ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе **Бирюкова Олега Николаевича** **«Топологическая энтропия кос Артина»**, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Тема рецензируемой диссертации находится на стыке топологии и теории динамических систем или, лучше сказать, принадлежит их общей части, поскольку нельзя говорить о границе между этими разделами математики. Традиционное взаимодействие между ними состоит в применении топологических методов к исследованию динамических систем. Однако в последние десятилетия наметилось и обратное движение — применение идей динамики к задачам топологии. Мне представляется знаковым событием в этом русле введение У. Тёрстоном псевдоаносовских гомеоморфизмов для развития теории Я. Нильсена по классификации с точностью до изотопии гомеоморфизмов поверхностей. Именно это по существу привело к введению понятия энтропии косы и сделало его содержательным. Сказанное служит решающим аргументом в пользу актуальности темы диссертации.

Перейдём к анализу содержания диссертации и основных результатов. Диссертация состоит из введения и трёх глав.

Введение содержит краткую историческую справку по предмету исследования, формулировку цели работы и обоснование её научной новизны, а также формулировки полученных результатов.

Глава 1 носит подготовительный характер. Здесь приводятся основные определения и факты из теории кос и теории Нильсена–Тёрстна автоморфизмов поверхностей, а также некоторые сведения из алгебры (теорема Перрона–Фробениуса).

В *главе 2* рассматриваются косы из произвольного числа нитей. Первые четыре параграфа этой главы тоже подготовительные: даются определения топологической энтропии и энтропии косы. В параграфе 2.5 речь идёт об оценке энтропии кос. Сначала автор приводит ранее известные оценки снизу и сверху энтропии косы в терминах так называемой матрицы Бурау, а затем усиливает оценку снизу. Это первый из основных результатов диссертации — теорема 2.12. Следующая теорема 2.13 описывает те случаи, когда оценка из теоремы 2.12 действительно сильнее ранее известной. В заключительном параграфе главы обсуждаются подходы к вычислению энтропии кос.

Глава 3 посвящена косам с тремя нитями. Основной её результат (теорема 3.7) доставляет явную формулу для вычисления топологической энтропии такой косы. По поводу этой формулы следует отметить следующее. Способ вычисления энтропии в этом и даже в самом общем случае косы из n нитей был известен и ранее. Он исходит непосредственно из определения энтропии косы и состоит в том, что по косе из n нитей можно вычислить автоморфизм фундаментальной группы диска D_n с n проколами, который в силу теоремы Дена–Нильсена однозначно определяет класс изотопии гомеоморфизмов D_n, а минимум энтропии гомеоморфизмов из этого класса и есть по определению энтропия косы. Далее, пользуясь известным алгоритмом Бетвина–Хэндела, можно определить, к какому типу в смысле Нильсена–Тёрстона относится полученный класс изотопии: периодическому, приводимому или псевдоаносовскому. В первом случае ответ тривиальный: энтропия равна нулю, во втором дело сводится к вычислению энтропии косы с меньшим числом нитей и какой именно косы — тоже можно определить алгоритмически. В «псевдоаносовском» случае энтропия есть логарифм перронова собственного числа некоторой матрицы, которая также вычисляется в процессе работы этого алгоритма. Как видим, процедура вычисления энтропии по такой схеме, хотя и описывается алгоритмически, многоступенчата и довольно сложна. Поэтому явные формулы вычисления энтропии косы непосредственно по её представлению в виде произведения стандартных образующих группы кос представляют несомненный интерес. Фактически надо говорить о явном способе вычисления коэффициентов характеристического многочлена упомянутой выше матрицы. В простейшем случае косы из трёх нитей это квадратный трёхчлен вида $\lambda^2 + p\lambda + 1$, и автор находит его коэффициент p по артинову заданию косы. Он вычисляется с помощью многочленов некоторого «универсального» семейства, определяемого в параграфе 3.3. В этом же параграфе доказывается и сама теорема 3.7.

Далее в параграфе 3.4 изучаются свойства многочленов введённого семейства (теоремы 3.8, 3.9 и 3.10), а также указывается на их связь с так называемыми циклическими многогранниками, что по меньшей мере любопытно, хотя природа этой связи не ясна.

Наконец, в параграфе 3.5 описывается алгоритм, позволяющий непосредственно по артинову заданию косы из трёх нитей определить её тип, т.е. установить, что она периодическая (теорема 3.17), приводимая (теорема 3.16) или псевдоаносовская (в случаях, исключаемых этими теоремами). Доказывается, что скорость выполнения этого алгоритма растёт линейно в зависимости от длины слова, задающего косу (теорема 3.18).

Таким образом, диссертация содержит ряд новых результатов, интересных как с точки зрения топологии, так и теории динамических систем. Все высказанные в диссертации утверждения полностью доказаны, текст написан достаточно аккуратно.

Результаты диссертации, вынесенные на защиту, являются новыми. Все они получены лично соискателем, строго обоснованы, своевременно опубликованы и апробированы на весьма представительных математических конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Работа носит теоретический характер, полученные результаты и разработанные методы могут быть использованы в научно-исследовательских институтах и университетах (МИАН, МГУ, ННГУ, ПОМИ и др.), в которых ведутся исследования по топологии и теории динамических систем.

На основании изложенного считаю, что работа О.Н. Бирюкова «Топологическая энтропия кос Артина» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобразования РФ к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Доктор физико-математических наук,
профессор

А.Ю. Жиров

12 сентября 2016

подпись Жирова А.Ю. заверяю
зам нач-ка УКОП

ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»,
Институт информационных систем и технологий,
121552, г. Москва, ул. Оршанская д. 3,
тел. (8499)1419405, e-mail: alexei_zhirov@mail.ru