующих Артина  $\sigma_i$ .*

*Доказательство.* Предположим, что коса  $\beta$  оставляет инвариантной левую или правую нить. Используя указанные выше преобразования, её можно записать в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение инвариантной нити. При этом, очевидно, для преобразования входного слова достаточно его один раз полностью пройти. Поэтому трудоёмкость такого преобразования есть  $O(l)$ .

Более того, любая коса из трёх нитей, в результате действия которой левая нить переходит направо или правая налево, также может быть представлена в виде слова в алфавите  $\mathcal{F}$ . А это верно для любой косы из трёх нитей. Таким образом, любую косу из трёх нитей можно представить в виде слова в алфавите  $\mathcal{F}$ .  $\square$

*Замечание 3.4.* Если коса оставляет инвариантной центральную нить, а левую и правую нити она либо оставляет инвариантными, либо переводит друг в друга, то такую косу можно представить в виде слова в алфавите  $\mathcal{F}$  двумя способами: отслеживая движение левой нити или правой.

Для слов в алфавите  $\mathcal{F}$  условимся все буквы  $\Delta^{\pm 1}$  перемещать в конец слова. Для этого рассмотрим, как действует внутренний автоморфизм  $\tau$  (сопряжение косою Гарсайда) на элементах множества  $\mathcal{F}$ :

$$u \xleftrightarrow{\tau} d, \quad r \xleftrightarrow{\tau} l, \quad a \xleftrightarrow{\tau} a^{-1}, \quad b \xleftrightarrow{\tau} b^{-1}.$$

Теперь для перемещения букв  $\Delta^{\pm 1}$  в конец слова можно использовать следующее равенство:

$$\Delta^{\pm 1}\beta = \tau(\beta)\Delta^{\pm 1}.$$

**Пример 3.3.** Рассмотрим слово  $ulu^{-1}\Delta b$ . Переместим букву  $\Delta$  в конец слова (при этом  $b$  изменится на  $b^{-1}$ ):  $ulu^{-1}b^{-1}\Delta$ . Полученное слово можно реду-

цировать: в силу легко проверяемого равенства  $lu^{-1} = a^{-1}$  получаем слово  $ua^{-1}b^{-1}\Delta$ .

Обратим внимание на геометрический смысл редуцирования слова в алфавите  $\mathcal{F}$ . Для этого рассмотрим путь, который рисует инвариантная нить, изначально расположенная справа, при действии косы  $ulu^{-1}b^{-1}$  (см. рис. 3.5 слева).

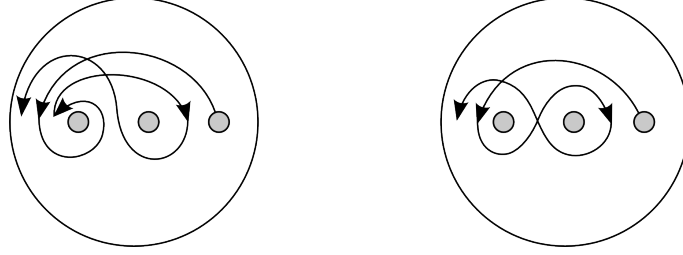


Рис. 3.5:

Как видим, этот путь содержит шип в месте соединения отрезков пути, отвечающих буквам  $l$  и  $u^{-1}$ . Устранив этот шип, получим вместо него отрезок пути, отвечающий букве  $a^{-1}$  (см. рис. 3.5 справа). Таким образом, слово  $ulu^{-1}b^{-1}$  редуцируется до  $ua^{-1}b^{-1}$ .

В общем случае любое слово  $w$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , задающее косу, также определяет путь той нити, движение которой отслеживалось при составлении слова  $w$ . Будем обозначать этот путь через  $\gamma(w)$ . Путь  $\gamma(w)$  расположен на диске с двумя удалёнными из его внутренности открытыми дисками. Редуцирование слова  $w$  можно рассматривать как деформацию пути  $\gamma(w)$ .

При задании кос в виде слов в алфавите  $\mathcal{F}$  возникают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} ul^{-1} &= a, & ub &= r, & dr^{-1} &= a^{-1}, & db^{-1} &= l, \\ rd^{-1} &= a, & rb^{-1} &= u, & lu^{-1} &= a^{-1}, & lb &= d, \\ ad &= r, & al &= u, & br^{-1} &= u^{-1}, & bd^{-1} &= l^{-1}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

Эти соотношения проверяются прямыми вычислениями. Например:

$$ul^{-1} = \sigma_2 \sigma_1 \cdot (\sigma_1 \sigma_1)^{-1} = \sigma_2 \sigma_1^{-1} = a.$$

Из соотношений (3.6) легко получаются сокращающиеся двухбуквенные сочетания, начинающиеся с букв  $u^{-1}$ ,  $d^{-1}$ ,  $r^{-1}$ ,  $l^{-1}$ ,  $a^{-1}$  и  $b^{-1}$ .

Будем говорить, что слово  $w$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , задающее косу  $\beta$ , приведено к *каноническому виду*, если все буквы  $\Delta$  перемещены в конец слова и к слову  $w$  нельзя применить тривиальные соотношения вида  $xx^{-1} = 1$  или соотношения (3.6) так, чтобы его длина сократилась.

**Теорема 3.14.** *Всякое слово  $w$  длины  $l$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , задающее косу  $\beta$ , можно за время  $O(l)$  привести к каноническому виду.*

*Доказательство.* Для приведения слова  $w$  к каноническому виду нужно его один раз полностью пройти, перемещая символы  $\Delta^{\pm 1}$  в конец слова и применяя соотношения (3.6), а также тривиальные соотношения вида  $xx^{-1} = 1$ . Каждое применение соотношения уменьшает длину слова на одну или две буквы. Геометрически применение соотношения означает удаление шипов в пути  $\gamma(w)$ . Ясно, что для удаления всех шипов достаточно будет одного прохождения слова  $w$ . Поэтому трудоёмкость сокращения слова  $w$  равна  $O(l)$ .  $\square$

Слово в алфавите  $\mathcal{F}$  будем называть *ud-словом*, если оно состоит из чередующихся букв  $u$  и  $d$  либо из чередующихся букв  $u^{-1}$  и  $d^{-1}$ , и, возможно, некоторой степени косы Гарсайда  $\Delta$  в конце слова.

**Пример 3.4.** Слова  $dudud$ ,  $udu\Delta$ ,  $d^{-1}u^{-1}\Delta^4$ ,  $u\Delta$ ,  $\Delta$  являются *ud-словами*, а слова  $dduu$ ,  $dud^{-1}\Delta$ ,  $du\Delta du$  не являются *ud-словами*.

Несложно заметить, что *ud-слова* имеют канонический вид.

**Теорема 3.15.** *Непериодическая коса  $\beta \in B_3$  является приводимой тогда и только тогда, когда существует сопряжённая ей коса, которая в алфавите  $\mathcal{F}$  записывается в виде *ud-слова* чётной длины.*

*Доказательство.* Пусть коса  $\beta$  приводимая. Переходом к сопряжённой косе всегда можно добиться того, чтобы приводящая окружность была расположена каноническим образом (см. рис. 3.6).

Такая коса представляется как композиция переплетения первых двух нитей, что записывается как  $\sigma_1^k$  для некоторого целого  $k$ , и обматывание третьей

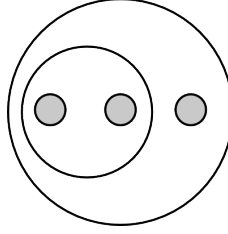


Рис. 3.6:

нити вокруг первых двух, что записывается в виде  $(\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2)^m$  для некоторого целого  $m$ :

$$\beta = (\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2)^m \sigma_1^k.$$

При этом здесь  $k \neq 2m$ , иначе коса  $\beta$  будет периодической.

Инвариантная нить изначально находится справа. Поэтому в алфавите  $\mathcal{F}$  данная коса будет выглядеть так:

$$\beta = (ud)^m (d^{-1} \Delta)^k.$$

Несложно проверить, что после приведения к каноническому виду получится  $ud$ -слово чётной длины:

$$\beta = \underbrace{udud \dots}_{2m-k} \Delta^k, \text{ если } 2m > k, \quad \text{и} \quad \beta = \underbrace{d^{-1}u^{-1}d^{-1}u^{-1} \dots}_{k-2m} \Delta^k, \text{ если } k > 2m.$$

В обратную сторону доказательство почти очевидное. Коса, которая в алфавите  $\mathcal{F}$  записывается в виде  $ud$ -слова чётной длины, является приводимой с приводящей окружностью, расположенной каноническим образом. Но тогда и любая ей сопряжённая коса также приводима.  $\square$

**Теорема 3.16.** *Непериодическая коса  $\beta \in B_3$  является приводимой тогда и только тогда, когда подходящим выбором инвариантной нити её можно записать в виде слова  $w$  в алфавите  $\mathcal{F}$  так, что слово  $w$  после некоторой циклической перестановки его букв и приведения к каноническому виду становится  $ud$ -словом чётной длины.*

*Доказательство.* Непериодическую приводимую косу  $\beta$  всегда можно представить в виде  $\beta = \alpha^{-1} \beta' \alpha$ , где приводящая окружность косы  $\beta'$  расположена каноническим образом (см. рис. 3.6). Выберем нить, которая не охватывается



этой приводящей окружностью, и запишем косу  $\beta$  в виде слова  $w$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение выбранной нити. Ясно, что если коса  $\alpha$  тривиальная, то согласно теореме 3.15 слово  $w$  будет  $ud$ -словом чётной длины. В общем случае путь  $\gamma(w)$  с точностью до деформации будет композицией путей, соответствующих косам  $\alpha^{-1}$ ,  $\beta'$  и  $\alpha$ . Ясно, что циклическая перестановка букв в слове  $w$  позволит часть пути выбранной нити, которая соответствует косе  $\alpha^{-1}$ , перенести в конец композиции, где она сократится с той частью пути, которая соответствует косе  $\alpha$ . В результате останется только часть пути, соответствующая косе  $\beta'$ . И этот путь определяет  $ud$ -слово чётной длины.

В обратную сторону доказательство почти очевидное. Циклическая перестановка букв означает переход к сопряжённой косе. И если в классе сопряжённости косы есть  $ud$ -слово чётной длины, то согласно теореме 3.15 коса является приводимой.  $\square$

Сформулируем ещё одну теорему, необходимую для быстрого распознавания периодических кос.

Для косы  $\beta \in B_3$  рассмотрим перестановку  $s(\beta)$ , которую эта коса порождает на множестве нитей в соответствии с гомоморфизмом (1.2). Введём обозначение:

$$k(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } s(\beta) \text{ тривиальная;} \\ 2, & \text{если перестановка } s(\beta) \text{ содержит цикл длины 2;} \\ 3, & \text{если перестановка } s(\beta) \text{ транзитивная.} \end{cases}$$

**Теорема 3.17.** *Коса  $\beta \in B_3$  является периодической тогда и только тогда, когда соответствующее косе  $\beta^{k(\beta)}$  слово  $w$  в алфавите  $\mathcal{F}$  после приведения к каноническому виду выглядит как  $\Delta^{2m}$  для некоторого  $m \in \mathbb{Z}$ , причём не имеет значения, движение какой нити (левой или правой) отслеживалось при составлении слова  $w$ .*

*Доказательство.* Согласно теореме 1.6 для периодической косы  $\beta$  её степень  $\beta^{k(\beta)}$  должна совпадать с некоторой чётной степенью косы Гарсайда  $\Delta^{2m}$ . Остаётся доказать, что для косы, которая совпадает с  $\Delta^{2m}$ , при записи в алфавите  $\mathcal{F}$  и после приведения к каноническому виду получится слово  $\Delta^{2m}$ .

Для трёх нитей  $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ . Прямыми вычислениями проверяется, что для косы  $\Delta^{2m} = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2m}$  при записи в алфавите  $\mathcal{F}$  и после приведения к каноническому виду получается слово  $\Delta^{2m}$ , причём не имеет значения, движение какой нити (левой или правой) отслеживать при составлении слова  $w$ .

В общем случае коса, совпадающая с  $\Delta^{2m}$ , получается из слова  $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{2m}$  путём применения соотношений вида  $xx^{-1} = 1$ , а также соотношения  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ . Подобные соотношения могут разве лишь добавить шипы к пути отслеживаемой нити, которые сокращаются после записи в алфавите  $\mathcal{F}$  и приведения к каноническому виду.

В обратную сторону доказательство очевидное. □

Теперь всё готово для того, чтобы сформулировать алгоритм распознавания типа косы  $\beta$  по классификации Нильсена-Тёрстона.

Шаг 1. Вычислить перестановку  $s$ , которую порождает коса  $\beta$  на множестве нитей.

Шаг 2. Если перестановка  $s$  транзитивная, то записать косу  $\beta^3$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение правой или левой нити, и привести полученное слово к каноническому виду. Если получилось слово  $\Delta^{2k}$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ , то коса  $\beta$  является периодической, в противном случае — псевдоаносовской.

Шаг 3. Если перестановка  $s$  содержит цикл длины 2, то записать косу  $\beta^2$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение правой или левой нити, и привести полученное слово к каноническому виду. Если получилось слово  $\Delta^{2k}$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ , то коса  $\beta$  является периодической, в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 4. Если перестановка  $s$  тривиальная, то записать косу  $\beta$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение правой или левой нити, и привести полученное слово к каноническому виду. Если получилось слово  $\Delta^{2k}$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ , то коса  $\beta$  является периодической, в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 5. Определить инвариантный элемент перестановки  $s$ . Отслеживая движение соответствующей этому элементу нити, выполнить шаги 6 и 7 для косы  $\beta$ . Если перестановка тривиальная, то необходимо выполнить шаги 6 и 7

для каждой из нитей косы  $\beta$ . Если инвариантная нить находится по центру, то необходимо выполнить шаги 6 и 7 для косы  $\sigma_1^{-1}\beta\sigma_1$ , у которой инвариантная нить будет расположена слева.

Шаг 6. Записать косу в алфавите  $\mathcal{F}$  и привести полученное слово к каноническому виду.

Шаг 7. Переносить первые буквы по одной в конец слова, переходя таким образом к сопряжённым косам, и приводить полученное слово к каноническому виду. Если получится  $ud$ -слово, то коса  $\beta$  является приводимой. Если же в результате переноса первых букв в конец слова слово прокрутится целиком, а  $ud$ -слово так и не получится, то коса является псевдоаносовской.

*Замечание 3.5.* Если на шаге 5 перестановка является тривиальной, то шаги 6 и 7 надо выполнять для каждой из трёх нитей по очереди. И если хотя бы в одном из случаев на шаге 7 получится  $ud$ -слово, то коса  $\beta$  является приводимой, в противном случае — псевдоаносовской.

**Теорема 3.18.** *Для кос группы  $B_3$  существует алгоритм распознавания их типа по классификации Нильсена-Тёрстона со временем выполнения  $O(l)$ , где  $l$  есть длина входного слова в классических образующих Артина.*

*Доказательство.* Алгоритм распознавания типа косы приведён выше. Доказательство его корректности, а также его линейная сложность по длине входного слова следуют из теорем 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 и 3.17.  $\square$

**Пример 3.5.** Рассмотрим косу

$$\beta = (\sigma_1\sigma_2^{-1})^{-1}\sigma_1^3(\sigma_1\sigma_2^{-1}) = \sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}.$$

Эта коса, очевидно, является приводимой, поскольку она получена из приводимой косы  $\sigma_1^3$  путём сопряжения косой  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  (последняя, кстати, является псевдоаносовской). Применим к косе  $\beta$  рассмотренный алгоритм.

Коса  $\beta$  порождает перестановку, содержащую цикл (13). Поэтому запишем косу  $\beta^2$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение правой нити:

$${}_{{\Pi}}\sigma_2\sigma_1^6\sigma_2^{-1} = u_{{\Pi}}\sigma_1^5\sigma_2^{-1} = ul_{{\Pi}}\sigma_1^3\sigma_2^{-1} = ull_{{\Pi}}\sigma_1\sigma_2^{-1} = ulla^{-1}$$

Как видим, коса  $\beta$  не является периодической.

Коса  $\beta$  меняет местами первую и третью нити и оставляет инвариантной нить, находящуюся по центру. Поэтому выполним сопряжение косой  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1^{-1}\beta\sigma_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1.$$

Инвариантная нить теперь находится слева. Запишем косу  $\beta$  в алфавите  $\mathcal{F}$ , отслеживая движение левой нити:

$$\begin{aligned} {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1 &= b_{\text{п}}\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1 = bd^{-1}\Delta_{\text{п}}\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \\ &= bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta_{\text{п}}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1 = bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta d^{-1}\Delta_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \\ &= bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta d^{-1}\Delta b^{-1}. \end{aligned}$$

Приведём слово к каноническому виду:

$$bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta d^{-1}\Delta b^{-1} = bd^{-1}u^{-1}d^{-1}b\Delta^3 = l^{-1}u^{-1}d^{-1}b\Delta^3.$$

Перенесём первую букву в конец слова и приведём к каноническому виду:

$$u^{-1}d^{-1}b\Delta^3l^{-1} = u^{-1}d^{-1}br^{-1}\Delta^3 = u^{-1}d^{-1}u^{-1}\Delta^3.$$

Получилось  $ud$ -слово чётной длины, так что согласно алгоритму коса является приводимой.

# Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получена нижняя оценка энтропии кос с произвольным числом нитей через спектральный радиус матрицы Бурау для всех ненулевых комплексных значений параметра.
2. Получена явная формула для энтропии кос из трёх нитей.
3. Описаны свойства многочленов, возникающих в явной формуле для энтропии кос из трёх нитей, и, в частности, описана связь между этими многочленами и циклическими многогранниками.
4. Указан алгоритм распознавания типа косы из трёх нитей по Нильсену-Тёрстону, имеющий линейную сложность и не использующий никакие разновидности железнодорожных путей либо саммит-множеств.

# Литература

- [1] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [2] Жиров А.Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей // Матем. сб., 185:9 (1994), 29–80.
- [3] Жиров А. Ю. Топологическая сопряжённость псевдоаносовских гомеоморфизмов. — М.: МЦНМО, 2013.
- [4] Кассель К., Тураев В. Г. Группы кос. — М.: МЦНМО, 2014.
- [5] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
- [6] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. — М.: МЦНМО, 2005.
- [7] Кэссон Э., Блейлер С. Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону. — М.: ФАЗИС, 1998.
- [8] Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 2001.
- [9] Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии. — М.: МГУ, 1991.
- [10] Мартин Н., Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. — М.: Мир, 1988.
- [11] Плыкин Р.В. Источники и стоки  $A$ -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб., 94(136):2(6) (1974), 243–264.

- [12] Плыкин Р.В. О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН, 39:6(240) (1984), 75–113.
- [13] Савельев Н.Н. Лекции по топологии трёхмерных многообразий. Введение в инвариант Кассона. — М.: МЦНМО, 2004.
- [14] Циглер Г.М. Теория многогранников. — М.: МЦНМО, 2014.
- [15] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. — М.: Наука, 1988.
- [16] Andersen V., Masbaum G., Ueno K. Topological Quantum Field Theory and The Nielsen-Thurston Classification of  $M(0,4)$  // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 141 (03), 2006, 477–488.
- [17] Band G., Boyland P. The Burau estimate for the entropy of a braid // Algebraic & Geometric Topology, 7 (2007), 1345–1378.
- [18] Bernardete D., Nitecki Z., Gutierrez M. Braids and the Nielsen-Thurston classification // J. Knot Theory and its Ramifications, 4 (1995), 549–618.
- [19] Bestvina M., Handel M. Train tracks and automorphisms of free groups // Ann. of Math., 135 (1992), 1–51.
- [20] Bestvina M., Handel M. Train-tracks for surface homeomorphisms // Topology, 34 (1), 109–140, 1995.
- [21] Birman Joan S. Braids, links, and mapping class groups. Annals of Mathematics Studies, No. 82. — Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1974.
- [22] Birman Joan S., Brendle Tara E. Braids: a survey // In Handbook of knot theory, pages 19–103. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [23] Birman Joan S., Ko K.Y., Lee S.J. The infimum, supremum and geodesic length of a braid conjugacy class, Adv. Math. (2001), 164, No. 1, (2001), 41–56.

- [24] Bigelow S. The Burau representation is not faithful for  $n = 5$  // Geometry & Topology, Vol. 3 (1999), 397-404.
- [25] Bowen R. Entropy and the fundamental group // The structure of attractors in dynamical systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D., 1977), Lecture Notes in Math., vol. 668, Springer, Berlin, 1978, pp. 21–29.
- [26] Brinkmann P. Pseudo-Anosov automorphisms of free groups // Experiment. Math. 9 (2000), no. 2, 235–240.
- [27] Calvez M. Fast Nielsen-Thurston classification of braids // Algebraic & Geometric Topology 14 (2014), 1745–1758.
- [28] Calvez M., Wiest B. Fast algorithmic Nielsen-Thurston classification of four-strand braids // Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 21, No. 05, (2012).
- [29] ElRifai E., Morton H. Algorithms for positive braids, Quart.J. Math. Oxford Ser (2), 45 (180) (1994), 479-497.
- [30] Fathi A., Laudenbach F., Poenaru V. Travaux de Thurston sur les surfaces. Orsay seminaire, Asterisque (1979), V. 66–67.
- [31] Fried D. Entropy and twisted cohomology // Topology 25 (1986), no. 4, 455–470.
- [32] González-Meneses J., Wiest B. Reducible braids and Garside theory // Algebraic & Geometric Topology, vol. 11, (2011), 2971-3010.
- [33] Ham J.-Y., Song W. T. The minimum dilatation of pseudo-Anosov 5-braids // Experiment. Math. 16 (2007), no. 2, 167–179.
- [34] Hironaka E., Kin E. A family of pseudo-Anosov braids with small dilatation // Alg. and Geom. Topol. (2006), vol. 6, 699–738.
- [35] Ko K. H., Los J. E., Song W. T. Entropies of Braids // J. of Knot Theory and its Ramifications 11 (2002), 647–666.



- [36] Kolev B. Entropie topologique et représentation de Burau // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 (1989), vol. 309, no. 13, 835–838.
- [37] Lee E.-K., Lee S.-J. A Garside-theoretic approach to the reducibility problem in braid groups // J. Algebra, 2, 2008, 783–820.
- [38] Los J. E. Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc: a finite algorithm // Proc. London Math. Soc. (3), 66, 1993, 400–430.
- [39] Manning A. Topological entropy and the first homology group // Springer Lecture Notes in Math. 468, 1975, 185–190.
- [40] Matsuoka T. Braids of periodic points and 2-dimensional analogue of Shorkovskii's ordering // In Ed. G. Ikegami, editor, Dynamical systems and Nonlinear Oscillations, pages 58–72. World Scientific Press, 1986.
- [41] Moussaïf J.-O. On the entropy of braids // Funct. Anal. Other Math. 1 (2006), no. 1, 37–46.
- [42] Pollicott M., Yuri M. Dynamical systems and ergodic theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [43] Thurston W. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // Bull. Am. Math. Soc., New Ser., Vol. 19, № 2, 1988, p. 417–431.
- [44] Turaev V. Faithful linear representations of the braid groups // Seminaire Bourbaki, vol. 1999/2000, Astérisque, No. 276 (2002), 389–409.

## Публикации автора в изданиях, рекомендованных ВАК

- [45] Бирюков О.Н. Оценка топологической энтропии гомеоморфизмов проколото́го двумерного диска // Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, №5, с.47–55. English transl.: A bound for the topological entropy of homeomorphisms of a punctured two-dimensional disk // Journal of Mathematical Sciences, vol. 146, 2007, p. 5483–5489.

- [46] Бирюков О.Н. Явная формула для вычисления энтропии кос в группе  $B_3$  // Математические заметки, 2015, том 97, №4, с. 629–631.
- [47] Бирюков О.Н. Эффективное распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону в случае трёх нитей // Проблемы математического анализа, Выпуск 79, 2015, с. 53–61. English transl.: Efficient algorithm for recognizing the Nielsen-Thurston type of a three-strand braid // Journal of Mathematical Sciences, New York, 208, No. 1, 2015, 49-58.

## Публикации автора в других изданиях

- [48] Бирюков О.Н. Оценка энтропии гомеоморфизмов 2-диска // Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения. Материалы международной научной конференции. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2005, с. 20.
- [49] Бирюков О.Н. Оценка топологической энтропии кос // Начало: сборник научных статей аспирантов и соискателей. — Вып. 5. Под ред. А. В. Кулагина. — Коломна: КГПИ, 2006, 180–186.
- [50] Бирюков О.Н. О топологической энтропии кос // Александровские чтения — 2006: тез. докл. — М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2006, 66–67.
- [51] Бирюков О.Н. Представления группы кос и оценка топологической энтропии гомеоморфизмов диска // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир: Владимирский государственный университет, 2006, 43–44.
- [52] Бирюков О.Н. Алгоритм вычисления энтропии кос // Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”: Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2007, 39–40.
- [53] Бирюков О.Н. Об одном алгоритме вычисления энтропии псевдоаносовских кос // Вестник КГПИ. — Коломна: КГПИ, 2007.

- [54] Бирюков О.Н. Об энтропии приводимых кос // Международная конференция “Анализ и особенности”, Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2007, 31–32.
- [55] Бирюков О.Н. Алгоритмы вычисления и перечисления энтропии кос // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008. Тезисы докладов. - 2008, 22-23.
- [56] Бирюков О.Н. Представления группы кос и энтропия // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семёновича Понтрягина (1908-1988). Тезисы докладов. - М. 2008, 461-462.
- [57] Бирюков О.Н. О связи представлений группы кос и энтропии действия кос на проколотовой 2-сфере // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов. - Владимир: Владимирский государственный университет, 2008, 45-47.
- [58] Бирюков О.Н. Железнодорожные сети в задачах двумерной динамики // Труды конференции, посвящённой 70-летию математического образования в КГПИ, 2009.
- [59] Бирюков О.Н. Алгоритмы классификации Нильсена-Тёрстона для кос // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Суздаль, 2010, 45-46.
- [60] Бирюков О.Н. Эффективное распознавание типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона в группе кос  $B_3$  // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXIII». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012, 30-31.
- [61] Бирюков О.Н. О распознавании типа косы по Нильсену-Тёрстону в группе кос из трёх нитей // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы.

Материалы IV научной конференции молодых учёных Москвы и Коломны. – Коломна, 2012, 15-17.

- [62] Бирюков О.Н. Эффективное распознавание типа косы по Нильсену-Тёрстону в случае трёх нитей // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Суздаль, 2012, 32-33.
- [63] Бирюков О.Н. Классификация гомеоморфизмов по Нильсену-Тёрстону и  $SU(2)$ -ТКТП // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXV». – Воронеж: Научная книга, 2014, с. 18.
- [64] Бирюков О.Н. Эффективный алгоритм распознавания типа косы по Нильсену-Тёрстону в группе  $B_3$  // Препринт ПОМИ РАН, 7, 2014.